

---

机器人控制:  
基于数据驱动轨迹规划器的非完整约束/欠驱动  
轮式倒立摆小车间接自适应模糊控制

**Ming Yue, Cong An, Yu Du, and Jianzhong Sun**

**Translator: Liu W.C.**

---

**2023.11.17**

## 摘 要

在本研究中,我们针对一类轮式倒立摆小车系统,研究了基于误差数据的轨迹规划器和间接自适应模糊控制。基于误差动态,闭环轨迹规划器可生成期望速度值。利用倾角子系统的虚拟加速度输入,通过间接自适应模糊控制和滑模控制方法,可构造旋转和纵向子系统的复合控制,从而同时实现速度跟踪和倾角稳定。我们利用 Lyapunov 理论和 LaSalle's 不变性定理严格证明了系统稳定性和跟踪误差信号的收敛性。我们的数值仿真结果证明了所提出的控制策略和算法实现的有效性。

**关键字:** 自适应机构; 数据驱动; 间接模糊控制; 非全局约束/欠驱动; 轮式倒立摆

## 第一章 引言

轮式倒立摆(WIP)小车只有两个主动驱动轮,但几乎可以实现任意运动模式,如前进、转向和停止。在过去几年中,人们对这类小车的开发产生了广泛兴趣(如[1,2,3,4])。由于 WIP 小车具有结构紧凑、操作方便、机动性强和油耗低等优点,因此可用于商业、民用和军事领域的新兴应用。然而, WIP 平台的高效控制是一个具有挑战性的问题,主要原因是: (i) 目前建模技术难以获得精确车辆动力学模型,而车辆动力学模型通常具有高度非线性、时变和耦合特点; (ii) 系统在运动学层面上存在非完整约束,传统控制方法无法直接利用该约束; (iii) 悬架的动力学具有明显欠驱动性,这意味着控制输入数量小于自由度数量。所有这些难题都阻碍了控制界的发展[5,6,7]。

以往的许多研究都集中在为 WIP 小车实现轨迹跟踪的控制方法上,如传统的比例积分微分(PID)控制、反馈稳定、滑模控制和智能控制等。众所周知, PID 控制是一种简单易行方法,但由于 WIP 小车的复杂性,很难选择三个合适增益[8,9]。因此,为提高系统控制性能,基于近似线性模型的反馈稳定被广泛采用。例如,在文献[10]中,提出了一种基于部分线性模型的两级控制器,用于跟踪和稳定车辆姿态,其中内部动力学被隔离。文献[11,12]也采用了类似方法。此外,变结构控制也是控制 WIP 车辆的另一种有效方法。例如, Yue et al.采用滑模方案有效控制了一种具有类似下摆的悬架两轮小车,其移动平台与 WIP 小车十分相似[13]。然而,这些控制器大多依赖于系统模型信息,而在实际应用中很少能获得这些信息。还应提及的是,许多先进的建模和辨识技术可用于基于模型的控制设计(例如,[14,15,16]),但仍难以获得对车辆的实时精确描述。智能控制,包括模糊控制和神经网络(NN)的使用,已被证明是处理复杂动态系统时进行控制设计的有效技术(如[17,18,19,20])。其中, Li et al.开发了一种带有线性动力学补偿器的输出反馈自适应 NN 控制器,以实现车体稳定动力学平衡,同时还能实现对期望轨迹的跟踪[21,22]。此外,文献[23]还研究了一种基于更新律的自适应模糊逻辑控制系统,用于 WIP 小车,其控制性能得到改善。基于这些研究,智能控制显然是控制 WIP 小车的有效工具,因为 WIP 小车具有复杂动力学特性和非完整性约束/欠驱动行为。

此外,与上述控制方法相比,模糊控制由于不依赖于精确数学模型,而且能有效综合操作员的成功经验,利用语言指令,通常能达到更好控制效果

[24,25,26,27,28]。一般来说,模糊控制包括间接模糊控制和直接模糊控制。与直接模糊控制基于实际系统性能与期望性能水平之间的误差不同,间接模糊控制应用普遍逼近定理来获取被控对象系统模型,适合在整个欠驱动系统中综合其他控制技术形成复合控制器[29,30]。令人惊讶的是,直接模糊控制已被广泛用于控制 WIP 小车(如[31,32,33]),但很少有研究采用间接模糊方案来控制此类轮式移动平台。除了 WIP 小车的欠驱动行为外,当车辆跟踪参考轨迹时,非完整约束是另一个不可避免的问题。如果轮式移动平台在车轮地形满足纯滚动条件情况下移动,则该约束无法整合为线性形式[34,35]。根据 Brockett 渐近稳定必要条件,不存在能使移动平台渐近稳定的连续时变状态反馈控制器[36]。对于 WIP 小车来说,悬架系统欠驱动和非完整约束的组合是控制系统综合过程中一项挑战性任务。除少数先前的研究外,跟踪目标都集中在跟踪纵向和旋转速度上,而位置轨迹的跟踪则在笛卡尔坐标系内描述。因此,同时解决 WIP 小车的欠驱动和非完整约束问题仍是一个开放性问题,这也是本研究的动机所在。

在本研究中,我们提出了一种不同于传统路径规划的新型数据驱动闭环轨迹规划器,它分别从运动学和动力学层面解决了非完整约束约束和欠驱动控制问题。在轨迹规划器方面,我们假设一个具有期望姿态值的理想车辆,然后根据姿态跟踪误差数据建立误差动态,从而应用 Lyapunov 稳定性理论来保证闭环规划器的稳定性。值得注意的是,闭环轨迹规划器类似于基于车辆运动学的闭环系统,规划器的输出被视为车辆动力学系统期望纵向和旋转速度。这种处理方法允许数据驱动的轨迹规划器实时生成期望值,闭环反馈特性可增强规划器系统的鲁棒性,以应对不可避免的参数变化和不可预测的外部扰动。此外,我们还通过引入虚拟控制方法提出了复合控制,以解决欠驱动问题。为研究欠驱动行为,我们将整个系统划分为三个子系统,即旋转速度、纵向速度和倾角子系统,其中后两个子系统由于只受一个输入控制,因此被一起考虑。在我们的进一步分析中,假定车辆轴中点的加速度是一个虚拟控制输入,可将欠驱动行为转化为驱动行为。因此,我们提出了一种结合了间接模糊控制和变结构技术的复合控制器,它能保证同时跟踪期望纵向速度并稳定悬架倾角。总之,本研究的主要贡献如下。

