模糊控制:
一类多输入多输出非线性系统的直接与间接自适应模糊控制

Salim Labiod and Thierry Marie Guerra

Translator: Liu W.C.

2023.12.2

第一章 引言

过去二十年间，非线性系统自适应控制设计领域取得了长足进展(Krstic et al., 1995; Sastry & Isidori, 1989; Slotine & Li 1991; Spooner et al., 2002)。大多数已开发的自适应控制方案都假设系统的精确模型可用，且未知参数与已知非线性函数呈线性关系。然而，这一假设在许多实际情况下并不恰当，因为很难通过已知非线性函数来精确描述非线性系统，因此，在模型知识不完整的情况下控制非线性系统的问题仍然是一项具有挑战性任务。

作为一种无模型设计方法，模糊控制已被广泛应用于复杂和不确定的被控对象(Passino & Yurkovich, 1998; Wang, 1994)。从根本上说，模糊控制是一种基于人类知识的设计方法，由模糊隶属度函数和模糊规则驱动。然而，有时很难为某些被控对象找到合适的隶属度函数与模糊规则，或者当被控对象动态发生变化时，可能需调整控制器参数。为克服该问题，基于模糊系统的一般逼近定理和在线学习能力，人们开发了几种稳定自适应模糊控制方案，将专家知识系统地引入其中(Spooner & Passino, 1996; Spooner et al., 2002; Su & Stepanenko, 1994; Wang, 1994)。此类方案的稳定性分析采用 Lyapunov 方法。从概念上讲，模糊自适应控制系统的设计有两种不同方法：直接方案与间接方案。直接方案使用模糊系统来逼近未知理想控制器(Chang, 2000; Chang, 2001; Labiod & Boucherit, 2003; Li & Tong, 2003; Ordonez & Passino, 1999; Spooner & Passino 1996; Wang, 1994)，而间接方案使用模糊系统来估计被控对象动态，然后根据这些估计值生成控制律(Boulkroune et al., 2008a; Boulkroune et al., 2008b; Chang, 2000; Chang, 2001; Chekireb et al., 2003; Chiu, 2005; Golea et al., 2003; Labiod et al., 2005; Ordonez & Passino, 1999; Spooner & Passino 1996; Su & Stepanenko, 1994; Wang, 1994)。

(Chang, 2001; Essounbouli & Hamzaoui, 2006; Labiod & Boucherit, 2003; Spooner & Passino, 1996; Su & Stepanenko, 1994; Wang, 1994)针对不确定单输入单输出(SISO)非线性系统提出了模糊自适应控制方案。不确定多输入多输出(MIMO)非线性系统的自适应模糊控制问题更为困难，因为控制输入和输出之间存在耦合。(Boulkroune et al., 2008a; Boulkroune et al., 2008b; Chang, 2000; Chekireb et al., 2003; Chiu, 2005; Golea et al., 2003; Labiod et al., 2005; Li & Tong, 2003; Ordonez & Passino, 1999; Tlemcani et al., 2007 ; Tong et al., 2000; Zhang & YI, 2007)对该问题进行了研究。注意，直接自适应方法比间接方法需要更多限制性假设，但由于它不存在任何可能的控制器奇异问题，因此也许更值得关注。在上述论文中，模糊系统的可调参数是通过基于 Lyapunov 方法的自适应律更新的，也就是说，参数自适应律的设计要确保 Lyapunov 函数收敛。然而，为实现有效自适应，更明智的做法是直接将参数自适应过程建立在未知函数与其自适应模糊近似值间的辨识误差上(Labiod & Guerra, 2007a; Labiod & Guerra, 2007b)。

本文介绍了一类连续时间不确定 MIMO 非线性动态系统的直接与间接自适应模糊控制方案。提出的方案基于(Labiod & Guerra, 2007a)中的结果。在直接方法中，由于模糊系统被用于逼近未知理想控制器，因此使用梯度下降算法更新所用模糊系统的可调参数，该算法旨在最小化未知理想控制器与模糊控制器间的误差。另一方面，在间接方法中，由于模糊系统被用于逼近系统未知非线性，因此使用梯度下降法更新所用模糊系统的可调参数，该算法旨在最小化系统的未知非线性与所用模糊系统间的误差。在这两种方法中，闭环系统的稳定性分析都采用 Lyapunov 方法。具体来说，这两种方法都证明了跟踪误差为一致最终有界的，并

