第十八章

非稳态导热

§18-0 非稳态导热的基本概念

1 非稳态导热的定义 .

$$t = f(r, \tau)$$

2 非稳态导热的分类

非稳态导热

周期性

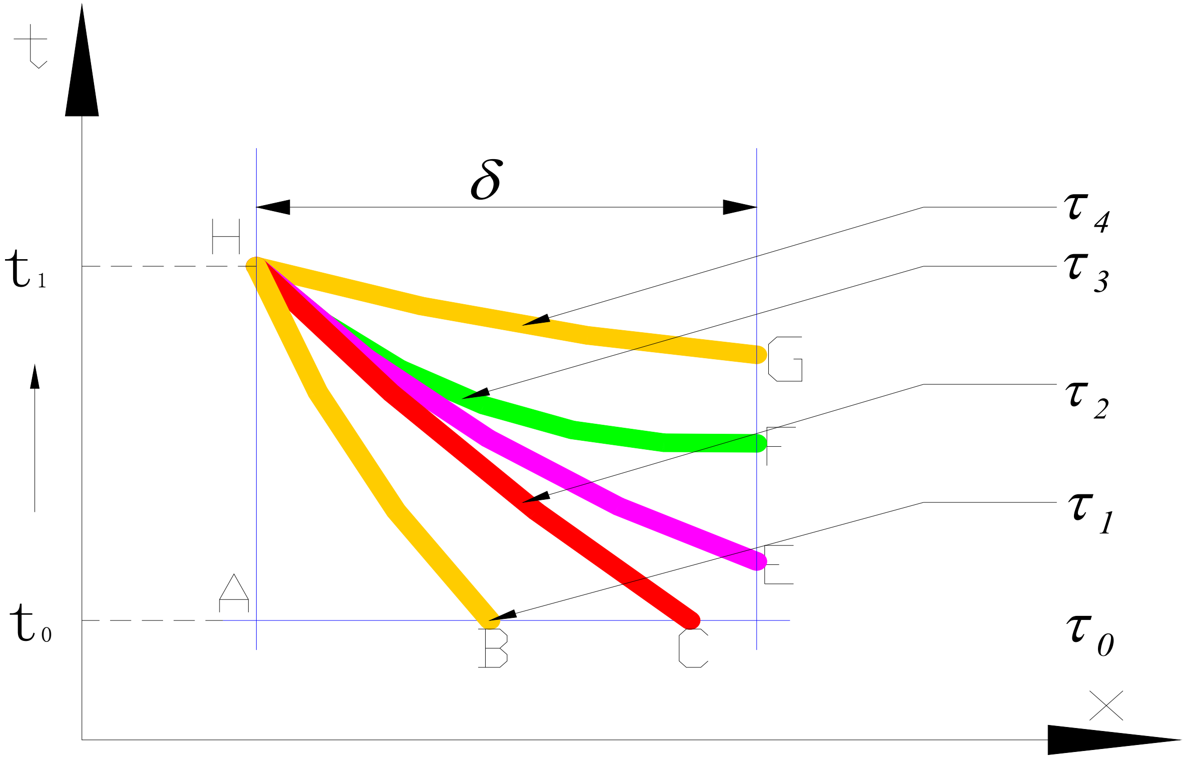
（定义及特点）

瞬态非稳态导热

（定义及特点）

着重讨论瞬态非稳态导热

3 温度分布：



4 两个不同的阶段

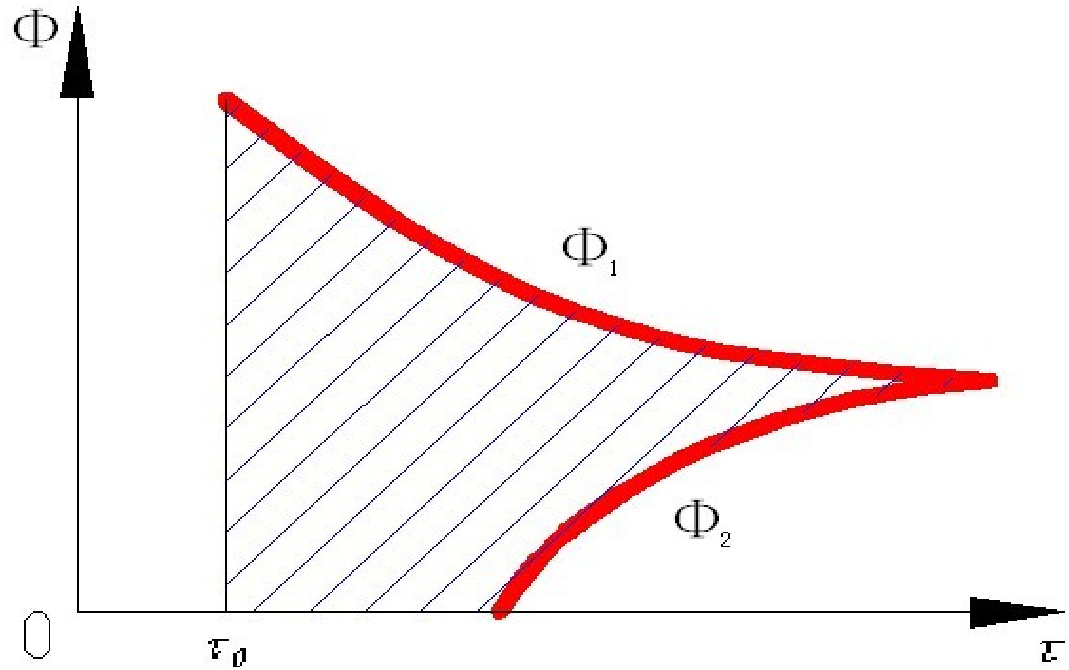
非正规状况阶段
(不规则情况阶段) → 温度分布主要受初始温度分布控制

正规状况阶段
(正常情况阶段) → 温度分布主要取决于边界条件及物性

导热过程的三个阶段

非正规状况阶段（起始阶段）、正规状况阶段、新的稳态

5 热量变化



Φ_1——板左侧导入的热流量

Φ_2——板右侧导出的热流量

6 学习非稳态导热的目的：

(1) 温度分布和热流量分布随时间和空间的变化规律

$$t = f(x, y, z, \tau); \qquad \Phi = f(\tau)$$

(2) 非稳态导热的导热微分方程式：

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}) + \dot{\Phi}$$

(3) 求解方法：分析解法、近似分析法、数值解法

分析解法：分离变量法、积分变换、拉普拉斯变换

近似分析法：集总参数法、积分法

数值解法：有限差分法、蒙特卡洛法、有限元法、分子动力学模拟

7 毕渥数

本章以第三类边界条件为重点。

(1) 问题的分析

如图所示，存在两个换热环节：

a 流体与物体表面的对流换热环节

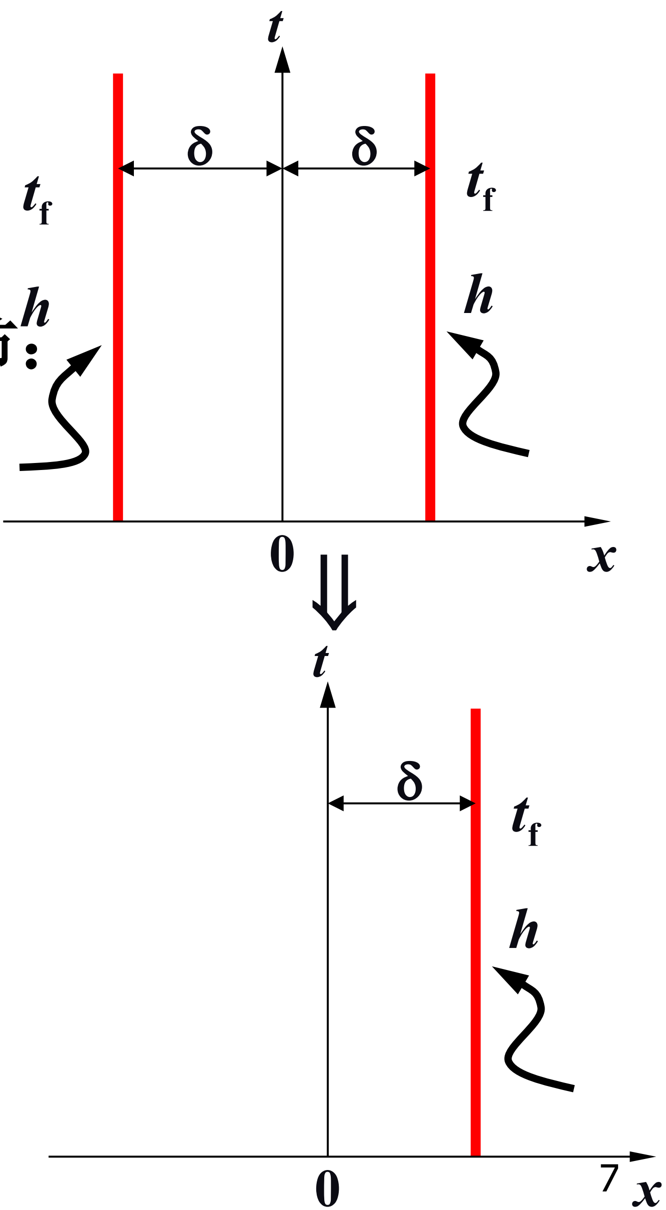
$$r_h = 1/h$$

b 物体内部的导热

$$r_\lambda = \delta/\lambda$$

(2) 毕渥数的定义：

$$Bi = \frac{r_\lambda}{r_h} = \frac{\delta/\lambda}{1/h} = \frac{\delta h}{\lambda}$$