1) 通过 Lagrangian 方法提出了一个动力学模型,它能清晰描述 WIP 小车的耦合效应、时变行为和非线性特性。2) 基于跟踪误差,提出了闭环轨迹规划器,可分别从运动学和动力学层面解决非完整性约束和欠驱动问题。3) 根据间接模糊控制和变结构技术构造了一个复合控制器,其中提出了虚拟加速度输入的概念,以便同时跟踪速度和稳定倾角。

本文的其余部分组织如下。在第二章中,我们介绍了 WIP 小车的数学模型,并阐述了问题的提出。第三章介绍误差数据驱动理论,并描述闭环轨迹规划系统。第四章解释了间接自适应模糊控制方法,并详细介绍了设计过程中涉及的程序。在第五章中,我们考虑了三个主要子系统的具体设计方法,并介绍了数值仿真结果,以验证所提出的控制策略的有效性。在第七章中,我们给出了结论。

## 第二章 问题的提出和前言

在本章中,我们将描述 WIP 小车的运动学和动力学,并介绍一些初步细节和公式。用于描述车辆系统的车辆参数和变量如图 1 和表 1 所示。

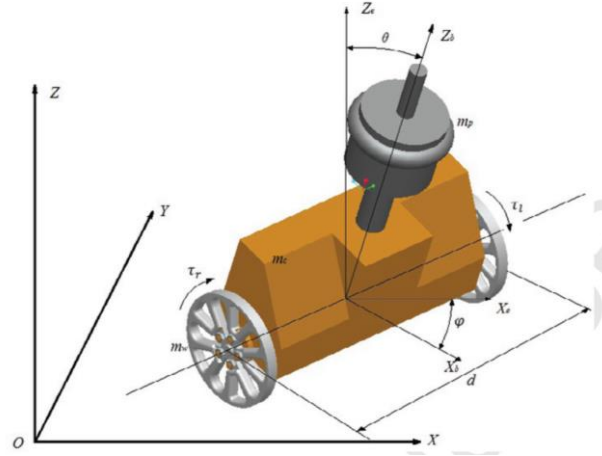


图 1 显示车辆特征参数的示意图

表 1 与 WIP 小车有关的关键参数

$x, y$	小车在 XOY 平面上的当前位置
$\theta_l, \theta_r$	左右车轮的旋转角度
$\theta$	车身倾角
$\varphi$	车辆旋转角度
$v$	车辆纵向速度
$w$	车辆旋转速度
$m_p$	倒立摆质量
$m_c$	底盘质量
$m_w$	每个车轮的质量
$J_v$	底盘和摆锤绕 Z 轴的惯性矩
$J_c$	底盘绕 Y 轴的惯性矩
$J_w$	车轮相对于 Y 轴的惯性矩
$r$	车轮半径
$l$	车身重心到车轮轴线的距离
$g$	重力加速度
$d$	两个车轮沿轴心的距离

## 2.1 一般欠驱动系统

受非完整约束的欠驱动车身的 WIP 小车动力学特性可表示为

$$M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)\tau + A^T\lambda \quad (1)$$

其中  $q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [x \ y \ \varphi \ \theta]^T \in R^4$  为广义坐标向量，其元素是独立的， $M(q) \in R^{4 \times 4}$  表示惯性矩阵， $V_m(q, \dot{q})\dot{q} \in R^4$  为 Coriolis 力和离心力矩阵， $G(q) \in R^4$  为重力向量， $B(q) \in R^{4 \times 2}$  为相对于控制力的矩阵， $\tau \in R^2$  为控制输入向量， $A^T\lambda \in R^4$  为约束力向量，其中  $A^T \in R^4$  为 Jacobian 矩阵， $\lambda \in R$  包含与系统约束相对应的拉格朗日乘子。此外，如果这是一个不完全可控系统，则整个系统可分为两部分：驱动子系统和欠驱动子系统。我们定义  $q = [q_a \ q_u]^T$ ，其中  $q_a$  和  $q_u$  分别表示驱动状态变量和欠驱动状态变量，系统(1)可重写为

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_a & M_{au} \\ M_{ua} & M_u \end{bmatrix}; V_m(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} V_a & V_{au} \\ V_{ua} & V_u \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} G_a \\ G_u \end{bmatrix}; B(q) = \begin{bmatrix} B_a & B_u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \tau = \begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中， $M_a$  和  $M_u$  分别为相对于驱动部分和欠驱动部分的惯性子矩阵。 $M_{au}$  和  $M_{ua}$  为两个子系统的耦合惯性矩阵。同样， $V_a$  和  $V_u$  表示向心力和 Coriolis 力子矩阵， $V_{au}$  和  $V_{ua}$  与它们的耦合效应有关。 $G_a$  和  $G_u$  分别为驱动子系统和欠驱动子系统的相应重力力矩项。 $\tau_a$  为驱动子系统的控制输入向量[37,38]。

