**论文题目**

摘要

# 一、问题分析

## 1.1 问题一的分析

问题一在给定无人机运动方向及速度后，确定导弹被烟幕云团遮挡的时间。通过对数据的分析，我们认为当烟幕云团范围介于导弹和真目标之间时，导弹处于被遮蔽状态。因此，我们率先计算得到了烟幕弹起爆时，烟幕弹与导弹的所在位置。同时，我们通过判断导弹与真目标之间的切线是否与烟幕云团范围交联来判断烟幕弹是否具有遮蔽作用。为简要描述两切线同烟幕云团的位置关系，我们引入视角进行分析。当真目标对于导弹的视角小于烟幕云团对导弹的视角时，烟幕弹具有遮蔽效果最后，建立模型计算导弹被烟幕云团遮蔽的时间，得到最终的结果。

## 1.2 问题二的分析

# 二、问题假设

# 三、符号说明

|  |  |
| --- | --- |
|  | 来袭导弹初始位置 |
|  | 无人机初始位置 |
|  | 遮蔽时长 |
|  | 起爆点坐标 |
|  | 第架无人机释放第个烟幕弹干扰第导弹的释放时刻 |
|  | 第架无人机释放第个烟幕弹干扰第导弹的延迟起爆时间 |
|  | 第架无人机释放第个烟幕弹干扰第导弹的起爆时刻 |
|  | 无人机的航向 |
|  | 云团立体角的半顶角 |
|  | 真目标上某点立体角的半顶角 |

# 四、问题一的模型建立与求解

## 4.1 问题一的模型准备

##### 4.1.1 坐标系的确立

根据题目中的提示与要求，我们采用三维直角坐标系，假目标位于原点， 平面为水平面， 轴为竖直方向。真目标：半径 ，高 的圆柱，下底圆心坐标为。来袭导弹的初始位置为。

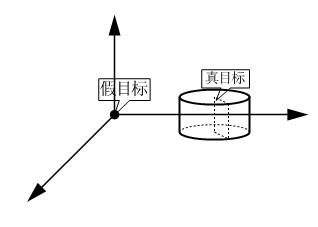


图1：真假目标的坐标系示意图

##### 4.1.2 运动物体运动模型的建立

来袭导弹的初始位置为。导弹速度恒为，其运动方向的单位向量由以下公式给出

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

由此，我们可以得到导弹速度矢量：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

以及导弹运动方程

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

根据上述的定义方法，我们同时也可以根据无人机的初始位置以及无人机的航向：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

给出无人机的轨迹方程：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

在给定无人机的轨迹方程后，我们可以给出干扰弹及其爆炸产生的烟幕云团的运动模型。我们设定干扰弹释放时刻为，干扰弹在释放后经过秒起爆。起爆时刻满足：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

同时，为了描述干扰弹及烟幕云团和导弹的位置关系，我们还需要引入释放点来给定二者运动模型的初始位置。根据无人机的运动方程和我们设定的释放时间我们得到：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

此外，对于干扰弹，我们可以依据题目中给定的条件，给出其初速度的方程

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

通过上述前提条件的确定，我们可以得到起爆点的坐标：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

在得到起爆点坐标后，我们便可以描述烟幕云团的运动模型。起爆瞬时形成球状云团，半径；云团的下沉速度为，云团的存在时间为。由此，我们得到了烟幕云团的运动方程：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

