第十六章

传热微分方程

§16 - 1 通用微分能量方程

傅里叶定律： $q = -\lambda \,\mathrm{grad}\, t \quad [\mathrm{W/m^2}]$

确定热流密度的大小，应知道物体内的温度场：

$$t = f(x,\ y,\ z,\ \tau)$$

确定导热体内的温度分布是导热理论的首要任务

一、导热微分方程式

理论基础：傅里叶定律 + 热力学第一定律

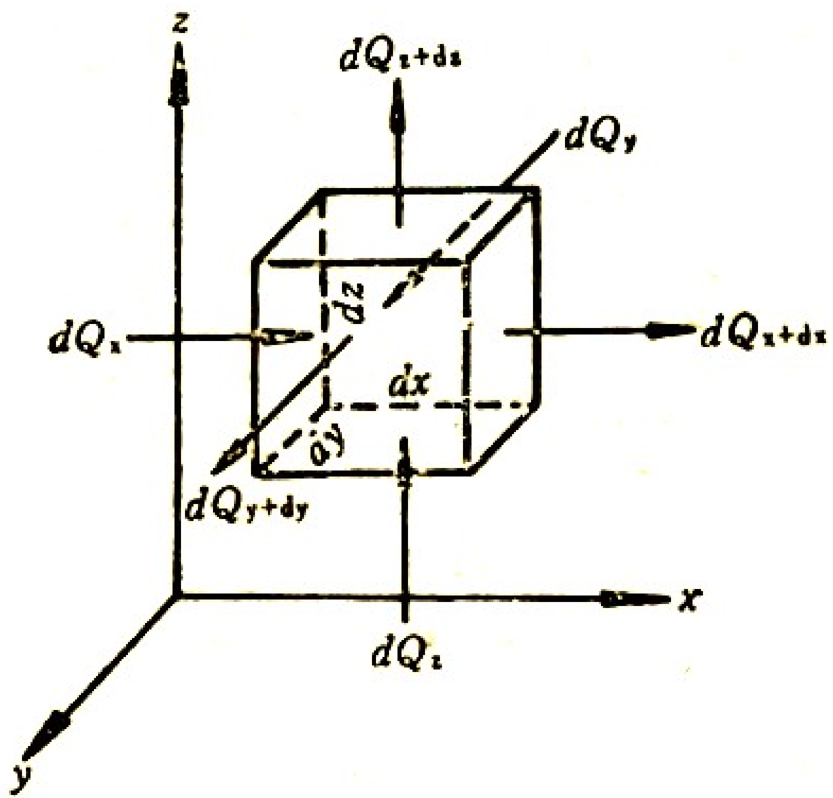
假设：(1) 所研究的物体是各向同性的连续介质

(2) 热导率、比热容和密度均为已知

(3) 物体内具有内热源；强度 q_v [W/m³]；

内热源均匀分布；q_v 表示单位体积的导热

体在单位时间内放出的热量



在导热体中取一微元体

热力学第一定律：

$$Q = \Delta U + W$$

$$W = 0, \quad \therefore \quad Q = \Delta U$$

dτ 时间内微元体中：

[导入与导出净热量]
+ [内热源发热量]
= [热力学能的增加]

1 、导入与导出微元体的净热量

dτ 时间内、沿 x 轴方向、经 x 表面导入的热量：

$$dQ_x = q_x \cdot dydz \cdot d\tau \qquad [\text{J}]$$

d*τ* 时间内、沿 *x* 轴方向、经 *x*+*dx* 表面导出的热量：

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} \cdot dydz \cdot d\tau \quad [\mathrm{J}]$$

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

d*τ* 时间内、沿 *x* 轴方向导入与导出微元体净热量：

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dxdydz \cdot d\tau \qquad [\mathrm{J}]$$

dτ 时间内、沿 y 轴方向导入与导出微元体净热量：

$$dQ_y - dQ_{y+dy} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dxdydz \cdot d\tau \qquad [J]$$

dτ 时间内、沿 z 轴方向导入与导出微元体净热量：

$$dQ_z - dQ_{z+dz} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dxdydz \cdot d\tau \qquad [J]$$

[导入与导出净热量]:

$$[1]=[dQ_x-dQ_{x+dx}]+[dQ_y-dQ_{y+dy}]+[dQ_z-dQ_{z+dz}]$$

$$[1]=-(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z})dxdydzd\tau \qquad [\mathrm{J}]$$

傅里叶定律:

$$q_x=-\lambda\frac{\partial t}{\partial x};\quad q_y=-\lambda\frac{\partial t}{\partial y};\quad q_z=-\lambda\frac{\partial t}{\partial z}$$

$$[1]=\left[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})\right]dxdydzd\tau \qquad [\mathrm{J}]$$

2、微元体中内热源的发热量

dτ 时间内微元体中内热源的发热量：

$$[2] = q_v \cdot dxdydz \cdot d\tau \quad [\mathrm{J}]$$

3、微元体热力学能的增量

dτ 时间内微元体中热力学能的增量：

$$[3] = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot dxdydz \cdot d\tau \quad [\mathrm{J}] \qquad (mc\mathrm{d}t = \rho\ dxdydzc \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau\ )$$