(3) Bi 数对温度分布的影响

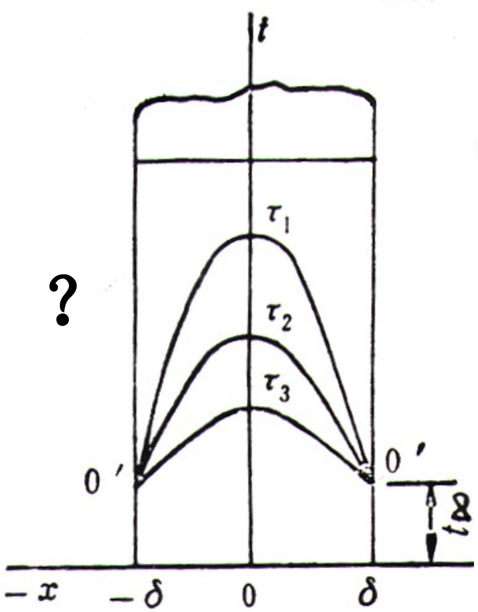
$$Bi=\frac{r_\lambda}{r_h}=\frac{\delta/\lambda}{1/h}=\frac{\delta h}{\lambda}$$

无量纲数

当 $Bi\to\infty$ 时， $\Rightarrow r_\lambda >> r_h$ ，因此，可以忽略对流换热热阻

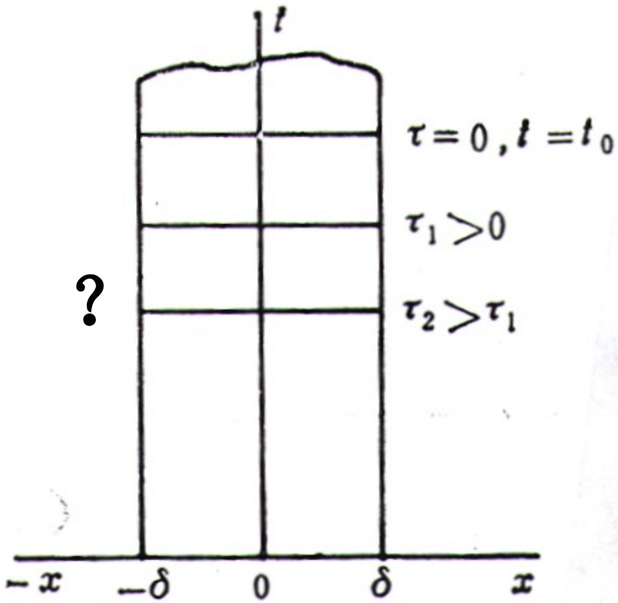
当 $Bi\to 0$ 时， $\Rightarrow r_\lambda << r_h$ ，因此，可以忽略导热热阻

?

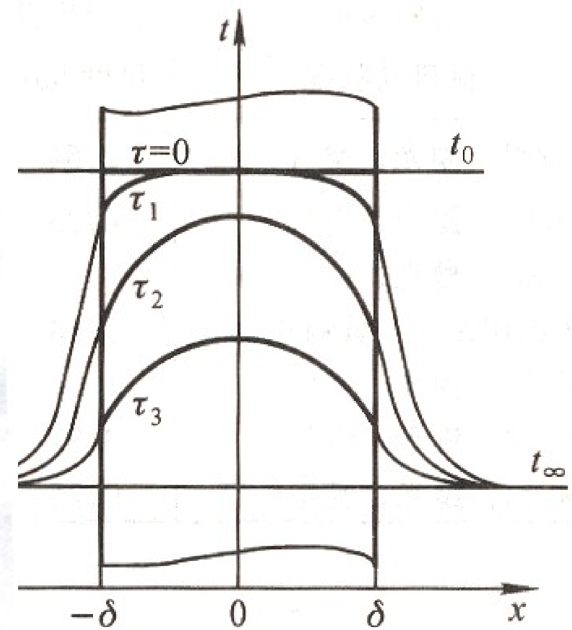


Bi →∞

?

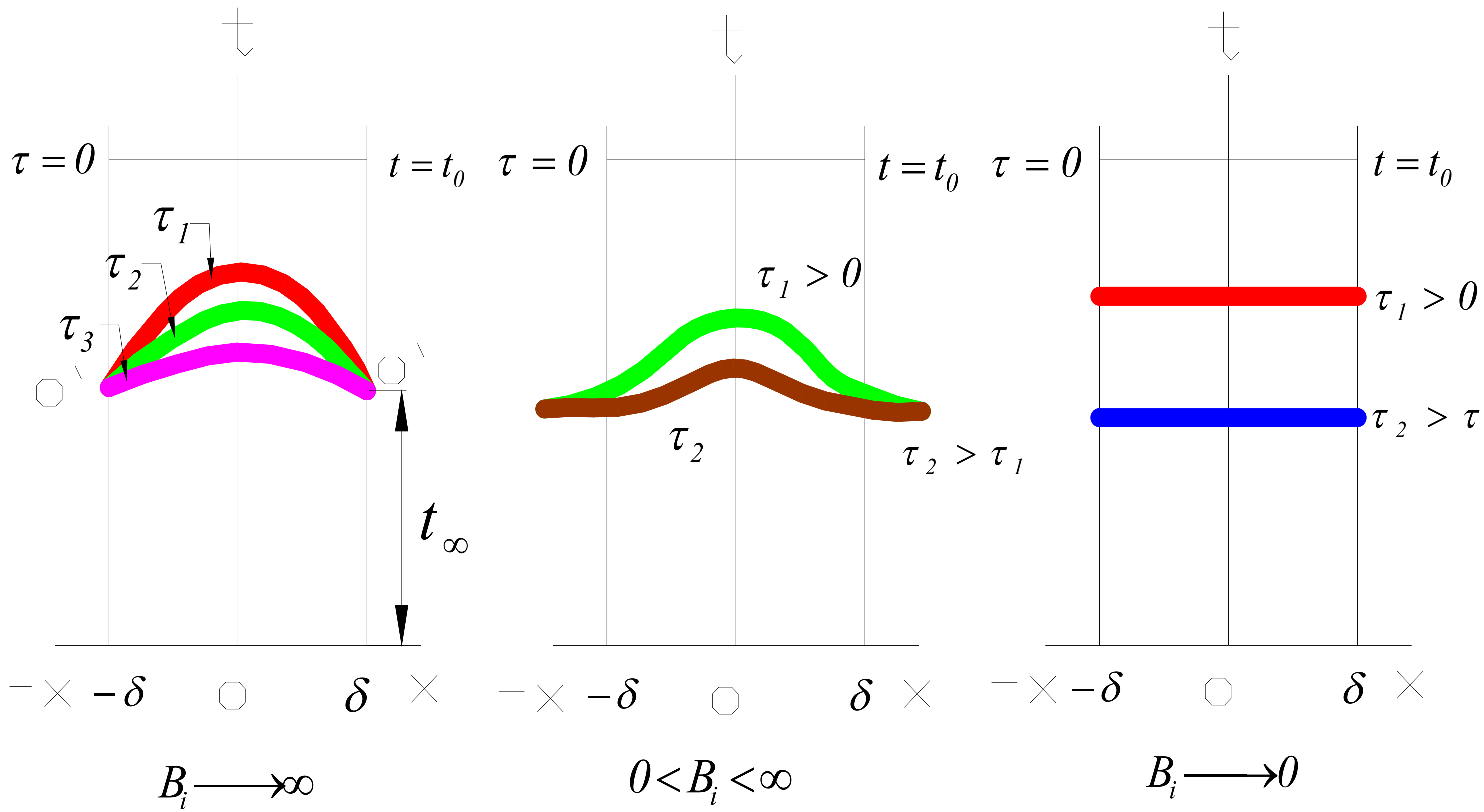


Bi →0



$0<Bi<\infty$

B_i 准则对温度分布的影响



Bi 准则对无限大平壁温度分布的影响

(4) 无量纲数的简要介绍

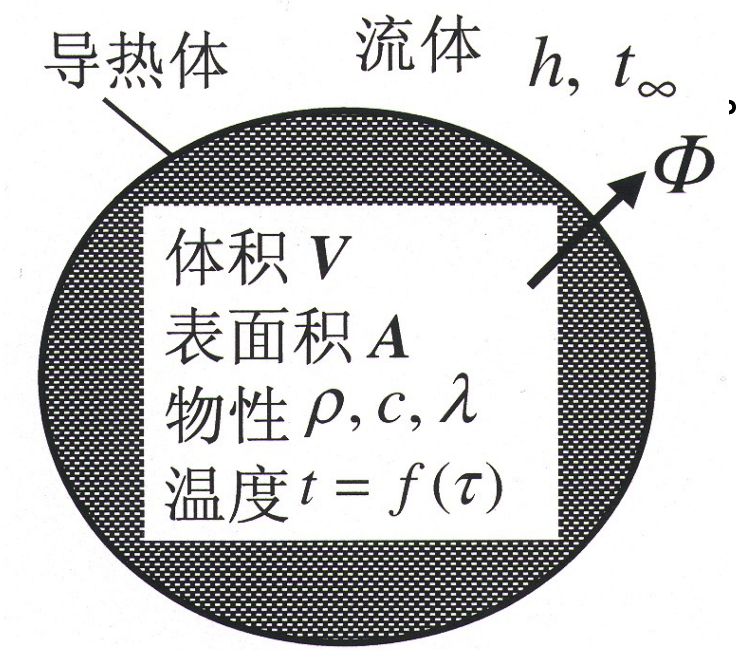
基本思想：当所研究的问题非常复杂，涉及到的参数很多，为了减少问题所涉及的参数，于是人们将这样一些参数组合起来，使之能表征一类物理现象，或物理过程的主要特征，并且没有量纲。