## 4.2 遮蔽判据的确定

##### 4.2.1 立体角的引入

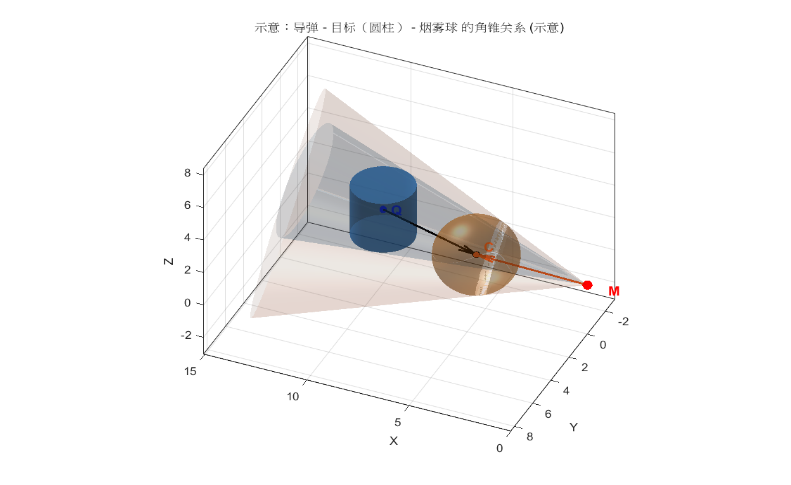
在初始计算时，我们极易因为真目标的体积参数较小而将其视为一个点进行分析。但为了保证结果的尽量准确，我们需要将真目标视为圆柱体进行分析。因此，我们引入了立体角对遮蔽情况进行分析。

立体角是指在三维空间中，一个物体在某一点的视野中所张的角度范围。对于某一物体，一个物体 的立体角定义为：

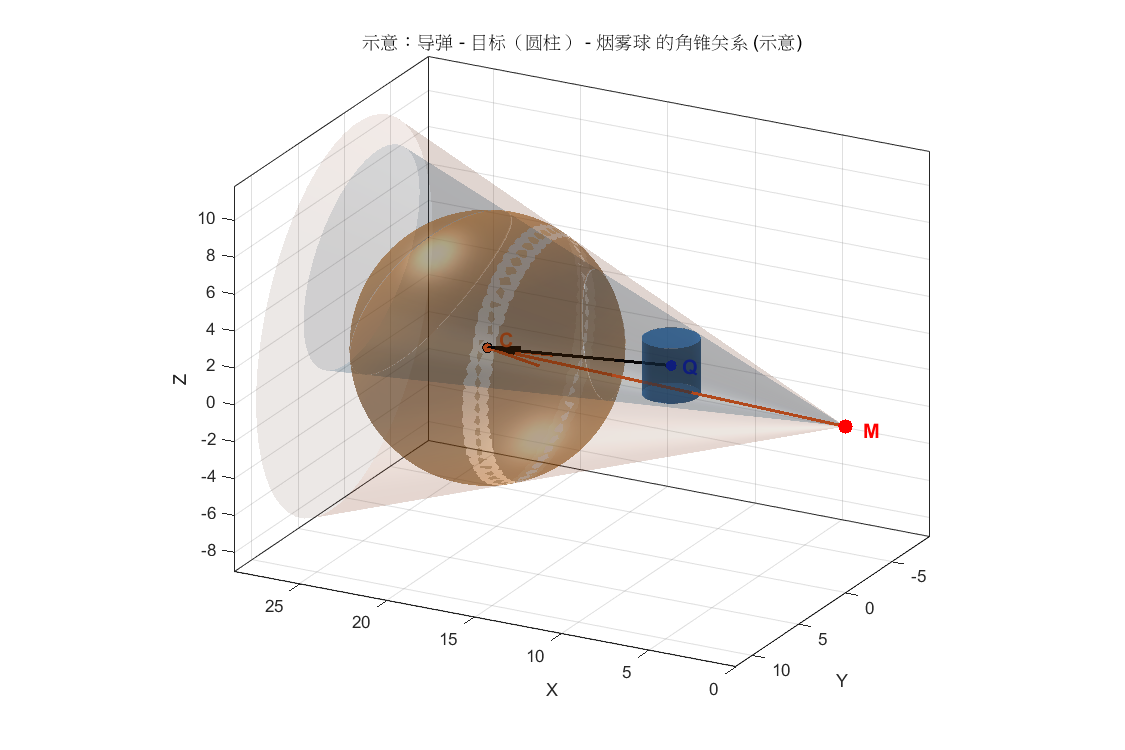
|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

