

10202: Pairsumonious Numbers

- ★★★★★
- 題組：Problem Set Archive with Online Judge
- 題號：10202: Pairsumonious Numbers
- 解題者：范真瑋
- 解題日期：2017年6月15日
- 題意：對 N 個數來說 ($2 < N < 10$)，如果把他們兩兩相加，可以得到 $N*(N-1)/2$ 個和。現在反過來，給這些和，要找出這 N 個數。
例如4個數2, 3, 1, 4，兩兩相加可以得到5, 3, 6, 4, 7, 5，共 $4*(4-1)/2 = 6$ 個和。

- 題意範例：

| | |
|------------------|---------------|
| 3 1269 1160 1663 | → 383 777 886 |
| 3 1 1 1 | → Impossible |

- 解法：遞推法

- ① 假設 N 個整數由小到大為 a_1 、 a_2 、 a_3 、...，將 $N*(N-1)/2$ 個和由小到大設為 sum_1 、 sum_2 、 sum_3 、...。
 最小的兩個和必定是 a_1+a_2 ， a_1+a_3 → $a_1+a_2 = sum_1$
 $a_1+a_3 = sum_2$
- ② a_2+a_3 是不知道的，因為 a_1+a_4 等無法與它比較大小，由於有3個未知數，所以要多一條方程式才能解出 a_1 、 a_2 、 a_3 ，於是枚舉 a_2+a_3 的和 $sum_i (i > 2)$ 。
- ③ 由於 $a_1+a_4 < a_1+a_5 < a_1+a_6 \dots$ ，所以可以利用 a_1 遞推出 a_4 、 a_5 、 a_6 、...。枚舉和檢驗，一旦檢驗失敗，枚舉下一個 a_2+a_3 的和。

- ④ 檢驗方法：假設利用和 $\text{sum}_x - a_1$ 找到新的數 a_j ，去和 a_2 、 a_3 、...、 a_{j-1} 配對，檢查是否都有對應的和。

■ 解法範例：4 200 197 194 213 207 210 ➔ 92 102 105 108

假設4個數由小到大為 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 ，將 $4*(4-1)/2 = 6$ 個和由小到大排序好(194, 197, 200, 207, 210, 213)

最小的兩個和為 $a_1+a_2 = 194$

$$a_1+a_3 = 197$$

枚舉 a_2+a_3 的和 $\text{sum}_i (i > 2)$ 。

$i = 3, \text{sum}_3 = 200$

$$\begin{aligned} a_2 &= (\text{sum}_1 - \text{sum}_2 + \text{sum}_3) / 2 = [(a_1 + a_2) - (a_1 + a_3) + (a_2 + a_3)] / 2 \\ &= (194 - 197 + 200) / 2 \approx 98 \end{aligned}$$

$$a_1 = \text{sum}_1 - a_2 = 96$$

$$a_3 = \text{sum}_2 - a_1 = 101$$

➔ $a_2+a_3 = 199$ (沒有對應的和) 枚舉下一個 a_2+a_3 的和!

$$i = 4, \text{sum}_4 = 207$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (\text{sum}_1 - \text{sum}_2 + \text{sum}_3) / 2 = [(a_1 + a_2) - (a_1 + a_3) + (a_2 + a_3)] / 2 \\ &= (194 - 197 + 207) / 2 = 102 \end{aligned}$$

$$a_1 = \text{sum}_1 - a_2 = 92$$

$$a_3 = \text{sum}_2 - a_1 = 105$$

$$\rightarrow a_2 + a_3 = 207 \text{ (有對應的和)}$$

遞推：

$$a_4 = \text{sum}_3 - a_1 = 108$$

$$a_4 + a_2 == \text{sum}_5 (108 + 102 = 210) \text{ (有對應的和)}$$

$$a_4 + a_3 == \text{sum}_6 (108 + 105 = 213) \text{ (有對應的和)}$$

$$\therefore 4 \ 200 \ 197 \ 194 \ 213 \ 207 \ 210 \rightarrow 92 \ 102 \ 105 \ 108$$

■ 討論：

- (1) 每個和只能用一次，可用另外一個陣列標記。
- (2) 枚舉 a_2+a_3 的和需要 $O(n)$ ，每次枚舉後遞推需要 $O(n)$ ，每遞推一個數需要 $O(n)$ 的時間去掉已經得到的和，所以總時間複雜度為 $O(n^3)$ 。