一、天花是一种严重传染病，数学家 Daniel Bernoulli 对此作过以下研究。假设感染天花后死亡率为 p，且会在感染后极短时间内死亡，但治愈后终身不会再受到感染。记某区域年龄为 $x(x \geq 16)$ 的总人数为 $P(x)$，其中未感染天花的人数和曾感染天花但已治愈的人数分别为 $S(x)$ 和 $R(x)$。设每人在年龄 x 到 $x+dx$ 之间感染天花的概率为 qdx，因天花以外的其它原因死亡的概率为 $m(x)dx$。

（1）试建立 $S(x)$ 和 $R(x)$ 所满足的微分方程模型；

（2）试推导出 $f(x)=\dfrac{S(x)}{P(x)}$ 所满足的微分方程，该方程为 Bernoulli 方程，以 Daniel Bernoulli 之叔 Jokob Bernoulli 命名。

二、现有一总数为 N 的人群，任一人每天随机地和其它 A 人接触交谈。当知晓某一传闻的传播者（Spreader）和从未听过此传闻的未知者（Ignorant）交谈时，他将传闻告诉后者，后者也将知晓此传闻并在以后继续传播。当传播者和一已听过此传闻的人交谈时，双方均意识到传闻有假，从而成为抵制者（Stiflers），之后两人都不再传播这一传闻。记 t 时刻传播者、未知者和抵制者的人数分别为 $S(t)$，$I(t)$ 和 $R(t)$。

（1）试给出 $S(t)$，$I(t)$ 和 $R(t)$ 所满足的微分方程（组）；

（2）设 N 充分大，记 $s(t)$，$i(t)$ 和 $r(t)$ 为 t 时刻传播者、未知者和抵制者在人群中所占比例，且 $i(0)=\alpha>0, s(0)=\beta>0$。试给出描述 $s(t)$ 和 $i(t)$ 关系的函数式；

（3）证明：$\lim\limits_{t\to\infty} i(t)$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)$ 均存在，且 $\lim\limits_{t\to\infty} i(t)<\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{t\to\infty} s(t)=0$。