

# Calibration of MEMS accelerometer based on Gauss-Newton iteration algorithm

Gui Yi

<sup>1)</sup> National Key Laboratory of Science and Technology on Integrated Technology Control, Xi'an, 710065, China

<sup>2)</sup> Flight Automatic Control Research Institute, AVIC, Xi'an, 710065, China (keylab@facri.com)

**Abstract**—This paper set up a model of error of accelerometer, and designed a method to calibrate the error of accelerometer, which is based on Gauss-Newton iteration algorithm. The calibrating method is able to identify the drift and scale factor of the accelerometer. Then this paper set up a model of the error caused by temperature drift, and designed a method to calculate the factor of temperature drift, which is based on the least square method, according to the feature of the temperature drift of MEMS accelerometer. Results of the experiment shows that, the calibrating methods of this paper are effective, which convergence fast and have little calculated amount. The methods of this paper are very useful in practice.

**Keywords**—MEMS, accelerometer, calibration, Gauss-Newton iteration algorithm

## 基于高斯牛顿迭代法的 MEMS 加速度计标定方法

桂毅<sup>1,2</sup>

<sup>1)</sup> 飞行器控制一体化技术国防科技重点实验室, 西安 710065, 中国

<sup>2)</sup> 中航工业西安飞行自动控制研究所, 西安 710065, 中国

**摘要** 在建立三轴 MEMS 加速度计误差模型的基础上, 设计了基于高斯牛顿迭代法的 MEMS 加速度计标定方法, 对加速度计零偏和刻度系数进行标定。建立了加速度计温度漂移模型, 并针对 MEMS 加速度计温度漂移的特点, 设计了基于最小二乘法分段温度漂移系数的计算方法。实验结果表明, 本文的标定方法具有收敛速度快, 计算量小, 标定精度高的优点, 具有很高的实用价值。

**关键词** MEMS, 加速度计, 标定, 高斯牛顿迭代法

### 1. 引言

惯性导航系统是一种自主式的导航系统, 具有隐蔽性好、不受工作环境条件限制等优点, 可以提供完整的导航定位参数<sup>[1]</sup>。惯性导航所使用的传感器主要是陀螺仪和加速度计。随着微电子技术的发展, 从 20 世纪 80 年代开始出现了微电子机械系统 (MEMS, Micro-Electro-Mechanical System), 基于该技术制造的 MEMS 惯性传感器具有成本低廉、使用方便的优点, 广泛应用于各类场合, 如各类无人机、手机及其它各类电子设备等。加速度计和陀螺仪是应用最广泛的产品<sup>[2]</sup>。

小型农用无人机可用于给作物喷洒农药, 具有常规喷洒农药方法所无法企及的效率。而姿态解算是无人机实现自动飞行的基础。出于成本控制的原因, 小型农用无人机一般采用 MEMS 陀螺、加速度计和磁罗盘进行姿态解算,

然后融合 GPS 等外部信息, 对解算结果进行修正, 以获得更为精确的姿态值。

惯性传感器在使用之前需要进行标定, 补偿器件误差以提高导航解算精度。传统的惯导标定需要利用高精度的三轴转台实现, 但是由于转台体积大, 一般仅限在实验室内使用。针对小型农用无人机的应用场合, 只有快速简单的传感器标定方法才适合使用。

MEMS 加速度计的误差主要包括零偏、刻度系数以及随温度变化引起的漂移。

传统加速度计的标定采用静态多位置方法, 使加速度计旋转至已知的特定角度, 根据不同角度下加速度计的输出解算出各项误差<sup>[3]</sup>。

文献[4]提出了双卡尔曼滤波的方法, 分别对 MEMS 陀螺和加速度计进行标定, 并使用预测误差最小化的建模方法来对卡尔曼滤波器中的零偏稳定性和随机游走噪声进行建模。该算法的主要缺点是计算复杂, 且需要对不同的