## 2.2 简化动力学

就驱动子系统而言，系统约束（包括非完整约束）可描述为

$$S_a^T(q)\dot{q}_a = 0 \quad (2)$$

其中  $S_a$  为与系统约束相关的运动学约束矩阵。约束的影响可视为流形  $\Omega_n$  上动力学约束，如下所示。

$$\Omega_n = \{(q_a, \dot{q}_a) | S_a^T \dot{q}_a = 0\} \quad (3)$$

假设辅向量场  $S_a$  所跨的共分布的湮灭子是一个光滑的非奇异分布  $\Delta$ 。该分布  $\Delta$  由一组光滑且线性独立的向量场  $A_1(q)$  和  $A_2(q)$  所跨，即  $\Delta = \text{span}\{A_1(q), A_2(q)\}$ ，其局部坐标满足以下关系：

$$S_a^T A^T = 0 \quad (4)$$

其中  $A=[A_1(q), A_2(q)]$ ，我们注意到  $A^T A$  为满秩的。约束(2)意味着向量  $v$  的存在，使得

$$\dot{q}_a = S_a(q)v \quad (5)$$

此外，令  $z=[v \ \dot{q}_u]^T$  为系统的新坐标。通过对(5)进行时间微分，将结果代入系统(1)，并在方程两边乘以  $S(q)=\text{diag}[S_a^T \ I]$ ，以消除运动学非全局约束  $A^T \lambda$ ，我们可得到 WIP 小车的降阶动力学如下：

$$\bar{M}(z)\dot{z} + \bar{V}_m(z, \dot{z})z + \bar{G}(z) = \bar{B}(z)\tau \quad (6)$$

其中，

$$\begin{aligned} \bar{M}(z) &= \begin{bmatrix} S_a^T M_a S_a & S_a^T M_{au} \\ M_{ua} S_a & M_u \end{bmatrix}; \bar{V}_m(z, \dot{z}) = \begin{bmatrix} S_a^T M_a \dot{S}_a + S_a^T V_a S_a & S_a^T V_{au} \\ M_{ua} \dot{S}_a + V_{ua} S_a & V_u \end{bmatrix}; \\ \bar{G}(z) &= \begin{bmatrix} S_a^T G_a \\ G_u \end{bmatrix}; \bar{B}(z) = \begin{bmatrix} S_a^T B_a \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### 2.3 WIP 小车动力学

由于 WIP 小车的上述变量是耦合在一起的，而且它们表现出很强非线性特征，因此很难在移动平台上建立此类动力学模型。在本节中，我们将利用 Lagrangian-Eulerian 法推导出一个动力学模型，以便对系统进行综合分析。

**Assumption 1.** 移动平台的车轮与地面间有足够的摩擦力，因此非完整约束假设成立。

定义  $q=[q_a \ q_u]^T$ ，其中  $q_a=[x \ y \ \varphi]^T$ ， $q_u=\theta$ 。如果满足纯滚动约束，则左右车轮的速度受  $\dot{\theta}_r = \frac{v}{r} + \frac{\omega d}{2r}$  和  $\dot{\theta}_l = \frac{v}{r} - \frac{\omega d}{2r}$  控制。此外，系统(1)可转化为简化动力学(6)，其中  $q$  和  $z=[\omega \ v \ \dot{\theta}]^T$  之间的传递矩阵可表述如下。

$$S(q) = \begin{bmatrix} S_a(q) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

因此，由于  $S^T A^T = 0$ ，可从动力学模型(1)中消除非完整约束。利用上述计算过程，最终可得到与(6)形式相同的降阶动力学模型，其中的具体矩阵如下：

$$\bar{M}(q) = \begin{bmatrix} m_v & 0 & m_p l \cos \theta \\ 0 & J_\varphi + m_p l^2 \sin^2 \theta & 0 \\ m_p l \cos \theta & 0 & J_c + m_p l^2 \end{bmatrix}; \bar{B} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -d & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; u_a = \begin{bmatrix} \tau_l \\ \tau_r \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_m(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_p l \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & -\frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\theta} \sin 2\theta & -\frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\phi} \sin 2\theta \\ 0 & -\frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\phi} \sin 2\theta & 0 \end{bmatrix}; G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_p g l \sin \theta \end{bmatrix}$$

其中,  $J_\phi = J_v + \frac{1}{2}(m_w + \frac{J_w}{r^2})d^2$  和  $m_v = m_p + m_c + 2m_w + \frac{2J_w}{r^2}$ , 这两个参数都是为简化而引入的。值得注意的是, 系统中已消除了非完整约束。

Property 1. 惯性矩阵  $\bar{M}$  为对称正定矩阵。

Property 2. 矩阵  $\dot{\bar{M}} - 2\bar{V}_m$  为斜对称的。

## 2.4 三个子系统

请注意, 车辆的纵向和旋转运动是由左右车轮扭矩之和与差值驱动的。因此, 我们将新的控制输入定义如下。

$$\tau_v = \tau_l + \tau_r \quad (14)$$

$$\tau_\omega = -\tau_l + \tau_r \quad (15)$$

根据(6), 车辆动力学与四个变量有关: 车辆旋转速度  $\omega$ 、纵向速度  $v$ 、倾角  $\theta$  及其角速度  $\dot{\theta}$ 。为便于控制, 可将降阶系统(6)划分为以下三个子系统:

1)  $\omega$  子系统

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= f_\omega(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) + g_\omega(\theta) \\ &= -\frac{m_p l^2 \dot{\phi} \dot{\theta} \sin 2\theta}{J_\phi + m_p l^2 \sin^2 \theta} + \frac{d}{r(J_\phi + m_p l^2 \sin^2 \theta)} \tau_\omega \end{aligned} \quad (16)$$

1)  $v$  子系统

$$\begin{aligned} \dot{v} &= f_v(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) + g_v(\theta) \\ &= \frac{1}{\Omega} \left( J_\theta m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_p^2 l^3 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos^2 \theta - m_p^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta \right) + \frac{J_\theta}{Qr} \tau_v \end{aligned} \quad (17)$$

1)  $\theta$  子系统

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= f_\theta(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) + g_\theta(\theta) \\ &= \frac{1}{2\Omega} \left( 2m_v m_p g l \sin \theta + m_v m_p l^2 \dot{\phi}^2 \sin 2\theta - m_p^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin 2\theta \right) - \frac{m_p l \cos \theta}{\Omega r} \tau_v \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $J_\theta = J_c + m_p l^2$ ,  $\Omega = m_v J_\theta - m_p^2 l^2 \cos^2 \theta$ 。因此, 我们得出结论:

$J_\phi + m_p l^2 \sin^2 \theta > 0$ , 且  $\Omega = m_v J_\theta - m_p^2 l^2 \cos^2 \theta$  对于任意  $\theta \in R$  也为正值。因此, 对于实际机械系统, 三个子系统(16-18)在全局范围内没有奇异点。

### 第三章 动力学轨迹规划

这三个子系统基本上是在系统动力学层面上建立的，但在实际应用中，期望轨迹通常是以直角坐标为基准的。因此，除要求车体保持在直立位置外，WIP 小车的  $x$ 、 $y$  和  $\varphi$  所描述的实际构型中心应分别快速收敛到  $x_d$ 、 $y_d$  和  $\varphi_d$  期望参考轨迹。因此，具有降阶系统的 WIP 小车的轨迹跟踪控制目标可概括为：找到控制输入  $\tau_\omega$  和  $\tau_v$ ，使得  $t \rightarrow \infty$  时， $\omega \rightarrow \omega_d$  和  $v \rightarrow v_d$ ，以及车体保持直立位置的非稳定平衡，即  $t \rightarrow \infty$  时， $\theta \rightarrow 0$ 。

**Assumption 2.** 所有期望轨迹，包括  $\omega_d$  和  $v_d$ ，以及它们的三阶时间导数，在任意  $t \geq 0$  时都是连续可微且有界的。

我们提出了一种轨迹规划器，可用于为内部动力学系统生成期望信号，而姿态误差将在有限时间内趋于零。需指出的是，从另一个角度来看，该规划器可被视为一个闭环控制系统。轨迹规划器如图 2 所示。

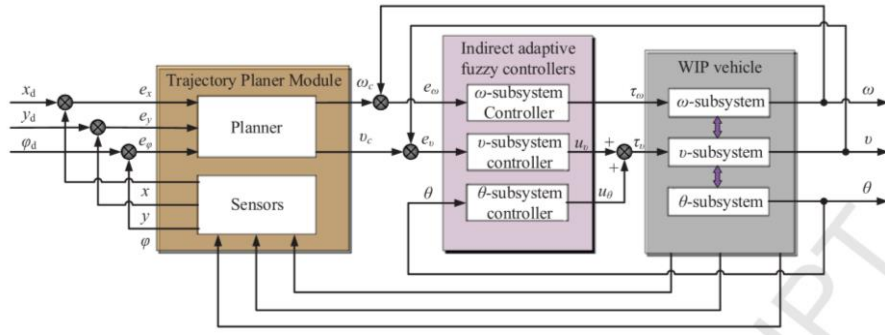


图 2 间接自适应模糊控制系统示意图

令  $\bar{q}(t)=[x, y, \varphi]^T$  为实际车辆姿态信息集合中的一个向量，并定义  $\bar{q}_d(t)=[x_d \ y_d \ \varphi_d]^T$  为描述需要跟踪的假定车辆的向量，则跟踪误差空间  $\bar{q}_e = \bar{q}_d - \bar{q} = [x_e \ y_e \ \varphi_e]^T$  可按以下方式推导出来。值得注意的是，从控制器角度来看，应找到一个合适输入  $v_c = [v_c \ \omega_c]^T$  来实现目标  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{q}_e(t) = 0$ ，但从规划器角度来看，规划器应生成  $v_c$  作为降阶子系统(16)-(18)的期望轨迹。通过进一步的计算和分析，可得到姿态误差如下。

$$\bar{q}_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \varphi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \varphi_d - \varphi \end{bmatrix} \quad (19)$$

通过微分(19)并考虑非完整约束(即  $\dot{x} \sin \varphi = \dot{y} \cos \varphi$ )，可实现如下姿态误差动力学。



$$\dot{\bar{q}}_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\phi}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \cos \varphi_e + \omega y_e - v \\ v_d \sin \varphi_e - \omega x_e \\ \omega_d - \omega \end{bmatrix} \quad (20)$$

**Remark 1.** 注意,  $\omega_c$  和  $v_c$  与  $\omega_d$  和  $v_d$  的期望值不同。在实践中, 实际车辆的期望轨迹总是由车辆姿态变量  $x_d$ 、 $y_d$  和  $\varphi_d$  给出, 这可进一步提前计算出期望速度  $\omega_d$  和  $v_d$ , 但这种变换是不可逆的。轨迹规划器将生成  $\omega_c$  和  $v_c$ , 以提供降阶子系统和车辆姿态系统之间的连接。

### 3.2 闭环规划器的实现

如果轨迹规划器采用闭环结构, 则它将具有很强的鲁棒性, 既能克服初始偏差, 又能克服外部扰动。根据各种研究, 可采用直接 Lyapunov 方法 (如[34,35]) 推导出的控制器作为 WIP 小车的规划器, 具体如下:

$$\begin{bmatrix} v_c \\ \omega_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \cos \varphi_e + \lambda_3 x_e \\ \omega_d + \lambda_1 v_d y_e + \lambda_2 \sin \varphi_e \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中,  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  为正常数。

## 第四章 间接自适应模糊控制

由于模糊控制不依赖于控制对象精确模型, 因此被广泛用于复杂非线性系统。此外, 模糊逻辑可将专家或操作员的经验融合到系统控制器中, 从而使闭环系统在不确定扰动下更加智能和灵活。模糊控制可分为直接控制法和间接控制法。就自适应而言, 间接模糊控制优于直接控制法, 因为控制器中使用的系统模型信息可在线更新, 从而减少了对精确机械参数的依赖[39,40]。

### 4.1 问题描述

以下为一个  $n$  阶非线性系统:

$$\bar{x}^{(n)} = f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(n-1)}) + g(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, \dots, \bar{x}^{(n-1)})u \quad (25)$$

其中,  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  为未知非线性函数,  $u \in R^n$  为控制输入。假设期望值为  $\bar{y}_m$ 。

