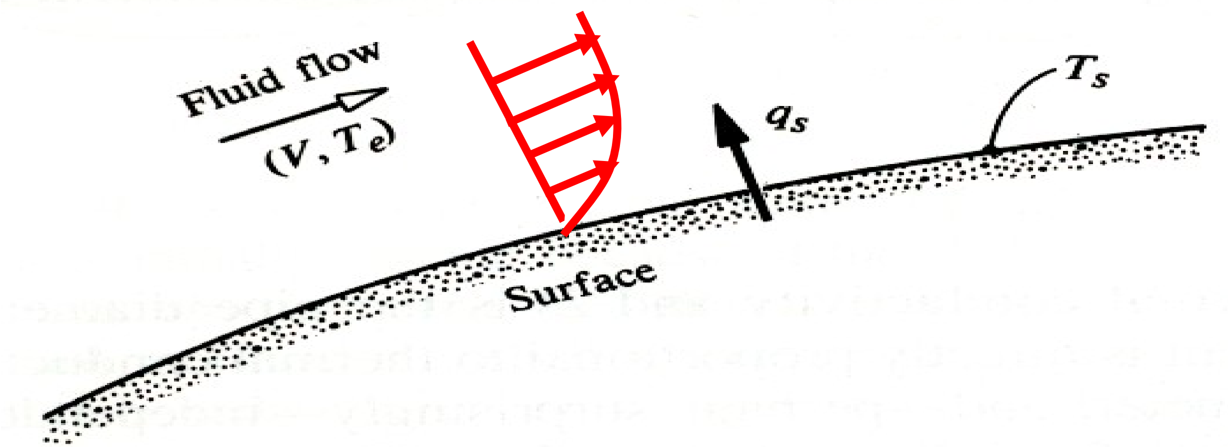
第十九章　　对流传热

- **Convection Heat Transfer**

§19-1 对流换热基本原则

1　对流换热的定义和性质

对流换热是指流体流经固体时流体与固体表面之间的热量传递现象。



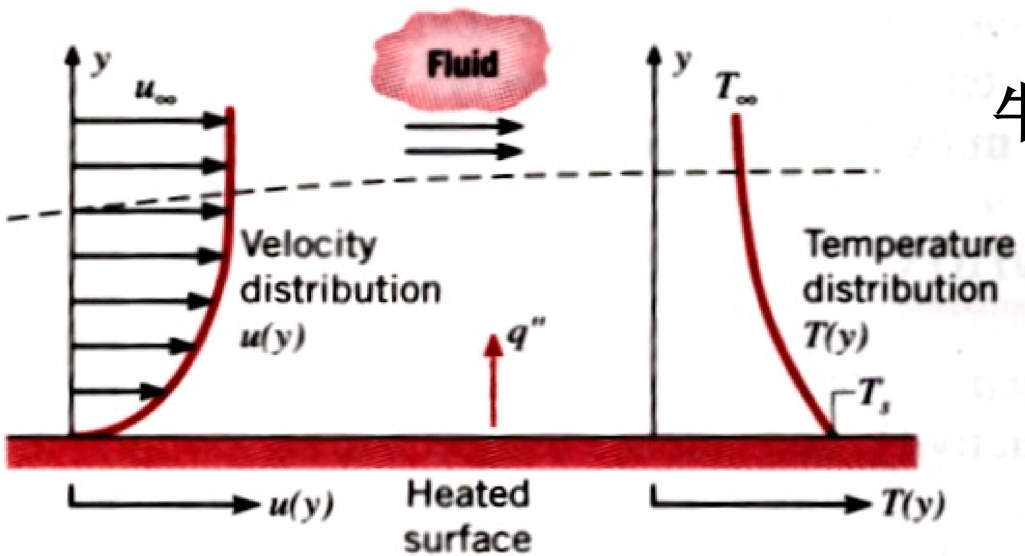
- 对流换热与热对流不同，既有热对流，也有导热；不是基本传热方式
- 对流换热实例：1) 暖气管道；2) 电子器件冷却；3) 电风扇

2 对流换热的特点

(1) 导热与热对流同时存在的复杂热传递过程

(2) 必须有直接接触（流体与壁面）和宏观运动；也必须有温差

(3) 由于流体的粘性和受壁面摩擦阻力的影响，紧贴壁面处会形成速度梯度很大的边界层



扌流换热的基本计算式

牛顿冷却式：

$$\Phi = hA(t_w - t_\infty) \ [\mathrm{W}]$$

$$q = \Phi / A$$

$$= h(t_w - t_f) \ [\mathrm{W/m^2}]$$

4 表面传热系数（对流换热系数）

$$h = \Phi / (A(t_w - t_\infty)) \quad \left[\mathrm{W/(m^2 \cdot {}^\circ C)}\right]$$