\*桂毅, E-mail: guiyi06@163.com

传感器, 设置不同的滤波器参数。

文献[5]和[6]提出了基于非线性优化的标定方法, 可以标定出加速度计的误差参数, 但是没有考虑温度变化对误差的影响。

本文针对 MEMS 加速度计的使用需求, 用高斯牛顿迭代法完成了对加速度计的标定, 该方法是一种在线标定方法, 具有易操作、速度快、精度高的优点, 且对温度变化进行了标定。

## 2. 加速度计标定理论

三轴加速度计的误差主要有零偏、刻度系数误差和安装非正交误差, 因此加速度计的误差可用数学模型表示为[7]:

$$\begin{bmatrix} a_{ax} \\ a_{ay} \\ a_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_y & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mx} \\ a_{my} \\ a_{mz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,  $a_{mx}, a_{my}, a_{mz}$  为加速度计测量值,  $a_{ax}, a_{ay}, a_{az}$  为加速度计实际值,  $k_x, k_y, k_z$  为刻度系数,  $D_x, D_y, D_z$  为校正系数后的零位偏差,  $k_{xy}, k_{yx}, k_{xz}, k_{zx}, k_{yz}, k_{zy}$  为非正交安装误差系数。对加速度计的标定就是确定以上 12 个参数, 以便根据加速度计的输出测量值计算真实值。

对于加速度计, 可以通过提高生产和安装中的工艺来降低非正交安装系数误差, 从而使得加速度计的误差主要集中在刻度系数误差和零偏上。实际应用中,  $k_{xy}, k_{yx}, k_{xz}, k_{zx}, k_{yz}, k_{zy}$  的值很小, 随着时间的推移, 其值对姿态解算结果影响较小。于是, 加速度计误差模型可以简化为:

$$\begin{bmatrix} a_{ax} \\ a_{ay} \\ a_{az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mx} \\ a_{my} \\ a_{mz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

也可写作

$$\begin{aligned} a_{ax} &= (a_{mx} - d_x) * k_x \\ a_{ay} &= (a_{my} - d_y) * k_y \\ a_{az} &= (a_{mz} - d_z) * k_z \end{aligned} \quad (3)$$

加速度计标定的目标就是确定刻度系数  $k_x, k_y, k_z$  和零偏  $d_x, d_y, d_z$ 。

在 MEMS 加速度计使用的过程中, 温度会随着使用时间和环境而变化, 进而影响加速度计零偏和刻度系数, 其中以零偏最为主要。因而, 除了常温下加速度计的零偏和刻度系数的标定外, 还需要对温度对零偏的影响即温度漂移进行标定。

通过实验发现, 加速度计的温度漂移误差与当前温度

和当前加速度输出有关。由于这种复杂关系, 为加速度计温度漂移建立精确模型较为困难, 因此可以对温度漂移分温度段进行标定。

如果对每个温度段的温度漂移进行二次函数拟合:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x \cdot a_{mx}^2 + m_x \cdot a_{mx} + n_x \\ l_y \cdot a_{my}^2 + m_y \cdot a_{my} + n_y \\ l_z \cdot a_{mz}^2 + m_z \cdot a_{mz} + n_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

就可得到如下修正温度漂移的加速度计输出误差模型:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{ax} \\ a_{ay} \\ a_{az} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mx} \\ a_{my} \\ a_{mz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x + \sigma_x \\ D_y + \sigma_y \\ D_z + \sigma_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{mx} \\ a_{my} \\ a_{mz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x + l_x \cdot a_{mx}^2 + m_x \cdot a_{mx} + n_x \\ D_y + l_y \cdot a_{my}^2 + m_y \cdot a_{my} + n_y \\ D_z + l_z \cdot a_{mz}^2 + m_z \cdot a_{mz} + n_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

通过分温度段对温度漂移项进行标定, 即可得到温度补偿模型的系数。在加速度计使用过程中, 根据当前传感器温度, 选取对应的温度漂移补偿系数进行补偿, 即可对温度漂移进行修正。

