
**模糊控制：
模糊控制系统的鲁棒镇定问题及其在卡车拖车
倒车控制中的应用**

Kazuo Tanaka and Manabu Sano

Translator: Liu W.C.

2023.11.28

摘 要

根据 Lyapunov 意义下的稳定性定义, 讨论了模糊系统鲁棒镇定问题。考虑两个设计问题: 非鲁棒控制器设计与鲁棒控制器设计。前者为无前件参数不确定性的模糊系统设计问题。后者为有前件参数不确定性的模糊系统设计问题。为实现这两个设计问题, 我们从 Tanaka and Sugeno 提出的基本稳定性条件中推导出四项稳定性条件: 非鲁棒性条件、弱非鲁棒性条件、鲁棒性条件和弱鲁棒性条件。我们从弱鲁棒性条件中引入前件参数不确定模糊控制系统鲁棒稳定性概念。为引入鲁棒稳定性, 我们定义了容许域和变化域, 它们对应于普通控制理论中的稳定裕度。此外, 我们还开发了一种用于计算机仿真卡车拖车倒车的控制系统, 该系统具有非线性和不稳定性。通过应用有前件参数不确定性的模糊系统逼近卡车拖车系统, 并利用鲁棒稳定性的概念, 设计了一种模糊控制器, 它能保证控制系统在某种条件下的稳定性。仿真结果表明, 所设计的模糊控制器能从任意初始位置顺利实现对卡车拖车的倒车控制。

第一章 引言

有关控制系统特性的最重要概念之一是稳定性。由于模糊系统本质上是非线性系统, 因此模糊控制系统的稳定性分析一直很困难。最近报道了一些基于非线性稳定性理论的稳定性技术[1]-[4], 这样, 模糊控制系统的稳定性分析变得容易了。为了将来发展模糊控制理论, 我们须寻找更先进的稳定性理论。构造更先进稳定性理论的一种方法是开发鲁棒稳定性分析技术。本文讨论的是有前件参数不确定性的模糊控制系统鲁棒镇定问题, 如图 1 所示。图 1 中, $W+\Delta W$ 表示有前件参数不确定性(PPU)的模糊控制对象(模糊模型), 其中 ΔW 为未知 PPU。C 表示模糊控制器。在本文中, 模糊模型和模糊控制器由 Takagi and Sugeno's 模型表示, 其后件部分由线性方程描述。鲁棒镇定问题的目的是找出 ΔW 的容许域, 使在 W 和 C 给定时模糊控制系统在大范围内渐近稳定。本文主要考虑 PPU 的鲁棒镇定问题, 因为它是模糊控制系统中的一个特殊问题。另一方面, 我们也可以考虑后件参数不确定性。然而, 后件参数不确定性并不是一个特殊问题, 因为每个后件都能用一个线性方程表示。我们可以利用一般鲁棒控制理论(如 H_∞ 控制), 轻松分析后件参数不确定性的鲁棒镇定问题。因此, 本文将不考虑后件参数不确定性。

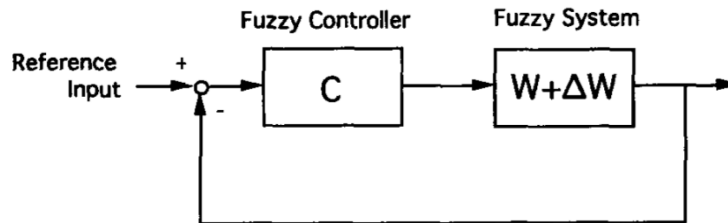


图 1 鲁棒镇定问题

接着, 我们应用鲁棒镇定问题设计一个计算机仿真卡车拖车倒车控制系统。结果表明, 所设计的模糊控制器在一定条件下保证了控制系统稳定性。众所周知, 卡车拖车倒车控制对于除了最熟练卡车司机外的所有卡车司机来说都是一项困难任务, 因为其动力学为非线性和不稳定的。在实际操作中, 为成功倒车到期望

位置, 驾驶员往往需尝试倒车、前进、再倒车、再前进等动作, 最终才能倒车到期望位置。因此, 前进和后退运动有助于卡车拖车定位, 以便成功倒车到期望位置。而更困难的倒车顺序则只允许倒车, 不允许前进。该仿真的具体问题为, 通过操纵转向机构, 将卡车拖车从任意初始位置沿期望轨迹倒车。当然, 只允许倒车。一些文献报道了学习控制, 如模糊控制、神经控制以及它们两者[5]-[8], 实现了计算机仿真卡车拖车的倒车控制。然而, 据我们所知, 这些研究并未分析控制系统的稳定性。在实践中, 保证控制系统的稳定性非常重要。本次仿真的目标为设计一个模糊控制器, 使控制系统在大范围内渐近稳定, 即从任意初始位置都能实现完美倒车控制。

最近, Tanaka and Sugeno[3],[9]推导出了一些保证模糊动态系统稳定性的条件。在第二章中, 通过弱化 Tanaka and Sugeno 提出的基本稳定性条件(BSC)得出一条稳定性条件。我们将该条件命名为弱稳定性条件(WSC)。第三章展示了两个设计问题: 非鲁棒控制器设计与鲁棒控制器设计。前者为无 PPU 模糊系统的设计问题。后者为带 PPU 模糊系统的设计问题。为实现这两个设计问题, 我们推导出四条稳定性条件: 非鲁棒稳定性条件(NSC)、弱非鲁棒稳定性条件(WNSC)、鲁棒稳定性条件(RSC)和弱鲁棒稳定性条件(WRSC)。其中, WRSC 为最重要的条件。因为, 我们可利用 WRSC 为带 PPU 模糊控制系统引入鲁棒稳定性的概念。为引入鲁棒稳定性, 我们定义了容许域和变化域, 它们对应于一般控制理论中的稳定裕度。在第四章中, 我们开发了一个计算机仿真卡车拖车模型的倒车控制系统。我们证明了所设计的模糊控制器能在一定条件下保证控制系统稳定性。

第二章 基本稳定性条件和不稳定性条件

Takagi and Sugeno [10]提出的模糊系统由模糊 IF-THEN 规则描述, 这些规则表示系统的局部线性输入-输出关系。该模糊系统的形式如下:

$$\begin{aligned} \text{Rule: IF } x(k) \text{ is } A_{li} \text{ and } \cdots \text{ and } x(k-n+1) \text{ is } A_{ni} \\ \text{THEN } x_i(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} x^T(k) &= [x(k), x(k-1), \cdots, x(k-n+1)] \\ u^T(k) &= [u(k), u(k-1), \cdots, u(k-m+1)] \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, r$, r 为 IF-THEN 规则数量。 $x_i(k+1)$ 为第 i 条 IF-THEN 规则的输出,

A_{ij} 为一个模糊集。给定一对 $(x(k), u(k))$, 模糊系统最终输出可推理如下:

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(k) \{A_i x(k) + B_i u(k)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(k)} \quad (1)$$

其中,

$$w_i(k) = \prod_{j=1}^n A_{ij}(x(k-j+1))$$

$A_{ij}(x(k-j+1))$ 为 $x(k-j+1)$ 在 A_{ij} 中的隶属度。(1)的自由系统定义为

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(k) A_i x(k)}{\sum_{i=1}^r w_i(k)} \quad (2)$$

其中假设

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r w_i(k) &> 0 \\ w_i(k) &\geq 0, \quad i=1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (3)$$

对于任意 k 。 $A_i x(k)$ 表示的每个后件线性方程被称为“子系统”。Tanaka and Sugeno 提出的保证(2)稳定的基本稳定性条件(BSC)如下。

Theorem 2.1[3]: 基本稳定性条件(BSC): 如果存在一个公共正定矩阵 P , 使得(2)描述的模糊系统的平衡点在大范围内渐近稳定, 即

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad (4)$$

对于 $i=1, 2, \dots, r$, 即所有子系统。当 $r=1$ 时, 该定理简化为线性离散系统 Lyapunov 稳定性定理。Theorem 2.1 给出了保证(2)稳定性的充分条件。我们可直观猜测, 如果一个模糊系统的所有子系统均稳定, 即如果它的每个 A_i 均为稳定矩阵, 则它在大系统中就是渐近稳定的。然而, 一般情况并非如此: 我们将在 Example 2.1 中讨论该问题。注意, (4)的 BSC 只取决于 A_i 。即 BSC 并不取决于 $w_i(k)$ 。该事实是弱化 BSC 时的关键。

