浙江大学 2021—2022 学年 春 学期

《常微分方程》课程期末考试试卷

课程号: **061B0010**, 开课学院: 理学部

考试试卷: ✓A卷、B卷（请在选定项上打✓）

考试形式: ✓闭、开卷（请在选定项上打✓），允许带 无 入场

考试日期: **2021**年**4**月**17**日**10:30–12:30**, 考试时间: **120** 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪

考生姓名: ________ 学号: ____________ 所属院系: ________ 任课教师: ______

一、（每小题8分，共32分） 求下述方程的通解或特解:

1. $(x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y[1+\ln y - \ln(x+1)]$;

2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x^2y^2+x}$, $y(1)=1$;

3. $y(1+xy)\mathrm{d}x + x(1-xy)\mathrm{d}y = 0$;

4. $(x-\sin y)\mathrm{d}x + (4\sin y - x)\cos y\,\mathrm{d}y = 0$; 全微分方程

二、（每小题10分，共30分）试求出下列高阶方程的通解:

1. $y^3y'' + 1 = 0$;

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(2)=4$, $y'(2)=0$;

3. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x\ln x \ (x>0)$. 欧拉方程

三、（每小题10分，共20分）求解下列线性微分方程组:

1. $\begin{cases} x' + y' = y + z \\ y' + z' = z + x \\ z' + x' = x + y \end{cases}$

$$\begin{cases} z' = x \\ x' = y \\ y' = z \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{cases} x' = -5x + 2y + \mathrm{e}^t \\ y' = x - 6y + \mathrm{e}^{-2t} \end{cases}$

$x' = kx(N-x)$

四、（10分） 已知某商品的销售量$x(t)$是时间t的可导函数；且$x(t)$关于时间的变化率，与该销售量以及它接近饱和的水平$N-x(t)$之乘积成正比（N为饱和消售量，比例常数为$k>0$）。且$x(0)=N/4$。试求：

(1). 该销售量的函数表达式；

(2). $x(t)$增长得最快的时刻T。

五、（8分） 证明：若p,q为大于0的常数，则方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+qx=0$$

的所有解$x(t)$均满足$\lim_{t\to\infty} x(t)=0$。

$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 　　 $\lambda=-p\pm\sqrt{p^2-4q}$ 　 $p^2\geq 4q$

$\lambda=-p\pm\sqrt{4q-p^2}\,i$ 　 $p^2<4q$

$p^2\geq 4q$时 　 $\lambda=-p\pm\sqrt{p^2-4q}<0$

无重根 $\therefore \lim_{t\to+\infty} c_1e^{-\lambda_1 t}+c_2e^{-\lambda_2 t}=0$

重根 　 $\lim_{t\to+\infty}(c_1t+c_2)e^{-\lambda_2 t}=0$

$p^2<4q$时 　 $\lim_{t\to+\infty}\left[c_1\cos\sqrt{4q-p^2}\,t+c_2\sin\sqrt{4q-p^2}\,t\right]e^{-pt}$

$=0$