一.

(1) $f_k = p(第二名|前k名第一) = \frac{k(n-k)(n-2)!}{n!} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$

$g_k = p(第二名|前k名第二) = \frac{(n-2)!k(k-1)}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$

(2)考虑第$k+1$个面试者的情况：

- 在前$k+1$个人中排名第一，则我们考虑取$max(f_{k+1}, v_{k+1})$，取和不取哪个概率大选哪个，$p(前k+1名第一) = \frac{1}{k+1}$
- 在前$k+1$个人中排名第二，则我们考虑取$max(g_{k+1}, v_{k+1})$，取和不取哪个概率大选哪个，$p(前k+1名第二) = \frac{1}{k+1}$
- 在前$k+1$个人中排名第三或更低，则我们考虑取v_{k+1}，因为选择他们显然不优，$p(前k+1名第三或更低) = \frac{k-1}{k+1}$

$v_k = \frac{k-1}{k+1}v_{k+1} + \frac{1}{k+1}max(f_{k+1}, v_{k+1}) + \frac{1}{k+1}max(g_{k+1}, v_{k+1})$

终止条件：$v_n = 0$

(3)不难发现在k较大的情况下$g_{k+1} > v_{k+1}$

$v_k = \frac{k-1}{k+1}v_{k+1} + \frac{1}{k+1}max(f_{k+1}, v_{k+1}) + \frac{1}{k+1}g_{k+1} = \frac{k-1}{k+1}v_{k+1} + \frac{1}{k+1}max(f_{k+1}, v_{k+1}) + \frac{k}{n(n-1)}$

计算几项不难发现$v_k = f_k$在$f_k < g_k$时，下用数学归纳法证明之:

不妨设$n > k$的时候$v_k = f_k$

所以$n = k$时，
$v_k = \frac{k}{k+1}v_{k+1} + \frac{k}{n(n-1)} \; => \frac{f_k}{k} = \frac{f_{k+1}}{k+1} + \frac{1}{n(n-1)} => \frac{f_k}{k} = \frac{n-k}{n(n-1)} => v_k = f_k = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$

$f_k > g_k \;\; <=> \;\; n-k > k-1 \;\; <=> \;\; n+1 > 2k$

不妨设$k_0 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，不难发现此时$v_k = v_{k+1}$且$f_k$和$g_k$随着$k$减小而减小，因此一定小于$f_{k_0} = v_{k_0} \geq g_{k_0}$

$\therefore v_k = v_{k_0} = \frac{k_0(n-k_0)}{n(n-1)}$

不难发现v_k的极值就在v_{k_0}取到，所以最优策略为在遇到第k_0个人前都不选择，之后若遇到新的排名第一的人可选可不选，若遇到新的排名第二的人直接选择并结束进程。

二.

(1) $\sum_{i=1}^{r} m_i = n-1$且$m_i \geq 1$且$n - \sum_{j=1}^{i-1} m_j \geq 2m_i, \forall i$

(2)依照上面的规则只有两种可能：1. $m_1 = 2, m_2 = 1$

2. $m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 1$

记$\alpha = \frac{v}{v+v_1}, \alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$

安排1：获胜概率为$\alpha_1 = \alpha^2$

安排2：获胜概率为$\alpha_2 = (0.5\alpha + 0.5)(\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3})\alpha$（每个括号内都是被选中和不被选中的情况之和，每轮之间的选择显然独立）

$\alpha_1<\alpha_2<=><\frac{1}{3}\alpha^2+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{6}<=>(0.5\alpha-0.5)(\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{3})>0<=>\frac{1}{3}(\alpha-1)(\alpha-0.5)>0$

矛盾，所以安排1队1获胜概率最大，安排2队1获胜概率最小

(3)$f_1=\frac{2k}{n}\alpha+1-\frac{2k}{n}$

$f_2=(\frac{2j}{n}\alpha+1-\frac{2j}{n})(\frac{2k-2j}{n-j}\alpha+1-\frac{2k-2j}{n-j})$

f_1-f_2显然是一个关于α的开口向上的二次函数$\alpha=1$时，$f_1-f_2=0$；$\alpha=\frac{1}{2}$时，
$f_1-f_2=1-\frac{k}{n}-[1-\frac{j}{n}-\frac{k-j}{n-j}-\frac{j(k-j)}{n(n-j)}]$

$=\frac{k-j}{n-j}-\frac{k-j}{n}+\frac{j(k-j)}{n(n-j)}>0$，所以对于$\forall\alpha\in(\frac{1}{2},1)$，该式子都成立

(4)考虑使用数学归纳法，当$n=2$时该式显然成立

我们假设在$n\le 2^s+k-1,0\le k<2^s$的时候都符合题干中所述结论对每一轮的设置

考虑$n=2^s+k$时

- 若$m_1<k$则根据归纳假设，$m_2=k-m_1$为最优的设置(之后$m_l=2^{s-l+2},l=3\ldots s+2$)，此时由**(3)**知这种取法不如$m_1=k$
- 若$m_1>k(2m_1\le 2^s+k)$则根据归纳假设，$m_2=2^{s-1}+k-m_1$，此时题目所述方法1号队前两轮的胜利概率为$g_1=\alpha(\frac{2k}{n}\alpha+1-\frac{2k}{n})$，而这种赛制安排下1号队的胜利概率为 $g_2=(\frac{2m_1}{n}\alpha+1-\frac{2m_1}{n})(\frac{2^s+2k-2m_1}{n-m_1}\alpha+1-\frac{2^s+2k-2m_1}{n-m_1})$
  考虑到g_1-g_2为一个二次函数：二次项系数为
  $\frac{2k}{n}-\frac{2m_1}{n}\frac{2^s+2k-2m_1}{n-m_1}\le 0<=>k(n-m_1)-m_1(2^s+2k-2m_1)\le 0$

$<=>k(2^s+k-m_1)-m_1(2^s+2k-2m_1)\le 0$，根据$ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$可得：
$<=>(2^s+2k-3m_1)^2-(2^s-m_1)^2\le 0$

$<=>2(k-m_1)(2^{s+1}+2k-4m_1)\le 0$此时$k-m_1<0$且根据$k$的范围限制不难发现
$2^{s+1}+2k-4m_1\ge 0$，所以该函数开口朝下

当$k=1$时，$g_1-g_2=1-1=0$

当$k=\frac{1}{2}$时，
$g_1-g_2=\frac{1}{2}(1-\frac{k}{n})-(1-\frac{m_1}{n})(1-\frac{2^{s-1}+k-m_1}{n-m_1})=\frac{(n-k)(n-m_1)-(n-m_1)(2n-2^s-2k)}{n(n-m_1)}=\frac{(n-m_1)(2^s-2^s)}{n(n-m_1)}=0$

所以有二次函数的性质可知对于$\forall\alpha\in(\frac{1}{2},1)$，$g_1-g_2>0$

所以$m_1>k$也不如$m_1=k$优

由数学归纳法知：题干所述的安排方式确实能够最大化1号队伍的胜率