[Example 2.1]考虑如下模糊自由系统

Rule1: IF $x(k-1)$ is A_1 THEN $x_1(k+1) = A_1 x(k)$

Rule2: IF $x(k-1)$ is A_2 THEN $x_2(k+1) = A_2 x(k)$

其中,

$$\begin{aligned} x(k)^T &= [x(k) \quad x(k-1)] \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

图 2 展示了 A_1 和 A_2 的隶属度函数。图 3(a)和(b)分别展示了在初始条件 $x(0) = -0.70$ 和 $x(1) = 0.90$ 下以下线性系统的动作: $x(k+1) = A_1 x(k)$ 和

$x(k+1) = A_2 x(k)$ 。由于 A_1 和 A_2 为稳定矩阵，因此这些线性系统是稳定的。但是，由这些稳定线性系统组成的模糊系统并不稳定，如图 3(c)所示。

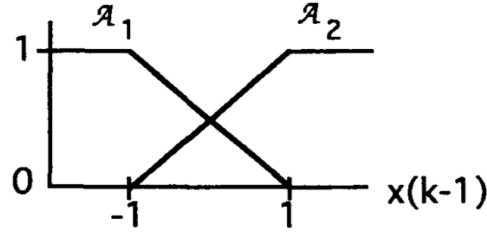


图 2 隶属度函数

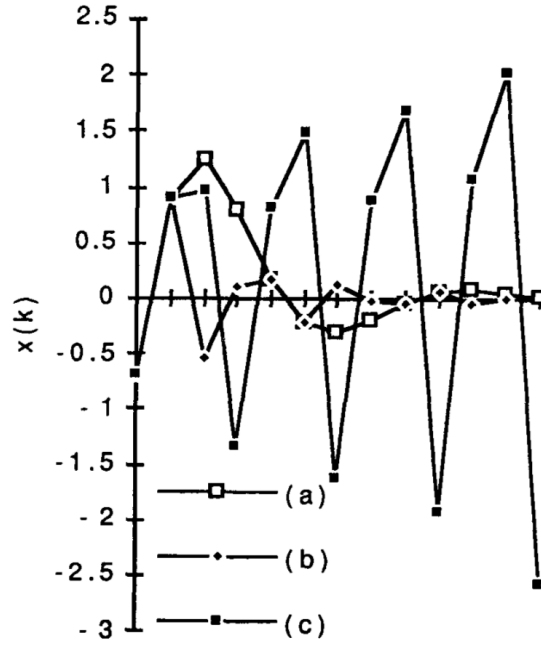


图 3 (a) $A_1 x(k)$ 的行为; (b) $A_2 x(k)$ 的行为; (c) 模糊系统的行为

接着，弱化(4)的 BSC。如果可能的话，我们可能更容易找出 Lyapunov 函数。Theorem 2.2 给出 BSC 弱化条件，即 WSC。

Theorem 2.2: 弱稳定性条件(WSC): 如果存在一个正定矩阵 P ，使得(2)描述的模糊系统的平衡点在大范围内渐近稳定，即

$$\begin{aligned}
 S = & \sum_{i=1}^r w_i(k) w_i(k) \{A_i^T P A_i - P\} \\
 & + \sum_{i < j} w_i(k) w_j(k) \{A_i^T P A_i - P + A_j^T P A_j - P \\
 & - (A_i - A_j)^T P (A_i - A_j)\} < 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

Proof: 直接从 Theorem 2.1 的证明中得出。如上所述，(4)的 BSC 只取决于 A_i 。而(5)的 WBSC 不仅取决于 A_i ，还取决于 $w_i(k)$ 。这意味着 BSC 被弱化了。即，即使不存在满足 BSC 的一般正定矩阵 P ，我们也能找到满足 WBSC 的正定矩阵 P 。我们将在 Example 3.1 中说明。

第三章 非鲁棒控制器和鲁棒控制器设计问题

在上一章中展示了模糊系统稳定性条件。在本章中，我们将把稳定性条件应用于模糊控制器的两个设计问题。考虑如下两种情况。

case1 No premise parameter uncertainty

case2 Premise parameter uncertainty

Cases 1 and 2 分别与非鲁棒控制器设计和鲁棒控制器设计有关。如第二章所示，如果没有 PPU，即(Cases1)，模糊系统的最终输出由(1)计算。反之，如果有 PPU，即(Case2)，最终输出按以下方式计算

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r (w_i(k) + \Delta w_i(k)) \{A_i x(k) + B_i u(k)\}}{\sum_{i=1}^r (w_i(k) + \Delta w_i(k))} \quad (6)$$

其中， $\Delta w_i(k)$ 表示未知 PPU。 $\Delta w_i(k)$ 为一个值，使得

$$\begin{aligned} -1 &\leq \Delta w_i(k) \leq 1, \text{ for all } i \\ w_i(k) + \Delta w_i(k) &\geq 0, \text{ for all } i \\ \sum_{i=1}^r (w_i(k) + \Delta w_i(k)) &> 0 \end{aligned}$$

对于任意 k 。对于任意 k 和 i ，当 $\Delta w_i(k) = 0$ 时，方程(6)变为(1)。

Rule: IF $x(k)$ is A_{li} and...and $x(k-n+1)$ is A_{ni}
THEN $u_i(k) = F_i x(k)$

其中 $i=1,2,\dots,r$ 。该模糊控制器的最终输出计算如下

$$u(k) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(k) F_i x(k)}{\sum_{i=1}^r w_i(k)} \quad (7)$$

其中，我们必须将 $w_i(k)$ 而不是 $w_i(k) + \Delta w_i(k)$ 作为第 i 条规则的权重，因为 $\Delta w_i(k)$ 权重未知。当然，控制器参数即为后件矩阵 F_i 。为保证由(1)[或(6)]和(7)组成的模糊控制系统的稳定性，我们提出了两个非鲁棒稳定性条件和两个鲁棒稳定性条件。前者与非鲁棒控制设计有关(case1)。后者与鲁棒控制器设计有关(case2)。

3.1 非鲁棒稳定性条件 (Case 1)

假设对于任意 k 和 i ， $\Delta w_i(k) = 0$ 。通过将(7)代入(1)，得到

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(k) w_j(k) \{A_i + B_i F_j\} x(k)}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(k) w_j(k)} \quad (8)$$

从(8)开始,

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(k) w_j(k) \{A_j + B_i F_j\} x(k)}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(k) w_j(k)} \\ &= \frac{1}{R} \left[\sum_{i=1}^r w_i(k) w_i(k) G_{ii} x(k) + 2 \sum_{i < j} w_i(k) w_j(k) \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} x(k) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} G_{ij} &= A_i + B_i F_j \\ R &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r w_i(k) w_j(k) \end{aligned}$$

为不失一般性, (9)可改写如下

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{r(r+1)/2} v_i(k) H_i x(k)}{\sum_{i=1}^{r(r+1)/2} v_i(k)} \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} H_{\sum_{t=1}^i (t-1)+i} &= G_{ij}, \quad i = j \\ H_{\sum_{t=1}^j (t-1)+i} &= (G_{ij} + G_{ji})/2, \quad i < j \\ v_{\sum_{t=1}^j (t-1)+i}(k) &= w_i(k) w_j(k), \quad i = j \\ v_{\sum_{t=1}^j (t-1)+i}(k) &= 2w_i(k) w_j(k), \quad i < j \end{aligned}$$

通过将 Theorem 2.1 应用于(10), 得出无 PPU 的模糊控制系统(10)的非鲁棒稳定性条件(NSC)。Theorem 3.1 给出(10)的 NSC。