则跟踪误差可定义为  $e = \bar{y}_m - \bar{y} = \bar{y}_m - \bar{x}$ , 其值为  $e = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]^T$ 。如果将反馈增益设为  $k = [\bar{k}_n, \dots, \bar{k}_1]^T$ , 其中  $\bar{k}_i$  为系数, 可使多项式  $s^n + \bar{k}_1 s^{n-1} + \dots + \bar{k}_n$  的所有根都在复平面的左半部分, 则控制器可按如下方式设计。

$$u^* = \frac{1}{g(x)} \left[ -f(x) + \bar{y}_m^{(n)} + k^T e \right] \quad (26)$$

将(26)代入(25)，我们得出

$$e^{(n)} + \bar{k}_1 e^{(n-1)} + \cdots + \bar{k}_n e = 0 \quad (27)$$

考虑到k的特性，这意味着当 $t \rightarrow \infty$ 时， $e(t) \rightarrow 0$ ，即系统输出 $\bar{y}$ 可逐渐收敛到其期望输出 $\bar{y}_m$ 。

## 4.2 模糊逻辑机制

在实际应用中，要事先获得 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 的精确值几乎是不可能的，因此可采用模糊逻辑机制，根据 $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 的相应更新值 $\hat{f}(\cdot)$ 和 $\hat{g}(\cdot)$ 在线估计其真实值。根据模糊逻辑机制的普遍逼近定理，可将估计误差尽可能控制在期望有界范围内。以 $\hat{f}(x|\Theta)$ 为例，其估计值可按以下三个主要步骤进行计算。

Step 1 对于变量 $\bar{x}_i (i=1,2,\dots,n)$ ，定义模糊集 $A_i^{l_i} (l_i=1,2,\dots,p_i)$ ，其中 $p_i$ 为模糊集个数。

Step 2 利用数量为 $\prod_{i=1}^n p_i$ 的模糊规则构造模糊逻辑系统 $\hat{f}(x|\Theta)$ ，如下所示：

$$R^{(j)} : \text{IF } \bar{x}_1 \text{ is } A_1^{l_1} \text{ and } \cdots \text{ and } \bar{x}_n \text{ is } A_n^{l_n} \text{ THEN } \hat{f} \text{ is } E^{l_1 \cdots l_n} \quad (28)$$

其中 $l_i=1,2,\dots,p_i; i=1,2,\dots,n$ 。

Step 3 采用中心平均模糊器、乘积推理和单子模糊器的模糊逻辑系统的输出结果如下：

$$\hat{f}(x|\Theta_f) = \frac{\sum_{l_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{p_n} \bar{y}_f^{l_1 \cdots l_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(\bar{x}_i) \right)}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{p_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(\bar{x}_i) \right)} \quad (29)$$

其中， $\mu_{A_i^{l_i}}(\bar{x}_i)$ 为 $\bar{x}_i$ 的隶属度函数。设 $\bar{y}_f^{l_1 \cdots l_n}$ 为自由参数，并将它们集合为

$\Theta_f \in R_{i=1}^n p_i$ 。定义向量 $\zeta(x)$ ，则(29)可替换为

$$\hat{f}(x|\Theta_f) = \Theta_f^T \zeta(x) \quad (30)$$

其中， $\zeta(x)$ 为一个向量，定义为

$$\zeta_{l_1, \dots, l_n}(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(\bar{x}_i)}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \cdots \sum_{l_n=1}^{p_n} \left( \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^{l_i}}(\bar{x}_i) \right)} \quad (31)$$

#### 4.3 间接自适应模糊控制

通过选择合理的设计参数, 具有估计值的控制器可以在任意公差范围内接近具有精确值的合适控制器。间接模糊控制器 (图 3) 可概述为

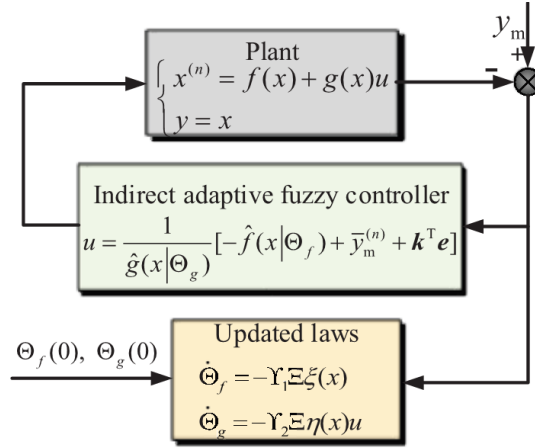


图 3 间接自适应模糊方案示意图

$$u = \frac{1}{\hat{g}(x|\Theta_g)} \left[ -\hat{f}(x|\Theta_f) + \bar{y}_m^{(n)} + k^T e \right] \quad (32)$$

其中,  $f(x|\Theta_f)$  和  $\hat{g}(x|\Theta_g)$  受以下公式控制

$$\hat{f}(x|\Theta_f) = \hat{\Theta}_f^T \zeta(x) \quad (33)$$

$$\hat{g}(x|\Theta_g) = \hat{\Theta}_g^T \eta(x) \quad (34)$$

此外, 为增强间接模糊逻辑机制的自适应性, 还采用了自适应律来更新自由参数的实际值。更新律可设计为

$$\dot{\hat{\Theta}}_f = -Y_1 \Xi \zeta(x) \quad (35)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}_g = -Y_2 \Xi \eta(x) u \quad (36)$$

其中,  $Y_1$  和  $Y_2$  为正设计参数, 用于确定控制性能;  $\eta(x)$  为接近  $g(\cdot)$  的向量;  $\Xi$  表示控制器中的附加项, 在控制设计过程中制定。

