一、某种硬币单枚质量为W克。现有N堆该种硬币，依次标记为$1,2,\cdots,N$。其中可能有若干堆，每堆均是伪币。所有伪币质量均相同，且不为W。伪币所在堆的指标集记为I。为求出I，现用一可精确测得质量的电子秤称量两次。第一次从每堆硬币中各取1枚，称得总质量为M_1克，第二次从第i堆硬币中取p^i枚，$i=1,2,\cdots,N$，称得总质量为M_2克，这里p为正整数（假设每堆硬币数量足够多）。

（1）试给出M_1,M_2和W的某个函数，其值仅与I和p有关，而与伪币的质量无关；

（2）为能用上述方法通过两次称量求出指标集I，p应满足什么条件？试给出某个满足条件的p值；并说明若取$p=2$，可能无法用上述方法通过两次称量求出I。

二、（1）现有2^N-1枚硬币，其中一枚是伪币。每枚真币的质量已知，伪币较真币为轻。如何用可精确测得质量的电子秤称量不超过N次找出伪币，试给出你的方案；

（2）设$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$为$n$维向量，$x_i\in\{0,1\},i=1,\cdots,n$，$\mathbf{\Phi}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{b}=\mathbf{\Phi x}$。**压缩感知**（Compressed Sensing）问题希望通过构造适当的$\mathbf{\Phi}$，由$\mathbf{b}$唯一确定$\mathbf{x}$。试写出可用于求解（1）中问题的矩阵$\mathbf{\Phi}$；

（3）称n维向量$\mathbf{x}$为$k-$稀疏（$k-$sparse）的，若$\mathbf{x}$的非零分量数不超过k，所有$k-$稀疏向量全体记为Σ_k。证明：当$k<\dfrac{n}{2}$时，若$\mathbf{\Phi}$中任意$2k$个列向量线性无关，则$\mathbf{b}=\mathbf{\Phi x}$在$\Sigma_k$中至多只有一个解。