程序设计与算法(二)
算法基础

郭 炜

微信公众号

微博：http://weibo.com/guoweiofpku

学会程序和算法，走遍天下都不怕!

讲义照片均为郭炜拍摄

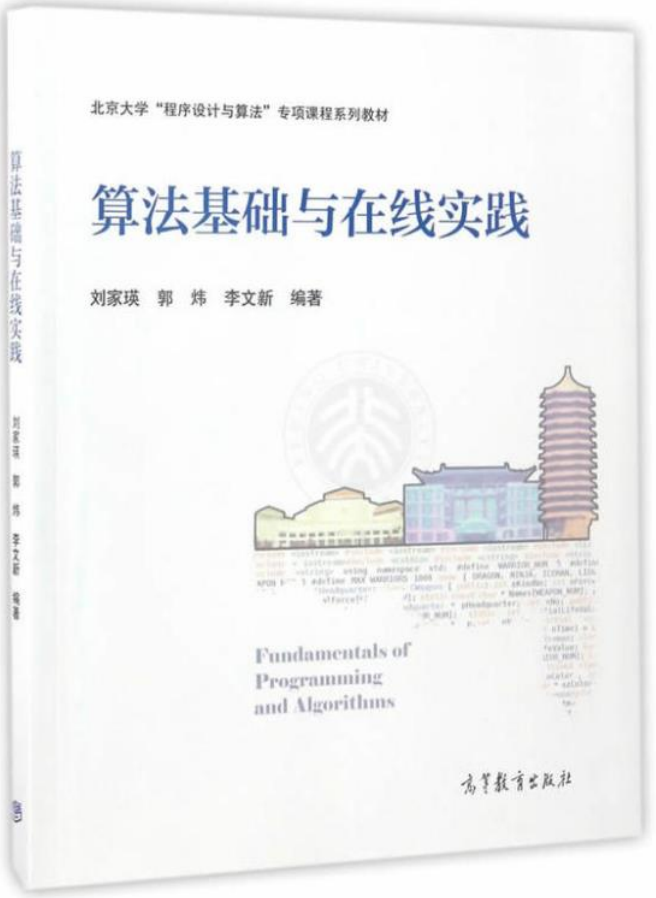
配套教材：

高等教育出版社

《算法基础与在线实践》

刘家瑛 郭炜 李文新 编著

本讲义中所有例题，根据题目名称在
http://openjudge.cn
“百练”组进行搜索即可提交



二分算法

程序或算法的时间复杂度

美国加州1号公路

程序或算法的时间复杂度

- 一个程序或算法的时间效率，也称“时间复杂度”，有时简称“复杂度”

程序或算法的时间复杂度

- 一个程序或算法的时间效率，也称“时间复杂度”，有时简称“复杂度”

- 复杂度常用大的字母O和小写字母n来表示，比如O(n),O(n^2)等。n代表问题的规模

程序或算法的时间复杂度

- 一个程序或算法的时间效率，也称“时间复杂度”，有时简称“复杂度”

- 复杂度常用大的字母O和小写字母n来表示，比如O(n),O(n^2)等。n代表问题的规模

- 时间复杂度是用算法运行过程中，某种时间固定的操作需要被执行的次数和n的关系来度量的。在无序数列中查找某个数，复杂度是O(n)

程序或算法的时间复杂度

●一个程序或算法的时间效率，也称“时间复杂度”，有时简称“复杂度”

●复杂度常用大的字母O和小写字母n来表示，比如O(n),O(n^2)等。n代表问题的规模

●时间复杂度是用算法运行过程中，某种时间固定的操作需要被执行的次数和n的关系来度量的。在无序数列中查找某个数，复杂度是O(n)

●计算复杂度的时候，只统计执行次数最多的(n足够大时)那种固定操作的次数。比如某个算法需要执行加法n^2次，除法n次，那么就记其复杂度是O(n^2)的。

插入排序

```
void InsertionSort(int a[] ,int size)
{
        for(int i = 1;i < size; ++i )  {
                //a[i]是最左的无序元素，每次循环将a[i]放到合适位置
                for(int j = 0; j < i; ++j)
                        if( a[j]>a[i]) {
                //要把a[i]放到位置j，原下标j到 i-1的元素都往后移一个位子
                                int tmp = a[i];
                                for(int k = i; k > j; --k)
                                        a[k] = a[k-1];
                                a[j] = tmp;
                                break;
                        }
        }
} //复杂度O(n^2)
```