—— 当流体与壁面温度相差 1 度时、每单位壁面面积上、单位时间内所传递的热量

如何确定 *h* 及增强换热的措施是对流换热的核心问题

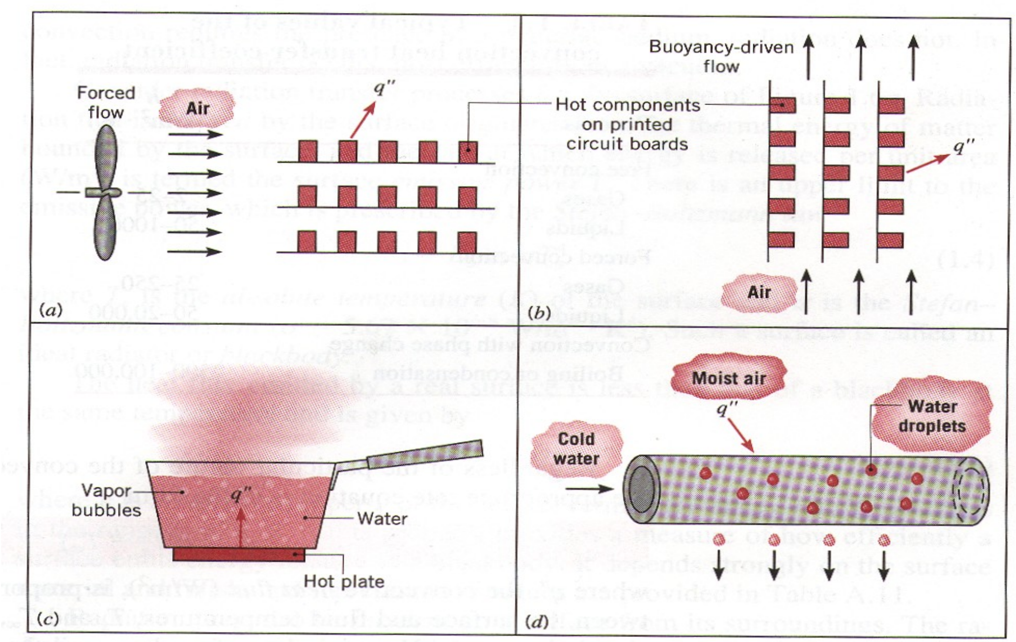


FIGURE 1.5 Convection heat transfer processes. (a) Forced convection. (b) Natural convection. (c) Boiling. (d) Condensation.

研究对流换热的方法：

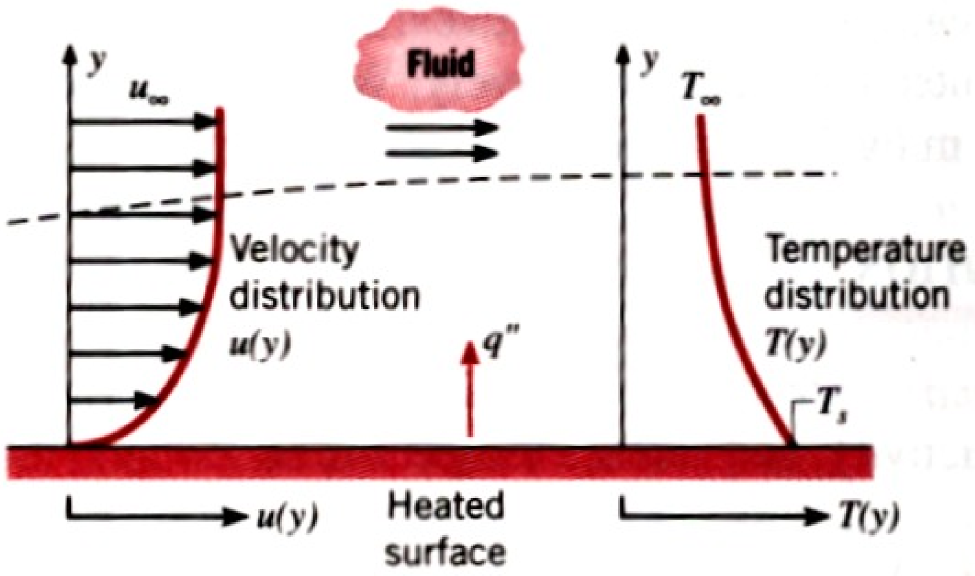
（1）分析法

（2）实验法

（3）比拟法

（4）数值法

5 对流换热过程微分方程式



当粘性流体在壁面上流动时，由于粘性的作用，流体的流速在靠近壁面处随离壁面的距离的缩短而逐渐降低；在贴壁处被滞止，处于无滑移状态（即：y=0, u=0 ）

在这极薄的贴壁流体层中，热量只能以导热方式传递

根据傅里叶定律：

$$q_{w,x} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_{w,x} \qquad \left[\mathrm{W/m^2} \right]$$

λ – 流体的热导率 $\qquad \left[\mathrm{W/(m\,^\circ C)} \right]$

$(\partial t/\partial y)_{w,x}$ — 在坐标(x,0)处流体的温度梯度

根据傅里叶定律：

$$q_{w,x} = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{w,x}$$

根据牛顿冷却公式： **?**

$$q_{w,x} = h_x(t_w\text{-}t_\infty) \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right]$$

h_x — 壁面x处局部表面传热系数 $\left[\mathrm{W/(m^2\cdot{}^\circ C)}\right]$

由傅里叶定律与牛顿冷却公式：

$$h_x = -\frac{\lambda}{t_w - t_\infty}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{w,x} \qquad \left[\mathrm{W/(m^2\cdot{}^\circ C)}\right]$$

对流换热过程
微分方程式

对流换热过程微分方程式 $h_x = -\dfrac{\lambda}{t_w - t_\infty}\left(\dfrac{\partial t}{\partial y}\right)_{w,x}$

h_x 取决于流体热导系数、温度差和贴壁流体的温度梯度

温度梯度或温度场取决于流体热物性、流动状况（层流或紊流）、流速的大小及其分布、表面粗糙度等 $\Rightarrow$ ***温度场取决于流场***

速度场和温度场由对流换热微分方程组确定：

质量守恒方程、动量守恒方程、能量守恒方程

§19 － 2 对流传热中的重要参数

- 动量扩散系数：

$$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$$

- 热量扩散系数：

$$\alpha \equiv \frac{k}{\rho c_p}$$

- 普朗特数 Pr
- 努塞尔数 Nu

§19-3 对流传热量纲分析

量纲分析法：在已知相关物理量的前提下，采用量纲分析获得无量纲量。

a 基本依据：π 定理， 即一个表示 **n** 个物理量间关系的量纲一致的方程式，一定可以转换为包含 **n - r** 个独立的无量纲物理量群间的关系。**r** 指基本量纲的数目。

b 优点：(a) 方法简单；**(b)** 在不知道微分方程的情况下，仍然可以获得无量纲量

c 例题：以圆管内单相强制对流换热为例

(a) 确定相关的物理量

$$h = f(u, d, \lambda, \eta, \rho, c_p)$$

$$\Rightarrow \quad n = 7$$

(b) 确定基本量纲 r

$$h:\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3\cdot K}\quad u:\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\quad d:\mathrm{m}\quad \lambda:\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}=\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3\cdot K}$$

$$\eta:Pa\cdot s=\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}\quad \rho:\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\quad c_p:\frac{J}{kg\cdot K}=\frac{m^2}{s^2\cdot K}$$