Theorem 3.1: 非鲁棒稳定性条件(NSC): 如果存在一个公共正定矩阵 P , 使得(10)描述的模糊控制系统的平衡点在大范围内渐近稳定, 即

$$H_i^T P H_i - P < 0 \quad (11)$$

对于 $i=1, 2, \dots, r(r+1)/2$ 。

Proof: 直接由 Theorem 2.1 得出。Theorem 3.1 的非鲁棒性设计问题是在给定 A_j 和 B_j 的情况下, 选择满足一般正定矩阵 P 的 NSC 的 $F_j (j=1, 2, \dots, r)$ 。接着, 将

Theorem 2.2 应用于(10)来弱化 Theorem 3.1 的 NSC。Theorem 3.2 给出一个弱化 NSC，即 WNSC。

Theorem 3.2: 弱非鲁棒稳定性条件(WNSC): 如果存在一个正定矩阵 P ，使得(10)描述的模糊控制系统的平衡点在大范围内渐近稳定，即

$$\sum_{i=1}^{r(r+1)/2} v_i(k)v_i(k)\{H_i^T P H_i - P\} + \sum_{i < j} v_i(k)v_j(k)\{H_i^T P H_i - P + H_j^T P H_j - P - (H_i - H_j)^T P (H_i - H_j)\} < 0 \quad (12)$$

Proof: 直接从 Theorem 2.2 得出。Theorem 3.2 的非鲁棒性设计问题为，在给定 A_j 和 B_j 的情况下，选择满足一般正定矩阵 P 的 WNSC(12)的 $F_j (j=1,2,...,r)$ 。

Example 3.1 表明，即使不存在满足(11)的 NSC 的一般正定矩阵 P ，我们也能找出满足(12)的 WNSC 的正定矩阵 P 。

[Example 3.1]考虑以下模糊系统和模糊控制器

Rule: IF $x(k)$ is A_1 THEN $x_1(k+1) = A_1 x(k) + B_1 u(k)$

Rule: IF $x(k)$ is A_2 THEN $x_2(k+1) = A_2 x(k) + B_2 u(k)$

其中，

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rule: IF $x(k)$ is A_1 THEN $u_1(k) = F_1 x(k)$

Rule: IF $x(k)$ is A_2 THEN $u_2(k) = F_2 x(k)$

其中，

$$F_1 = [-5.0 \quad -3.75]$$

$$F_2 = [-1.72 \quad 0.43]$$

根据 A_1, A_2, B_1, B_2, F_1 和 F_2 ，得出

$$H_1 = H_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -0.62 & -1.04 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

发现不存在共同正定矩阵 P ，即

$$H_i^T P H_i - P < 0 \quad i=1,2,3$$

因为 H_2 为不稳定矩阵。因此，(11)的 NSC 不成立。接着，我们证明(12)的 WNSC 是满足的，如果选择

$$P = \begin{bmatrix} 2.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}$$

作为一个一般正定矩阵 P 。该矩阵 P 是由文献[12]的构造过程选择的。将 $H_1 \sim H_3$ 和 P 代入(12)，得到

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$$

其中，

$$\begin{aligned} \alpha &= -v_1^2(k) - 0.15v_2^2(k) - v_3^2(k) - 2v_1(k)v_2(k) \\ &\quad - 2v_1(k)v_3(k) - 2v_2(k)v_3(k) - 2v_2(k)v_4(k) \\ \beta &= -1.06v_1^2(k) - 1.25v_1(k)v_2(k) + 1.20v_2^2(k) \\ &\quad - 2.13v_1(k)v_3(k) - 1.25v_2(k)v_3(k) - 1.06v_3^2(k) \\ \gamma &= 0.34v_1(k)v_2(k) + 1.43v_2^2(k) + 0.34v_2(k)v_3(k) \end{aligned}$$

为使 S 为负定矩阵，必须满足以下条件

$$\alpha < 0 \quad \text{and} \quad \alpha \times \beta - \gamma \times \gamma > 0$$

很明显 $\alpha < 0$ 。另一方面，

$$\begin{aligned} \alpha \times \beta - \gamma \times \gamma &= 1.06v_1^4(k) + 2.22v_2^4(k) + 1.06v_3^4(k) \\ &\quad + 3.38v_1^3(k)v_2(k) + 1.34v_1^2(k)v_2^2(k) \\ &\quad - 3.19v_1(k)v_2^3(k) \\ &\quad + 4.25v_1^3(k)v_3(k) + 10.1v_1^2(k)v_2(k)v_3(k) \\ &\quad + 2.68v_1(k)v_2^2(k)v_3(k) - 3.19v_2^3(k)v_3(k) \\ &\quad + 6.38v_1^2(k)v_3^2(k) \\ &\quad + 10.1v_1(k)v_2(k)v_3^2(k) + 1.34v_2^2(k)v_3^2(k) \\ &\quad + 4.25v_1(k)v_3^3(k) \\ &\quad + 3.38v_2(k)v_3^3(k) \end{aligned}$$

通过替换

$$v_1(k) = w_1(k)w_1(k)$$

$$v_2(k) = 2w_1(k)w_2(k)$$

$$v_3(k) = w_2(k)w_2(k)$$

在上式中，我们得到

$$\begin{aligned}
 f_1(w_1(k), w_2(k)) = & \\
 & 1.06w_1^8(k) + 6.75w_1^7(k)w_2(k) \\
 & + 9.62w_1^6(k)w_2^2(k) \\
 & - 5.29w_1^5(k)w_2^3(k) \\
 & - 18.4w_1^4(k)w_2^4(k) - 5.29w_1^3(k)w_2^5(k) \\
 & + 9.62w_1^2(k)w_2^6(k) \\
 & + 6.75w_1(k)w_2^7(k) + 1.06w_2^8(k)
 \end{aligned}$$

其中,

$$f_1(w_1(k), w_2(k)) = \alpha \times \beta - \gamma \times \gamma$$

图 4 展示了一个正区域, 即 $f_1(w_1(k), w_2(k)) > 0$ 。从图 4 中可以看出, 当 $0 \leq w_1(k) \leq 1$ 且 $0 \leq w_2(k) \leq 1$ 时,

$$f_1(w_1(k), w_2(k)) > 0$$

这意味着在 $0 \leq w_1(k) \leq 1$ 且 $0 \leq w_2(k) \leq 1$ 时, 即在任意模糊集 A_1 和 A_2 时, 都满足(12)的 WNSC。

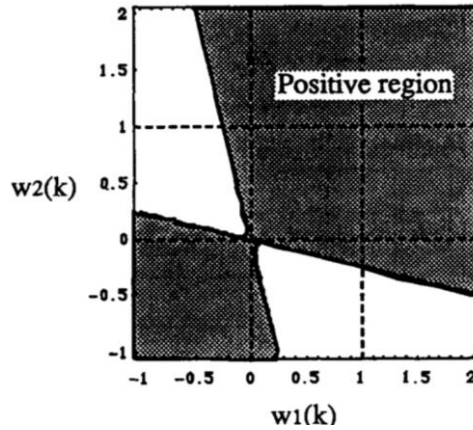


图 4 $f_1(w_1(k), w_2(k))$ 的正区域

3.2 鲁棒稳定性条件 (Case 2)

将(7)代入(6), 我们得到

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (w_i(k) + \Delta w_i(k)) w_j(k) G_{ij} x(k)}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r (w_i(k) + \Delta w_i(k)) w_j(k)} \quad (13)$$

其中,

$$G_{ij} = A_i + B_i F_j$$

为不失一般性, (13)可重写如下。

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{r \times r} v_i(k) H_i x(k)}{\sum_{i=1}^{r \times r} v_i(k)} \quad (14)$$

其中,

$$\begin{aligned} H_{(i-1) \times r + j} &= G_{ij} \\ v_{(i-1) \times r + j}(k) &= (w_i(k) + \Delta w_i(k)) w_j(k) \end{aligned}$$

对于任意 i 和 j 。通过将 Theorem 2.1 应用于(14), 我们得出带 PPU 模糊控制系统(14)的鲁棒稳定性条件(RSC)。Theorem 3.3 给出了(14)的鲁棒稳定性条件。