收敛于原点邻域。本文内容安排如下。第二章给出了问题的提出和模糊系统的描述。第三章给出 MIMO 直接自适应模糊控制器以及稳定性结果的证明。第四章给出 MIMO 间接自适应模糊控制器及其稳定性分析。第五章介绍了将所提出直接自适应控制方案应用于双关节机器人机械臂的仿真结果。最后，第六章进行总结。

第二章 问题的提出

我们考虑一类不确定 MIMO 非线性系统，其模型为

$$\begin{aligned} y_1^{(r_1)} &= f_1(x)+\sum_{j=1}^{p} g_{1j}(x)u_j \\ &\vdots \\ y_p^{(r_p)} &= f_p(x)+\sum_{j=1}^{p} g_{pj}(x)u_j \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x=\left[y_1,\dot{y}_1,\dots,y_1^{(r_1-1)},\dots,y_p,\dot{y}_p,\dots,y_p^{(r_p-1)}\right]^T\in R^n$， $n=\sum_{i=1}^{p} r_i$ 为假设可用于测量的整体状态向量，$u=[u_1,\dots,u_p]^T\in R^p$ 为控制输入向量， $y=[y_1,\dots,y_p]^T\in R^p$ 为输出向量， $f_i(x),g_{ij}(x),\ i,j=1,\dots,p$ 为未知平滑非线性函数。记为

$$y^{(r)}=\left[y_1^{(r_1)},\dots,y_p^{(r_r)}\right]^T;\ f(x)=[f_1(x),\dots,f_p(x)]^T;G(x)=\begin{bmatrix} g_{11}(x) & \dots & g_{1p}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(x) & \dots & g_{pp}(x)\end{bmatrix}$$

那么，动力学系统(1)就可写成以下简洁形式

$$y^{(r)}=f(x)+G(x)u \tag{2}$$

控制目标是为系统(1)设计自适应控制 $u_i(t)$，使输出 $y_i(t)$ 在任意信号有界的情况下跟踪指定期望轨迹 $y_{di}(t)$。在整个研究过程中，我们需作以下假设。

A1: 矩阵 $G(x)$ 为对称正定矩阵，其上下界为 $0<\underline{g}I_p\le G(x)\le\bar{g}I_p$，其中 I_p 为 $p\times p$ 单位矩阵，$\underline{g}$ 和 $\bar{g}$ 为正常数。

A2: 期望轨迹 $y_{di}(t)$ 为时间的已知有界函数，有界已知导数直至 r_i 阶。

Remark1: 注意假设 A1 是一个充分条件，确保矩阵 $G(x)$ 总是正则的，因此，系统(1)可通过静态状态反馈线性化。虽然这一假设限制了考虑的 MIMO 非线性系统类别，但许多物理系统，如机器人系统(Slotine & Li, 1991)，都符合该特性。

跟踪误差定义为

$$\begin{gathered} e_1(t) = y_{d1}(t) - y_1(t) \\ \vdots \\ e_p(t) = y_{dp}(t) - y_p(t) \end{gathered} \tag{3}$$

滤波跟踪误差为

$$\begin{gathered} s_1(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_1\right)^{r_1 - 1} e_1(t), \lambda_1 > 0 \\ \vdots \\ s_p(t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda_p\right)^{r_p - 1} e_p(t), \lambda_p > 0 \end{gathered} \tag{4}$$

根据(4)， $s_i(t) = 0$ 表示一个线性微分方程，其解意味着跟踪误差 $e_i(t)$ 及其直至 $r_i - 1$ 阶导数收敛为零(Slotine & Li, 1991)。因此，控制目标变成了设计一个控制器，使 $s_i(t)$ 保持为零，$i = 1,..., p$ 。此外，对 $s_i(t)$ 的约束可直接转化为对跟踪误差的约束。具体来说，如果 $|s_i(t)| \le \Phi_i$，其中 Φ_i 为一个正常数，则可得出以下结论(Slotine & Li, 1991)： $|e_i^{(j)}(t)| \le 2^j \lambda_i^{j - r_i + 1} \Phi_i$, $j = 0, \ldots, r_i - 1$, $i = 1, \ldots, p$ 。通过增加参数 λ_i 可减小这些约束。滤波误差的时间导数(4)可写成

$$\begin{gathered} \dot{s}_1 = v_1 - f_1(x) - \sum_{j=1}^{p} g_{1j}(x) u_j \\ \vdots \\ \dot{s}_p = v_p - f_p(x) - \sum_{j=1}^{p} g_{pj}(x) u_j \end{gathered} \tag{5}$$