国际单位制中的 7 个基本量：长度 [m]，质量 [kg]，时间 [s]，电流 [A]，温度 [K]，物质的量 [mol]，发光强度 [cd]

因此，上面涉及了 4 个基本量纲：时间 [T]，长度 [L]，质量 [M]，温度 [Θ]

$\Rightarrow$ $r = 4$

$$n = 7: h, u, d, \lambda, \eta, \rho, c_p \qquad r = 4: [\mathrm{T}], [\mathrm{L}], [\mathrm{M}], [\Theta]$$

$\Rightarrow$ **n – r = 3**，即应该有三个无量纲量，因此，我们必须选定 **4** 个基本物理量，以与其它量组成三个无量纲量。我们选 **u,d,λ,η** 为基本物理量

(c) 组成三个无量纲量

$$\pi_1 = h u^{a_1} d^{b_1} \lambda^{c_1} \eta^{d_1}$$

$$\pi_2 = \rho u^{a_2} d^{b_2} \lambda^{c_2} \eta^{d_2}$$

$$\pi_3 = c_p u^{a_3} d^{b_3} \lambda^{c_3} \eta^{d_3}$$

(d) 求解待定指数，以π_1 为例

$$\pi_1 = h u^{a_1} d^{b_1} \lambda^{c_1} \eta^{d_1}$$

$$\pi_1 = hu^{a_1} d^{b_1} \lambda^{c_1} \eta^{d_1}$$

$$= M^1 T^{-3} \Theta^{-1} \cdot L^{a_1} T^{-a_1} \cdot L^{b_1} \cdot M^{c_1} L^{c_1} T^{-3c_1} \Theta^{-c_1} \cdot M^{d_1} L^{-d_1} T^{-d_1}$$

$$= M^{1+c_1+d_1} T^{-3-a_1-3c_1-d_1} \Theta^{-1-c_1} \cdot L^{a_1+b_1+c_1-d_1}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 1 + c_1 + d_1 = 0 \\ -3 - a_1 - 3c_1 - d_1 = 0 \\ -1 - c_1 = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 - d_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 1 \\ c_1 = -1 \\ d_1 = 0 \end{cases}$$

$$\pi_1 = hu^{a_1} d^{b_1} \lambda^{c_1} \eta^{d_1} = hu^0 d^1 \lambda^{-1} \eta^0 = \frac{hd}{\lambda} = Nu$$

同理：

$$\pi_2 = \frac{\rho ud}{\eta} = \frac{ud}{\nu} = \mathrm{Re}$$

$$\pi_3 = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} = \mathrm{Pr}$$

于是有：

$$Nu = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$$

单相、强制对流

强制对流： $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$； $\mathrm{Nu}_x = f(x', \mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$

同理，对于其他情况：

自然对流换热： $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr})$

混合对流换热： $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re},\ \mathrm{Gr},\ \mathrm{Pr})$

