模糊控制:
模糊模型参考自适应控制

Noureddine Goléa, Amar Goléa, and Khier Benmahammed

Translator: Liu W.C.

2023.11.26

摘 要

本文研究了连续时间多输入多输出(MIMO)非线性系统的模糊模型参考自适应控制(FMRAC)。所提出的自适应方案采用了 Takagi–Seguno (TS)模糊自适应系统，该系统允许引入有关被控对象运行点的定性知识或这些运行点的分析调节器（如状态反馈）等先验信息。该系统采用比例积分更新律来实现快速参数自适应。利用 Lyapunov 稳定性工具证明了该自适应律的稳定性和鲁棒性。针对双关节机器人机械臂的仿真结果验证了该方法的有效性。

关键字：自适应控制；模糊控制；模型参考；鲁棒性；稳定性；Takagi–Seguno (TS)模糊系统

第一章 引言

自 Procyk and Mamdani 提出自组织控制器[1]以来，人们设计了许多模糊自适应系统，并报道了一些实际成果[2],[3]。模糊自适应系统的优势在于，在构造和训练阶段既使用数值信息，又使用定性信息。此外，模糊系统被证明可用于逼近紧凑空间内任意连续非线性函数（即它们是通用逼近器）[3]-[6]。最近，人们提出了各种模糊、直接和间接自适应系统，并利用 Lyapunov 理论验证其稳定性（如单输入-单输出(SISO)方法见[4]和[7]-[12]，多输入-多输出(MIMO)方法见[13]-[15]）。上述自适应方案的共同点是：i) 模糊控制器试图学习一个未知最优反馈线性化控制器，这限制了可控的被控对象范围，因为反馈线性化控制不适合非最小相位被控对象[16]；ii) 控制器参数使用积分法更新。然而，存在其他可能性，使用比例积分(PI)律[17],[18]可获得更快自适应；iii) 除少数研究 Takagi-Seguno (TS)模糊系统的工作外（如[9]和[13]），到目前为止开发的模糊自适应方案大多使用 Mamdani 模糊系统。与 Mamdani 模糊系统相比，TS 模糊系统给出了更强大的表示方法，即它能用少量规则描述高度非线性被控对象。此外，由于该模型输出具有显式分析形式，因此可引入有关被控对象控制的数学知识，并可使用传统控制理论工具分析其行为。

本研究为多输入多输出非线性连续时间系统引入一种新型稳定 FMRAC。通过直接调整 TS 模糊控制器来实现参考模型跟踪性能。所提出的模糊自适应控制器不像之前的研究那样，需模仿任意先验最优控制律。使用 TS 模糊系统可将被控对象运行点的定性信息引入控制器结构设计（即模糊集定义和规则选择）。如果某些运行点的线性调节器（如状态反馈）可用，则可直接纳入规则后件。控制器参数采用 PI 法更新，参数更新快，因此跟踪误差收敛也快。在 Lyapunov 理论框架下，证明了提出的自适应方案的稳定性和鲁棒性。结果表明，提出的 FMRAC 可学习如何控制非线性被控对象，提供有界内部信号，并实现对稳定参考模型的渐近跟踪，即使被控对象受到外部扰动和参数变化的影响。通过对受摩擦扰动和可变有效负载影响的双关节机器人进行仿真研究，评估了 FMRAC 的性能。仿真结果表明，与鲁棒自适应控制等著名方法相比，FMRAC 计算简单、跟踪性能好且鲁棒性强。

本文的其余部分如下。第二章阐述了 MIMO 非线性系统的模型参考自适应控制问题。第三章利用 TS 模糊自适应控制器开发了 FMRAC 方法。第四章详细分析了所提出的模糊自适应方案的稳定性和鲁棒性。第五章进行了比较仿真研究，

第六章为结论。

第二章 问题表述

考虑如下所述的多输入多输出非线性系统

$$\begin{aligned}&\dot{x}_{1_i}=x_{2_i}\\&\cdots\\&\dot{x}_{(n-1)_i}=x_{n_i}\\&\dot{x}_{n_i}=a_i(x)x+\sum_{j=1}^{p}b_{ij}(x)u_j+\eta_i(t)\end{aligned}\tag{1}$$