因此，这样的无量纲数又被称为特征数，或者准则数，比如，毕渥数又称毕渥准则。以后会陆续遇到许多类似的准则数。特征数涉及到的几何尺度称为特征长度，一般用符号 l 表示。

对于一个特征数，应该掌握其定义式＋物理意义，以及定义式中各个参数的意义。

§18－1　分析解法

1 定义： 忽略物体内部导热热阻、认为物体温度均匀一致的分析方法。此 $Bi \to 0$ ，温度分布只与时间有关，即 $t = f(\tau)$ ，与空间位置无关，因此，也称为



2 温度分布

如图所示，任意形状的物体，参数均为已知。

$$\tau = 0\text{时}，\quad t = t_0$$

将其突然置于温度恒为 t_∞ 的流体中。

当物体被冷却时（ $t>t_\infty$ ），由能量守恒可知

$$hA(t-t_\infty) = -\rho Vc\frac{dt}{d\tau}$$

令： $\theta = t - t_\infty$ — 过余温度，则有

$$\begin{cases} hA\theta = -\rho Vc\dfrac{d\theta}{d\tau} \\ \theta(\tau=0) = t_0 - t_\infty = \theta_0 \end{cases}$$

控制方程

初始条件

方程式改写为： $$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho Vc}d\tau$$

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho Vc} d\tau \quad \overset{\text{积分}}{\Rightarrow \Rightarrow} \quad \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho Vc} \int_0^{\tau} d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{hA}{\rho Vc}\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau}}$$

过余温度比

其中的指数：$$\frac{hA}{\rho c V}\tau = \frac{hV}{\lambda A} \cdot \frac{\lambda A^2}{V^2 \rho c}\tau$$

$$= \frac{h(V/A)}{\lambda} \cdot \frac{a\tau}{(V/A)^2} = Bi_v \cdot Fo_v$$

$$Bi_v = \frac{h(V/A)}{\lambda} \qquad Fo_v = \frac{a\tau}{(V/A)^2}$$

Fo_v 是傅立叶数

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau} = e^{-Bi_v \cdot Fo_v}$$

物体中的温度呈指数分布

方程中指数的量纲：

$$\frac{hA}{\rho Vc} = \frac{\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}\right]\cdot\left[\mathrm{m^2}\right]}{\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}\right]\cdot\left[\frac{\mathrm{Jkg}}{\mathrm{K}}\right]\left[\mathrm{m^3}\right]} = \frac{w}{J} = \frac{1}{s}$$

即与 $\frac{1}{\tau}$ 的量纲相同，当$\tau = \frac{\rho V c}{hA}$ 时，则

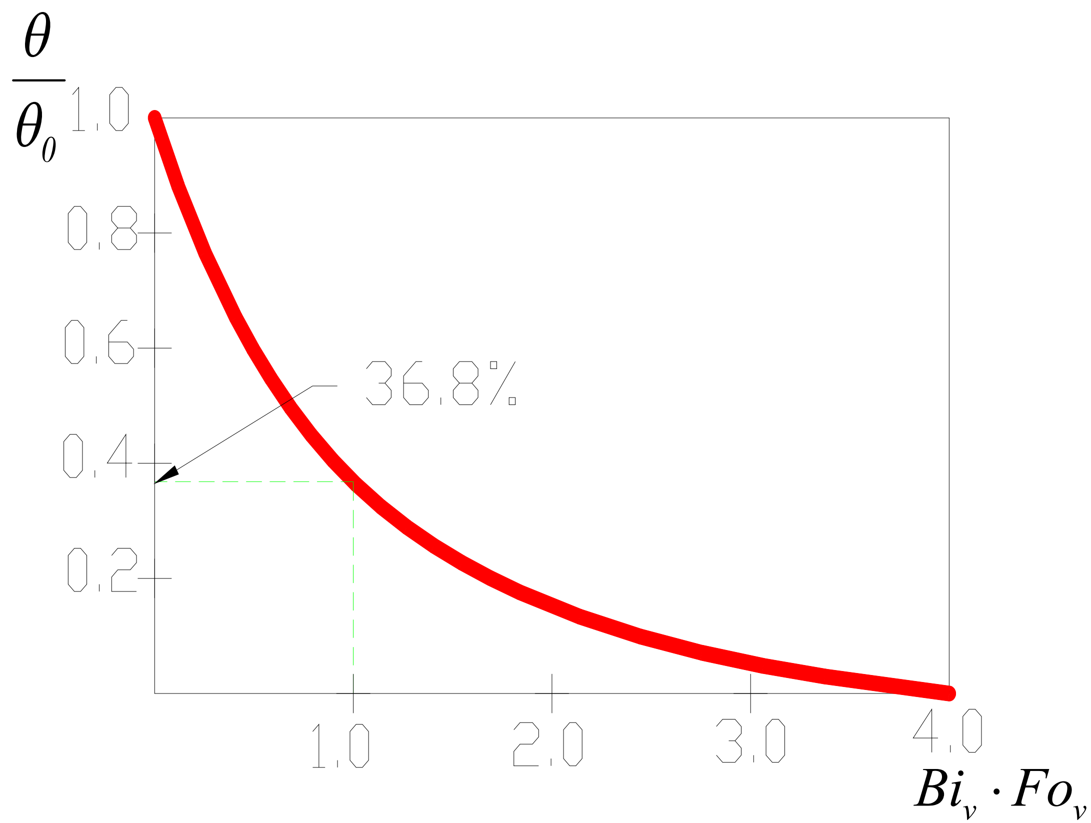
$\tau \cdot \frac{hA}{\rho V c} = 1$ 此时，

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-1} = 36.8\%$$

上式表明：当传热时间等于 $\frac{\rho V c}{hA}$ 时，物体的过余温度已经达到了初始过余温度的 **36.8 %**。

称 $\frac{\rho V c}{hA}$ 为时间常数，用τ_c 表示。

$$\tau = \tau_c \qquad \frac{\theta}{\theta_0} = e^{-1} = 36.8\%$$



应用集总参数法时，物体过余温度的变化曲线

如果导热体的热容量（ ρVc ）小、换热条件好（ h大），那么单位时间所传递的热量大、导热体的温度变化快，时间常数 （ ρVc / hA） 小。

对于测温的热电偶节点，时间常数越小、说明热电偶对流体温度变化的响应越快。这是测温技术所需要的

（微细热电偶、薄膜热电阻）

当$\tau = 4\dfrac{\rho Vc}{hA}$时，$\dfrac{\theta}{\theta_0} = 1.83\%$

工程上认为τ=4 ρVc / hA 时导热体已达到热平衡状态

3 瞬态热流量： $$\Phi(\tau)=hA(t(\tau)-t_\infty)=hA\theta$$

$$=hA\theta_0 e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau} \quad [\mathrm{W}]$$

导热体在时间 0~ τ 内传给流体的总热量：

$$Q_\tau=\int_0^\tau \Phi(\tau)d\tau=\rho Vc\theta_0(1-e^{-\frac{hA}{\rho Vc}\tau}) \quad [\mathrm{J}]$$

当物体被加热时 ($t<t_\infty$)，计算式相同（为什么？）

4 Bi_v Fo_v 物理意义

$$\mathrm{Bi}=\frac{hl}{\lambda}=\frac{l/\lambda}{1/h}=\frac{\text{物体内部导热热阻}}{\text{物体表面对流换热热阻}}$$

无量纲热阻

$$Fo=\frac{\tau}{l^2/a}=\frac{\text{换热时间}}{\text{边界热扰动扩散到}l^2\text{面积上所需的时间}}$$

无量纲时间

Fo 越大，热扰动就能越深入地传播到物体内部，因而，物体各点地温度就越接近周围介质的温度。

5 集总参数法的应用条件

采用此判据时，物体中各点过余温度的差别小于 5%

$$B_{iv}=\frac{h(V/A)}{\lambda}<0.1M$$

是与物体几何形状有关的无量纲常数

对厚为 2δ 的	$M=1$	$\frac{V}{A}=\frac{A\delta}{A}=\delta$	$B_{iv}=B_i$
无限大平板	$M=\frac{1}{2}$	$\frac{V}{A}=\frac{\pi R^2\rho}{2\pi R\rho}=\frac{R}{2}$	$B_{iv}=\frac{B_i}{2}$
对半径为 R 的	$M=\frac{1}{3}$	$\frac{V}{A}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2}=\frac{R}{3}$	$B_{iv}=\frac{B_i}{3}$

无限长圆柱

§18 － 3 非稳态导热数值解

- §18 － 3 － 0 引言
- 求解导热问题的三种基本方法：（1）理论分析法；（2）数值计算 法；（3）实验法

2 三种方法的基本求解过程

(1) 所谓理论分析方法，就是在理论分析的基础上，直接对微分方程在给定的定解条件下进行积分，这样获得的解称之为分析解，或叫理论解；

(2) 数值计算法，把原来在时间和空间连续的物理量的场，用有限个离散点上的值的集合来代替，通过求解按一定方法建立起来的关于这些值的代数方程，从而获得离散点上被求物理量的值；并称之为数值解；