Nu — 待定特征数 （含有待求的 h ）

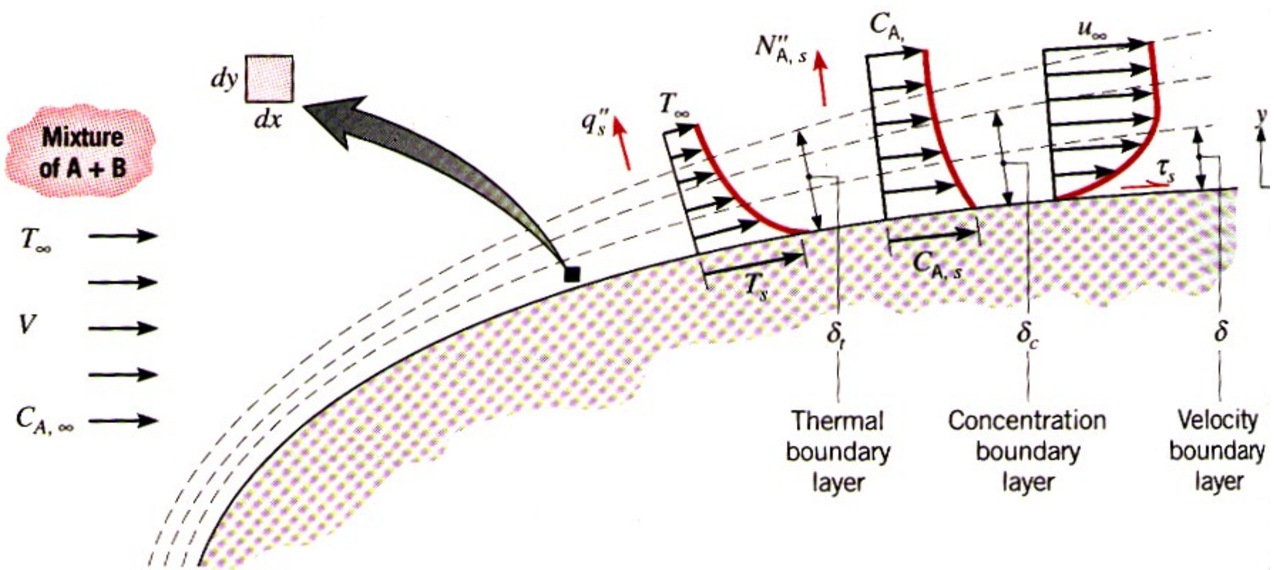
Re， Pr， Gr — 已定特征数

按上述关联式整理实验数据，得到实用关联式解决了实验中实验数据如何整理的问题

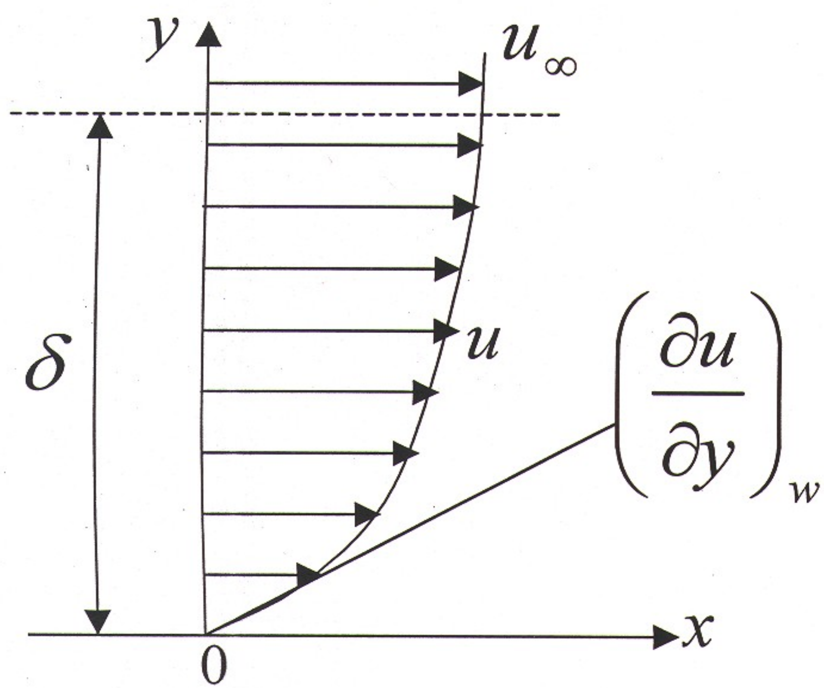
§19－4、5 层流边界层精确解
热边界层近似积分解

边界层概念：当粘性流体流过物体表面时，会形成速度梯度很大的流动边界层；当壁面与流体间有温差时，也会产生温度梯度很大的温度边界层（或称热边界层）1904年，德国科学家普朗特 L.Prandtl