Theorem 3.3: 鲁棒稳定性条件(RSC): 如果存在一个公共正定矩阵 P , 使得(14)描述的模糊控制系统的平衡点在大范围内渐近稳定, 则

$$H_i^T P H_i - P < 0 \quad (15)$$

对于 $i=1, 2, \dots, r \times r$ 。

Proof: 直接从 Theorem 2.1 得出。Theorem 3.3 的鲁棒性设计问题是, 在给定 A_j 和 B_j 的情况下, 选择满足一般正定矩阵 P 的 RSC(15)的 $F_j (j=1, 2, \dots, r)$ 。显然, (15)意味着(11)。接着, 我们将 Theorem 2.2 应用于(14)来弱化 Theorem 3.3 的 RSC。Theorem 3.4 给出一个弱化 RSC, 即 WRSC。

Theorem 3.4: 弱鲁棒稳定性条件(WRSC): 如果存在一个正定矩阵 P , 使得(14)描述的模糊控制系统的平衡点在大范围内渐近稳定, 即

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{r \times r} v_i(k) v_i(k) \{H_i^T P H_i - P\} \\ &+ \sum_{i < j} v_i(k) v_j(k) \{H_i^T P H_i - P + H_j^T P H_j - P \\ &- (H_i - H_j)^T P (H_i - H_j)\} < 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Proof: 直接从 Theorem 2.2 得出。Theorem 3.4 的鲁棒性设计问题是, 在给定 A_j 和 B_j 的情况下, 选择满足一般正定矩阵 P 的 WRSC 到(16)的 $F_j (j=1, 2, \dots, r)$ 。当然, (16)意味着(12)。图 5 展示了四个条件间的关系。

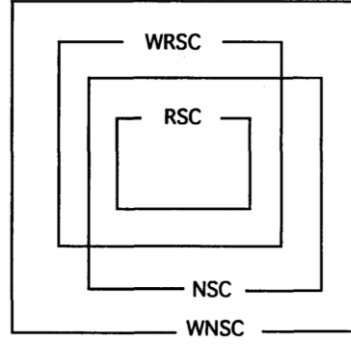


图 5 NSC、WNSC、RSC 和 WRSC 间的关系

3.3 容许域和变化域

为引入鲁棒稳定性，从 Theorem 3.4 的 WRSC 中定义了容许域和变化域，它们对应于一般控制理论中的稳定裕度。当给定一个正定矩阵 P 时，将 H_i 和 $v_i(k)$ 代入(16)并求解(16)的 $\Delta w_i(k)$ ，就能找出一个 $\Delta w_i(k)$ 的容许域(AR)，它能保证带 PPU 的模糊系统(14)稳定性。另一方面，如果给出真实系统的数学模型，我们可找到 $\Delta w_i(k)$ 的变化域(VR)，它展示了真实系统与近似模糊模型间的模型误差。通过引入 AR 和 VR，可定义带 PPU 的模糊系统的鲁棒稳定性。Definition 3.1 展示了鲁棒稳定性定义。我们将在 Example 3.2 中具体解释如何找出 AR 和 VR。

[Definition3.1] 假设 AR 和 VR 分别表示带 PPU 模糊系统的容许域和变化域。如果 AR 完全包括 VR，即

$$VR \subseteq AR \quad (17)$$

可以说，带 PPU 的模糊系统具有鲁棒稳定性。

[Definition 3.2] 如果

$$VR_1 \subset VR_2 \subseteq AR$$

也就是说，具有 VR_1 的模糊系统(FS_1)比具有 VR_2 的模糊系统(FS_2)鲁棒性更强，即 FS_1 的稳定裕度大于 FS_2 的稳定裕度。Example 3.2 给出了鲁棒稳定性的一个示例。

[Example3.2]让我们来看看以下模糊系统和模糊控制器：

$$\text{Rule: IF } x(k) \text{ is } A_1 \text{ THEN } x_1(k+1) = A_1 x(k) + B_1 u(k)$$

$$\text{Rule: IF } x(k) \text{ is } A_2 \text{ THEN } x_2(k+1) = A_2 x(k) + B_2 u(k)$$

其中，

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rule: IF $x(k)$ is A_1 THEN $u_1(k) = F_1 x(k)$

Rule: IF $x(k)$ is A_2 THEN $u_2(k) = F_2 x(k)$

其中,

$$F_1 = [-5.0 \quad -3.75]$$

$$F_2 = [-2.5 \quad 0.63]$$

图 6 展示了模糊集 A_1 和 A_2 的隶属度函数。由 A_1, A_2, B_1, B_2, F_1 和 F_2 可得

$$H_1 = H_4 = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.63 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

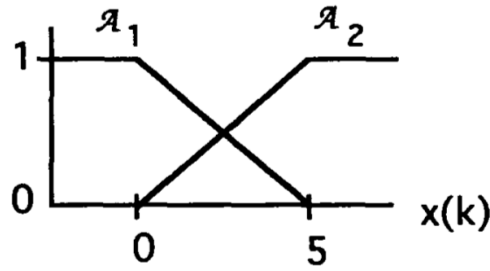


图 6 隶属度函数

结果发现, 不存在一个共同正定矩阵 P , 使得

$$H_i^T P H_i - P < 0, \quad i=1,2,3,4$$

因为 H_2 和 H_3 为不稳定矩阵。因此, 不满足(15)的 RSC。接着, 让我们找到

满足(16)的 WRSC 的 $\Delta w_i(k)$ 的容许域。假设

$$P = \begin{bmatrix} 2.2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}$$

矩阵 P 是根据文献[12]中的构造过程选出的。将 $H_1 \sim H_4$ 和 P 代入(16), 可得

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\alpha &= -v_1^2(k) - 0.45v_2^2(k) + 1.2v_3^2(k) - v_4^2(k) \\
&\quad - 2v_1(k)v_2(k) - 2v_1(k)v_3(k) - 4.2v_2(k)v_3(k) \\
&\quad - 2v_1(k)v_4(k) - 2v_2(k)v_4(k) - 2v_3(k)v_4(k) \\
\beta &= -1.06v_1^2(k) - 0.34v_2^2(k) - 7.6v_3^2(k) - 1.06v_4^2(k) \\
&\quad - 3.09v_1(k)v_2(k) - 0.20v_1(k)v_3(k) - 2.13v_1(k)v_4(k) \\
&\quad - 7.90v_2(k)v_3(k) - 3.09v_2(k)v_4(k) - 0.20v_3(k)v_4(k), \\
\gamma &= v_2^2(k) + 4.40v_3^2(k) - 0.28v_1(k)v_2(k) \\
&\quad + 0.55v_1(k)v_3(k) - 3.58v_2(k)v_3(k) \\
&\quad - 0.28v_2(k)v_4(k) + 0.55v_3(k)v_4(k)
\end{aligned}$$

为使 S 为负定矩阵，必须满足

$$\alpha < 0 \quad \text{and} \quad \alpha \times \beta - \gamma \times \gamma > 0$$

为获得能保证鲁棒稳定性的容许域的图像，假设

$$\begin{aligned}
w_1(k) + w_2(k) &= 1 \\
(w_1(k) + \Delta w_1(k)) + (w_2(k) + \Delta w_2(k)) &= 1
\end{aligned}$$

通过替换

$$\begin{aligned}
v_1(k) &= (w_1(k) + \Delta w_1(k))w_1(k) \\
v_2(k) &= (w_1(k) + \Delta w_1(k))w_2(k) \\
v_3(k) &= (w_2(k) + \Delta w_2(k))w_1(k) \\
v_4(k) &= (w_2(k) + \Delta w_2(k))w_2(k)
\end{aligned}$$