程序或算法的时间复杂度

- 如果复杂度是多个n的函数之和，则只关心随n的增长增长得最快的那个函数

$O(n^3+n^2) \Rightarrow O(n^3)$

$O(2^n+n^3) \Rightarrow O(2^n)$

$O(n! + 3^n) \Rightarrow O(n!)$

程序或算法的时间复杂度

- 如果复杂度是多个n的函数之和，则只关心随n的增长增长得最快的那个函数

$O(n^3+n^2) \Rightarrow O(n^3)$
$O(2^n+n^3) \Rightarrow O(2^n)$
$O(n! + 3^n) \Rightarrow O(n!)$

- 常数复杂度：O(1)　　时间(操作次数)和问题的规模无关
- 对数复杂度：O(log(n))
- 线性复杂度：O(n)
- 多项式复杂度：$O(n^k)$
- 指数复杂度：$O(a^n)$
- 阶乘复杂度：O(n!)

程序或算法的时间复杂度

- 复杂度有“平均复杂度”和“最坏复杂度”两种。
  两者可能一致，也可能不一致

程序或算法的时间复杂度

- 在无序数列中查找某个数(顺序查找)　O(n)
- 平面上有n个点，要求出任意两点之间的距离　$O(n^2)$
- 插入排序、选择排序、冒泡排序　$O(n^2)$
- 快速排序　O(n*log(n))
- 二分查找　O(log(n))

二分查找

甘肃张掖平山湖大峡谷

二分查找

●A心里想一个1-1000之间的数，B来猜，可以问问题，A只能回答是或否。怎么猜才能问的问题次数最少?

是1吗？是2吗？.....是999吗？　平均要问500次

大于500吗？大于750吗？大于625吗？ .....每次缩小猜测范围到上次的一半，只需要 10次

二分查找函数

●写一个函数BinarySeach，在包含size个元素的、从小到大排序的int数组a里查找元素p,如果找到，则返回元素下标，如果找不到，则返回-1。要求复杂度O(log(n))

```
int BinarySearch(int a[],int size,int p)
{
        int L = 0; //查找区间的左端点
        int R = size - 1; //查找区间的右端点
        while( L <= R) { //如果查找区间不为空就继续查找
                int mid = L+(R-L)/2; //取查找区间正中元素的下标
                if( p == a[mid] )
                        return mid;
                else if( p > a[mid])
                        L = mid + 1; //设置新的查找区间的左端点
                else
                        R = mid - 1; //设置新的查找区间的右端点
        }
        return -1;
} //复杂度O(log(n))
```

二分查找函数

●写一个函数LowerBound，在包含size个元素的、从小到大排序的int数组a里查找比给定整数p小的，下标最大的元素。找到则返回其下标，找不到则返回-1

```
int LowerBound(int a[],int size,int p)  //复杂度O(log(n))
{
        int L = 0; //查找区间的左端点
        int R = size - 1; //查找区间的右端点
        int lastPos = -1; //到目前为止找到的最优解
        while( L <= R) { //如果查找区间不为空就继续查找
                int mid = L+(R-L)/2; //取查找区间正中元素的下标
                if(a[mid]>= p)
                        R = mid - 1;
                else {
                        lastPos = mid;
                        L = mid+1;
                }
        }
        return lastPos;
}
```

二分查找函数

- **注意：**

```
int mid = (L+R)/2; //取查找区间正中元素的下标
```

- **为了防止 (L+R)过大溢出:**

```
int mid = L+(R-L)/2;
```

二分法求方程的根

祁连山风光

二分法求方程的根

求下面方程的一个根：$f(x) = x^3-5x^2+10x-80 = 0$
若求出的根是a，则要求 $|f(a)| <= 10^{-6}$

●解法：对f(x)求导，得$f'(x)=3x^2-10x+10$。由一元二次方程求根公式知方程$f'(x)= 0$ 无解，因此$f'(x)$恒大于0。故f(x)是单调递增的。易知 $f(0) < 0$且$f(100)>0$,所以区间[0,100]内必然有且只有一个根。由于f(x)在[0,100]内是单调的，所以可以用二分的办法在区间[0,100]中寻找根。