(3) 实验法　就是在传热学基本理论的指导下，采用对所研究对象的传热过程所求量的方法

3 三种方法的特点

(1) 分析法

a 能获得所研究问题的精确解，可以为实验和数值计算提供比较依据；

b 局限性很大，对复杂的问题无法求解；

c 分析解具有普遍性，各种情况的影响清晰可见

(2) 数值法：在很大程度上弥补了分析法的缺点，适应性强，特别对于复杂问题更显其优越性；与实验法相比成本低

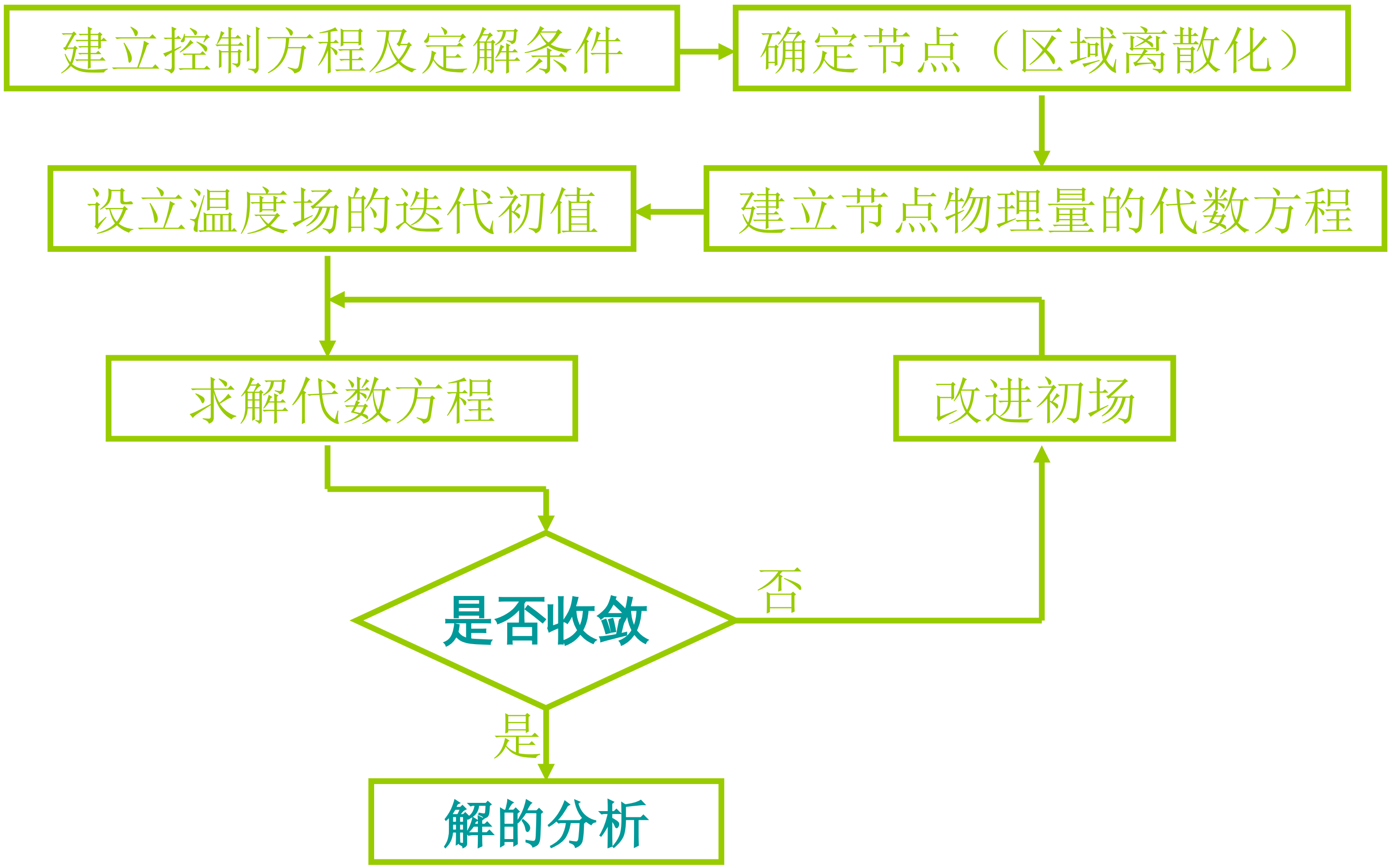
(3) 实验法：是传热学的基本研究方法，**a** 适应性不好；**b** 费用昂贵

数值解法：有限差分法（**finite-difference**）、有限元法（**finite-element**）、边界元法（**boundary- element**）、

