

一、某地从某时起开始持续降雪，单位时间内降雪量为一定值。降雪一段时间后，一台扫雪车从一条直线型道路上的某处出发，沿道路行进清除积雪。假设扫雪车能清除所经过路面上宽为 W 的区域内的所有积雪，且每小时能清除的积雪量为常数 K 。

(1) 以扫雪车出发时间为零时刻，分别记 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为 t 时刻道路上积雪的厚度和扫雪车经过的距离。试写出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 满足的微分方程；

(2) 已知扫雪车出发后的第一个小时经过的距离为第二个小时经过的距离的两倍，求降雪开始的时间。

二、一商船试图逃避海盗追逐。记 t 时刻商船和海盗的位置分别为 $(x_a(t), y_a(t))$ 与 $(x_b(t), y_b(t))$ ，商船和海盗的速度分别为 $v_a(t)$ 与 $v_b(t)$ ，航向与 x 轴正向夹角分别为 $\alpha(t)$ 与 $\beta(t)$ 。在零时刻商船位于 $(0,0)$ 处，海盗位于 (x_0, y_0) 处，其中 $x_0 \geq 0, y_0 \leq 0$ 。商船始终在第一象限内（含坐标轴正向）行驶，海盗可观测到商船的位置并随时调整航向。记 $r(t)$ 为 t 时刻商船和海盗的距离， $\theta(t)$ 为 t 时刻连接商船和海盗的直线与 x 轴正向的夹角。

(1) 试写出 $x_a(t), y_a(t), x_b(t), y_b(t)$ 所满足的微分方程；

(2) 为使 $r(t)$ 减小最快，海盗应选择怎样的航向；

(3) 若 $v_a(t) \equiv v_a, v_b(t) \equiv \lambda v_a$ ，其中 λ 为参数，且海盗采用(2)中航向，试写出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 所满足的微分方程；

(4) 若 $\alpha(t) \equiv 0$ ，且海盗采用(2)中航向，试写出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 的关系，并在 $\lambda=1$ 时求出 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 。