数学建模第五次作业

1 一、解：

（1）设单位时间内单位面积中，下雪量为s。且在扫雪车出发前已经下雪t_0时间，则：

$$x(t) = st + st_0$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{K}{x(t)W}$$

（2）设1h时扫雪车位于l_1，2h时扫雪车位于l_2，有

$$2(l_2 - l_1) = l_1$$

即

$$l_2 = \frac{3l_1}{2}$$

由（1），有

$$y(t) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{K}{sW(t+t_0)} dt$$

则

$$\frac{\int_0^2 \frac{K}{sW(t+t_0)} dt}{\int_0^1 \frac{K}{sW(t+t_0)} dt} = \frac{3}{2}$$

得

$$t_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} h$$

2 二、解：

（1）由题可知：

$$\frac{dx_a(t)}{dt} = v_a(t) cos(\alpha(t))$$
$$\frac{dy_a(t)}{dt} = v_a(t) sin(\alpha(t))$$
$$\frac{dx_b(t)}{dt} = v_b(t) cos(\beta(t))$$
$$\frac{dy_b(t)}{dt} = v_b(t) sin(\beta(t))$$

（2）在海盗追击商船的过程中，对于海盗来说，采用纯追击引导法则是一种局部最优策略，纯追击引导法则是指在每时每刻海盗航向均沿两者直线方向。这是因为它导致$r(t)$在任何时间t的最陡下降。

即有

$$\theta(t) = \beta(t)$$

（3）由题，$v_a(t) \equiv v_a, v_b(t) \equiv \lambda v_a$，并且由第二问，$\theta(t) = \beta(t)$，则

$$\begin{aligned}\frac{dr(t)}{dt} &= -\lambda v_a + \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} \\ &= -\lambda v_a + \frac{x(t)v_a cos\alpha(t) + y(t)v_a sin\alpha(t)}{r(t)} \\ &= -\lambda v_a + v_a[cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta] \\ &= v_a[cos(\alpha(t) - \theta(t)) - \lambda]\end{aligned}$$

对于角度$\theta(t)$，有

$$cos(\theta(t)) = \frac{x_a(t) - x_b(t)}{r(t)} \ and$$
$$sin(\theta(t)) = \frac{y_a(t) - y_b(t)}{r(t)}$$

对上式求导：

$$-sin(\theta(t))\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{r(t)(x_a'(t) - x_b'(t)) - r'(x_a(t) - x_b(t))}{r^2(t)}$$

此时有

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{v_a sin[\alpha(t) - \theta(t)]}{r(t)}$$

（4）由（3）

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{-v_a sin(\theta(t))}{r(t)}$$
$$\frac{dr(t)}{dt} = v_a(cos(\theta(t)) - \lambda)$$

即

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r(v_a\lambda - v_a cos\theta)}{v_a sin\theta}$$

当$\lambda = 1$时

$$\begin{aligned}r(t) &= \frac{r_0 sin\theta_0}{tan\frac{\theta_0}{2}(1 + cos\theta(t))} \\ &= \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{y_0(1 + cos\theta(t))}\end{aligned}$$