其中 $v_1, \cdots, v_p$ 给出如下

$$\begin{gathered} v_1 = y_{d1}^{(r_1)} + \beta_{1, r_1 - 1} e_1^{(r_1 - 1)} + \ldots + \beta_{1,1} \dot{e}_1 \\ \vdots \\ v_p = y_{dp}^{(r_p)} + \beta_{p, r_p - 1} e_p^{(r_p - 1)} + \ldots + \beta_{p,1} \dot{e}_p \end{gathered} \tag{6}$$

其中，

$$\beta_{i,j} = C_{r_i - 1}^{j - 1} \lambda_i^{r_i - j}, i = 1, \ldots p, j = 1, \ldots, r_i - 1$$

记为

$$s = [s_1, \ldots, s_p]^T ; v = [v_1, \ldots, v_p]^T$$

则方程(5)可写成矩阵形式

$$\dot{s} = v - f(x) - G(x) u \tag{7}$$

如果非线性函数 $f(x)$ 和 $G(x)$ 已知，为实现控制目标，可使用以下理想非线性控制律(Labiod & Guerra, 2007b)。

$$u^* = G^{-1}(x)\left(-f(x)+v+Ks+K_0\tanh\left(s/\varepsilon_0\right)\right) \tag{8}$$

其中，$K=\mathrm{diag}[k_1,\ldots,k_p], K_0=\mathrm{diag}[k_{01},\ldots,k_{0p}], k_i>0, k_{0i}>0$，对于 $i=1,...,p$，ε_0 为一个很小的正常数，$\tanh(\cdot)$ 为双曲切线函数，定义为 $s=[s_1,\ldots,s_p]^T$，$\tanh(s/\varepsilon_0)=\left[\tanh(s_1/\varepsilon_0),\ldots,\tanh(s_p/\varepsilon_0)\right]^T$。实际上，当我们选择控制输入为 $u=u^*$ 时，方程(7)简化为

$$\dot{s} = -Ks - K_0\tanh\left(s/\varepsilon_0\right) \tag{9}$$

或者，

$$\dot{s}_i = -k_i s_i - k_{0i}\tanh(s_i/\varepsilon_0),\quad i=1,\ldots,p \tag{10}$$

由此我们可得出结论：当 $t\to\infty$ 时，$s_i(t)\to 0$，因此，$e_i(t)$ 及其直到 r_i-1 阶的所有导数均收敛为零。显然，如果 $f(x)$ 和 $G(x)$ 完全未知，则提出的非线性控制律(8)不可行。在这种情况下，为克服这一设计困难，我们提出使用模糊系统来自适应构造未知函数。其思路是在直接方法中使用模糊系统辨识整个未知控制函数(8)，在间接方法中辨识(8)中的未知非线性函数 $f(x)$ 和 $G(x)$。在本文中，我们使用零阶 Takagi-Sugeno 模糊系统，该系统执行从输入向量 $z=[z_1,\ldots,z_m]^T\in\Omega_z\subset R^m$ 到标量输出变量 $y_f\in R$ 的映射，其中 $\Omega_z=\Omega_{z_1}\times\cdots\times\Omega_{z_m}$ 和 $\Omega_{z_i}\subset R$。如果我们为每个输入 z_i 定义 M_i 模糊集 $F_i^j, j=1,\ldots,M_i$，则模糊系统将由一组 if-then 形式的规则表示(Wang, 1994; Jang & Sun, 1995; Passino & Yurkovich, 1998)。

$$\mathrm{R}^k: \text{If } z_1 \text{ is } G_1^k \text{ and...and } z_m \text{ is } G_m^k \text{ Then } y_f \text{ is } y_f^k\left(k=1,\ldots,N\right)$$

其中 $G_i^k\in\left\{F_i^1,\ldots,F_i^{M_i}\right\},\quad i=1,\ldots,n$，$y_f^k$ 为第 k 条规则的清晰输出，N 为规则数量。通过使用单子模糊器和乘积推理机，模糊系统最终输出结果如下(Wang, 1994; Jang & Sun, 1995; Passino & Yurkovich, 1998)

$$y_f(z)=\frac{\sum_{k=1}^{N}\mu_k(z)y_f^k}{\sum_{k=1}^{N}\mu_k(z)} \tag{11}$$

其中，

$$\mu_k(z)=\prod_{i=1}^{m}\mu_{G_i^k}(z_i), \text{with } \mu_{G_i^k}\in\left\{\mu_{F_i^1},\ldots,\mu_{F_i^{M_i}}\right\}$$

