解：令 $z=x+y \Longrightarrow z^2\frac{dz-dx}{dx}=a^2 \Longrightarrow z^2\frac{dz}{dx}=a^2+z^2 \Longrightarrow \frac{z^2}{a^2+z^2}dz = dx \Longrightarrow (1-\frac{a^2}{a^2+z^2})dz = dx \Longrightarrow z - a\arctan\frac{z}{a} = x+c \Longrightarrow x+y-a\arctan\frac{x+y}{a}=x+c \Longrightarrow y=a\arctan\frac{x+y}{a}+c$。 45

54.$\frac{dy}{dx}=y^2-x^2+1$。

解：令 $z=y-x \Longrightarrow \frac{dz+dx}{dx}=z(z+2x)+1 \Longrightarrow \frac{dz}{dx}=z^2+2xz \Longrightarrow \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}=1+\frac{2x}{z}$，令 $u=\frac{1}{z} \Longrightarrow -\frac{du}{dx}=1+2xu \Longrightarrow \frac{du}{dx}+2xu=-1 \Longrightarrow p(x)=2x$， 46

$e^{-\int p(x)dx}=e^{-x^2}$

$$\Longrightarrow u = e^{-x^2}(\int -1e^{x^2}dx+c)$$
$$= e^{-x^2}(-\int e^{x^2}dx+c)=\frac{1}{z}$$

$\Longrightarrow z = e^{x^2}(-\int e^{x^2}dx+c)^{-1} \Longrightarrow y-x=e^{x^2}(-\int e^{x^2}dx+c)^{-1} \Longrightarrow y = x+e^{x^2}(c-\int e^{x^2}dx)^{-1}$。

55.$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$。

解：$y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{2x}+\frac{1}{2}\tan\frac{y^2}{x} \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dx}=\frac{y^2}{2x}+\frac{1}{2}\tan\frac{y^2}{x}$，令 $z=\frac{y^2}{x} \Longrightarrow \frac{d(xz)}{dx} = z+\tan z \Longrightarrow \frac{xdz}{dx}+z=z+\tan z \Longrightarrow x\frac{dz}{dx}=\tan z \Longrightarrow \frac{\cos z}{\sin z}dz=\frac{1}{x}dz \Longrightarrow \ln|\sin z| = \ln|x|+c \Longrightarrow \sin z = cx \Longrightarrow \sin\frac{y^2}{x}=cx \Longrightarrow y^2 = x\arcsin cx$。 47

56. 求 $y=y'^2$ 的奇解。

解： $y'=p^2 \Longrightarrow F(x,y,p)=p^2-y=0$， $\frac{\partial F}{\partial p}=2p \Longrightarrow p=0 \Longrightarrow y=0$。
代入 $y=0$ 是解 $\Longrightarrow$ 是奇解。

57. 求 $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2=0$ 的奇解。

解： $y'=p \Longrightarrow F(x,y,p)=y^2p^2-2xyp+2y^2-x^2=0$， $\frac{\partial F}{\partial p}=2y^2p-2xy=0 \Longrightarrow (yp-x)y=0$。 $y=0$ 代入显然不是上述方程的解。
$p=\frac{x}{y}$ 代入 $F(x,y,p)=0 \Longrightarrow x^2-2x^2+2y^2-x^2=0$， $y=\pm x$。
$p=\pm1$ 代入是方程的解 $\Longrightarrow y=\pm x$ 是奇解。

58. 求 $[(y')^2+1](x-y)^2=(x+yy')^2$ 的奇解。

解： $F=(p^2+1)(x-y)^2-(x+yp)^2=0$， $\frac{\partial F}{\partial p}=2p(x-y)^2-2(x+yp)y=0 \Longrightarrow p=\frac{y}{x-2y} \Longrightarrow y(x-y)^2(x-2y)=0 \Longrightarrow$ 经检验 $y=0$ 为奇解。