1 流动边界层（ Velocity boundary layer ）



由于粘性作用，流体流速在靠近壁面处随离壁面的距离的缩短而逐渐降低；在贴壁处被滞止，处于无滑移状态



从 $y=0$、$u=0$ 开始，u 随着 y 方向离壁面距离的增加而迅速增大；经过厚度为 δ 的薄层，u 接近主流速度 u_∞

$y=\delta$ 薄层 — 流动边界层
或速度边界层

δ — 边界层厚度

定义：u/u∞=0.99 处离壁的距离为边界层厚度

δ 小：空气外掠平板，u∞=10m/s：

$$\delta_{x=100mm}=1.8\text{mm};\quad \delta_{x=200mm}=2.5\text{mm}$$

边界层内：平均速度梯度很大；y=0 处的速度梯度最大

由牛顿粘性定律：　$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$　速度梯度大，粘滞应力大

边界层外：　u_∞ 在 y 方向不变化，　$\partial u/\partial y=0$

粘滞应力为零 — 主流区

流场可以划分为两个区：边界层区与主流区

边界层区：流体的粘性作用起主导作用，流体的运动可用粘性流体运动微分方程组描述（N-S 方程）

主流区：速度梯度为 0，$\tau=0$；可视为无粘性理想流体；欧拉方程

—— 边界层概念的基本思想

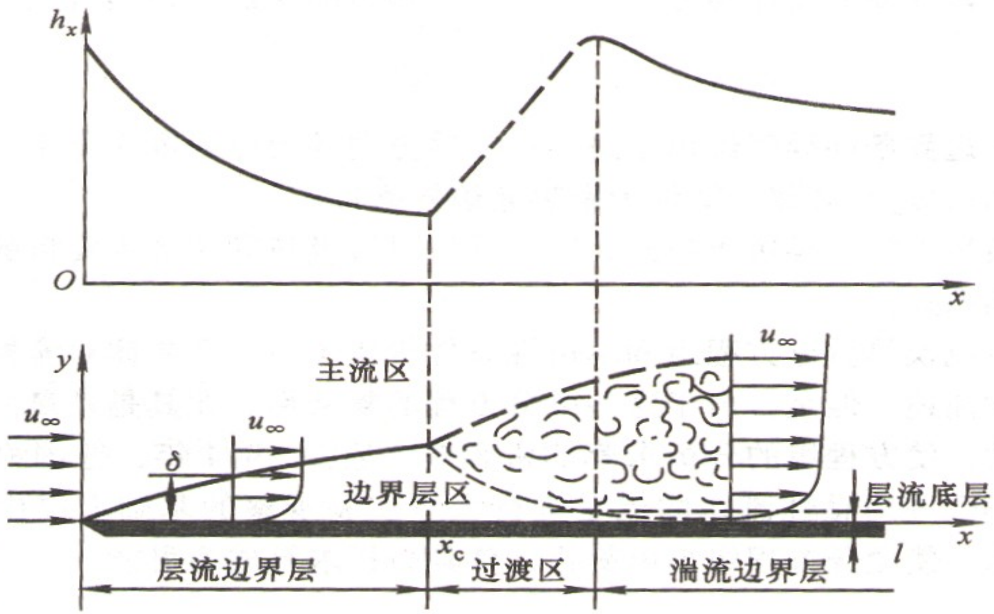


图 10－5　流体外掠平板时流动边界层的形成与发展及局部表面传热系数变化示意图

流体外掠平板时的流动边界层

临界距离：由层流边界层开始向湍流边界层过渡的距离，x_c

临界雷诺数：Re_c

$$\mathrm{Re}_c=\frac{惯性力}{粘性力}=\frac{\rho u_\infty x_c}{\eta}$$

$$=\frac{u_\infty x_c}{\nu}$$

平板：$\mathrm{Re}_c=3\times10^5\sim3\times10^6$；　取 $\mathrm{Re}_c=5\times10^5$

$$\boxed{x_c=\frac{\mathrm{Re}_c\,\nu}{u_\infty}}$$

湍流边界层：

粘性底层（层流底层）：紧靠壁面处，粘滞力会占绝对优势，使粘附于壁的一极薄层仍然会保持层流特征，具有最大的速度梯度

流动边界层的几个重要特性

(1) 边界层厚度 δ 与壁的定型尺寸 L 相比极小，$\delta \ll L$

(2) 边界层内存在较大的速度梯度

(3) 边界层流态分层流与湍流；湍流边界层紧靠壁面处仍有层流特征，粘性底层（层流底层）

(4) 流场可以划分为边界层区与主流区

边界层区：由粘性流体运动微分方程组描述

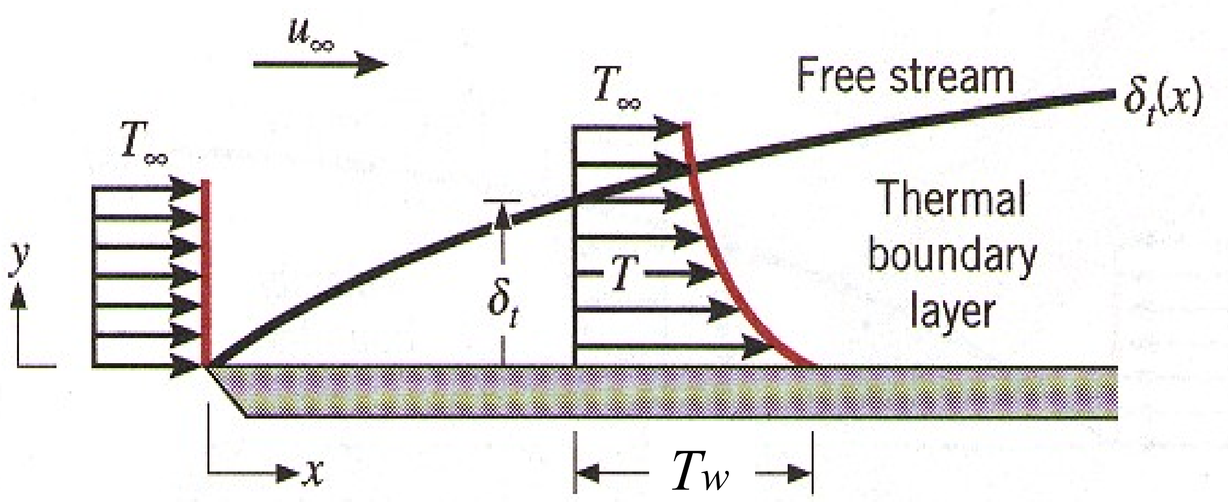
主流区：由理想流体运动微分方程—欧拉方程描述

边界层理论的基本论点

边界层概念也可以用于分析其他情况下的流动和换热：
如：流体在管内受迫流动、流体外掠圆管流动、流体在竖直壁面上的自然对流等

2 热边界层（Thermal boundary layer）

当壁面与流体间有温差时，会产生温度梯度很大的温度边界层（热边界层）



$y=0,\ \theta_w = T - T_w = 0$

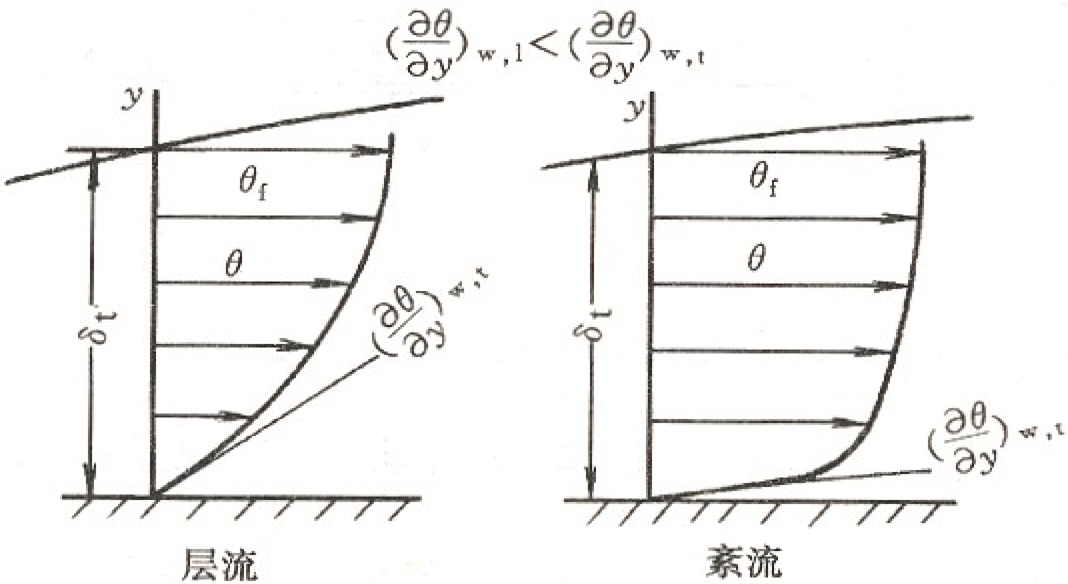
$y=\delta_t,\ \theta = T - T_w = 0.99\theta_\infty$

厚度δ_t范围 — 热边界层或温度边界层

δ_t— 热边界层厚度

δ与δ_t不一定相等

流动边界层与热边界层的状况决定了热量传递过程和边界层内的温度分布



层流：温度呈抛物线分布

湍流：温度呈幂函数分布

湍流边界层贴壁处的温度梯度明显大于层流

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{w,t} > \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{w,L}$$

故：湍流换热比层流换热强！

δ 与 δ_t 的关系：分别反映流体分子和流体微团的动量和热量扩散的深度

$$\delta_t/\delta \approx \mathrm{Pr}^{-1/3} \quad (\text{层流、} 0.6 \le \mathrm{Pr} \le 50)$$