其中，$\mu_{F_i^j}(x_i)$为模糊集F_i^j的隶属度函数。通过引入模糊基函数的概念(Wang, 1994)，(11)给出的输出可改写成以下简洁形式

$$y_f(z)=w^T(z)\theta \tag{12}$$

其中，$\theta=\left[y_f^1,\ldots,y_f^N\right]^T$为一个包含全部后件参数的向量，而$w(z)=\left[w_1(z),...,w_N(z)\right]^T$为一组模糊基函数，定义为

$$w_k(z)=\frac{\mu_k(z)}{\sum_{j=1}^{N}\mu_j(z)}, k=1,\ldots,N \tag{13}$$

假设模糊系统(12)是定义明确的，因此对于任意$z\in\Omega_z$，$\sum_{j=1}^{N}\mu_j(z)\neq 0$。(Wang, 1994)的研究证明，只要考虑足够多的规则，具有高斯隶属度函数的(12)形式的模糊系统就能以任意精度逼近紧凑集上的连续函数。因此，对于从R^n到R上定义的一般平滑非线性函数$f(z)$，存在一个形式为(12)的模糊系统，它具有一些最优参数θ^*，使得

$$\sup_{z\in\Omega_z}\left|f(z)-w^T(z)\theta^*\right|\leq\bar{\varepsilon}$$

其中$\bar{\varepsilon}$为正常数。因此，可将$f(z)$表示为

$$f(z)=w^T(z)\theta^*+\varepsilon(z)$$

其中$\varepsilon(z)$为满足$\left|\varepsilon(z)\right|\leq\bar{\varepsilon}$的$z\in\Omega_z$的模糊逼近误差。在本章中，假设模糊系统结构和模糊基函数参数均由设计者事先正确指定。也就是说，设计者需通过决策来确定模糊系统结构（即确定相关输入、每个输入的隶属度函数数量、隶属度函数参数、规则数量），并通过学习算法来计算相应参数。应注意的是，模糊系统可用任意其他线性参数化通用函数逼近器来代替，而不存在任何技术难度，如神经网络和小波神经网络。然而，只有模糊逻辑系统才能系统利用语言信息。

第三章 直接自适应模糊控制

在第二章中，我们已确定存在一个由(8)给出的理想控制律u^*，可实现控制目

标。然而，由于该非线性控制器依赖于未知函数，因此无法使用。在本章中，为规避这一问题，我们提出使用自适应模糊系统来逼近该理想控制器，并利用模糊控制器与理想控制器间的误差来更新模糊控制器自由参数。为设计控制律，我们用一个模糊系统来表示理想输入控制向量$u^*=[u_1^*,\dots,u_p^*]$的每个分量，其形式为(12)如下所示

$$u_i^*(z)=w_i^T(z)\theta_i^*+\varepsilon_i(z);\quad i=1,\dots,p \tag{14}$$

其中，$z=[x^T,s^T]^T$，$\varepsilon_i(z)$为模糊逼近误差，θ_i^*为未知理想参数向量，可在当前紧凑集Ω_z上最小化函数$|\varepsilon_i(z)|$，$w_i(z)$为设计者假定合适指定的模糊基函数向量。在本研究中，我们假设所使用的模糊系统不违反紧凑集Ω_z上的普遍逼近特性，并假设该紧凑集足够大，以便在闭环控制下变量z仍在其内。因此，我们可合理假设模糊逼近误差对任意$z\in\Omega_z$均有界。记为

$$\varepsilon(z)=[\varepsilon_1(z),\dots,\varepsilon_p(z)]^T;\theta^*=[\theta_1^{*T},\dots,\theta_p^{*T}]^T,w(z)=\mathrm{diag}[w_1(z),\dots,w_p(z)]$$

因此，可将(8)写成

$$u^*=w^T(z)\theta^*+\varepsilon(z) \tag{15}$$

由于理想参数向量θ^*未知，因此我们使用其估计值θ来生成自适应控制

$$u(z)=w^T(z)\theta \tag{16}$$

下一步应该是为自由参数θ设计自适应律，使控制律u尽可能接近理想控制器u^*。为此，我们将控制器u^*和u间的误差定义为

$$e_u=u^*-u \tag{17}$$

误差e_u表示未知函数u^*与在线模糊逼近器间的实际偏差(16)，而模糊逼近误差$\varepsilon(z)$表示未知函数u^*与在线模糊逼近器间的最小可能偏差，即$\varepsilon(z)$表示e_u的最小可能值。利用(15)和(16)，(17)变为