在上述方程中加入关于 α, β, γ 的公式，并消去 $w_2(k)$ 和 $\Delta w_2(k)$ ，即可得出

$$\begin{aligned}
g_1(w_1(k), \Delta w_1(k)) &= -1.0 + 0.55\Delta w_1^2(k) \\
&\quad - 1.1w_1(k)\Delta w_1(k) \\
&\quad + 1.1w_1(k)\Delta w_1^2(k) + 0.55w_1^2(k) \\
&\quad + 0.55w_1^2(k)\Delta w_1^2(k) - 1.1w_1^3(k) \\
&\quad + 1.1w_1^3(k)\Delta w_1(k) + 0.55w_1^4(k) \\
g_2(w_1(k), \Delta w_1(k)) &= 1.06 + 0.96\Delta w_1(k) - 2.34\Delta w_1^2(k) \\
&\quad - 0.96w_1(k) + 5.65w_1(k)\Delta w_1(k) \\
&\quad - 4.69w_1(k)\Delta w_1^2(k) - 1.38w_1^2(k) \\
&\quad - 2.34w_1^2(k)\Delta w_1^2(k) + 4.69w_1^3(k) \\
&\quad - 4.69w_1^3(k)\Delta w_1(k) - 2.34w_1^4(k)
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
g_1(w_1(k), \Delta w_1(k)) &= \alpha \\
g_2(w_1(k), \Delta w_1(k)) &= \alpha \times \beta - \gamma \times \gamma
\end{aligned}$$

图 7 展示了一个负区域，即 $g_1(w_1(k), \Delta w_1(k)) < 0$ 。图 8 展示了一个正区域，即 $g_1(w_1(k), \Delta w_1(k)) > 0$ 。保证鲁棒稳定性的 AR 为负区域和正区域的交集区域。图 9 展示了 AR。考虑具有不同前件参数不确定性的三种模糊系统鲁棒稳定性；

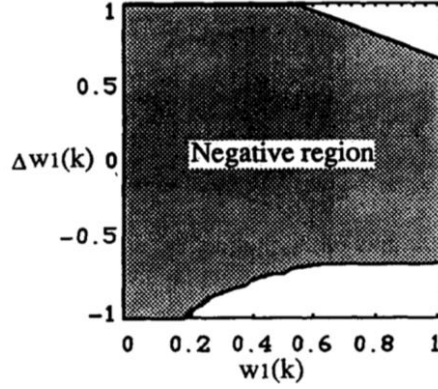


图 7 $g_1(w_1(k), w_2(k))$ 的负区域

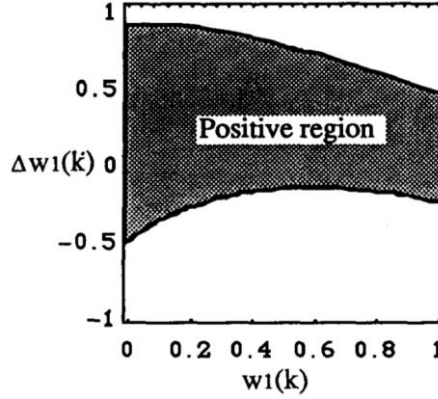


图 8 $g_1(w_1(k), w_2(k))$ 的正区域

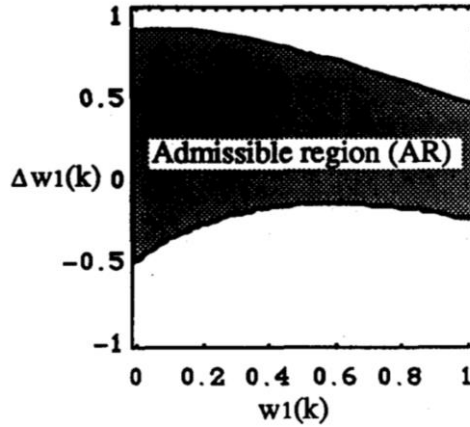


图 9 鲁棒稳定性的容许域(AR)

Case a) $\Delta w_1(k) = 0$

Case b) $w_1(k) + \Delta w_1(k) = A_1(x(k) + 4)$

Case c) $w_1(k) + \Delta w_1(k) = A_1(x(k) - 4)$

对于任意 k 。Case a) 表示模糊系统没有 PPU。为检验 Definition 3.1 定义的鲁

棒稳定性，我们需找到每种情况下的 VR 。图 10 展示了 Case a) 的 VR 。在这种情况下，由于没有 PPU， VR 变成一条直线 ($\Delta w_1(k) = 0$)。通过比较图 9 的 AR 和图 10 的 VR ， $VR \subset AR$ 。因此，该控制系统具有鲁棒稳定性。

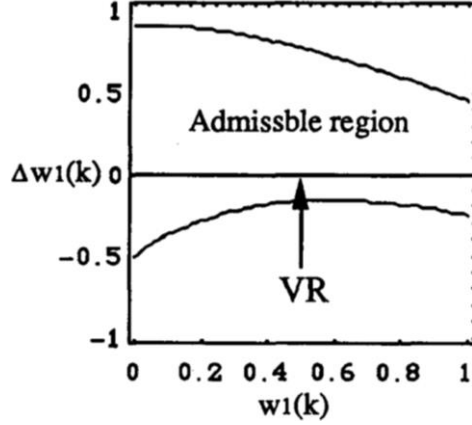


图 10 case a) 的变化域(VR)

在 Case b) 中，

$$\begin{aligned}\Delta w_1(k) &= A_1(x(k) + 4) - A_1(x(k)) \\ &= A_1(x(k) + 4) - w_1(k)\end{aligned}$$

从

$$\begin{aligned}A_1(x(k) + 4) &= 1, \quad x(k) < 4 \\ A_1(x(k) + 4) &= -\frac{1}{5}x(k) + \frac{9}{5}, \quad 4 \leq x(k) \leq 9 \\ A_1(x(k) + 4) &= 0, \quad 9 < x(k)\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}\Delta w_1(k) &= 1 - w_1(k), \quad x(k) < 4 \\ \Delta w_1(k) &= -\frac{1}{5}x(k) + \frac{9}{5} - w_1(k), \quad 4 \leq x(k) \leq 9 \\ \Delta w_1(k) &= -w_1(k), \quad 9 < x(k)\end{aligned}$$

通过替换

$$\begin{aligned}A_1(x(k)) &= w_1(k) = 1, \quad x(k) < 0 \\ A_1(x(k)) &= w_1(k) = -\frac{1}{5}x(k) + 1, \quad 0 \leq x(k) \leq 5 \\ A_1(x(k)) &= w_1(k) = 0, \quad 5 < x(k)\end{aligned}$$

将其代入上述方程并消去 $x(k)$ ，得到

$$\begin{aligned}\Delta w_1(k) &= 1 - w_1(k) \quad 0.2 < w_1(k) \leq 1 \\ \Delta w_1(k) &= 0.8, \quad 0 < w_1(k) \leq 0.2 \\ \Delta w_1(k) &\in [0, 0.8] \quad w_1(k) = 0\end{aligned}$$

根据上述 $w_1(k)$ 和 $\Delta w_1(k)$ 间的关系, 可得到这种情况下的 VR 。图 11 展示了 VR 。通过比较图 9 的 AR 和图 11 中 VR , $VR \subset AR$ 。因此, 该控制系统具有鲁棒稳定性。

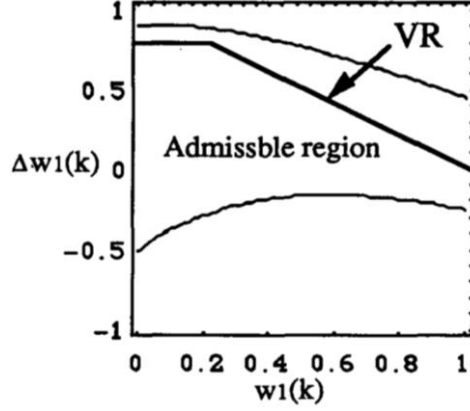


图 11 case b)的变化域(VR)

在 Case c)中,

$$\begin{aligned}\Delta w_1(k) &= A_1(x(k) - 4) - A_1(x(k)) \\ &= A_1(x(k) - 4) - w_1(k)\end{aligned}$$

从

$$\begin{aligned}A_1(x(k) - 4) &= 0, \quad x(k) < -4 \\ A_1(x(k) - 4) &= -\frac{1}{5}x(k) + \frac{1}{5}, \quad -4 \leq x(k) \leq 1 \\ A_1(x(k) - 4) &= 1, \quad 1 < x(k)\end{aligned}$$