### 2.1 高斯牛顿迭代法

高斯牛顿迭代法被广泛运用于非线性问题, 其基本思路是使用泰勒级数展开式去近似地代替非线性回归模型。然后经过多次迭代, 多次修正回归系数, 使回归系数不断逼近非线性模型的最佳回归系数, 最后使原模型的残差平方和达到最小[8-9]。

设某非线性数学模型中的待定参数为  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ , 其数学模型形式为:

$$T = f(t, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m) \quad (6)$$

其中,  $t = (t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$ , 为时间变量, 现根据  $n$  组观测值  $(t_k, T_k), k = 1, 2, \dots, n$  确定最小二乘意义下的  $m$  个参数  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ 。可通过以下步骤实现:

1. 给  $m$  个参数  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$  一个初始值, 记作  $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, \dots, c_m^{(0)}$ , 其与真值之差为  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_m$ , 即有

$$c_i = c_i^{(0)} + \Delta_i \quad (7)$$

对非线性数学模型在  $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, \dots, c_m^{(0)}$  附近做泰勒展开, 略去二次项, 得:

$$f(t_k, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m) = f_{k0} + \frac{\partial f_{k0}}{\partial c_1} \Delta_1 + \frac{\partial f_{k0}}{\partial c_2} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial f_{k0}}{\partial c_m} \Delta_m \quad (8)$$

式中,

$$f_{k0} = f(t_k, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, \dots, c_m^{(0)})$$

$$\frac{\partial f_{k0}}{\partial c_i} = \frac{\partial f(t, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)}{\partial c_i} \Big|_{t=t_k, c_i=c_i^{(0)}}$$

2.根据泰勒展开式列出线性方程组, 假设待定参数有三个, 则方程组如下:

$$\begin{aligned} a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2 + a_{13}\Delta_3 &= A_1 \\ a_{21}\Delta_1 + a_{22}\Delta_2 + a_{23}\Delta_3 &= A_2 \\ a_{31}\Delta_1 + a_{32}\Delta_2 + a_{33}\Delta_3 &= A_3 \end{aligned} \quad (9)$$

式中,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{k0}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial f_{k0}}{\partial c_j} \\ A_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{k0}}{\partial c_i} (T_k - f_{k0}) \end{aligned} \quad (10)$$

求取上述线性方程组后, 即得到待定参数估计真值和初始值之间的差别, 进而估计出待定参数真值。

反复迭代修正待定参数值, 直到待定参数真值与当前参数值只差在允许误差之内。

## 2.2 加速度计标定方法

假设  $x, y, z$  三个方向的加速度计读取值分别为  $a_{mx}, a_{my}, a_{mz}$ , 零偏分别为  $d_x, d_y, d_z$ , 刻度系数分别为  $k_x, k_y, k_z$ , 修正后的加速度为  $a_{ax}, a_{ay}, a_{az}$ , 则有:

$$\begin{aligned} a_{ax} &= (a_{mx} - d_x) * k_x \\ a_{ay} &= (a_{my} - d_y) * k_y \\ a_{az} &= (a_{mz} - d_z) * k_z \end{aligned} \quad (11)$$

如果忽略掉测量噪声, 理想状态下, 三轴加速度矢量和应当为重力加速度  $g$ , 即

$$a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2 = g^2 \quad (12)$$

用加速度计测量值表示为

$$(a_{mx} - d_x)^2 * k_x^2 + (a_{my} - d_y)^2 * k_y^2 + (a_{mz} - d_z)^2 * k_z^2 = g^2 \quad (13)$$

可用高斯牛顿迭代法计算加速度计零偏和刻度系数这六个未知参数。

其中, 非线性数学模型为

$$\begin{aligned} f(t, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m) &= (a_{mx} - d_x)^2 * k_x^2 \\ &+ (a_{my} - d_y)^2 * k_y^2 + (a_{mz} - d_z)^2 * k_z^2 \end{aligned} \quad (14)$$