其中，$i=1,...,p$，$x=\begin{bmatrix}x_1^T & x_1^T & \cdots & x_P^T\end{bmatrix}^T\in R^n$ 为假设可用的系统状态向量，$x_i^T=\begin{bmatrix}x_{1i} & x_{2i} & \cdots & x_{ni}\end{bmatrix}\in R^{n_i}$，$n=n_1+n_2+...+n_p$。$a_i(x)\in R^n$ 为未知平滑向量函数，$b_{ij}(x)$ 为未知平滑向量函数，η_i 为未知有界外部扰动，$u_j\in R$ 为系统第 j 个输入。此外，假设在相关运行域内 $b_{ii}(x)>0$[也可处理 $b_{ii}(x)$ 为负的情况]。非线性系统(1)可以是非线性被控对象模型[例如，机械臂或电动执行器模型可按(1)中公式表述]，也可以是估计 TS 模糊模型[19]。稳定、可控和线性时变(LTI)参考模型由一组解耦状态方程给出

$$\dot{x}_{m_i}=A_{m_i}x_{m_i}+b_{m_i}r_i\tag{2}$$

其中，$x_{m_i}\in R^{n_i}$ 为第 i 个参考模型状态向量，r_i 为有界参考输入，A_{m_i},b_{m_i} 由以下公式给出

$$A_{m_i}=\begin{bmatrix}0 & I_{n_i-1}\\ & -a_{m_i}\end{bmatrix},\quad b_{m_i}^T=[0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_{n_im}]$$

其中，$a_{m_i}=[a_{1_im} \quad a_{2_im} \quad \cdots \quad a_{n_im}]\in R^{n_i}$。控制问题可表述如下：设计控制输入 $u_j, j=1,...,p$，使被控对象(1)的状态跟踪参考模型(2)的状态，条件为闭环中所有相关信号保持有界。

第三章 模糊自适应控制方法

要设计的自适应控制器为多输入-单输出(MISO) TS 模糊系统[19]，由一组 If-Then 模糊规则组成，其形式为

$$R_k^i:\text{If}\quad v^i\quad \text{is}\quad V_k^i\quad \text{Then}\, u_{f_i}=c_{k1}^ix_1+\cdots+c_{kn}^ix_n+c_{kn+1}^ir_i\tag{3}$$

其中，$k=1,...,m_i,m_i$ 为规则数量，$v^i\in R^{qi}$ 为模糊控制器输入向量，模糊集 V_k^i

对模糊控制器输入空间进行模糊划分（即模糊化算子）。第 i 个模糊控制器输出推理如下：

$$u_{f_i} = \frac{\sum_{k=1}^{m_i} \mu_k^i(v^i)\left(\sum_{j=1}^{n} c_{kj}^i x_j + c_{kn+1}^i r_i\right)}{\sum_{k=1}^{m_i} \mu_k^i(v^i)} \tag{4}$$

其中 $\mu_k^i(v^i)$ 为 v^i 在 V_k^i 中的隶属度等级（即规则 k 的触发强度）。本文假设总存在至少一条激活规则，即 $\sum_{k=1}^{m_i} \mu_k^i(v^i) > 0$。方程(4)也可写成以下简洁形式：

$$u_{f_i} = \xi_i \Theta_i z_i \tag{5}$$

其中，

$$z_i = [x^T \quad r_i]^T$$

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} c_{11}^i & \cdots & c_{1n+1}^i \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m_i 1}^i & \cdots & c_{m_i n+1}^i \end{bmatrix}$$

且 ξ_i 为归一化激活强度向量，其计算公式为

$$\xi_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m_i} \mu_k^i} [\mu_1^i \quad \mu_2^i \quad \cdots \quad \mu_{m_i}^i] \tag{6}$$