按照与 Case b)相同的方法, 得到

$$\begin{aligned}\Delta w_1(k) &= -w_1(k), \quad 0 \leq w_1(k) \leq 0.8 \\ w_1(k) &= -0.80, \quad 0.8 < w_1(k) < 1 \\ \Delta w_1(k) &\in [-0.8, 0], \quad w_1(k) = 1\end{aligned}$$

根据上述关系, 得到 Case c)的 VR 。图 12 展示了 VR 。通过比较 AR 和 VR , $VR \not\subset AR$ 。例如, 当 $x(k) = 1$ 时, $w_1(k) = 0.8$, $\Delta w_1(k) = -0.8$, 即 $(0.8, -0.8)$, 对应于图 12 中的点“P”。该点“P”不属于 AR 。因此, 这种情况下可能无法保证鲁棒稳定性。图 13 展示了 $x(0) = x(1) = 0.5$ 的控制结果。从图 13 中发现, Case c)的控制系统在大范围内不是渐近稳定的。

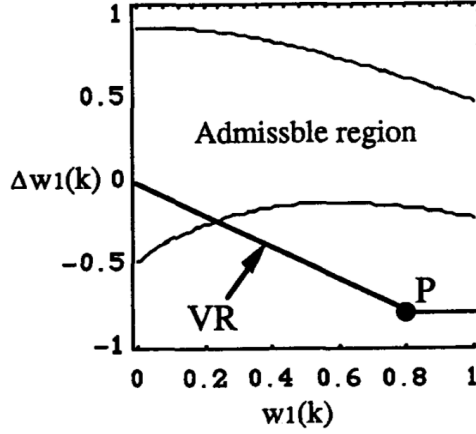


图 12 case c)的变化域(VR)

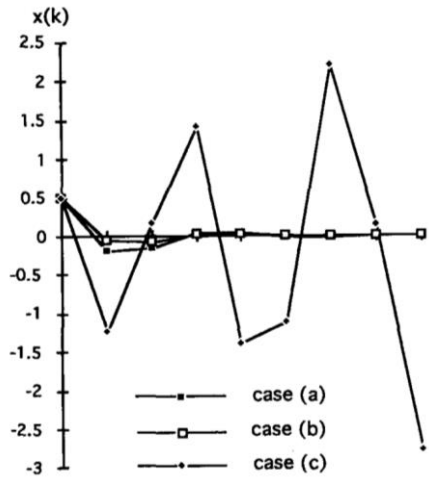


图 13 控制结果

第四章 卡车拖车的鲁棒控制

我们在第三章中展示了鲁棒稳定性分析技术。在本章中，我们将该分析技术应用于计算机仿真卡车拖车的倒车控制。众所周知，卡车拖车的倒车控制十分困难，因为其动力学是非线性且不稳定的。一些论文报道了学习控制，如模糊控制、神经控制以及它们两者[4]-[7]，实现了计算机仿真卡车拖车的倒车控制。然而，据我们所知，这些研究并未分析控制系统的稳定性。在实际应用中，保证控制系统的稳定性非常重要。我们这次仿真的最终目标是设计一个模糊控制器，使控制系统在大范围内渐近稳定，即从所有初始位置都能完美实现倒车控制。

4.1 卡车拖车的模型

我们采用 Ichihashi[7]提出的卡车拖车模型进行仿真。在简化卡车拖车模型后，我们用带 PPU 的模糊模型逼近简化后的模型。Ichihashi 使用的卡车拖车模型如下。

$$x_0(k+1) = x_0(k) + v \cdot t / l \cdot \tan[u(k)] \quad (18)$$

$$x_1(k) = x_0(k) - x_2(k) \quad (19)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + v \cdot t / L \cdot \sin[x_1(k)] \quad (20)$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) + v \cdot t \cdot \cos[x_1(k)] \cdot \sin[\{x_2(k+1) + x_2(k)\} / 2] \quad (21)$$

$$x_4(k+1) = x_4(k) + v \cdot t \cdot \cos[x_1(k)] \cdot \cos[\{x_2(k+1) + x_2(k)\} / 2] \quad (22)$$

其中, $x_0(k)$ 为卡车角度, $x_1(k)$ 为卡车和拖车间的角度差, $x_2(k)$ 为拖车角度, $x_3(k)$ 为拖车尾部的垂直位置, $x_4(k)$ 为拖车尾部的水平位置, $u(k)$ 为转向角。 l 为卡车长度, L 为拖车长度, t 为采样时间, v 为倒车恒定速率。本文中, $l = 2.8\text{m}$, $L = 5.5\text{m}$, $v = -1.0\text{m/s}$, $t = 2.0\text{s}$ 。关于 $x_1(k)$, $90[\text{deg}]$ 和 $-90[\text{deg}]$ 对应于两个 jackknife 位置。图 14 显示了卡车拖车模型及其坐标系。让我们简化一下 Ichihashi 模型。如果 $x_1(k)$ 和 $u(k)$ 始终为较小值, 则 Ichihashi 卡车拖车模型可简化如下。

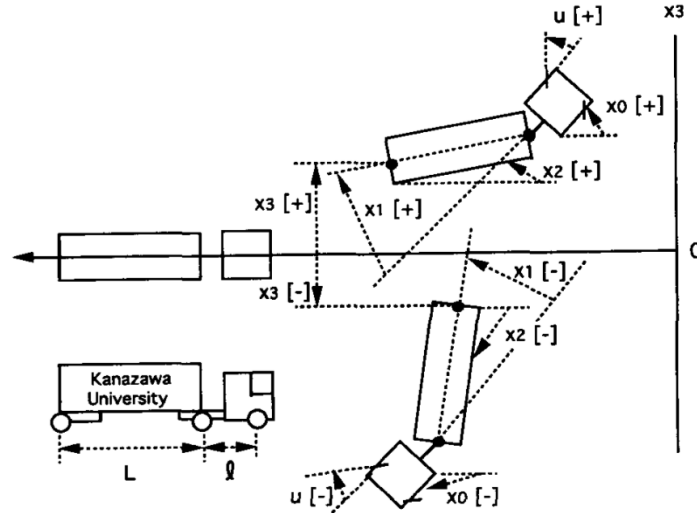


图 14 卡车拖车模型及其坐标系

$$x_0(k+1) = x_0(k) + v \cdot t / l \cdot u(k) \quad (23)$$

$$x_1(k) = x_0(k) - x_2(k) \quad (24)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + v \cdot t / L \cdot x_1(k) \quad (25)$$

$$x_3(k+1) = x_3(k) + v \cdot t \cdot \sin[\{x_2(k+1) + x_2(k)\} / 2] \quad (26)$$

$$x_4(k+1) = x_4(k) + v \cdot t \cdot \cos[\{x_2(k+1) + x_2(k)\} / 2] \quad (27)$$

当然, 当 $x_1(k)$ 或 $u(k)$ 的值较大时, 这种简化模型的动力学可能与 Ichihashi 模型的动力学不完全一致。我们将在仿真中考虑模型误差的影响。在倒车控制的情况下, 控制变量 $x_4(k)$ 并不是必须的, 因为我们控制的目的是让卡车拖车沿期

望轨迹（ $x_3(k)=0$ 的轨迹）倒车，即通过操纵转向角 $u(k)$ 来调节 $x_1(k) \sim x_3(k)$ 。由 (23),(24) 和 (25) 可得

$$x_1(k+1) = (1 - v \cdot t / L) x_1(k) + v \cdot t / l \cdot u(k) \quad (28)$$

另一方面，根据 (25) 和 (26)，

$$x_3(k+1) = x_3(k) + v \cdot t \cdot \sin[x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k)] \quad (29)$$