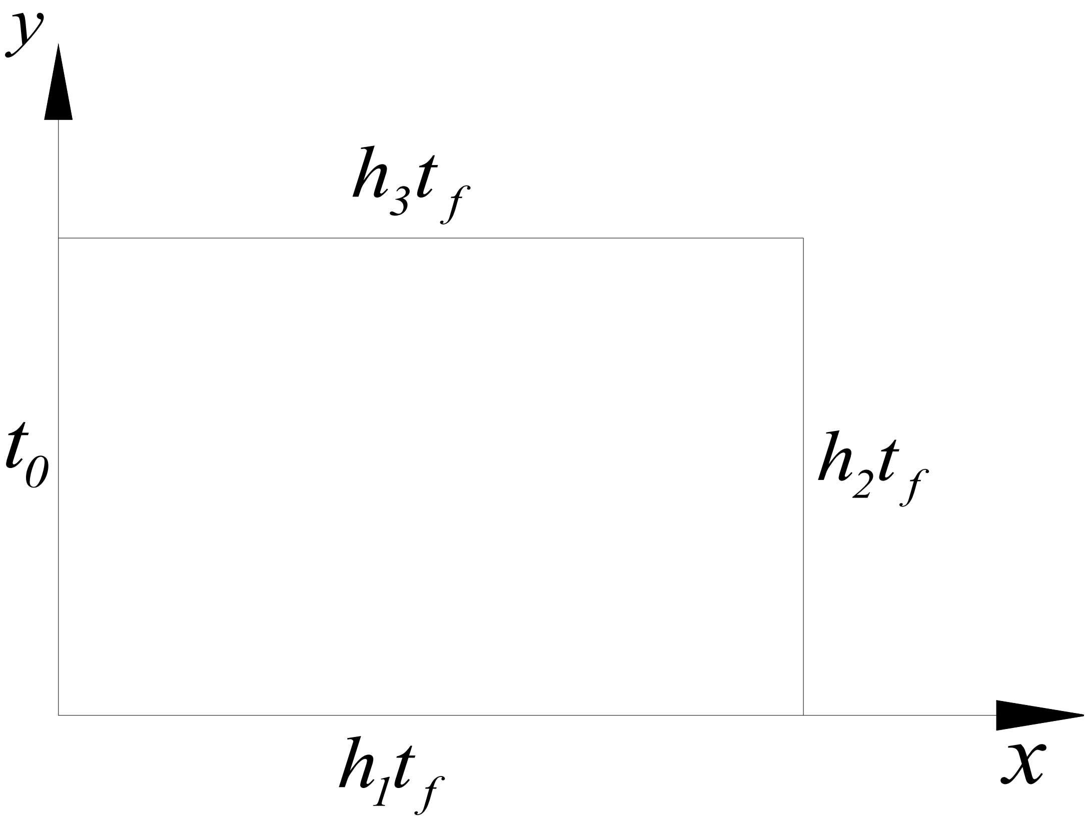
分子动力学模拟（**MD**）

§18 — 3 — 1 导热问题数值求解的基本思想及内部节点离散方程的建立

1 物理问题的数值求解过程

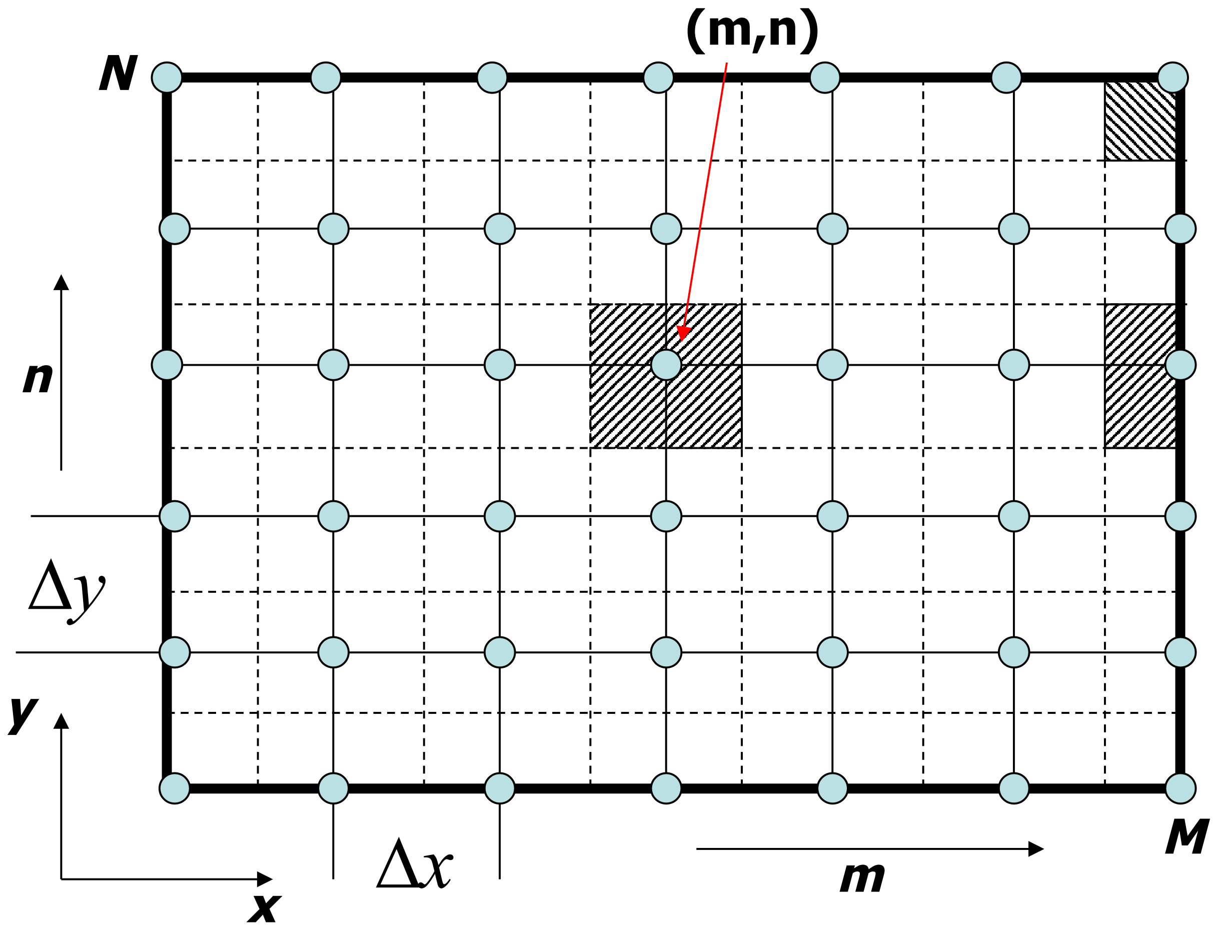


2 例题条件



二维矩形域内稳态无内热源，常物性的导热问题

3 基本概念：控制容积、网格线、节点、界面线、步长



二维矩形域内稳态无内热源，常物性的导热问题

4 建立离散方程的常用方法：

(1) Taylor （泰勒）级数展开法；

(2) 多项式拟合法；

(3) 控制容积积分法；

(4) 控制容积平衡法 (也称为热平衡法)

(1) 泰勒级数展开法

根据泰勒级数展开式，用节点（m, n）的温度 $t_{m,n}$ 来表示节点（$m+1, n$）而温度 $t_{m+1,n}$

$$t_{m+1,n} = t_{m,n} + \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{m,n} \Delta x + \left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_{m,n} \frac{\Delta x^2}{2!} + \left.\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right|_{m,n} \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$$

用节点（m, n）的温度 $t_{m,n}$来表示节点（$m-1, n$）的温度 $t_{m-1,n}$

$$t_{m-1,n} = t_{m,n} - \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{m,n} \Delta x + \left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_{m,n} \frac{\Delta x^2}{2!} - \left.\frac{\partial^3 t}{\partial x^3}\right|_{m,n} \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$$

若取上面式右边的前三项，并将式①和式③相加移项整理即得二阶导数的中心差分：

$$\left.\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|_{m,n} = \frac{t_{m+1,n} - 2t_{m,n} + t_{m-1,n}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2)$$

同样可得：

$$\left.\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right|_{m,n} = \frac{t_{m,n+1} - 2t_{m,n} + t_{m,n-1}}{\Delta y^2} + o(\Delta y^2)$$

截断误差

未明确写出的级数余项中的 ΔX的最低阶数为2

对于二维稳态导热问题，在直角坐标中，其导热微分方程为：

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\dot{\Phi}_v}{\lambda}=0$$

其节点方程为：

$$\frac{t_{i+1,j}-2t_{i,j}+t_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{t_{i,j+1}-2t_{i,j}+t_{i,j-1}}{\Delta y^2}+\frac{\dot{\Phi}_{v,i,j}}{\lambda}=0$$

(2) 控制容积平衡法（热平衡法）

基本思想：对每个有限大小的控制容积应用能量守恒，从而获得温度场的代数方程组，它从基本物理现象和基本定律出发，不必事先建立控制方程，依据能量守恒和Fourier 导热定律即可。

能量守恒：流入控制体的总热流量＋控制体内热源生成热

＝ 流出控制体的总热流量＋控制体内能的增量

$$\Phi_i + \Phi_v = \Phi_o + \Phi_\tau \qquad [W]$$

即：

单位：

$$\Phi_i + \Phi_v = \Phi_o + \Phi_\tau \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_i + (-\Phi_o) + \Phi_v = \Phi_\tau$$

即：从所有方向流入控制体的总热流量

＋ 控制体内热源生成热

＝ 控制体内能的增量

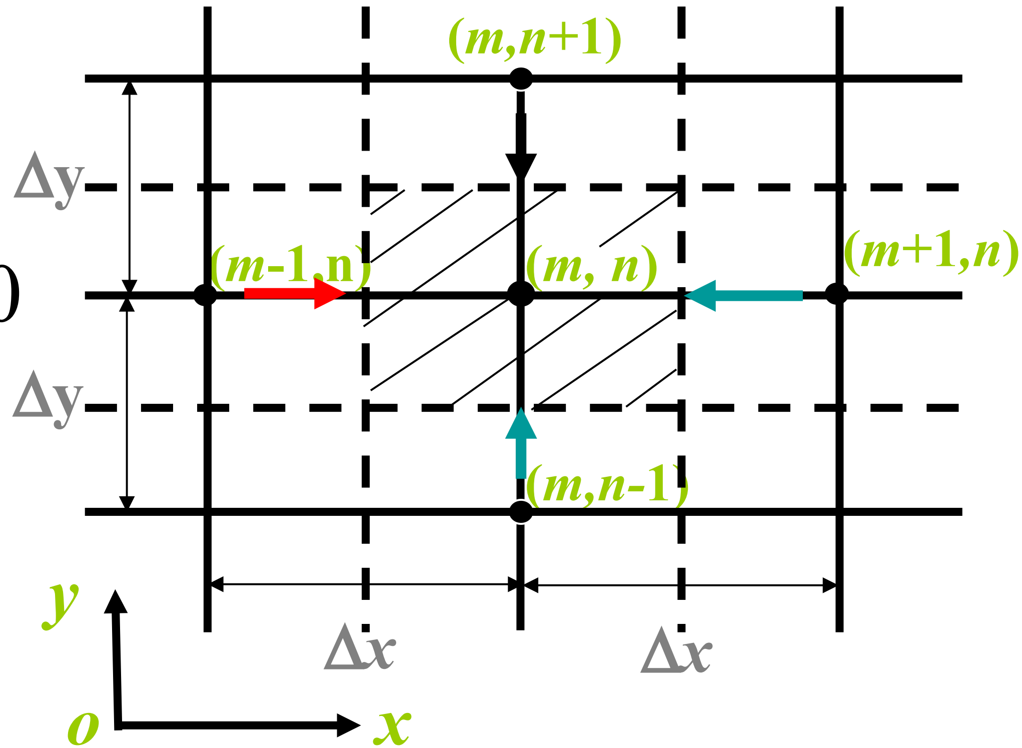
注意：上面的公式对内部节点和边界节点均适用

稳态、无内热源时：

从所有方向流入控制体的总热流量＝ 0

内部节点： $\Phi_{m-1,n} + \Phi_{m+1,n} + \Phi_{m,n-1} + \Phi_{m,n+1} = 0$

$$\Phi_{上} + \Phi_{下} + \Phi_{左} + \Phi_{右} = 0$$



以二维、稳态、有内热源的导热问题为例

此时：

$$\Phi_{上} + \Phi_{下} + \Phi_{左} + \Phi_{右} + \Phi_{v} = 0$$

$$\Phi_{左} = -\lambda A \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\lambda \Delta y \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

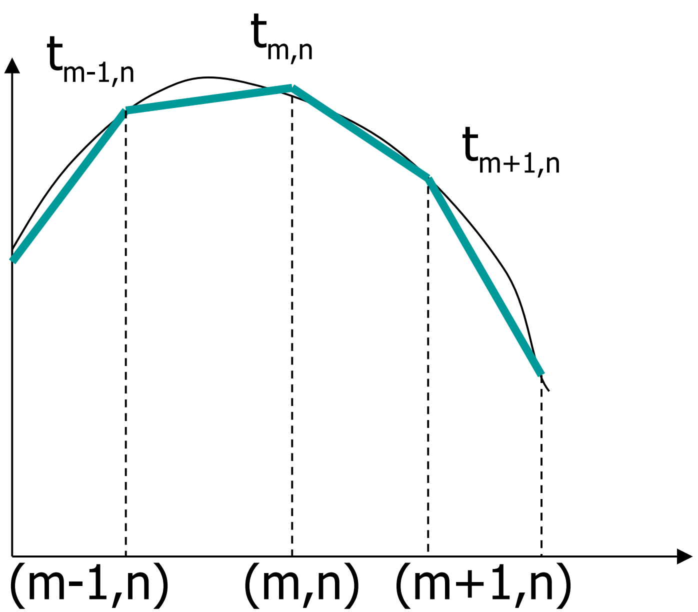
可见：当温度场还没有求出来之前，我们并不知道 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$

所以，必须假设相邻节点间的温度分布形式，这里我们

假定温度呈分段线性分布，如图所示

可见，节点越多，假设的分段线性分布越接近真实的温度布。

此时：



$$\Phi_{左} = -\lambda \Delta y \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \lambda \Delta y \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\Phi_{右} = \lambda \Delta y \frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\Phi_{上} = \lambda \Delta x \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\Phi_{下} = \lambda \Delta x \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$