其中 是 到面元 的距离， 是 的法向与向量 的夹角。在本题中，我们并不需要精确积分，而是通过几何投影和角度判定进行近似或离散计算。

对于导弹而言，导弹的视角可近似比拟为一圆锥，导弹即为锥体的顶点。当烟幕弹相对导弹的立体角大于真目标对导弹的立体角时，我们便可以认定烟幕云团具有遮蔽效果。



同时，我们也要注意到，有另一种情况也满足立体角的大小关系但无法实现有效的遮蔽效果。



##### 4.2.2 立体角的确定

在此基础上，我们若想要对圆柱体进行计算，我们需要对圆柱体进行离散化处理。由4.1我们给出的真目标的位置参量和体积参数，我们采取柱坐标的方式来表达真目标，并基于真目标确定了采样点的采样方式，得到的采样方式如下：，划分 份，，划分 份。在确定采样方式的同时，我们也可以对圆柱表面的参数化处理，得到的圆柱体表面的参数方程如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

从导弹的视角，真目标每个点对应的单位方向满足：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

进而，我们可以得到整个真目标的投影区域：圆柱表面。

在计算了真目标的立体角之后，我们可以根据相似的方法，得到云团的立体角。但需要注意的是：云团为一球体，其中心 ，半径 。从导弹位置 看去，云团的投影在单位球面上是一个圆帽。云团中心对应的方向向量为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

得到的云团方向角的半顶角为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

云团覆盖区域为：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

##### 4.2.3 遮蔽判定

对每个目标点 ，计算单位向量 。该点与云团的夹角为，满足：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

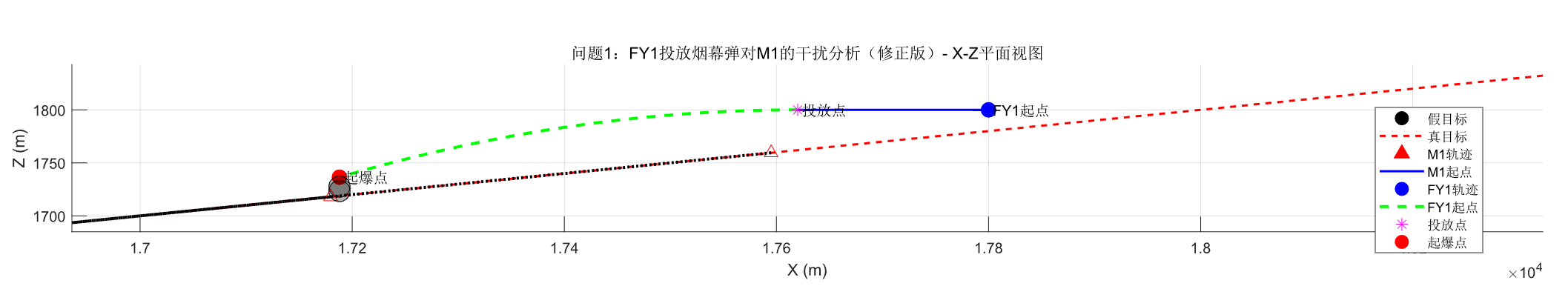
若 ，则目标在该时刻完全被云团覆盖：

根据4.2.1中给出的示意图可以看出：时烟幕云团位于导弹与目标之间；时目标位于导弹与烟幕云团之间。所以遮蔽判据有空间约束：

此外，由于烟幕弹的持续时间有限，为了保证烟幕弹有遮蔽效果，我们还需要规定导弹的有效遮蔽时间窗口：。同时，为确保烟幕云团的工作时间在导弹击中假目标之前，我们给出了时间约束。