## 第五章 三个控制子系统的综合

### 5.1 $\theta$ 子系统

在实际应用中，保持车体直立对 WIP 小车至关重要，因为摆锤式车体倒下后，车辆将无法恢复。此外，在子系统(18)的不稳定平衡中保持直立位置也是一个挑战，因此需要更多控制效果来维持  $\theta$  子系统的稳定性。因此，需要一种带有自适应律的变结构控制方法来处理这种特殊的欠驱动子系统。需要注意的是， $\theta$  可直接用来表示车体倾角的跟踪误差，因为摆锤式车体的期望倾角为  $\theta_d = 0$ 。此外， $\theta$  子系统和  $v$  子系统共享相同控制输入  $\tau_v$ ，因此为明确各变量间的关系，在将  $\tau_v$  代入(18)之前，可通过(17)计算出该控制输入。因此，可得到不含控制效应的欠驱动  $\theta$  子系统如下。

$$\ddot{\theta} = \frac{m_p l^2}{2J_\theta} \omega^2 \sin 2\theta + \frac{m_p g l}{J_\theta} \sin \theta - \frac{m_p l \cos \theta}{J_\theta} \dot{v} \quad (37)$$

可以将(37)中的纵向加速度  $\dot{v}$  作为虚拟输入，从而将原来的欠驱动动力学转换为驱动动力学。特别是，为减少对精确动力学模型的依赖，在构造控制器时采用了间接模糊逻辑机制来支持滑模控制方法，其中滑模控制增强了对参数变化和外部扰动的鲁棒性，而模糊逻辑机制则提供了对动态环境的适应性[41,42]。滑模流形定义为

$$s = \dot{\theta} + c\theta \quad (38)$$

其中， $c$  为正设计参数。根据模糊逻辑机制，估计项，即  $\hat{f}_\theta(x|\Theta_{f\theta})$  和  $\hat{g}_\theta(x|\Theta_{g\theta})$ ，被设计成控制器。假设最优参数为

$$\Theta_{f\theta}^* = \arg \min_{\Theta_{f\theta} \in \Omega_{f\theta}} \left[ \sup_{x \in R^n} |\hat{f}_\theta(x|\Theta_{f\theta}) - f_\theta(x)| \right] \quad (39)$$

$$\Theta_{g\theta}^* = \arg \min_{\Theta_{g\theta} \in \Omega_{g\theta}} \left[ \sup_{x \in R^n} |\hat{g}_\theta(x|\Theta_{g\theta}) - g_\theta(x)| \right] \quad (40)$$

其中， $\Omega_{f\theta}$  和  $\Omega_{g\theta}$  分别为  $\Theta_{f\theta}$  和  $\Theta_{g\theta}$  的集合。此外，最小逼近误差可定义如下。

$$\epsilon_{f\theta} = \hat{f}_\theta(x|\Theta_{f\theta}^*) - f_\theta(x) \quad (41)$$

$$\epsilon_{g\theta} = \hat{g}_\theta(x|\Theta_{g\theta}^*) - g_\theta(x) \quad (42)$$

定义  $\tilde{\Theta}_{f\theta} = \hat{\Theta}_{f\theta} - \Theta_{f\theta}^*$ 。由于模糊系统的普遍逼近定理，我们可得出  $\epsilon_{f\theta}$  和  $\epsilon_{g\theta}$  可收敛到一个紧致集，从而得出  $\dot{\tilde{\Theta}}_{f\theta} = \dot{\hat{\Theta}}_{f\theta}$ 。因此，可引入自适应律来更新控制器真实值，从而增强闭环系统的自适应能力。

**Theorem 5.1.** 对于  $\theta$  子系统(18)，如果滑模面的选择如(38)所示，则闭环  $\theta$  系统中的所有信号均为一致最终有界的，跟踪误差将收敛到一个紧致集，基于模

糊逻辑的间接自适应滑模控制器如下：

$$u_\theta = \frac{1}{\hat{\Theta}_{g\theta}^T \eta(x)} \left[ -\hat{\Theta}_{f\theta}^T \zeta(x) + c\dot{\theta} - k_1 \operatorname{sgn}(s) - k_2 s \right] \quad (43)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}_{f\theta} = \gamma_1 s \zeta(x) \quad (44)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}_{g\theta} = \gamma_2 s \eta(x) u_\theta \quad (45)$$

其中  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  为符号函数， $\gamma_1$ 、 $\gamma_2$  为正设计参数。 $\hat{\Theta}_{f\theta}$  和  $\hat{\Theta}_{g\theta}$  分别为权重值， $\zeta(\cdot)$  和  $\eta(\cdot)$  分别为它们的隶属度函数

## 5.2 $v$ 子系统

对于  $v$  子系统，控制目标是找到一个合适控制输入  $u_v$ ，使车辆纵向速度能跟踪期望值。值得一提的是，用于保持  $\theta$  子系统直立位置的控制输入  $u_\theta$  可视为对控制  $\tau_v$  的扰动。我们将跟踪误差定义为  $e_v = v - v_c$  和  $e_\omega = \omega - \omega_c$ ，其中  $v_c$  和  $\omega_c$  为轨迹规划器生成的期望速度。根据(16)-(17)可得出误差动力学如下。

$$\dot{e}_v = \frac{1}{\Omega} \left[ J_\theta m_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta - m_p^2 l^3 (e_\omega + \omega_c)^2 \sin \theta \cos^2 \theta - m_p^2 l^2 g \sin \theta \cos \theta \right] - \dot{v}_c + \frac{J_\theta}{\Omega r} u_v \quad (49)$$

类似地， $\hat{f}_v(x|\Theta_{fv})$  和  $\hat{g}_v(x|\Theta_{gv})$  可用来制作系统控制器，最优参数可假设为

$$\Theta_{fv}^* = \arg \min_{\Theta_{fv} \in \Omega_{fv}} \left[ \sup_{x \in R^n} |\hat{f}_v(x|\Theta_{fv}) - f_v(x)| \right] \quad (50)$$

$$\Theta_{gv}^* = \arg \min_{\Theta_{gv} \in \Omega_{gv}} \left[ \sup_{x \in \square^n} |\hat{g}_v(x|\Theta_{gv}) - g_v(x)| \right] \quad (51)$$