$$e_u=u^*-w^T(z)\theta=w^T(z)\tilde{\theta}+\varepsilon(z) \tag{18}$$

其中$\tilde{\theta}=\theta^*-\theta$为参数估计误差向量。将$G(x)u^*$加减到(7)的右侧，我们就得到控制闭环系统的误差方程

$$\dot{s}=v-f(x)-G(x)u+G(x)u^*-G(x)u^* \tag{19}$$

根据(8)和(18)，(19)变为

$$\dot{s} = -K\,s - K_0 \tanh\left(s/\varepsilon_0\right) + G(x)e_u \tag{20}$$

现在，考虑二次型成本函数；该函数衡量理想控制器与实际模糊控制器间的误差，其定义为

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e_u^T G(x) e_u = \frac{1}{2}\left(u^* - w^T(z)\theta\right)^T G(x)\left(u^* - w^T(z)\theta\right) \tag{21}$$

我们使用梯度下降法最小化关于可调参数θ的成本函数(21)。因此，应用梯度法(Slotine & Li, 1991; Ioannou & Sun, 1996)，最小化轨迹$\theta(t)$由以下微分方程产生

$$\dot{\theta} = -\eta \nabla_\theta J(\theta) \tag{22}$$

其中η为一个正常数参数。根据(21)，$J(\theta)$对于θ的梯度为

$$\frac{\partial J\left(\theta\right)}{\partial \theta} = -w(z)G(x)e_u$$

因此，梯度下降算法变为

$$\dot{\theta} = \eta w(z) G(x) e_u \tag{23}$$

我们在此回顾，理想控制器u^*未知，因此无法获得(17)中定义的误差信号e_u。等式(20)将用于克服这一设计困难。事实上，从(20)式中，我们可以看到，即使没有误差向量e_u，向量$G(x)e_u$也是可用的，其值为

$$G(x)e_u = \dot{s} + Ks + K_0 \tanh\left(s/\varepsilon_0\right)$$

因此，(23)变为

$$\dot{\theta} = \eta w(z)\left\{\dot{s} + Ks + K_0 \tanh\left(s/\varepsilon_0\right)\right\} \tag{24}$$

正如(Ioannou & Sun, 1996)所示，在存在逼近误差的情况下，(24)形式的自适应律无法保证参数$\tilde{\theta}$的有界性，而逼近误差在此类自适应方案中无法避免。因此，为提高自适应律(24)在存在逼近误差时的鲁棒性，我们通过引入σ修正项对其进行修正，如下所示(Ioannou & Sun, 1996)

$$\dot{\theta} = \eta w(z)\left\{\dot{s} + Ks + K_0 \tanh(s/\varepsilon_0)\right\} - \eta\sigma\theta \tag{25}$$

其中σ为一个很小的正常数。以下定理总结了提出的直接自适应控制方案的稳定性结果。

Theorem 1: 考虑(1)中的系统，其控制律由(17)定义。假设 Assumptions A1 和 A2 成立，(18)中的逼近误差$\varepsilon(z)$受到约束$\varepsilon(z) \le \bar{\varepsilon}$，其中$\bar{\varepsilon}$为正常数，自由参数$\theta$根据(25)更新。则任意闭环信号均为一致最终有界，跟踪误差被吸引到原点邻域内，其大小可通过控制参数调整。

Remark 2: 在没有逼近误差的情况下，即在(18)中$\varepsilon(x)=0$，通过在(25)中设置$\sigma=0$，可证明跟踪误差是渐近稳定的，即当$t\to\infty$时$e_i(t)\to 0$，对于$i=1,\ldots,p$。

Remark3: 值得注意的是，如果没有$s(t)$的导数，参数更新律(25)是无法实现的。不过，可得到(25)的离散可实现版本。将(25)改写为

$$\int_{s(t-\Delta t)}^{s(t)}\varphi_1(\tau)ds+\int_{t-\Delta t}^{t}\varphi_2(\tau)d\tau$$

假设$\varphi_1(t),\varphi_2(\tau)$和$s(t)$为连续时间函数，且$\Delta t$足够小，则(25)的离散可实现版本如下：$\theta(t)=\theta(t-\Delta t)+\varphi_1(t-\Delta t)(s(t)-s(t-\Delta t))+\varphi_2(t-\Delta t)\Delta t$，如果$\Delta t$选得足够小，这表示参数更新律(25)的良好离散近似。