内热源：$\Phi_{v} = \dot{\Phi} \cdot V = \dot{\Phi} \cdot \Delta x \Delta y$

$$\Phi_{上} + \Phi_{下} + \Phi_{左} + \Phi_{右} + \Phi_{v} = 0$$

$$\lambda\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\lambda\Delta y\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\lambda\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\lambda\Delta x\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}$$
$$+\dot{\Phi}\Delta x\Delta y=0$$

$\Delta x=\Delta y$ **时：** $t_{m-1,n}+t_{m+1,n}+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}-4t_{m,n}+\dfrac{\Delta x^2}{\lambda}\dot{\Phi}=0$

$$4t_{m,n}=t_{m-1,n}+t_{m+1,n}+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}+\frac{\Delta x^2}{\lambda}\dot{\Phi}$$

无内热源时：

$$4t_{m,n}=t_{m-1,n}+t_{m+1,n}+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}+\frac{\Delta x^2}{\lambda}\dot{\Phi}$$

变为：

$$4t_{m,n}=t_{m-1,n}+t_{m+1,n}+t_{m,n+1}+t_{m,n-1}$$

重要说明：所求节点的温度前的系数一定等于其他所有相邻节点温度前的系数之和。这一结论也适用于边界节点。但这里不包括热流（或热流密度）前的系数。

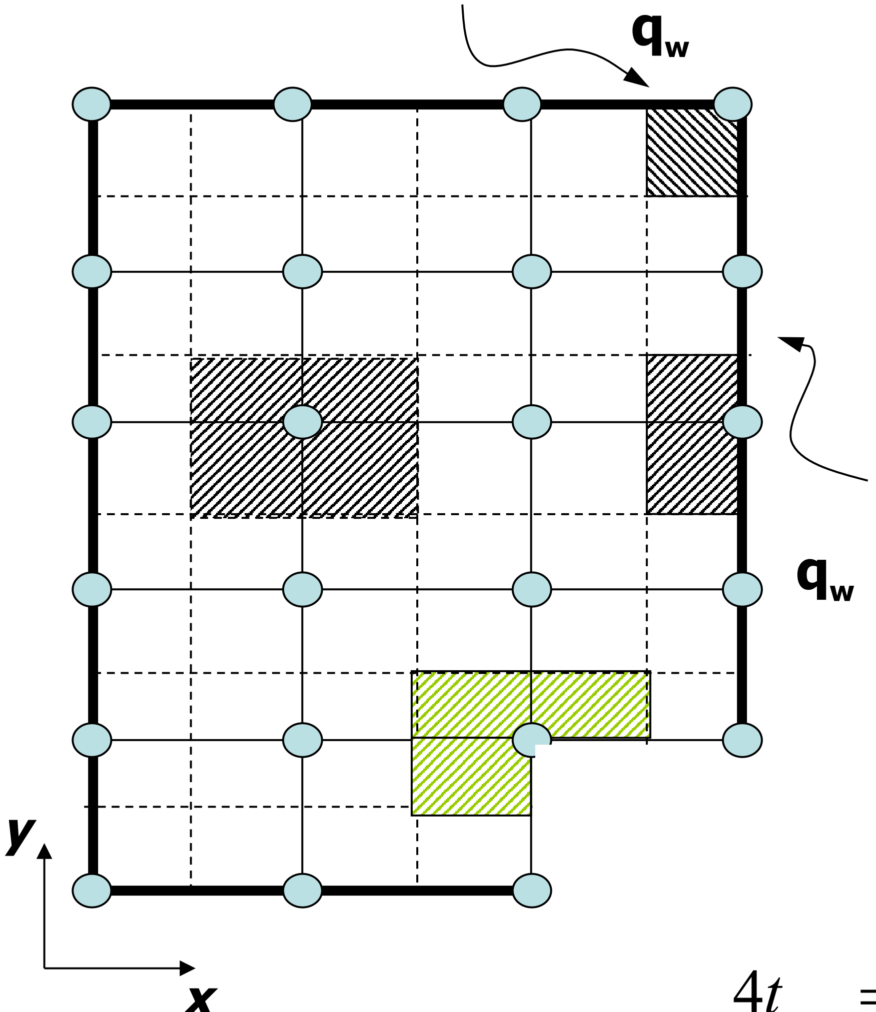
18－3－2　边界节点离散方程的建立及代数方程的求解

对于第一类边界条件的热传导问题，处理比较简单，因为已知边界的温度，可将其以数值的形式加入到内节点的离散方程中，组成封闭的代数方程组，直接求解。

而对于第二类边界条件或第三类边界条件的热传导问题，就必须用热平衡的方法，建立边界节点的离散方程，边界节点与内节点的离散方程一起组成封闭的代数方程组，才能求解。

为了求解方便，这里我们将第二类边界条件及第三类边界条件合并起来考虑，用 q_w 表示边界上的热流密度或热流密度表达式。用 Φ 表示内热源强度。

1. 边界节点离散方程的建立：



(1) 平直边界上的节点

$$\lambda \Delta y \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \Delta y q_w$$

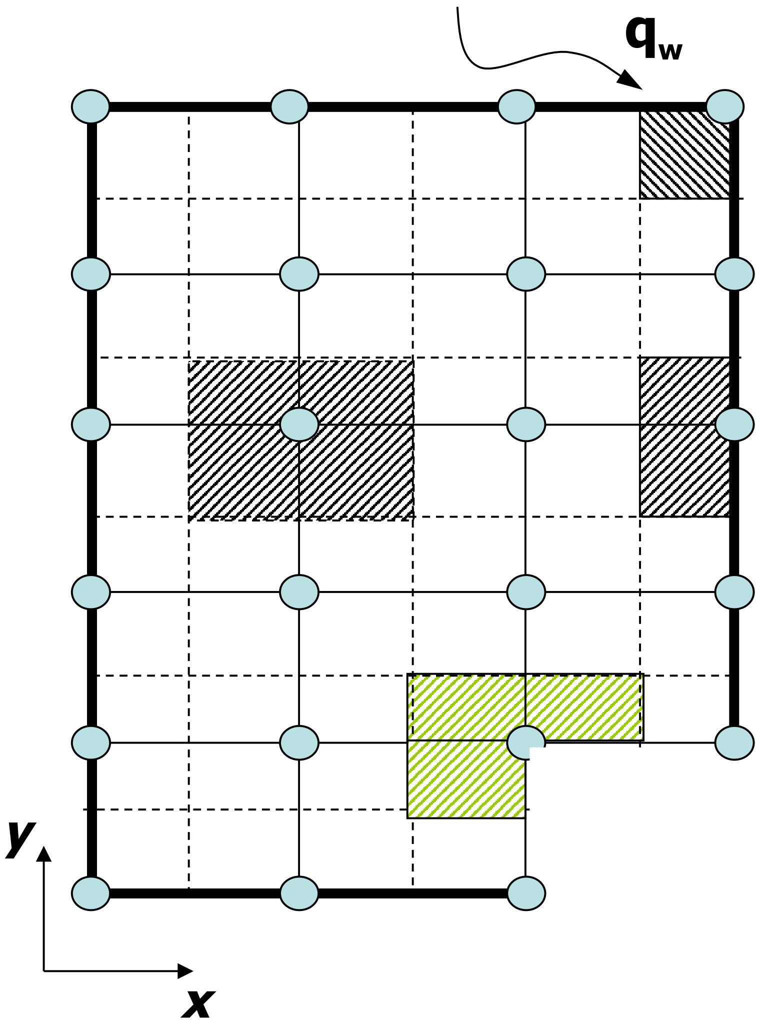
$$+ \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$

$$+ \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x}{2} \Delta y = 0$$

$$\Delta x = \Delta y \quad \Rightarrow$$

$$4t_{m,n} = 2t_{m-1,n} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x^2}{\lambda}$$

(2) 外部角点



$$\lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \frac{\Delta y}{2} q_w$$

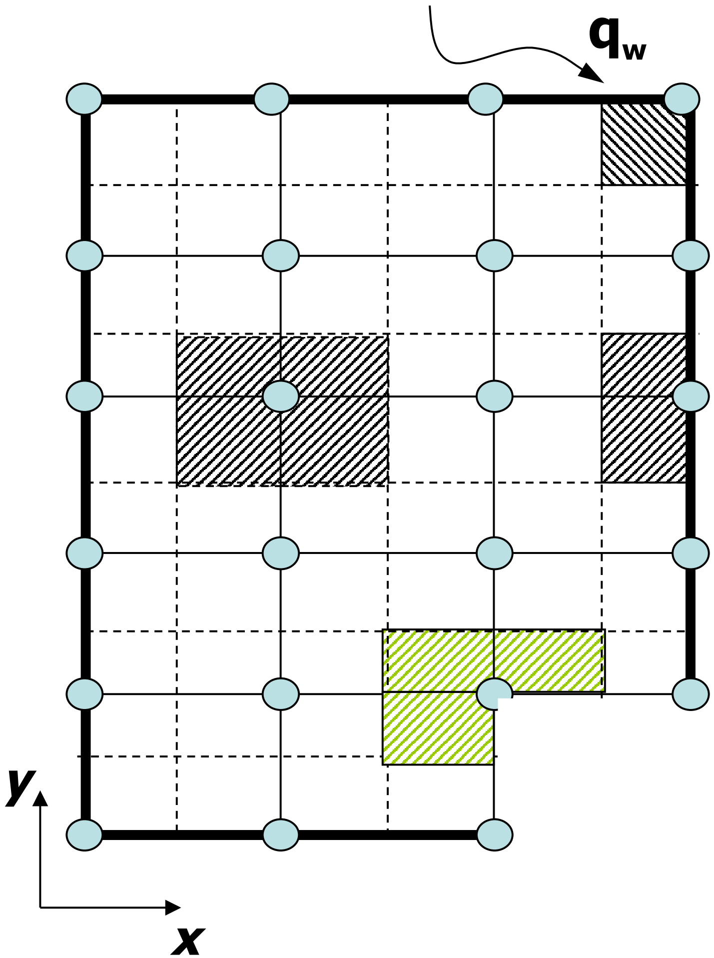
$$+ \frac{\Delta x}{2} q_w + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y}$$

$$+ \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\Delta y}{2} = 0$$

$$\Delta x = \Delta y \quad \Rightarrow$$

$$2t_{m,n} = t_{m-1,n} + t_{m,n-1} + \frac{2\Delta x}{\lambda} q_w + \dot{\Phi}_{m,n} \frac{\Delta x^2}{2\lambda}$$