其中， $\Omega_{fv}$ 、 $\Omega_{gv}$  分别为  $\Theta_{fv}$  和  $\Theta_{gv}$  的集合。此外，最小逼近误差可由以下公式控制

$$\epsilon_{fv} = \hat{f}_v(x|\Theta_{fv}^*) - f_v(x) \quad (52)$$

$$\epsilon_{gv} = \hat{g}_v(x|\Theta_{gv}^*) - g_v(x) \quad (53)$$

定义  $\tilde{\Theta}_{fv} = \hat{\Theta}_{fv} - \Theta_{fv}^*$ 。根据普遍逼近定理，我们可得出结论： $\epsilon_{fv}$  和  $\epsilon_{gv}$  可收敛到一个紧致集，因此  $\dot{\tilde{\Theta}}_{fv} = \dot{\hat{\Theta}}_{fv}$  成立。通过使用自适应律更新控制器中使用的真实值，可得出如下定理。

**Theorem 5.2.** 对于  $v$  子系统(17), 闭环  $v$  子系统信号为一致最终有界的, 跟踪误差收敛到一个紧致集, 基于模糊逻辑的间接自适应控制器如下:

$$u_v = \frac{1}{\hat{\Theta}_{gv}^T \eta(x)} \left( \hat{\Theta}_{fv}^T \zeta(x) - k_3 e_v \right) \quad (54)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}_{fv} = \gamma_3 e_v \zeta(x) \quad (55)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}_{gv} = \gamma_4 e_v \eta(x) u_v \quad (56)$$

其中  $k_3$ 、 $\gamma_3$ 、 $\gamma_4$  为正设计参数。 $\hat{\Theta}_{fv}$  和  $\hat{\Theta}_{gv}$  分别为权重值,  $\zeta(x)$  和  $\eta(x)$  分别为它们的隶属度函数。

利用上述结果, 我们注意到  $u_\theta$  和  $u_v$  并不是系统的真正控制输入, 因此可得到 WIP 小车的复合控制器如下。

$$\tau_v = u_\theta + u_v \quad (60)$$

**Remark 2.** 控制输入(60)是一个复合控制器, 其中控制输入  $u_\theta$  是维持车体平衡所需的加速度, 被视为  $v$  子系统的一种高频外部动态扰动。由于  $u_\theta$  和  $u_v$  可以保证各自子系统的稳定性, 因此  $\tau_v$  可保证整个欠驱动系统的稳定性。

### 5.3 $\omega$ 子系统

$\omega$  子系统的控制目标是找到一个控制输入  $\tau_\omega$ , 使旋转跟踪误差 (即  $e_\omega = \omega - \omega_c$ ) 收敛到一个紧致集。为此,  $\omega$  子系统的误差动态方程为

$$\dot{e}_\omega = -\frac{m_p l^2 \dot{\theta} \sin 2\theta}{J_\varphi + m_p l^2 \sin^2 \theta} (e_\omega + \omega_c) - \dot{\omega}_c + \frac{d}{r(J_\varphi + m_p l^2 \sin^2 \theta)} \tau_\omega \quad (61)$$

同样,  $\hat{f}_\omega(x|\Theta_{f\omega})$  和  $\hat{g}_\omega(x|\Theta_{g\omega})$  用于设计系统控制器, 最优参数可假设为

$$\Theta_{f\omega}^* = \arg \min_{\Theta_{f\omega} \in \Omega_{f\omega}} \left[ \sup_{x \in R^n} |\hat{f}_\omega(x|\Theta_{f\omega}) - f_\omega(x)| \right] \quad (62)$$

$$\Theta_{g\omega}^* = \arg \min_{\Theta_{g\omega} \in \Omega_{g\omega}} \left[ \sup_{x \in R^n} |\hat{g}_\omega(x|\Theta_{g\omega}) - g_\omega(x)| \right] \quad (63)$$

其中,  $\Omega_{f\omega}$  和  $\Omega_{g\omega}$  分别为  $\Theta_{f\omega}$  和  $\Theta_{g\omega}$  的集合。同样, 最小逼近误差可由以下公式计算

$$\epsilon_{f\omega} = \hat{f}_\omega(x|\Theta_{f\omega}^*) - f_\omega(x) \quad (64)$$

$$\epsilon_{g\omega} = \hat{g}_\omega(x|\Theta_{g\omega}^*) - g_\omega(x) \quad (65)$$

定义  $\tilde{\Theta}_{f\omega} = \hat{\Theta}_{f\omega} - \Theta_{f\omega}^*$ 。利用普遍逼近定理，我们发现  $\epsilon_{f\omega}$  和  $\epsilon_{g\omega}$  可收敛到一个紧致集，从而得到  $\dot{\tilde{\Theta}}_{f\omega} = \dot{\hat{\Theta}}_{f\omega}$ 。通过引入自适应律来更新控制器中的真实值，可得到如下定理：

**Theorem 5.3.** 对于  $\omega$  子系统(16)，闭环  $\omega$  子系统中的所有信号均为一致最终有界的，且跟踪误差收敛到一个紧致集，基于模糊逻辑的间接自适应控制器为

$$\tau_\omega = \frac{1}{\hat{\Theta}_{g\omega}^T \eta(x)} \left( \hat{\Theta}_{f\omega}^T \zeta(x) - k_4 e_\omega \right) \quad (66)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}_{f\omega} = \gamma_5 e_\omega \zeta(x) \quad (67)$$

$$\dot{\hat{\Theta}}_{g\omega} = \gamma_6 e_\omega \eta(x) \tau_\omega \quad (68)$$

其中， $k_4$ 、 $\gamma_5$ 、 $\gamma_6$  为正设计参数， $\hat{\Theta}_{f\omega}$  和  $\hat{\Theta}_{g\omega}$  为权重， $\zeta(x)$  和  $\eta(x)$  分别为它们的隶属度函数。