因此，简化模型可以用 (28)、(25) 和 (29) 来描述。需注意的是，(29) 具有非线性。接着，我们用模糊模型来逼近简化模型。我们使用 Tanaka and Sano [11] 提出的模糊逼近法来逼近简化模型。如上所述，(29) 具有非线性，因为第二项由正弦函数表示，其值随 $x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k)$ 值变化而变化。我们应注意到，任意正弦函数都可用模糊模型来精确描述。

$$0 \leq \sin(x) \leq x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

正弦函数可精确描述为

$$\sum_{i=1}^2 \tilde{w}_i y_i / \sum_{i=1}^2 \tilde{w}_i$$

其中 $y_1 = 0$ ， $y_2 = x$ ，且 $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in [0, 1]$ ，即

$$\sin(x) = \sum_{i=1}^2 \tilde{w}_i y_i / \sum_{i=1}^2 \tilde{w}_i$$

这意味着可利用 y_1 和 y_2 对正弦函数进行插值。通过求解 \tilde{w}_i 的上述方程，得到每个 x 的隶属度值。假设 $\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 = 1$ 。则由于

$$\tilde{w}_1 y_1 + (1 - \tilde{w}_1) y_2 = \sin(x)$$

我们得到

$$\tilde{w}_1 = \frac{\sin(x) - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{\sin(x) - x}{-x} = 1 - \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\tilde{w}_2 = \frac{\sin(x)}{x}$$

Kawamoto[13]报告说，非线性模型可用模糊模型来精确描述。该方法的缺点是前件部分的模糊集一般会变得复杂，即 \tilde{w}_1 和 \tilde{w}_2 表示的模糊集并不总是单模态和正态的。正如 Zadhe 的论文[14]-[16]指出的，模糊集可视为语言变量。这是将模糊集应用于实际系统时最重要的特征。一般来说，需要用普通和单模态（简单）模糊集来表示语言变量概念，如 big and very high, more or less old 等。在该方法

中,虽然实现了精确近似,但却失去了重要特征。另一方面,在 Tanaka and Sano's 方法[11]中,前件部分使用了正态和单模态模糊集,但并不总是能实现精确近似。稍后我们将证明,通过引入 PPU 概念,该方法也能实现精确近似,也就是说,非线性系统可用带 PPU 的模糊模型来精确描述。让我们用模糊模型来逼近简化模型。根据上述关于正弦函数的讨论,

$$0 \leq \sin \left\{ x_2(k) + \frac{v \cdot t}{2L} x_1(k) \right\} \leq x_2(k) + \frac{v \cdot t}{2L} x_1(k) \quad (30)$$

因此,

$$\begin{aligned} x_3(k) &\leq x_3(k) + \sin \left\{ x_2(k) + \frac{v \cdot t}{2L} x_1(k) \right\} \\ &\leq x_3(k) + x_2(k) + \frac{v \cdot t}{2L} x_1(k) \end{aligned}$$

不等式的左侧和右侧分别对应 $x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) = 0$ 和 $x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) = 180^\circ$ 或 $-180^\circ (\pi(\text{rad}))$ 或 $-\pi(\text{rad})$ 。因此,当

$$x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) \cong 0[\text{deg}]$$

简化模型的状态方程近似为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v \cdot t}{L} & 0 & 0 \\ \frac{v \cdot t}{L} & 1 & 0 \\ \frac{v^2 \cdot t^2}{2L} & v \cdot t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v \cdot t}{l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (31)$$

另一方面,当

$$\begin{aligned} &x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) \\ &= 180^\circ \text{ or } -180^\circ (\pi(\text{rad}) \text{ or } -\pi(\text{rad})) \end{aligned}$$

简化模型的状态方程近似为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v \cdot t}{L} & 0 & 0 \\ \frac{v \cdot t}{L} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v \cdot t}{l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (32)$$

然而,我们必须注意到,(32)是不可控的。因此,在这种情况下无法唯一确定控制律。为避免这种情况,我们将简化模型近似为

$$\begin{aligned} & x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) \\ & = 179.997[\text{deg}] \quad \text{or} \quad -179.997[\text{deg}] \end{aligned} \quad (33)$$

而不是

$$x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) = 180[\text{deg}] \quad \text{or} \quad -180[\text{deg}]$$

那么，可以用

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v \cdot t}{L} & 0 & 0 \\ \frac{v \cdot t}{L} & 1 & 0 \\ \frac{d \cdot v^2 \cdot t^2}{2L} & d \cdot v \cdot t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{v \cdot t}{l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (34)$$

其中 $d = 10^{-2} / \pi$ 。当然，该系统在理论上是可控的。根据(31)和(34)，可推导出近似表示卡车拖车动力学的模糊模型如下。

Rule: If $x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k)$ is about 0(rad),

then $x(k+1) = A_1 x(k) + b_1 u(k)$

Rule: If $x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k)$ is about $\pi(\text{rad})$ or $-\pi(\text{rad})$,

then $x(k+1) = A_2 x(k) + b_2 u(k)$

其中 $x(k)^T = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]$ 。规则 1 和规则 2 的方程分别对应于(31)和(34)。

总之，近似模糊模型的动力学表示为

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^2 w_i(k) \{A_i x(k) + b_i u(k)\}}{\sum_{i=1}^2 w_i(k)} \quad (35)$$

其中 $w_i(k)$ 为规则 i 中模糊集的隶属度值。图 15 展示了 about 0rad 和 about $\pi \text{ rad}$ 或 $-\pi \text{ rad}$ 的模糊集。我们将模糊集定义为简单三角形。模糊集是单模态和正态的，然而，近似模糊模型的动力学不能精确描述简化模型动力学。我们来证明，通过使用带 PPU 而不是(35)的模糊模型，可实现精确逼近。简化模型通常可表示为

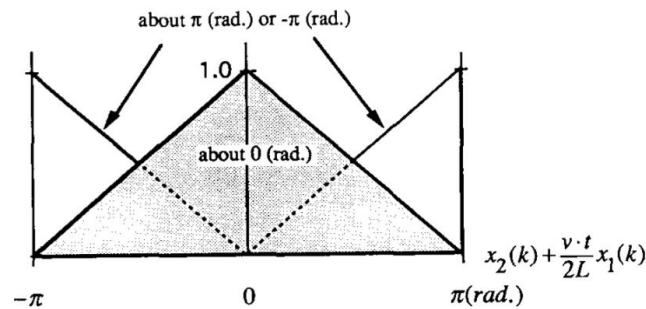


图 15 模糊集

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), u(k))$$

其中, f 为一个非线性函数。则条件为

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_1 u(k) \leq f(\mathbf{x}(k), u(k)) \leq \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_2 u(k)$$

满足以下条件

$$179.997^\circ < x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) < -179.997^\circ$$

因为

$$\begin{aligned} d \left\{ x_2(k) + \frac{v \cdot t}{2L} x_1(k) \right\} &\leq \sin \left(x_2(k) + \frac{v \cdot t}{2L} x_1(k) \right) \\ &\leq x_2(k) + \frac{v \cdot t}{2L} x_1(k) \end{aligned}$$

对于

$$179.997^\circ < x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) < -179.997^\circ$$

这意味着, 简化模型的动力学变化可由两个线性系统 $\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_1 u(k)$ 和

$\mathbf{A}_2 \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_2 u(k)$ 进行插值, 其条件为

$$179.997^\circ < x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) < -179.997^\circ$$

也就是对于³ $\tilde{w}_i(k) \in [0, 1]$ 和任意 k , (36) 精确描述了简化模型动力学。

$$f(\mathbf{x}(k), u(k)) = \frac{\sum_{i=1}^2 \tilde{w}_i(k) \{ \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_i u(k) \}}{\sum_{i=1}^2 \tilde{w}_i(k)} \quad (36)$$

将 $\tilde{w}_i(k)$ 替换为 $w_i(k) + \Delta w_i(k)$, 我们可以得到

$$\mathbf{x}(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^2 (w_i(k) + \Delta w_i(k)) \{ \mathbf{A}_i \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_i u(k) \}}{\sum_{i=1}^2 (w_i(k) + \Delta w_i(k))} \quad (37)$$

其中 $\Delta w_i(k)$ 为一个值, 使得

$$\begin{aligned}
& -1 \leq \Delta w_i(k) \leq 1, \text{ for all } i \\
& w_i(k) + \Delta w_i(k) \geq 0, \text{ for all } i \\
& \sum_{i=1}^r (w_i(k) + \Delta w_i(k)) > 0
\end{aligned}$$