(3) 内部角点



$$\lambda\Delta y\frac{t_{m-1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\left(\lambda\frac{\Delta y}{2}\frac{t_{m+1,n}-t_{m,n}}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{2}q_w\right)$$

$$+\lambda\Delta x\frac{t_{m,n+1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\left(\lambda\frac{\Delta x}{2}\frac{t_{m,n-1}-t_{m,n}}{\Delta y}+\frac{\Delta x}{2}q_w\right)$$

$$+\dot{\Phi}_{m,n}\frac{3\Delta x\Delta y}{4}=0$$

$$\Delta x=\Delta y \quad \Rightarrow$$

$$t_{m,n}=\frac{1}{6}(2t_{m-1,n}+2t_{m,n+1}+t_{m,n-1}+t_{m+1,n}$$

$$+\frac{3\Delta x^2}{2\lambda}\dot{\Phi}+\frac{2\Delta x^2}{\lambda}q_w)$$

q_w 的情况：

(1) 第二类边界条件：将 $q_w = const$ ，带入上面各式即可

$q_w = h(t_f - t_{m,n})$ 绝热或对称边界条件？

(2) 第三类边界条件：将 ？ ，带入上面各式即可

课堂作业：将 $q_w = h(t_f - t_{m,n})$ 带入外部角点的温度离散方程，并化简到最后的形式

(3) 辐射边界条件：$q_w = const$ $q_w = \varepsilon\sigma(T_f^4 - T_{m,n}^4)$ 或其他

2. 节点方程组的求解

写出所有内节点和边界节点的温度差分方程

n 个未知节点温度， ***n*** 个代数方程式：

$$t_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots\ldots + a_{1n}t_n + b_1$$

$$t_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots\ldots + a_{2n}t_n + b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_n = a_{n1}t_1 + a_{n2}t_2 + \ldots\ldots + a_{nn}t_n + b_n$$

代数方程组的求解方法：直接解法、迭代解法

直接解法：通过有限次运算获得代数方程精确解；

矩阵求逆、高斯消元法

缺点：所需内存较大、方程数目多时不便、不适用于非线性问题（若物性为温度的函数，节点温度差分方程中的系数不再是常数，而是温度的函数。这些系数在计算过程中要相应地不断更新）

迭代解法：先对要计算的场作出假设、在迭代计算过程中不断予以改进、直到计算结果与假定值的结果相差小于允许值。称迭代计算已经收敛。

迭代解法有多种：简单迭代（ Jacobi 迭代）、高斯 - 赛德尔迭代、块迭代、交替方向迭代等

高斯 - 赛德尔迭代的特点：每次迭代时总是使用节点温度的最新值

例如：根据第 ***k*** 次迭代的数值 $t_1^{(k)}$、$t_2^{(k)}\ldots t_n^{(k)}$

可以求得节点温度：

$$t_1^{(k+1)} = a_{11}t_1^{(k)} + a_{12}t_2^{(k)} + \ldots\ldots + a_{1n}t_n^{(k)} + b_1^{(k)}$$

在计算后面的节点温度时应按下式（采用最新值）

$$t_2^{(k+1)} = a_{21}t_1^{(k+1)} + a_{22}t_2^{(k)} + \ldots\ldots + a_{2n}t_n^{(k)} + b_2^{(k)}$$

$$t_3^{(k+1)} = a_{31}t_1^{(k+1)} + a_{32}t_2^{(k+1)} + \ldots\ldots + a_{3n}t_n^{(k)} + b_3^{(k)}$$

……………………………………………

$$t_n^{(k+1)} = a_{n1}t_1^{(k+1)} + a_{n2}t_2^{(k+1)} + \ldots\ldots + a_{nn-1}t_{n-1}^{(k+1)} + a_{nn}t_n^{(k)} + b_n^{(k)}$$

判断迭代是否收敛的准则：

$$\max\left|t_i^{(k+1)}-t_i^{(k)}\right|\le\varepsilon$$

$$\max\left|\frac{t_i^{(k+1)}-t_i^{(k)}}{t_i^{(k)}}\right|\le\varepsilon$$

$$\max\left|\frac{t_i^{(k+1)}-t_i^{(k)}}{t_{\max}^{(k)}}\right|\le\varepsilon$$

ε — 允许的偏差；

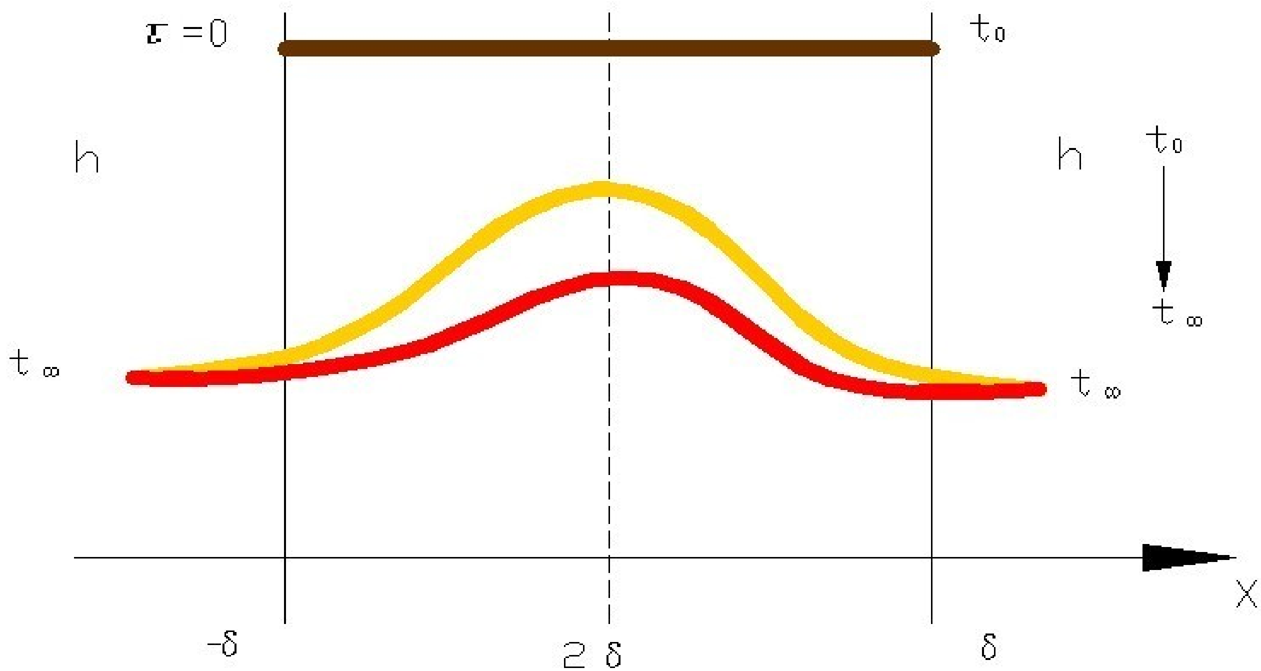
相对偏差ε值一般取$10^{-3}\sim10^{-6}$

k 及 ***k*+1** 表示迭代次数；$t_{\max}^{(\mathrm{k})}$ — 第 ***k*** 次迭代得到的最大值

当有接近于零的 ***t*** 时，第三个较好

§18 — 4 一维非稳态导热的分析解

1. 无限大的平板的分析解



$\lambda = const$ $a = const$ $h = const$

因两边对称，只研究半块平壁

此半块平板的数学描写：

导热微分方程

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \delta, \tau > 0)$$

初始条件

$$t = t_0 \qquad \tau = 0$$

边界条件

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \qquad x = 0$$

（对称性）

$$-\lambda\frac{\partial t}{\partial x} = h(t - t_\infty) \qquad x = \delta$$

引入变量——过余温度

令 $\theta(x,\tau)=t(x,\tau)-t_{\infty}$

上式化为：

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad 0<x<\delta,\tau>0$$

$$\theta=\theta_0 \qquad \tau=0$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=0 \qquad x=0$$

$$-\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x}=h\theta \qquad x=\delta$$

用分离变量法可得其分析解为：

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n x)}{\beta_n\delta+\sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n\delta)}e^{-\beta_n^2 a\tau}$$