在这项工作中，模糊控制器参数更新采用以下 PI 律

$$\Theta_i = \psi_i + \varphi_i \tag{7}$$

其中，ψ_i 和 φ_i 分别为比例项和积分项，其形式为

$$\psi_i = \gamma_{i1} b_{c_i}^T P_i e_i \xi_i^T z_i^T \tag{8}$$

$$\dot{\varphi}_i = \gamma_{i2} b_{c_i}^T P_i e_i \xi_i^T z_i^T \tag{9}$$

其中，$b_{c_i}^T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \in R^{n_i}$，$\gamma_{i1}, \gamma_{i2} > 0$ 为设计常数，对称正定矩阵 P_i 为以下 Lyapunov 方程的解（对于 $i = 1, \dots, p$）：

$$A_{m_i}^T P_i + P_i A_{m_i} = -Q_i \tag{10}$$

由于 A_{m_i} 为 Hurwitz 矩阵，因此保证存在正定矩阵 P_i 和 Q_i [20]。为实现控制目标，控制输入定义如下

$$u_i = u_{f_i} + u_{s_i} \tag{11}$$

其中u_{s_i}为用于克服不确定性的附加控制项。利用(1)和(2)、(11)和(5)，第i个子系统的跟踪误差动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{e}_i = A_{m_i} e_i - b_{c_i} \Big[& a_i(x)x + a_{m_i} x_i - b_{n_i m} r_i + b_{ii}(x)\xi_i \Theta_i z_i \\ & + b_{ii}(x) u_{s_i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{p} b_{ij}(x) u_j + \eta_i(t) \Big]\end{aligned} \tag{12}$$

其中$e_i = x_{m_i} - x_i$为第i子系统跟踪误差。引入(8)和(9)，(12)可表示为

$$\begin{aligned}\dot{e}_i = A_{m_i} e_i - b_{c_i} \Big[& -a_{c_i}(x) z_i + b_{ii}(x)\xi_i \varphi_i z_i + b_{ii}(x)\xi_i \psi_i z_i \\ & + b_{ii}(x) u_{s_i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{p} b_{ij}(x) u + \eta_i \Big]\end{aligned} \tag{13}$$

其中，

$$a_{c_i}(x) = [-(a_i(x) + a_{m_i}) \quad b_{n_i m}] \tag{14}$$

理论研究结果[3]-[6]表明，模糊系统是一种通用逼近器，即可逼近紧凑空间内任意光滑函数。由于这种逼近能力，我们可假设非线性项$a_{c_i}(x) z_i / b_{ii}(x)$可完全由 TS 模糊系统加上建模误差$\omega_i$（$\omega_i$称为最小逼近误差）来描述。这意味着存在参数$\varphi^*$，使得

$$\frac{a_{c_i}(x)}{b_{ii}(x)} z_i = \xi_i \varphi_i^* z_i + \omega_i \tag{15}$$

由于最优参数φ_i^*未知，我们将利用其估计值φ_i。则(15)可改写为

$$\frac{a_{c_i}(x)}{b_{ii}(x)} z_i = \xi_i \varphi_i z_i + \xi_i \tilde{\varphi}_i z_i + \omega_i \tag{16}$$

其中，$\tilde{\varphi}_i = \varphi_i^* - \varphi_i$为参数估计误差。引入(16)，(13)变为

$$\begin{aligned}\dot{e}_i = A_{m_i} e_i - b_{c_i} b_{ii}(x) [& -\xi_i \tilde{\varphi}_i z_i + \xi_i \psi_i z_i + u_{s_i} \\ & + \frac{1}{b_{ii}(x)} \sum_{j=1, j\neq i}^{p} b_{ij}(x) u_j + d_i]\end{aligned} \tag{17}$$

其中，$d_i = (\eta_i / b_{ii}(x)) - \omega_i$为不确定项。

第四章 模糊自适应控制方法

Remark4: 由于开关控制的不连续性，可能会出现抖振。实际上，抖振是不可取的，因为涉及到高控制动作，未建模动力学可能会被激发。为克服该问题，

开关控制(25)可平滑化为[22]

$$u_{s_i}=\left(\frac{1}{\underline{b}_{ii}}\sum_{j=1,j\neq i}^{p}\bar{b}_{ij}\left|u_j\right|+\bar{d}_i\right)\left(1+\frac{\sigma_i}{\beta_i}\right)\cdot\frac{c_i^T P_i b_{c_i}}{\left|e_i^T P_i b_{c_i}\right|+\sigma_i}+\frac{\beta_{ii}(x)}{2\underline{b}_{ii}^2}e_i^T P_i e_i \tag{42}$$