其对六个待定参数的偏导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{k0}}{\partial d_x} &= \frac{\partial f(t, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)}{\partial d_x} = -2 * (a_{mx} - d_x) * k_x^2 \\ \frac{\partial f_{k0}}{\partial d_y} &= \frac{\partial f(t, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)}{\partial d_y} = -2 * (a_{my} - d_y) * k_y^2 \\ \frac{\partial f_{k0}}{\partial d_z} &= \frac{\partial f(t, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)}{\partial d_z} = -2 * (a_{mz} - d_z) * k_z^2 \\ \frac{\partial f_{k0}}{\partial k_x} &= \frac{\partial f(t, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)}{\partial k_x} = 2 * (a_{mx} - d_x)^2 * k_x \\ \frac{\partial f_{k0}}{\partial k_y} &= \frac{\partial f(t, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)}{\partial k_y} = 2 * (a_{my} - d_y)^2 * k_y \\ \frac{\partial f_{k0}}{\partial k_z} &= \frac{\partial f(t, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m)}{\partial k_z} = 2 * (a_{mz} - d_z)^2 * k_z \end{aligned} \quad (15)$$

按照 2.1 节高斯牛顿迭代法的步骤, 可得出六个线性方程组成的方程组:

$$\begin{aligned} a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2 + a_{13}\Delta_3 + a_{14}\Delta_4 + a_{15}\Delta_5 + a_{16}\Delta_6 &= A_1 \\ a_{21}\Delta_1 + a_{22}\Delta_2 + a_{23}\Delta_3 + a_{24}\Delta_4 + a_{25}\Delta_5 + a_{26}\Delta_6 &= A_2 \\ a_{31}\Delta_1 + a_{32}\Delta_2 + a_{33}\Delta_3 + a_{34}\Delta_4 + a_{35}\Delta_5 + a_{36}\Delta_6 &= A_3 \\ a_{41}\Delta_1 + a_{42}\Delta_2 + a_{43}\Delta_3 + a_{44}\Delta_4 + a_{45}\Delta_5 + a_{46}\Delta_6 &= A_4 \\ a_{51}\Delta_1 + a_{52}\Delta_2 + a_{53}\Delta_3 + a_{54}\Delta_4 + a_{55}\Delta_5 + a_{56}\Delta_6 &= A_5 \\ a_{61}\Delta_1 + a_{62}\Delta_2 + a_{63}\Delta_3 + a_{64}\Delta_4 + a_{65}\Delta_5 + a_{66}\Delta_6 &= A_6 \end{aligned} \quad (16)$$

式中,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{k0}}{\partial c_i} \cdot \frac{\partial f_{k0}}{\partial c_j} \\ A_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{k0}}{\partial c_i} (T_k - f_{k0}) \end{aligned} \quad (17)$$

如果选定六个姿态下的传感器数据进行标定, 同时考虑对温度漂移的标定, 则基于高斯牛顿迭代法的加速度计标定步骤如下

- ① 选定加速度计零偏和刻度系数这六个参数的初值, 如零偏为 0, 刻度系数为 1
- ② 根据公式(15), 利用常温下加速度计的六个姿态下测量值计算非线性数学模型对六个参数的偏导数
- ③ 根据公式(16)构建由偏导数构成的六个线性方程组, 其系数由公式(17)确定, 其中的对  $k$  累加表示六个姿态下的系数累加
- ④ 求解线性方程组, 得到六个参数初值与真值估计值的偏差, 利用公式(7)计算六个参数真值的估计值
- ⑤ 以第④步的真值估计值为新的参数初值, 循环执行第①~④步, 直至参数估计值满足精度要求 (例如前后两次计算参数估计值变化小于一定阈值)
- ⑥ 以上述方法校正获得的常温下加速度计输出的校

正后的加速度为基准，利用温箱获得不同温度段（可以以 10 摄氏度为一个温度段）的加速度计输出的温度漂移值，使用最小二乘法获得公式(4)中的温度漂移系数

按照上述方法获得刻度系数、零偏以及温度漂移系数之后，在加速度计实际使用中，首先根据刻度系数和零偏对加速度计输出数据进行修正，然后根据当前温度，通过查询温度漂移系数计算温度漂移校正值，对加速度计输出进行校正，获得修正后的加速度输出值。