第四章 间接自适应模糊控制

在本章中，我们提出通过使用模糊系统辨识未知函数$f_i(x)$和$g_{ij}(x)$来间接逼近未知理想控制器(8)。首先，让我们假设非线性函数$f_i(x)$和$g_{ij}(x)$可在紧凑集D_x上通过(12)形式的模糊系统逼近，如下所示

$$f_i(x)=f_i^*(x)+\varepsilon_{f_i}(x);\quad f_i^*(x)=w_{f_i}^T(x)\theta_{f_i}^*,i=1,\ldots,p \tag{33}$$

$$g_{ij}(x)=g_{ij}^*(x)+\varepsilon_{g_{ij}}(x);\quad g_{ij}^*(x)=w_{g_{ij}}^T(x)\theta_{g_{ij}}^*,\quad i,j=1,\ldots,p \tag{34}$$

其中$f_i(x)$和$g_{ij}(x)$为模糊逼近误差，$\theta_{f_i}^*$和$\theta_{g_{ij}}^*$分别为最小化函数$\left|\varepsilon_{f_i}(x)\right|$和$\left|\varepsilon_{g_{ij}}(x)\right|$的最优参数向量，而$w_{f_i}(x)$和$w_{g_{ij}}(x)$是设计者假设合适指定的模糊基函数向量。在本研究中，我们假设使用的模糊系统不违反操作紧凑集D_x上的普遍逼近特性，假设该紧凑集足够大，以便状态变量在闭环控制下保持在D_x范围内。因此对于任意$x\in D_x$，最小逼近误差都是有界的。由于理想参数向量$\theta_{f_i}^*$和$\theta_{g_{ij}}^*$未知，因此我们使用它们的估计值θ_{f_i}和$\theta_{g_{ij}}$来生成自适应逼近值。

$$\hat{f}_i(x)=w_{f_i}^T(x)\theta_{f_i},i=1,\ldots,p \tag{35}$$

$$\hat{g}_{ij}(x)=w_{g_{ij}}^T(x)\theta_{g_{ij}},i,j=1,\ldots,p \tag{36}$$

记为，

$$\hat{f}(x)=\left[\hat{f}_1(x),\ldots,\hat{f}_p(x)\right]^T,\varepsilon_f(x)=\left[\varepsilon_{f1}(x),\ldots,\varepsilon_{fp}(x)\right]^T$$

$$\hat{G}(x)=\begin{bmatrix}\hat{g}_{11}(x) & \ldots & \hat{g}_{1p}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{g}_{p1}(x) & \ldots & \hat{g}_{pp}(x)\end{bmatrix},\varepsilon_G(x)=\begin{bmatrix}\varepsilon_{g11}(x) & \ldots & \varepsilon_{g1p}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_{gp1}(x) & \ldots & \varepsilon_{gpp}(x)\end{bmatrix}$$

现在，我们可写出自适应控制律的表达式

$$u=\hat{G}^{-1}(x)\left(-\hat{f}(x)+v+Ks+K_0\tanh\left(s/\varepsilon_0\right)\right) \tag{37}$$

该控制项来自(8)，分别使用自适应模糊逼近值 $\hat{f}(x)$ 和 $\hat{G}(x)$ 代替实际函数 $f(x)$ 和 $G(x)$。将 $\hat{f}(x)$ 和 $\hat{G}(x)u$ 加减到(7)的右侧，我们得到

$$\dot{s}=v-\left(f(x)-\hat{f}(x)\right)-\left(G(x)-\hat{G}(x)\right)u-\hat{G}(x)u-\hat{f}(x) \tag{38}$$

利用控制律(37)，(38)变为

$$\dot{s}=-Ks-K_0\tanh\left(s/\varepsilon_0\right)-\left(f(x)-\hat{f}(x)\right)-\left(G(x)-\hat{G}(x)\right)u \tag{39}$$

其中，向量 $\dot{s}$ 的每个元素由以下公式给出

$$\dot{s}_i=-k_is_i-k_{0i}\tanh\left(s_i/\varepsilon_0\right)-\left(f_i(x)-\hat{f}_i(x)\right)-\sum_{j=1}^{p}\left(g_{ij}(x)-\hat{g}_{ij}(x)\right)u_j \tag{40}$$

接下来的任务应是为自由参数 θ_{f_i} 和 $\theta_{g_{ij}}$ 设计自适应律，使 $\hat{f}(x)+\hat{G}(x)u$ 尽可能逼近未知非线性函数 $f(x)+G(x)u$。为此，我们将 $f(x)+G(x)u$ 和 $\hat{f}(x)+\hat{G}(x)u$ 间的建模误差 e_m 定义为：

$$e_m=\left(f(x)+G(x)u\right)-\left(\hat{f}(x)+\hat{G}(x)u\right)=\left(f(x)-\hat{f}(x)\right)+\left(G(x)-\hat{G}(x)\right)u \tag{41}$$