其中σ_i和β_i为正常数。常数σ_i的选择基于工程考虑，以实现可接受跟踪误差。比值$\frac{\sigma_i}{\beta_i}$决定控制增益大小。

第五章 仿真

所提出的 FMRAC 应用于由下式描述的双关节机器人

$$D(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)+F_v(\dot{q})+F_c(\dot{q})=u \tag{49}$$

其中，q,$\dot{q}$和$\ddot{q}$分别为关节角度、速度和加速度的2×1向量。$D(q)$为2×2惯性矩阵，$C(q,\dot{q})$为2×1Coriolis 和离心力向量，$G(q)$为2×1重力力矩向量，$F_v(\dot{q})$和$F_c(\dot{q})$分别为粘性和库仑摩擦力矩，u为2×1控制力矩向量，如页面底部所示。物理参数值为$l=1\mathrm{m}$，$m_1=m_2=1kg$，$g=9.41\mathrm{m/s^2}$。摩擦系数如下：$k_{v2}=k_{c2}=0.5$，$k_{v1}=0.3$，$k_{c1}=0.2$。

$$D=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}m_1l^2+\frac{4}{3}m_2l^2+m_2l^2\cos(q_2) & \frac{1}{3}m_2l^2+\frac{1}{2}m_2l^2\cos(q_2)\\ \frac{1}{3}m_2l^2+\frac{1}{2}m_2l^2\cos(q_2) & \frac{1}{3}m_2l^2\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-m_2l^2\sin(q_2)\dot{q}_2 & -\frac{1}{2}m_2l^2\sin(q_2)\dot{q}_2\\ \frac{1}{2}m_2l^2\sin(q_2)\dot{q}_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}m_1gl\cos(q_1)+\frac{1}{2}m_2gl\cos(q_1+q_2)+m_2gl\cos(q_1)\\ \frac{1}{2}m_2gl\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}$$

$$F_v=\begin{bmatrix}k_{v1} & \dot{q}_1\\ k_{v2} & \dot{q}_2\end{bmatrix}$$

$$F_c=\begin{bmatrix}k_{c1}sign(\dot{q}_1)\\ k_{c2}sign(\dot{q}_2)\end{bmatrix}$$

状态向量 $x^T=\begin{bmatrix}x_1^T & x_2^T\end{bmatrix}, x_1^T=\begin{bmatrix}q_1 & \dot{q}_1\end{bmatrix}, x_2^T=\begin{bmatrix}q_2 & \dot{q}_2\end{bmatrix}$，得出

$$\begin{bmatrix}a_1(x)\\ a_2(x)\end{bmatrix}=D^{-1}[-C\dot{q}-G-F_v]$$

$$\begin{bmatrix}b_{11}(x) & b_{12}(x)\\ b_{21}(x) & b_{22}(x)\end{bmatrix}=D^{-1},\quad \begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=D^{-1}F_c$$

参考模型为

$$A_{m_{1,2}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -16 & -8\end{bmatrix}\quad b_{m_{1,2}}=\begin{bmatrix}0\\ 16\end{bmatrix}$$

对于 $Q_{1,2}=\mathrm{diag}\{15,5\}$，公式(10)的解得出

$$P_{1,2}=\begin{bmatrix}9.7 & 0.47\\ 0.47 & 0.37\end{bmatrix}$$

模糊控制器由以下一组规则定义：

$$\begin{aligned}&\text{FMRAC1}:\\ &\text{If}\ \ x_1\ \ \text{is}\ \ V_k^1\\ &\text{then}\ \ u_{f_1}=c_{k1}^1x_1+c_{k2}^1x_2+c_{k3}^1x_3+c_{k4}^1x_4+c_{k5}^1r_1\\ &\text{FMRAC2}:\\ &\text{If}\ \ x_3\ \ \text{is}\ \ V_k^2\\ &\text{then}\ \ u_{f_2}=c_{k1}^2x_1+c_{k2}^2x_2+c_{k3}^2x_3+c_{k4}^2x_4+c_{k5}^2r_2\end{aligned}$$

其中，V_k^1和$V_k^2, k=1,2,3$为如图 1 所示构造的模糊集。模糊控制器输出为

$$u_{f_1} = \xi_1 \Theta_1 z_1 \tag{49}$$

$$u_{f_2} = \xi_2 \Theta_2 z_2 \tag{50}$$