二分法求方程的根

```
#include <cstdio>
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double EPS = 1e-6;
double f(double x) {   return  x*x*x - 5*x*x + 10*x - 80; }
int main()  {
        double root, x1 = 0, x2 = 100,y;
        root = x1+(x2-x1)/2;
        int triedTimes = 1; //记录一共尝试多少次，对求根来说不是必须的
        y = f(root);
        while( fabs(y) > EPS) {
                if( y > 0 )     x2 = root;
                else            x1 = root;
                root = x1+(x2 - x1)/2;
                y = f(root);
                triedTimes ++;
        }
        printf("%.8f\n",root);
        printf("%d",triedTimes);
        return 0;
}
```

5.70508593
32

例题
寻找指定和的整数对

青海湖

例题 寻找指定和的整数对

输入n (n<= 100,000)个整数，找出其中的两个数，它们之和等于整数m(假定肯定有解)。题中所有整数都能用 int 表示

例题：寻找指定和的整数对

输入n (n<= 100,000)个整数，找出其中的两个数，它们之和等于整数m(假定肯定有解)。题中所有整数都能用 int 表示

解法1：用两重循环，枚举所有的取数方法，复杂度是$O(n^2)$的。

```
for(int i = 0;i < n-1; ++i)
    for(int j = i + 1; j < n; ++j)
        if( a[i]+a[j] == m)
            break;
```

$100,000^2$ = 100亿，在各种OJ上提交或参加各种程序设计竞赛，这样的复杂度都会超时！

例题：寻找指定和的整数对

输入n (n<= 100,000)个整数，找出其中的两个数，它们之和等于整数m(假定肯定有解)。题中所有整数都能用 int 表示

解法2：

1) 将数组排序，复杂度是O(n×log(n))
2) 对数组中的每个元素a[i],在数组中二分查找m-a[i]，看能否找到。复杂度log(n)，最坏要查找n-2次，所以查找这部分的复杂度也是O(n×log(n))

这种解法总的复杂度是O(n×log(n))的。

例题：寻找指定和的整数对

输入n (n<= 100,000)个整数，找出其中的两个数，它们之和等于整数m(假定肯定有解)。题中所有整数都能用 int 表示

解法3：

1）将数组排序，复杂度是O(n×log(n))
2）查找的时候，设置两个变量i和j,i初值是0,j初值是n-1.看a[i]+a[j],如果大于m，就让j减1，如果小于m,就让i加1，直至a[i]+a[j]=m。

这种解法总的复杂度是O(n×log(n))的。

例题
Aggressive cows

例题2 百练 2456: Aggressive cows

http://bailian.openjudge.cn/practice/2456

农夫 John 建造了一座很长的畜栏，它包括N (2≤N≤100,000)个隔间，这些小隔间的位置为$x_0,...,x_{N-1}$ ($0≤x_i≤1,000,000,000$,均为整数,各不相同).

John的C (2≤C≤N)头牛每头分到一个隔间。牛都希望互相离得远点省得互相打扰。怎样才能使任意两头牛之间的最小距离尽可能的大，这个最大的最小距离是多少呢?

例题2

●解法1：

先得到排序后的隔间坐标 $x_0,\ldots,x_{N-1}$

从1,000,000,000/C到1依次尝试这个 “最大的最近距离” D，找到的第一个可行的就是答案。

尝试方法：

1) 第1头牛放在x_0
2) 若第k头牛放在x_i，则找到x_{i+1}到x_{N-1}中第一个位于$[x_i+D, 1,000,000,000]$中的X_j，第k+1头牛放在X_j。找不到这样的X_j,则 D=D-1,转 1)再试

若所有牛都能放下，则D即答案

例题2

●解法1：

先得到排序后的隔间坐标 $x_0,\ldots,x_{N-1}$

从1,000,000,000/C到1依次尝试这个“最大的最近距离”D， 找到的第一个可行的就是答案。

尝试方法：

1) 第1头牛放在x_0
2) 若第k头牛放在x_i，则找到x_{i+1}到x_{N-1}中第一个位于$[x_i+D, 1,000,000,000]$中的X_j，第k+1头牛放在X_j。找不到这样的X_j,则 D=D-1,转 1)再试

若所有牛都能放下，则D即答案

复杂度 1,000,000,000/C *N，即 1,000,000,000, 超时!

例题2

●解法2：

先得到排序后的隔间坐标 $x_0,\ldots,x_{N-1}$

在[L,R]内用二分法尝试“最大最近距离”D = (L+R)/2 (L,R初值为[1，1,000,000,000/C]

若D可行，则记住该D，然后在新[L,R]中继续尝试(L= D+1)
若D不可行，则在新[L,R]中继续尝试(R= D-1)

复杂度 log(1,000,000,000/C) * N