3 边界层换热微分方程组

边界层概念的引入可使换热微分方程组得以简化

数量级分析：比较方程中各量或各项的量级的相对大小；保留量级较大的量或项；舍去那些量级小的项，方程大大简化

例：二维、稳态、强制对流、层流、忽略重力

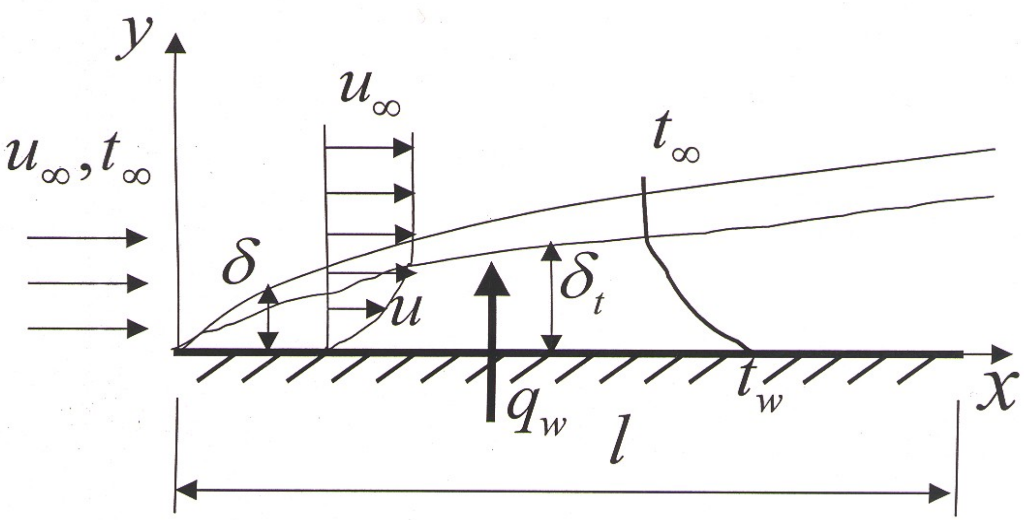
5 个基本量的数量级： 主流速度：$u_\infty \sim 0(1);$

温度：$t \sim 0(1);$ 壁面特征长度： $l \sim 0(1);$

边界层厚度： $\delta \sim 0(\delta);\quad \delta_t \sim 0(\delta)$

x 与 l 相当，即 $x \sim l \sim 0(1);\quad 0 \le y \le \delta \quad \therefore \quad y \sim 0(\delta)$

0(1) 、 0(δ) 表示数量级为 1 和δ ， 1>> δ。"~" — 相当于



***u* 沿边界层厚度由 0 到 u_∞：**

$$u \sim u_\infty \sim 0(1)$$

由连续性方程：

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_\infty}{l} \sim 0(1)$$

$$\therefore \qquad v \sim 0(\delta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x} + v\frac{\partial t}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{\delta}{\delta}$$

$$\rho\ \left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(b)}$$

$$1\ \left(1\ \frac{1}{1} \quad \delta\ \frac{1}{\delta}\right) \qquad 1 \qquad \delta^2\left(\frac{1}{1^2} \quad \frac{1}{\delta^2}\right)$$

$$\rho\ \left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(c)}$$

$$1\ \left(1\ \frac{\delta}{1} \quad \delta\ \frac{\delta}{\delta}\right) \qquad \delta \qquad \delta^2\left(\frac{\delta}{1^2} \quad \frac{\delta}{\delta^2}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\lambda\left(\cancel{\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(d)}$$

$$1\quad\left(1\ \frac{1}{1}\qquad \delta\ \frac{1}{\delta}\right)\quad \delta_t^{\,2}\left(\ \frac{1}{1^2}\qquad \frac{1}{\delta^2}\right)$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\lambda\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim 0(\delta) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} \sim 0(1)$$

表明：边界层内的压力梯度仅沿 x 方向变化，而边界层内法向的压力梯度极小。

边界层内任一截面压力与 y 无关而等于主流压力

$$\therefore \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

由上式： $$-\frac{dp}{dx} = \rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx}$$

$\frac{\partial p}{\partial y} \sim 0(\delta)$ 可视为边界层的又一特性

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

层流边界层对流换热微分方程组：

3 个方程、 3 个未知量： *u* 、 *v* 、 *t* ， *方程封闭*

如果配上相应的定解条件，则可以求解

$$-\frac{dp}{dx}=\rho u_\infty\frac{du_\infty}{dx}$$ 若 $\frac{du_\infty}{dx}=0$，则 $\frac{dp}{dx}=0$

例如：对于主流场均速 u_∞ 、均温 ，并给定恒定壁温的情况下的流体纵掠平板换热，即边界条件为

$$y=0 \quad u=0, \quad v=0, \quad t=t_w$$
$$y=\delta \quad u=u_\infty, \quad t=t_\infty$$

求解上述方程组(层流边界层对流换热微分方程组)，

可得局部表面传热系数 h_x 的表达式

注意：层流

$$h_x=0.332\frac{\lambda}{x}\left(\frac{u_\infty x}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{h_x x}{\lambda}=0.332\left(\frac{u_\infty x}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$Nu_x=0.332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\cdot\mathrm{Pr}^{1/3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h_x x}{\lambda} = 0.332\left(\frac{u_\infty x}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$Nu_x = 0.332\,\mathrm{Re}_x^{1/2}\cdot \mathrm{Pr}^{1/3}$$

特征数方程

或

准则方程

一定要注意上面准则方程的适用条件：

外掠等温平板、无内热源、层流

式中：

$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} \longrightarrow$$ **努塞尔 (Nusselt) 数**

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} \longrightarrow$$ **雷诺 (Reynolds) 数**

注意：特征尺度为当地坐标 x

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} \longrightarrow$$ **普朗特数**