此处 B_n 为离散面（特征值）

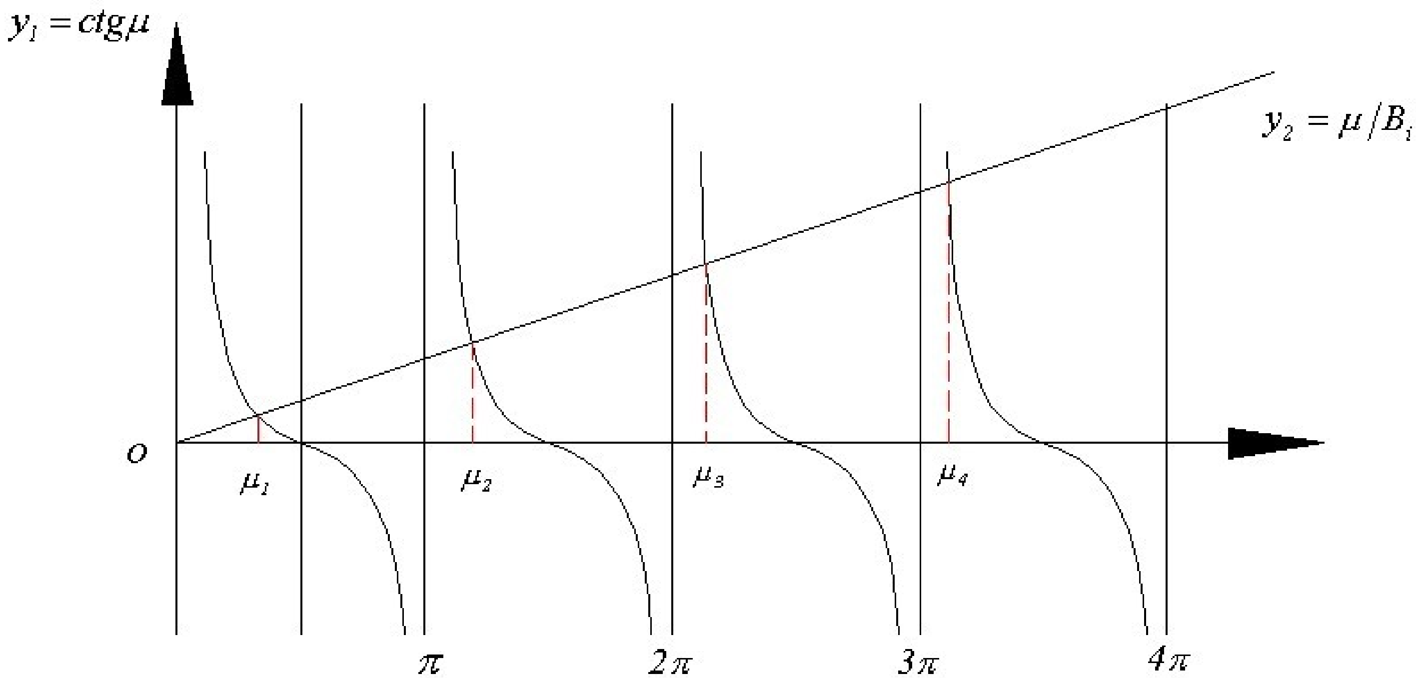
若令 $\mu_n=\beta_n\delta$

则上式可改写为：

$$\boxed{\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\mu_n}{\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n}\cos(\mu_n\frac{x}{\delta})e^{-\mu_n^2\frac{a\tau}{\delta^2}}}$$ *

μ_n为下面超越方程的根 $$ctg\mu_n = \frac{\mu_n}{h\delta/\lambda}$$

$\frac{h\delta}{\lambda}$ 为***毕渥准则数，***用符号 **Bi** 表示



书上 P_{73} 表 3-1 给出了部分 B_i 数下的 μ_1 值

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n x)}{\beta_n\delta+\sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n\delta)}e^{-\beta_n^2 a\tau}$$

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n x)}{\beta_n\delta+\sin(\beta_n\delta)\cos(\beta_n\delta)}e^{-(\beta_n\delta)^2\frac{a\tau}{\delta^2}}$$

因此 $\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}$是 ***F0, Bi*** 和$\frac{x}{\delta}$ 函数，即

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=f(F_0,B_i,\frac{x}{\delta})$$

注意：特征值 β_n $\xleftrightarrow[\text{区别}]{}$ 特征数（准则数）

2. 非稳态导热的正规状况

对无限大平板 $F_0 = a\tau/\delta^2$

当$F_0 \geq 0.2$ 取级数的首项，板中心温度，误差小于 *1%*

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1}\cos(\mu_1\frac{x}{\delta})e^{-\mu_1^2 F_0}$$

$$\frac{\theta(0,\tau)}{\theta_0} = \frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1}e^{-\mu_1^2 F_0}$$

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_0}=\frac{2\sin\mu_1}{\mu_1+\sin\mu_1\cos\mu_1}\cos(\mu_1\frac{x}{\delta})e^{-\mu_1^2F_0}$$

$$\frac{\theta(0,\tau)}{\theta_0}=\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0}=\frac{2\sin\mu_1}{\mu_1+\sin\mu_1\cos\mu_1}e^{-\mu_1^2F_0}$$

$$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_m(\tau)}=\cos(\mu_1\frac{x}{\delta})$$

与时间无关

考察热量的传递 $Q_0 = \rho c V(t_0 - t_\infty)$

Q_0 -- 非稳态导热所能传递的最大热量

若令 Q 为 $[0,\tau]$ 内所传递热量

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\rho c \int_V [t_0 - t(x,\tau)] dV}{\rho c V(t_0 - t_\infty)} = 1 - \frac{\overline{\theta}}{\theta_0}$$

$\overline{\theta}$ -- 时刻 z 的平均过余温度

$$\overline{\theta} = \frac{1}{v}\int_v \theta dv = \theta_0 \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1\cos\mu_1} e^{-(-\mu_1^2 F_0)}\frac{\sin\mu_1}{\mu_1}$$

对无限大平板，长圆柱体及球：

及 $\dfrac{\theta}{\theta_0}$ 可 $\bar{\theta}$ 用一通式表达

$$\frac{\theta}{\theta_0} = A\exp(-\mu_1^2 F_0)f(\mu_1 y)$$

$$\bar{\theta} = \theta_0 A\exp(-\mu_1^2 F_0)B_i$$

此处

无限大平板	$y = x/\delta$	$B_i = h\delta/\lambda$	$F_0 = az/\delta^2$
长圆柱体及球	$y = x/R$	$B_i = hR/\lambda$	$F_0 = az/R^2$

此处的 A， B 及函数 $f(\mu_1 y)$ 见 P_{74} 表 3-2

3 正规热状况的实用计算方法—拟合公式法

对上述公式中的 A，B，μ_1，J_0 可用下式拟合

$$\mu_1^2 = (a + \frac{b}{B_i})^{-1}$$

$$A = a + b(1 - e^{-cBi})$$

$$B = \frac{a + cB_i}{1 + bB_i}$$

$$J_0(x) = a` + b`x + c`x^2 + d`x^3$$

式中常数 *a*，*b*，*c*，*d* 见 P_{75} 表 3-3

a`*，*b`，*c`*，*d`* 见 P_{75} 表 3-4

3 正规热状况的实用计算方法—线算图法

诺谟图

以无限大平板为例，*F0>0.2* 时，取其级数首项即可

$$\theta(x,\tau)=\theta_0\frac{2\sin\mu_1}{\mu_1+\sin\mu_1\cos\mu_1}e^{-\mu_1^2F_0}\cos(\mu_1\frac{x}{\delta})=f(Fo,Bi,\frac{x}{\delta})$$

三个变量，因此，需要分开来画

(1)先画

$$\frac{\theta_m}{\theta_0}=f(Fo,Bi)$$

(2) 再根据公式(3-23)

绘制其线算图 $$\frac{\theta(x,\tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos(\mu_1 \frac{x}{\delta}) = f(Bi, \frac{x}{\delta})$$

(3) 于是，平板中任一点的温度为 $$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta}{\theta_m} \cdot \frac{\theta_m}{\theta_0}$$

同理，非稳态换热过程所交换的热量也可以利用（3－24）和（3－25）绘制出。

解的应用范围

书中的诺谟图及拟合函数仅适用恒温介质的第三类边界条件或第一类边界条件的加热及冷却过程，并且 *F0>0.2*

利用以下两组方程便可证明

$$\Theta(x,y,\tau)=\Theta(x,\tau)\cdot\Theta(y,\tau)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\tau}=a\dfrac{\partial^2\Theta_x}{\partial x^2}\\ \tau=0\quad\Theta_x(x,0)=1\\ x=0\quad\dfrac{\partial\Theta(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0\\ x=\delta_2\quad-\lambda\dfrac{\partial\Theta(x,\tau)}{\partial x}=h\Theta(\delta,\tau)\end{cases}\quad 及 \quad \begin{cases}\dfrac{\partial\Theta}{\partial\tau}=a\dfrac{\partial^2\Theta_y}{\partial y^2}\\ \tau=0\quad\Theta_y(y,0)=1\\ y=0\quad\dfrac{\partial\Theta(y,\tau)}{\partial y}\Big|_{y=0}=0\\ y=\delta_2\quad-\lambda\dfrac{\partial\Theta(y,\tau)}{\partial y}=h\Theta(\delta_2,\tau)\end{cases}$$

其中 $\Theta_x=\dfrac{t(x,\tau)-t_f}{t_0-t_f}$　　其中 $\Theta_y=\dfrac{t(y,\tau)-t_f}{t_0-t_f}$

即证明了 $\Theta(x,\tau)\cdot\Theta(y,\tau)$ 是无限长方柱体导热微分方程的解，这样便可用一维无限大平壁公式、诺谟图或拟合函数求解二维导热问题

作业

- 18-5