数学建模：第 7 次作业

周炜
计算机科学与技术

日期：2022 年 12 月 4 日

1 题目一

一、一单行道上有 n 个车位，按车行方向分别记为 $1,2,\cdots,n$。每个车位有空闲和占用两种状态，车位 i 空闲的概率为 $\alpha_i > 0$，且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位 i 上停车的效用为 $U_i > 0$，未在 n 个车位上停车的效用为 0。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。

（1）记 $V_i, i=1,\cdots,n+1$ 为驶过车位 $i-1$ 后（车位 0 为道路起点）开始计划停车所可能获得的最大期望效用，试写出 V_i 所满足的递推关系；

（2）令 $x_i = V_i - V_{i+1}$，$i=1,\cdots,n$，试写出求解该问题的以 x_i 为决策变量的数学规划。

1.1

如果第 i 个车位为空，则 $V_i = V_{i+1}$，如果为非空，最大效用为 $max\{U_i, V_{i+1}\}$ 因此，

$$V_i = (1-\alpha_i)V_{i+1} + \alpha_i max\{U_i, V_{i+1}\}$$

其中，如果第 i 个车位为空，由于有 $n-i+1$ 个车位可供选择（因为后续是否为空存疑，但是对驾驶员来说，停在这 n-i+1 个车位种一个的概率是相同的），停在该处的概率为 $\frac{1}{n-i+1}$

$$V_i = (1-\alpha_i)V_{i+1} + \alpha_i \frac{U_i}{n-i+1} + \alpha_i \frac{(n-i)V_{i+1}}{n-i+1}$$

1.2

$$x_i = V_i - V_{i+1} = \frac{\alpha_i}{n-i+1}(U_i - V_{i+1})$$

解得 $V_{i+1} = U_i - \frac{n-i+1}{\alpha_i}x_i$

期望效用 $V = \sum_{1}^{n+1} \frac{V_i}{n+1}$, 上式带入该式得

$$V = \frac{1}{n+1}\sum_{i}^{n}(U_i - \frac{n-i+1}{\alpha_i}x_i)$$

由于驶过 $i-1$ 个停车位时，相较于驶过 i 个停车位的选择更多，因此期望更大，即 $x_i = V_i - V_{i+1} \geqslant 0$。由于 $U_i \geqslant 0$, 因而 $V_i \geqslant 0$

综上，可以得到线性规划

$$\max V = \tfrac{1}{n+1}\sum_{i}^{n}(U_i - \tfrac{n-i+1}{\alpha_i}x_i)$$
$$s.t\begin{cases} U_i - \tfrac{n-i+1}{\alpha_i}x_i \geq 0, i = 1,2,3...n \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{cases}$$

并且 $U_i \geqslant 0$

2 题目二

二、现有一周长为 1 的圆周，机器人可沿顺时针方向在圆周上移动，至多有 k 个机器人可供选择。机器人 i 的移动速度不超过 $v_i, i=1,\cdots,k$ 。不妨设 $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_k$。移动时，机器人在圆周上的相对次序可以改变。称巡逻间隙为 T，若对任意时刻 t 和圆周上任意一点 x，在 $[t, t+T]$ 内，至少有一个机器人经过点 x。

（1）若规定所有机器人在圆周上均匀分布，移动速度相同。如何选择机器人及移动的速度，可使巡逻间隙最小，并求其最小值；

（2）若存在 v，使得 $v_i = \dfrac{v}{i}, i=1,\cdots,k$。证明：若对任意 j，在机器人 j 连续两次经过圆周上某一点之间的时间内，先后有 $l < j$ 个机器人经过该点，则巡逻间隙不会小于 $\dfrac{1}{v}$。

2.1

由于速度大意味着在相同的时间里能扫过更大的路径，因此不妨假设选择的 k 个机器人是速度最大的 k 个，即 $v_1, v_2, v_3....v_k$

假设移动的恒定速度为 v_r 移动 (由给出的机器人速度可知，$v_r =$ 小于等于 $min\{v_i\}, i = 1, 2, ...k$)

由于每个机器人移动速度相同，所有机器人一定在圆周上等距离分布，以速度 v_r 行走

考虑任何时间 t。每个机器人 a_i 必须在某些时候访问时间 $t + T$ 另一个机器人 a_j 在时间 t 访问过的点 x。则由于每个机器人间等距分布，因此 $T = \frac{1}{rv_r}$

要使 T 最小，不妨取 $rv_r = max_{1\leqslant i\leqslant k} iv_i$

得到

$$T_{min} = \frac{1}{max_{1\leqslant i\leqslant k} iv_i}$$

2.2

假设该段时间内机器人的访问序列为 $j - i_1 - i_2 ... i_l - j$ 访问点, 显然 $1 \leqslant l < j \leqslant k$)

而机器人 j 访问该节点的时间间隔为

$$T \geqslant \frac{1}{v_j} = \frac{j}{v}$$

这个时间间隔被机器人 $i_1, i_2, ...i_l$ 的访问分成 $l + 1$ 个子间隔——由于子间隔内被 l 个机器人访问，子间隔 T' 的最大值最小等于这些机器人速度的平均, 并且按照题设，有 $d + 1 \leqslant c$，

$$T' \geqslant \frac{T}{l+1} \geqslant \frac{j}{v(l+1)} \geqslant \frac{j}{vj} = \frac{1}{v}$$

即巡逻间隙不会小于 $\frac{1}{v}$