(1) 边界层积分方程的推导

——以二维、稳态、常物性、无内热源的对流换热为例

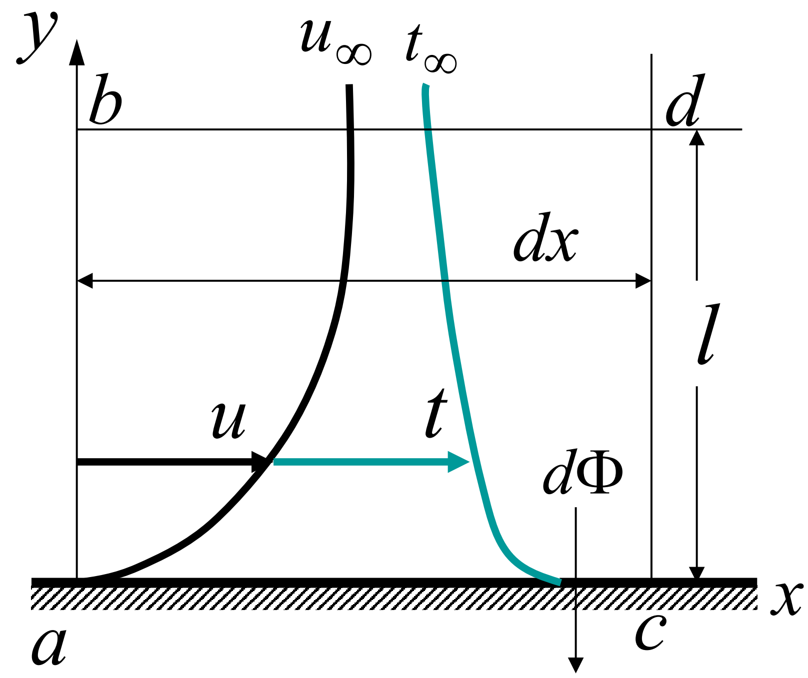
建立边界层积分方程有两种方法：

控制容积法和积分方法，

我们采用前者，控制体积见图所示，

X 方向 dx y 方向 $l>\delta$ ，z 方向去单位长度，在边界层数量级分析中已经得出

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$



因此，只考虑固体壁面在 y 方向的导热。

a 单位时间内穿过 **ab** 面进入控制容积的热量：

$$\Phi_{ab} = \rho c_p \int_0^l tudy$$

b 单位时间内穿过 **cd** 面带出控制容积的热量：

$$\Phi_{cd} = \Phi_{ab} + \frac{\partial \Phi_{ab}}{\partial x} dx$$

$$= \Phi_{ab} + \rho c_p \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^l tudy\right) dx$$

净热流量为： $$\Delta\Phi = \rho c_p \frac{d}{dx}\left(\int_0^l tudy\right)dx$$

c 单位时间内穿过 **bc** 面进入控制容积的热量：

$$\Phi_{bd} = -\rho c_p t_\infty v_{\delta_t} dx$$

这里假设： **Pr ≥1**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\delta_t} = -\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{d}{dx}\left(\int_0^l udy\right)$$

$$\Phi_{bd} = \rho c_p t_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^l udy\right)dx$$

d 单位时间内穿过 **ac** 面因贴壁流体层导热进入控制容积的热量：

$$\Phi_{ac} = -\lambda_f dx \left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\Delta\Phi = -\rho c_p \frac{d}{dx}\left(\int_0^l tudy\right)dx \qquad \Phi_{bd} = \rho c_p t_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^l udy\right)dx$$

$$\Phi_{ac} = -\lambda_f dx \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0} \qquad \Delta\Phi + \Phi_{bd} + \Phi_{ac} = 0$$

$$-\rho c_p \frac{d}{dx}\left(\int_0^l tudy\right)dx + \rho c_p t_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^l udy\right)dx - \lambda_f dx \frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0$$

整理后：

$$\frac{d}{dx}\int_0^l (t_\infty - t)udy = a\frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

即：

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} (t_\infty - t)udy = a\frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

能量积分方程：
$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t}(t_\infty - t)udy = a\frac{\partial t}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

相似地，动量积分方程：
$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta}(u_\infty - u)udy = \nu\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

两个方程， **4** 个未知量： **u, t, δ, δ_t** 。要使方程组封闭，还必须补充两个有关这 **4** 个未知量的方程。这就是关于 **u** 和 **t** 的分布方程。

(2) 边界层积分方程组求解

在常物性情况下，动量积分方程可以独立求解，即先求出δ，然后求解能量积分方程，获得δ_t 和 **h**

边界条件： $y=0 \quad u=0 \ and$

$$y=\delta \quad u=u_\infty \ and \ \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

假设速度 **u** 为三次多项式，即 $u=a+by+cy^2+dy^3$

由边界条件可以得出： $a=0,\ b=\frac{3}{2}\frac{u_\infty}{\delta},\ c=0,\ d=-\frac{u_\infty}{2\delta^3}$

$$\frac{u}{u_\infty}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$\frac{u}{u_\infty}=\frac{3}{2}\frac{y}{\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\frac{3}{2}\frac{u_\infty}{\delta}$$

带入动量积分方程：

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty-u)u\,dy=\nu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$$

$$\delta=4.64\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \quad or \quad \frac{\delta}{x}=\frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

X 处的局部壁面切应力为：

$$\tau_w=\eta\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=\nu\rho\frac{3}{2}u_\infty\frac{1}{4.64}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}=\frac{0.323\rho u_\infty^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

在工程中场使用局部切应力与流体动压头之比这个无量纲量，并称之为范宁摩擦系数，简称摩擦系数

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty} = 0.646\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$$

平均摩擦系数： $c_{fm} = 1.292\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$

上面求解动量积分方程获得的是近似解，而求解动量微分方程可以获得 δ/x *and* c_f 的精确解，分别为：

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad c_f = 0.664\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}$$

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}} \qquad \boxed{c_f = 0.646\,\mathrm{Re}_x^{-1/2}}$$