3. 实验结果与分析

为了验证标定方法的有效性，本文使用基于 MEMS 传感器的小型 IMU 进行测试，其外形如图 1 所示。该型 IMU 采用三轴数字陀螺仪、三轴数字加速度计、三轴数字磁罗盘构成，可完成三轴角速度、加速度和磁场强度的测量。



图 1 基于 MEMS 传感器的小型 IMU

该 IMU 采用的加速度计。传感器三轴与长方体的三轴保持平行。

首先进行常温下的标定。将该 IMU 外壳的六个面分别与水平桌面接触放置，得到六种放置方式，如表 1 所示。

采集六种放置方式下一定时间内的三轴加速度计传感器数据，并取其平均值，得到六组加速度计测量值。使用上述高斯牛顿迭代法计算获得加速度计刻度系数和零偏，如表 2 所示。

选择放置方式 3 的数据进行修正，得到标定前后的加速度计输出结果如图 2 所示。

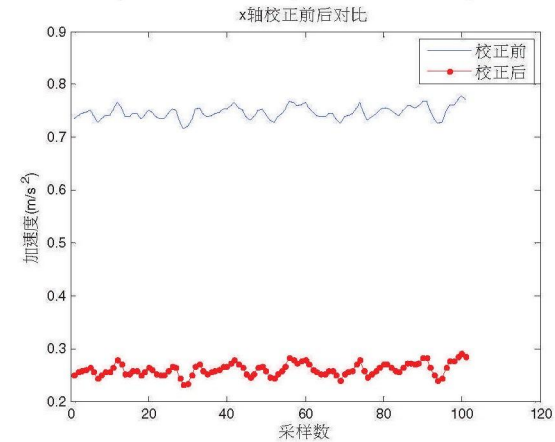
表 1 加速度计标定时六种放置方式

放置方式	X 轴输出/g	Y 轴输出/g	Z 轴输出/g
1	1	0	0
2	-1	0	0
3	0	1	0
4	0	-1	0
5	0	0	1
6	0	0	-1

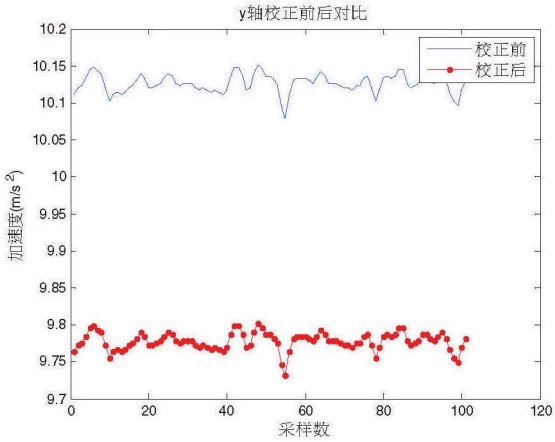
表 2 基于高斯牛顿迭代法的标定结果

敏感轴	X 轴	Y 轴	Z 轴
-----	-----	-----	-----

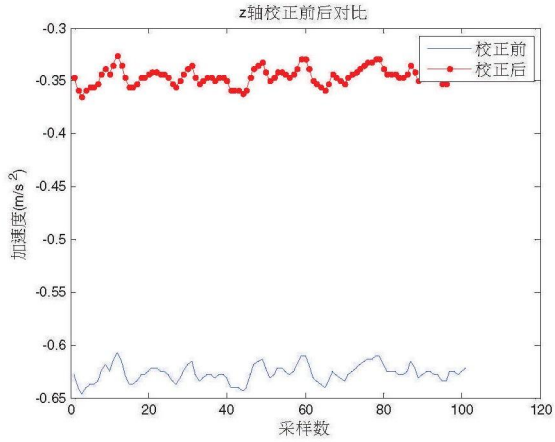
刻度系数	0.9969	0.9926	1.0054
零偏(m/s^2)	0.48551	0.27571	0.27788