## 4.3 问题一的求解

在对求解原理进行分析后，我们将题目中的信息带入了我们在4.1、4.2中建立的数学模型，计算得到了最终结果，并对整体投弹过程进行了可视化处理，得到了投弹过程示意图：



最终我们得到的有效遮蔽时长为1.391s。

# 五、问题二的模型建立和求解

## 5.1 问题二模型的建立

同问题一不同，我们在第二问中需要定义遮蔽函数，通过遮蔽函数对是否具有遮蔽效果进行描述，我们定义的遮蔽函数如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

由上述定义，我们通过对时间的积分，可以进一步得到总遮蔽时间：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

其中 为导弹击中假目标所需时间。

在确定FY1拦截M1导弹后，我们需要设计无人机的速度、航向与投弹、起爆时间来使得烟幕弹对导弹的遮蔽时间最长。因此，我们建立如下优化模型：

1. **决策变量：**无人机速度、无人机航向、投放时间、起爆时间。

无人机速度 *v*

无人机航向 *θ*

烟幕弹投放时刻 *tr*​

烟幕弹延迟起爆时间 *td*​

1. **优化目标：**

我们同时需要定义单枚烟幕弹条件下的遮蔽指示函数：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

**3）约束条件：**

无人机的速度介于最小速度与最大速度之间：

投弹与起爆时间为非负数且需要在导弹攻击到假目标前完成起爆过程：

## 5.2 问题二模型的求解

# 六、问题三模型的建立与求解

## 6.1 问题三模型的建立

在问题三中，我们需要对单个无人机投出多个烟幕弹干扰同一个导弹进行分析，此时我们要对多枚烟雾弹进行优化，使得遮蔽时间达到最大。由此建立以下评估模型：

1. **决策变量：**无人机速度、无人机航向、第枚烟幕弹的释放时间、第枚烟幕弹的延迟起爆时间、第枚烟幕弹的起爆点。

无人机速度 *v*

无人机航向 *θ*

第枚烟幕弹的释放时间：

第枚烟幕弹的延迟起爆：

第枚烟幕弹的起爆时刻：

起爆点：

由此，我们可以给出第枚烟幕弹起爆后云团的运动模型：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

1. **优化目标：**

同5.1类似，我们同时可以定义多枚烟幕弹条件下的遮蔽指示函数：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

总遮蔽时长：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

其中 为导弹击中假目标所需时间。

我们同时也可以得到优化目标：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

1. **约束条件：**

无人机的速度介于最小速度与最大速度之间：

投弹与起爆时间为非负数且需要在导弹攻击到假目标前完成起爆过程：

相邻两枚烟幕弹的投弹时间间隔不能小于最短时间间隔：

## 6.2 问题三模型的求解

# 七、问题四模型的建立与求解

## 7.1 问题四模型的建立

在问题四中，我们着力要解决的本质上依然是优化问题。在这一问题中，我们需要优化的是多个无人机分别投射单枚烟幕弹对同一导弹的遮蔽效果。

1. **决策变量：**第架无人机速度、第架无人机航向、第架无人机上烟幕弹的释放时间、第架无人机上烟幕弹的延迟起爆时间、第架无人机上烟幕弹的起爆点。

第架无人机速度

第架无人机航向

第架无人机上第枚烟幕弹的释放时间：

第枚烟幕弹的延迟起爆：

第枚烟幕弹的起爆时刻：

起爆点：

同时，有第架无人机上第枚烟幕弹起爆后云团的运动模型：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

1. **优化目标：**

同上述的约束方法类似，我们依旧给出遮蔽函数

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

总遮蔽时长：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

其中 为导弹击中假目标所需时间。

得到的优化目标：

|  |  |
| --- | --- |
|  | () |

1. **约束条件：**

无人机的速度介于最小速度与最大速度之间：

投弹与起爆时间为非负数且需要在导弹攻击到假目标前完成起爆过程：

## 7.2 问题四模型的求解