可见二者非常接近

可以采用类似的过程，并假设 $t = a + by + cy^2 + dy^4$

求解能量积分方程，可得

无量纲过余温度分布：

$$\frac{t - t_w}{t_\infty - t_w} = \frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

热边界层厚度：

$$\delta_t = \frac{\Pr^{-1/3}}{1.026}\delta = 4.52\Pr^{-\frac{1}{3}}\mathrm{Re}^{-\frac{1}{2}} \cdot x$$

再次强调：以上结果都是在 **Pr ≥1** 的前提下得到的

局部对流换热系数：

$$h_x = -\frac{\lambda}{t_w - t_\infty}\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{\delta_t} = 0.332\frac{\lambda}{x}\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}\Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{h_x x}{\lambda} = Nu_x = 0.332\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}\Pr^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{h_x x}{\lambda} = Nu_x = 0.332 \mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}} \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \overline{Nu} = \frac{\bar{h} l}{\lambda} = 0.664 \mathrm{Re}^{\frac{1}{2}} \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

计算时，<u>*注意五点*</u>：

a　Pr ≥1　；

b　Nu 与 $\overline{Nu}$　　h_x' 与 $\bar{h}$　　两对变量的差别；

c　*x*　与　*l*　的选取或计算　；

d　$\mathrm{Re} \le 5 \times 10^5$

e　定性温度：　$t = (t_\infty + t_w)/2$

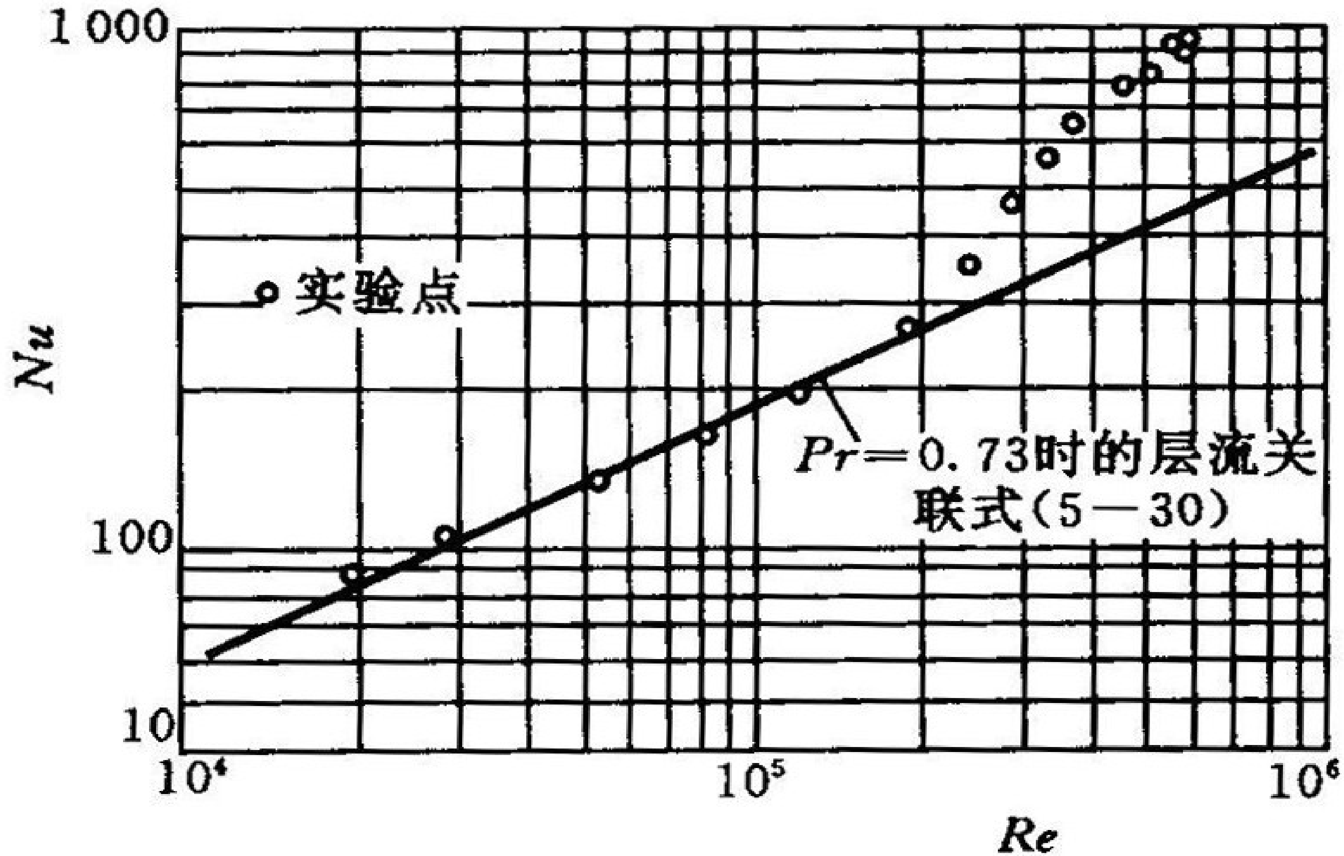


图 5-10　外掠平板强制对流换热的实验结果与理论解的比较

§19 — 6 热量与动量传递类比

δ 与 δt 之间的关系

对于外掠平板的层流流动：

$$u_{\infty} = const, \quad \therefore \quad -\frac{dp}{dx} = 0$$

动量方程： $$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

此时动量方程与能量方程的形式完全一致：

$$u\frac{\partial t}{\partial x}+v\frac{\partial t}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$$

表明：此情况下动量传递与热量传递规律相似

特别地：对于 $\nu = a$ 的流体（Pr=1），速度场与无量纲温度场将完全相似，这是 Pr 的另一层物理意义：表示流动边界层和温度边界层的厚度相同

§19 — 7 湍流的研究

§19 — 8 小结

作业

19.9