(1)



(2)



(3)

图 2 标定前后的 MEMS 加速度计输出结果

由图 2 可见，经过标定结果修正，y 轴输出结果接近于重力加速度 9.8m/s<sup>2</sup>，x,z 轴接近于 0。但是由于放置桌面不平原因，x,z 轴的输出不能为 0。结果证明标定的有效性。

为了验证基于最小二乘法的分段温度漂移校正的有效性。采用温控三轴转台作为基准，将上述小型 IMU 固定在三轴转台上，在不同温度下，利用标定的温度漂移结果修正加速度计输出，并与理论值进行比较，获得温度漂移校正后的误差。

分别选取-20℃、0℃和 40℃进行实验，得到表 3~表 5 所示的结果。

表 3 X 轴加速度计温度漂移校正后的输出误差

理论输出加速度/g	-20℃温度校正后误差/mg	0℃温度校正后误差/mg	40℃温度校正后误差/mg
0	3.5	4.8	5.2
1	2.3	3.6	3.8
-1	3.1	5.1	1.9

表 4 Y 轴加速度计温度漂移校正后的输出误差

理论输出加速度/g	-20℃温度校正后误差/mg	0℃温度校正后误差/mg	40℃温度校正后误差/mg
0	5.5	3.1	4.7
1	4.3	3.5	3.3
-1	4.2	4.0	4.6

表 5 Z 轴加速度计温度漂移校正后的输出误差

理论输出加速度/g	-20℃温度校正后误差/mg	0℃温度校正后误差/mg	40℃温度校正后误差/mg
0	3.2	1.3	1.1
1	2.8	3.2	1.5
-1	2.1	2.7	2.2

由上述结果可知，经过基于分段温度漂移校正方法校正以后，加速度计的输出误差基本稳定在 5mg 以下，而未经温度漂移校正的加速度输出，在 50℃的温度变化范围内，加速度计输出的误差可以超过 50mg。可见上述标定方法的有效性。

#### 4. 结论

本文结合实际工程应用，提出一种基于高斯牛顿迭代法的加速度计零偏和刻度系数标定方法，该算法收敛快，适用于在线标定。为了补偿使用过程中，温度变化对传感器输出的影响，本文还设计了基于最小二乘法的温度漂移校正算法。实验表明，上述算法效果良好，适用于工程实际应用。

#### 参考文献

- [1] 陈杰春,丁振良,袁峰,佟庆彬,艾莉莉. MEMS 惯性测量组合初始标定方法研究[J]. 南京理工大学学报(自然科学版): 2008,32(3):285-290.
- [2] 谷雨. MEMS 技术现状与发展前景[J]. 电子工业专用设备:2013 (8): 1-8.
- [3] 戴邵武,万龙,徐胜红.基于迭代计算的加速度计标定方法[J]. 舰船电子工程,2014(1):63-65.
- [4] Jafari M, Sahebameyan M, Moshiri B, et al. Skew redundant MEMS IMU calibration using a Kalman filter[J]. Measurement Science and Technology, 2015, 26(10): 105002.
- [5] Syed Z F, Aggarwal P, Goodall C, et al. A new multi-position calibration method for MEMS inertial navigation systems[J]. Measurement Science and Technology, 2007, 18(7): 1897.
- [6] Frosio I, Pedersini F, Borghese N A. Autocalibration of MEMS accelerometers[J]. Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on, 2009, 58(6): 2034-2041.
- [7] 李杰,田晓春,范玉宝,刘俊,陈伟.基于椭圆拟合的弹载 MIMU 现场快速标定技术[J]. 弹箭与制导学报:2013,33(1):10-12.
- [8] 庞鸿锋,潘孟春,王伟,张琦,罗诗.基于高斯牛顿迭代算法的三轴磁强计校正[J]. 仪器仪表学报,2013,34(7):1506-1511.
- [9] 李庆扬,王能超,易大义.数值分析[M]. 北京:清华大学出版社.