其中，向量 e_m 的每个分量由以下公式给出

$$\begin{aligned}e_{mi}&=\left(f_i(x)-\hat{f}_i(x)\right)-\sum_{j=1}^{p}\left(g_{ij}(x)-\hat{g}_{ij}(x)\right)u_j\\&=\left(f_i^*(x)-\hat{f}_i(x)\right)+\sum_{j=1}^{p}\left(g_{ij}^*(x)-\hat{g}_{ij}(x)\right)u_j+\varepsilon_i(x)\end{aligned} \tag{42}$$

$$e_{mi}=w_{f_i}^T(x)\tilde{\theta}_{f_i}+\sum_{j=1}^{p}w_{g_{ij}}^T(x)\tilde{\theta}_{g_{ij}}u_j+\varepsilon_i(x) \tag{43}$$

其中，$\varepsilon_i(x)=\varepsilon_{f_i}(x)+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_{g_{ij}}(x)u_j$ 且 $\tilde{\theta}_{f_i}=\theta_{f_i}^*-\theta_{f_i}$ 且 $\tilde{\theta}_{g_{ij}}=\theta_{g_{ij}}^*-\theta_{g_{ij}}$。

则根据(39)和(41)我们可以得出

$$e_m = -(\dot{s} + Ks + K_0 \tanh(s / \varepsilon_0)) \tag{44}$$

现在，考虑一个二次型成本函数；该函数用于测量未知非线性及其自适应模糊逼近值间的误差，其定义为

$$J(\theta) = \frac{1}{2} e_m^T e_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p} \left(\left(f_i(x) - \hat{f}_i(x) \right) + \sum_{j=1}^{p} \left(g_{ij}(x) - \hat{g}_{ij}(x) \right) u_j \right)^2 \tag{45}$$

应用梯度法，最小化轨迹$\theta_{fi}(t)$和$\theta_{gij}(t)$由以下微分方程生成

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{fi} = -\eta \nabla_{\theta_{fi}} J(\theta) \\ \dot{\theta}_{gij} = -\eta \nabla_{\theta_{gij}} J(\theta) \end{cases} \tag{46}$$

其中η为一正常数参数。因此，梯度下降算法变为

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{fi} = \eta w_{fi}(x) e_{mi} \\ \dot{\theta}_{gij} = \eta w_{gij}(x) u_j e_{mi} \end{cases} \tag{47}$$

由于没有建模误差e_m，我们将利用公式(44)来克服这一设计困难。然后，我们得到

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{fi} = -\eta w_{fi}(x)(\dot{s} + k_i s_i + k_{0i} \tanh(s_i / \varepsilon_0)) \\ \dot{\theta}_{gij} = -\eta w_{gij}(x) u_j \left(\dot{s} + k_i s_i + k_{0i} \tanh(s_i / \varepsilon_0) \right) \end{cases} \tag{48}$$

为提高自适应律(48)在存在逼近误差时的鲁棒性，我们通过引入δ修正项对其进行修正，具体如下(Ioannou & Sun, 1996)

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{fi} = -\eta w_{fi}(x)(\dot{s} + k_i s_i + k_{0i} \tanh(s_i / \varepsilon_0)) - \eta \sigma \theta_{fi} \\ \dot{\theta}_{gij} = -\eta w_{gij}(x) u_j \left(\dot{s} + k_i s_i + k_{0i} \tanh(s_i / \varepsilon_0) \right) - \eta \sigma \theta_{gij} \end{cases} \tag{49}$$

其中δ为一个很小的正常数。在继续之前，我们需引入一个关于逼近误差$\varepsilon(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_G(x) u$的假设。由于$\varepsilon(x)$取决于控制输入$u$，因此假设$\varepsilon(x)$并不常数约束，而受函数约束。

A3: 函数$\varepsilon(x) = \varepsilon_f(x) + \varepsilon_G(x) u$受到如下约束

$$\varepsilon(x) \le \sqrt{\delta_0 + \sum_{i=1}^{p} \delta_i s_i^2}; \quad \delta_i > 0, i = 0, \ldots, p$$