**Remark 3.** 间接自适应控制方案的控制器存在奇异性，这是自适应性控制不可避免的麻烦问题。要解决这个问题，可将标量  $\frac{1}{\Theta_{gi}^T \eta(x)}$ , ( $i = \theta, v, \omega$ ) 重写为下列项

$$\frac{\Theta_{gi}^T \eta(x)}{\left[ \Theta_{gi}^T \eta(x) \right]^2 + \varrho} \quad (72)$$

其中  $\varrho > 0$  为一个足够小的系数，以避免奇异。

## 第六章 仿真

在本章中，我们将介绍针对 WIP 小车进行的数值仿真结果，以验证在 MATLAB 环境中提出的控制策略的可行性和有效性。WIP 小车的物理参数设置如下： $m_p = 3\text{kg}$ 、 $m_c = 5\text{kg}$ 、 $m_w = 1\text{kg}$ 、 $d = 1.0\text{m}$ 、 $r = 0.5\text{m}$ 、 $l = 1.0\text{m}$ 、

$J_w = 1.5\text{kg m}^2$ 、 $J_c = 5\text{kg m}^2$ 、 $J_\phi = 1.5\text{kg m}^2$ 。此外，如果假设期望轨迹为半径为  $R = 2\text{m}$  的圆形路径，则可用直角坐标描述如下。

$$\begin{cases} x_d = R \cos \omega_d t \\ y_d = R \sin \omega_d t \\ \phi_d = \omega_d t \end{cases}$$

值得注意的是，提出的控制器中使用的纵向速度和旋转速度可分别通过

$u_d = \sqrt{x_d^2 + y_d^2}$  和  $\omega_d = \dot{\varphi}_d$  计算。车辆姿态误差向量、速度向量和姿态状态变量的初始条件取为  $\bar{q}_e(0) = [x_e(0) \ y_e(0) \ \varphi_e(0)]^T = [-0.05 \ 0 \ \pi/24]^T$  ,  $\dot{z}(0) = [v(0) \ \omega(0) \ \dot{\theta}(0)]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$  ,  $z(0) = [x_v(0) \ \varphi(0) \ \theta(0)]^T = [0 \ 0.01 \ 0.15]^T$  。间接自适应模糊系统采用两个模糊控制器分别控制纵向和旋转子系统。如图 4 所示, 模糊隶属度函数  $\xi(x_i)$  和  $\eta(x_i)$  设置如下。

$$\begin{aligned}
 \mu_{NM}(x_i) &= \exp[-((x_i + \pi/6)/(\pi/24))^2] \\
 \mu_{NS}(x_i) &= \exp[-((x_i + \pi/12)/(\pi/24))^2] \\
 \mu_Z(x_i) &= \exp[-(x_i/(\pi/24))^2] \\
 \mu_{PS}(x_i) &= \exp[-((x_i - \pi/12)/(\pi/24))^2] \\
 \mu_{PM}(x_i) &= \exp[-((x_i - \pi/6)/(\pi/24))^2]
 \end{aligned}$$

为满足控制性能要求, 提出的控制方案的设计参数设定如下:  
 $c = 2, k_1 = 4, k_2 = 2, k_3 = 2, k_4 = 1; \sigma_1 = \sigma_3 = 2, \sigma_2 = 1; \gamma_1 = \gamma_3 = 10, \gamma_2 = \gamma_4 = 1; \varrho = 0.001$ 。滑模控制方案中的符号函数由双曲正切函数(即  $\tanh(\cdot)$ )代替, 以减少控制系统的变结构所引起的固有抖振。利用这些设计参数,  $x$ - $y$  平面上的实际跟踪轨迹和期望跟踪轨迹如图 5 所示, 跟踪误差如图 6 所示。这些结果表明, 使用所提出的控制方法, WIP 小车的姿态可以很好跟踪参考轨迹。不过, 需注意的是, 在起点处出现了一个急剧调节过程, 这是因为在车辆姿态收敛到期望轨迹的过程中, 欠驱动的车体必须保持直立位置。此外, 图 6 中放大图清楚表明, 跟踪误差  $x_e$ 、 $y_e$  和  $\varphi_e$  在 15 秒内收敛为零, 从而表明这一剧烈调节过程可被迅速抑制。

速度跟踪结果的时间响应如图 7 所示, 显示了纵向和旋转速度跟踪的效果。这些结果表明, 实际速度变量  $v$  和  $\omega$  可在有限时间内跟踪轨迹规划器生成的期望速度  $v_c$  和  $\omega_c$ , 从而验证了间接自适应模糊控制器的有效性。这一现象表明, 纵向速度的控制更具挑战性, 因为纵向速度受扭矩  $u_\varphi$  控制, 但也受到类似扰动的虚拟控制输入  $u_\theta$  的影响。尤其是倾角及其角速度的稳定性对控制至关重要。它们的时间响应如图 8 所示, 表明  $\theta$  和  $\dot{\theta}$  可快速趋近于零。因此, 这些结果验证了间接自适应模糊控制与滑模技术结合产生的复合控制器对欠驱动  $\theta$  子系统实现了可接受的控制性能。图 9 和图 10 显示了模糊逻辑系统的估计过程。仿真结果表明, 由于采用了间接模糊逻辑机制, 所提出的控制器与所设计的闭环系统具有更好自适应性。我们的进一步分析表明, 尽管初始时存在弹性振荡, 但  $\hat{f}_\theta(x|\Theta_{f_\theta})$ 、



$\hat{g}_v(x|\Theta_{g_v})$  和  $\hat{f}_\omega(x|\Theta_{f_\omega})$  都能在 5s 内收敛到各自紧凑集内。相比之下,  $\hat{g}_\omega(x|\Theta_{g_\omega})$  的时间响应与  $g_\omega(x|\Theta_{g_\omega})$  的真实值并不完全一致, 但其跟踪误差收敛到了一个紧凑集, 这意味着所提出的自适应律是有效的, 而且全局稳定性也得到了保证。