对于任意 k 。方程(37)，一个带 PPU 的模糊系统，精确描述了简化模型的动力学特性

$$179.997^\circ < x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) < -179.997^\circ$$

4.2 控制器设计和鲁棒稳定性分析

我们为(37)描述的卡车拖车倒车系统设计了一个模糊控制器。控制器设计的主要思路是推导出每条控制规则，从而对模糊系统的每条规则进行补偿。图 16 显示了控制器设计的概念。根据近似模糊模型的规则 1 和规则 2，我们分别推导出模糊控制器的规则 1 和规则 2：

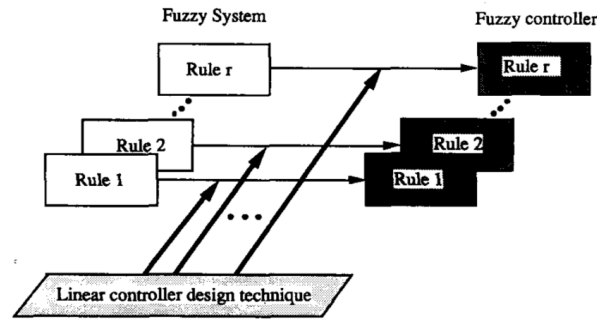


图 16 控制器设计概念

Rule: If $x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k)$ is about 0(rad)

then $u(k) = f_1 x(k)$

Rule: If $x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k)$ is about $\pi(\text{rad})$ or $-\pi(\text{rad})$

then $u(k) = f_2 x(k)$

其中， f_1 和 f_2 为反馈增益。我们在模糊控制器的前件部分使用完全相同的模糊集。控制器设计的目的是确定 f_1 和 f_2 的反馈增益。仿真中使用了以下反馈增益：

$$\begin{aligned}
f_{11} &= 1.2837, f_{12} = -0.4139, f_{13} = 0.0201 \\
f_{21} &= 0.9773, f_{22} = -0.0709, f_{23} = 0.0005
\end{aligned}$$

线性离散系统的 Riccati 方程用于确定这些反馈增益，因为每个后件部分都由一个线性状态方程表示。接着，我们将考虑由简化模型和模糊控制器组成的倒车控制系统的鲁棒稳定性。根据近似模糊模型的 A_1, A_2, b_1 和 b_2 以及模糊控制器的

f_1 和 f_2 ，我们可以得到

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \begin{bmatrix} 0.448 & 0.296 & -0.014 \\ -0.364 & 1 & 0 \\ 0.364 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_2 &= \begin{bmatrix} 0.666 & 0.051 & -0.383 \times 10^{-3} \\ -0.364 & 1 & 0 \\ 0.364 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_3 &= \begin{bmatrix} 0.448 & 0.296 & -0.014 \\ -0.364 & 1 & 0 \\ 0.116 \times 10^{-2} & -0.637 \times 10^{-2} & 1 \end{bmatrix} \\
 H_4 &= \begin{bmatrix} 0.666 & 0.051 & -0.383 \times 10^{-3} \\ -0.364 & 1 & 0 \\ 0.116 \times 10^{-2} & -0.637 \times 10^{-2} & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

如果我们选择 P ，我们可以找到满足(16)WRSC 的 $\Delta w_i(k)$ 的 AR

$$P = \begin{bmatrix} 113.9 & -92.61 & 2.540 \\ -92.61 & 110.7 & -3.038 \\ 2.540 & -3.038 & 0.5503 \end{bmatrix}$$

作为一个一般正定矩阵 P 。该矩阵 P 是由文献[12]的构造过程选择的。通过替换 $H_1 \sim H_4, P$ 和

$$\begin{aligned}
 v_1(k) &= (w_1(k) + \Delta w_1(k))w_1(k) \\
 v_2(k) &= (w_1(k) + \Delta w_1(k))w_2(k) \\
 v_3(k) &= (w_2(k) + \Delta w_2(k))w_1(k) \\
 v_4(k) &= (w_2(k) + \Delta w_2(k))w_2(k)
 \end{aligned}$$

将 $w_2(k)$ 和 $\Delta w_2(k)$ 消去后，我们就可以在(16)中找到满足 WRSC 的 $\Delta w_1(k)$ 的 AR 值。图 25 显示了该 AR 。接着，我们通过比较(28),(25)和(29)描述的简化模型和(37)描述的带 PPU 的近似模糊模型，找到一个 VR 。现在，假设

$$p(k) \equiv x_2(k) + \frac{v \cdot t}{2L} x_1(k) \quad (38)$$

找到一个 VR 就足够了，对于

$$0^\circ \leq p(k) \leq 180^\circ$$

因为每个隶属函数相对于纵坐标($p(k)=0$)是对称的，如图 15 所示。此外， $\sin(p(k))$ 也相对于纵坐标($p(k)=0$)对称。换句话说，对于 $p(k) < 0$ ，也得到相同

VR。图 15 中定义的模糊集 A_1 的隶属函数表示为

$$w_1(k) = -\frac{1}{\pi} p(k) + 1 \quad (39)$$

当

$$0^\circ \leq p(k) \leq 180^\circ \quad (40)$$

根据(30)，我们可推导出以下方程。

$$(w_1(k) + \Delta w_1(k)) \cdot p(k) = \sin p(k) \quad (41)$$

通过求解 $\Delta w_1(k)$ 的上式，我们得到

$$\Delta w_1(k) = \frac{\sin p(k)}{p(k)} - w_1(k) \quad (42)$$

另一方面，通过求解 $p(k)$ 的(39)，

$$p(k) = \pi(1 - w_1(k)) \quad (43)$$

将(43)代入(42)，可得

$$\Delta w_1(k) = -w_1(k) + \frac{\sin(\pi \cdot \{1 - w_1(k)\})}{\pi \cdot \{1 - w_1(k)\}} \quad (44)$$

VR 是在 $0 \leq w_1(k) < 1$ 和 $-1 \leq \Delta w_1(k) \leq 1$ 条件下满足(44)的区域。图 26 显示了 VR。

在下列情况下，VR（线段）完全属于 AR

$$0.0484 < w_1(k) \quad (45)$$

根据(38)和(43)，(45)对应于

$$x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) < 2.99[rad] = 171.29[deg]$$

因此，当出现以下情况时，控制系统至少能满足 WRSC 要求

$$-179.29[deg] < x_2(k) + v \cdot t / \{2L\} \cdot x_1(k) < 171.29[deg] \quad (46)$$

对于任意 k 。换句话说，在(46)的条件下，所设计的模糊控制器保证了由简化模型和模糊控制器组成的控制系统的稳定性，即可以从任意初始位置完美实现倒车控制。在 $\Delta w_1(k) = 0$ 的所有范围内，VR 的线段都接近 $\Delta w_1(k) = 0$ 的线段。这说明近似模糊系统的动力学与简化模型的动力学十分吻合，即实现了相当好的逼近。

4.3 仿真结果

在本次仿真中，我们使用了两种受控对象：Ichihashi 模型和简化模型。表 I

显示了本仿真中使用的四种初始位置情况。Case 2 和 Case 4 要求卡车拖车转弯，以实现完美倒车控制。其中，Case 4 为 jackknife 位置。图 17-20 显示了简化模型中四种初始位置的仿真结果。图 21-24 显示了 Ichihashi 模型中四种初始位置的仿真结果。从仿真结果中可得出以下几点。1) 即使在困难的初始位置，如 Ichihashi 模型和简化模型中的 Case 2 和 Case 4，所设计的模糊控制器也能有效实现倒车控制。2) 简化模型的动力学特性与 Ichihashi 模型的动力学特性非常吻合。没有人可以否认第一点，因为在(46)的条件下，控制系统在大范围内渐近稳定。第二点表明实现了相当好的逼近。

表 1 卡车拖车的初始位置

	$x_1(0)$ [deg]	$x_2(0)$ [deg]	$x_3(0)$ [m]
Case 1	0	0	20
Case 2	0	180	20
Case 3	-45	90	-10
Case 4	-90	135	-10