以下定理总结了提出的间接自适应控制方案的稳定性结果。

Theorem 2: 考虑(1)中的系统，其控制律由(37)定义。假设 Assumptions A1-A3 成立，所用模糊系统的自由参数根据(49)更新。则所有闭环信号均为最终一致有界的，跟踪误差被吸引到原点邻域内，其大小可通过控制参数调整。

Remark 4: 由于矩阵$\hat{G}(x)$是线性生成的，如果$\hat{G}(x)$变得不规则，控制律(37)就不能很好定义。为克服这种奇异性问题，我们使用了(Labiod et al., 2005)中的正

则化逆，即$\hat{G}^{-1}(x) \approx \hat{G}^T(x)\left[\gamma_0 I_p + \hat{G}(x)\hat{G}^T(x)\right]^{-1}$，其中$\gamma_0$为一个很小的正常数。

Remark 5: 在没有逼近误差的情况下，即$\varepsilon(x)=0$，通过在(49)中设置$\sigma=0$，可证明跟踪误差是渐近稳定的，即当$t \to \infty$时$e_i(t) \to 0$，对于$i=1,...,p$。

第五章 仿真结果

在本章中，我们将对提出的直接自适应模糊控制方案进行测试，该方案适用于具有以下动力学特性的双关节刚性机器人机械臂的跟踪控制(Labiod et al., 2005; Slotine & Li, 1991; Tong et al., 2000)：

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1+\dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \right\} \qquad (56)$$

其中，

$$\begin{aligned} &M_{11} = a_1 + 2a_3\cos(q_2) + 2a_4\sin(q_2), \\ &M_{22} = a_2, M_{21} = M_{12} = a_2 + a_3\cos(q_2) + a_4\sin(q_2), \\ &h = a_3\sin(q_2) - a_4\cos(q_2) \end{aligned}$$

其中，

$$a_1 = I_1 + m_1 l_{c1}^2 + I_e + m_e l_{ce}^2 + m_e l_1^2, a_2 = I_e + m_e l_{ce}^2, a_3 = m_e l_1 l_{ce}\cos\delta_e, a_4 = m_e l_1 l_{ce}\sin\delta_e$$

仿真中使用的参数值如下

$$m_1 = 1, m_e = 2, l_1 = 1, l_{c1} = 0.5, l_{ce} = 0.6, l_1 = 0.12, l_e = 0.25, \delta_e = 30°$$

令$y=[q_1,q_2]^T$，$u=[u_1,u_2]^T$，$x=\left[q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2\right]^T$且

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = -M^{-1} \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h(\dot{q}_1+\dot{q}_2) \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) \end{bmatrix} = M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

则由(56)得出的机器人系统可表示为

$$\ddot{y} = f(x) + G(x)u \qquad (57)$$

其输入输出形式如(2)所示。由于矩阵M为正定矩阵(Slotine & Li, 1991)，因此它总为正则矩阵，$G(x)=M^{-1}$也为正定矩阵。控制目标是使系统输出q_1和q_2分别跟踪期望轨迹$y_{d1}(t)=\sin(t)$和$y_{d2}(t)=\cos(t)$。为合成直接自适应模糊控制器，使用了两个形式为(12)的模糊系统来生成控制信号u_1和u_2。每个模糊系统都有

$z=\left[e_1(t),\dot{e}_1(t),e_2(t),\dot{e}_2(t)\right]^T$ 作为输入，对于每个输入变量 $z_j, j=1,\ldots,4$,三个高斯隶属度函数定义为

$$\mu_{F_j^1}\left(z_j\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_j+1.25}{0.6}\right)^2\right),\mu_{F_j^2}\left(z_j\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_j}{0.6}\right)^2\right),$$

$$\mu_{F_j^3}\left(z_j\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z_j-1.25}{0.6}\right)^2\right)$$

机器人初始条件为 $x(0)=[0.25\quad 0\quad 0.5\quad 0]^T$，参数估计的初始值 $\theta_1(0)$ 和 $\theta_2(0)$ 设为零。本次仿真中使用的设计参数选择如下：

$$\lambda_1=1,\lambda_2=1,K=\text{diag}[1,1],K_0=\text{diag}[5,5],\varepsilon_0=0.01,\eta=5,\text{and}\,\sigma=0.001$$

关节 1 的仿真结果如图 1 所示，关节 2 的仿真结果如图 2 所示，控制输入信号如图 3 所示。我们可以注意到，实际轨迹收敛于期望轨迹，控制信号是平滑的。这些仿真结果证明了提出的直接自适应控制器的跟踪能力及其对不确定多变量非线性系统控制跟踪的有效性。