导热微分方程式、导热过程的能量方程

由 [1]+ [2]= [3]：

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}) + q_v$$

§16 - 2　微分能量方程的特殊形式

若物性参数 λ、c 和 ρ 均为常数：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{q_v}{\rho c};\quad \text{or}\quad \frac{\partial t}{\partial \tau}=a\nabla^2 t+\frac{q_v}{\rho c}$$

$a=\dfrac{\lambda}{\rho c}$ — 热扩散率（导温系数） $[\mathrm{m^2/s}]$　（**Thermal diffusivity**）

∇^2 — 拉普拉斯算子

热扩散率 a 反映了导热过程中材料的导热能力（λ）与沿途物质储热能力（ρc）之间的关系

a 值大，即 λ 值大或 ρc 值小，说明物体的某一部分一旦获得热量，该热量能在整个物体中很快扩散

热扩散率表征物体被加热或冷却时，物体内各部分温度趋向于均匀一致的能力

在同样加热条件下，物体的热扩散率越大，物体内部各处的温度差别越小。

$$a_{\text{木材}} = 1.5\times10^{-7}\ \mathrm{m}^2/s，a_{\text{铝}} = 9.45\times10^{-5}\ \mathrm{m}^2/s$$

$$a_{\text{木材}}/a_{\text{铝}} \approx 1/600$$

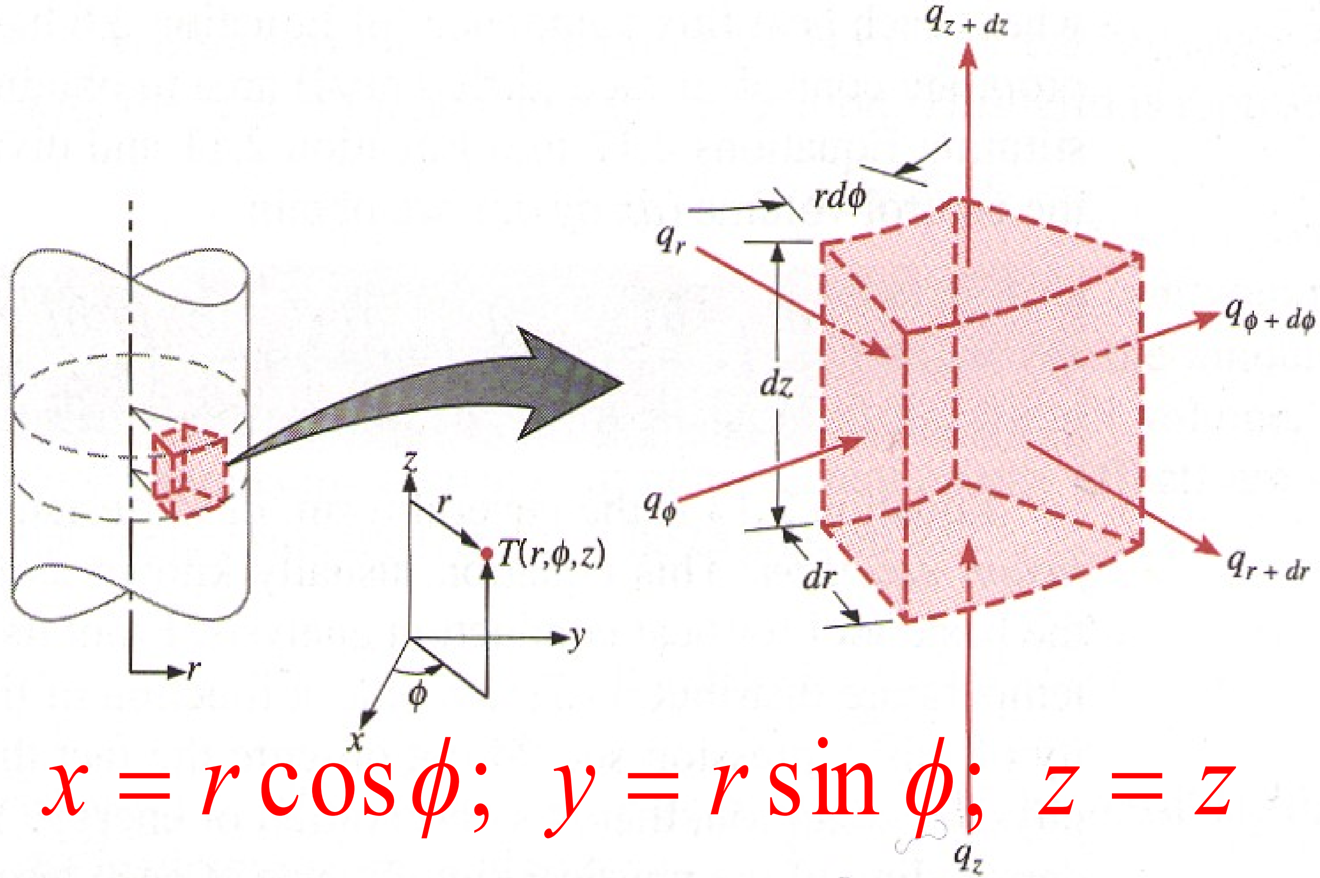
a 反应导热过程动态特性，研究不稳态导热重要物理量

若物性参数为常数且无内热源：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right); \quad \text{or} \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t$$

若物性参数为常数、无内热源稳态导热：

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$



圆柱坐标系
（ r, Φ, z ）

$$q_r = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r}$$

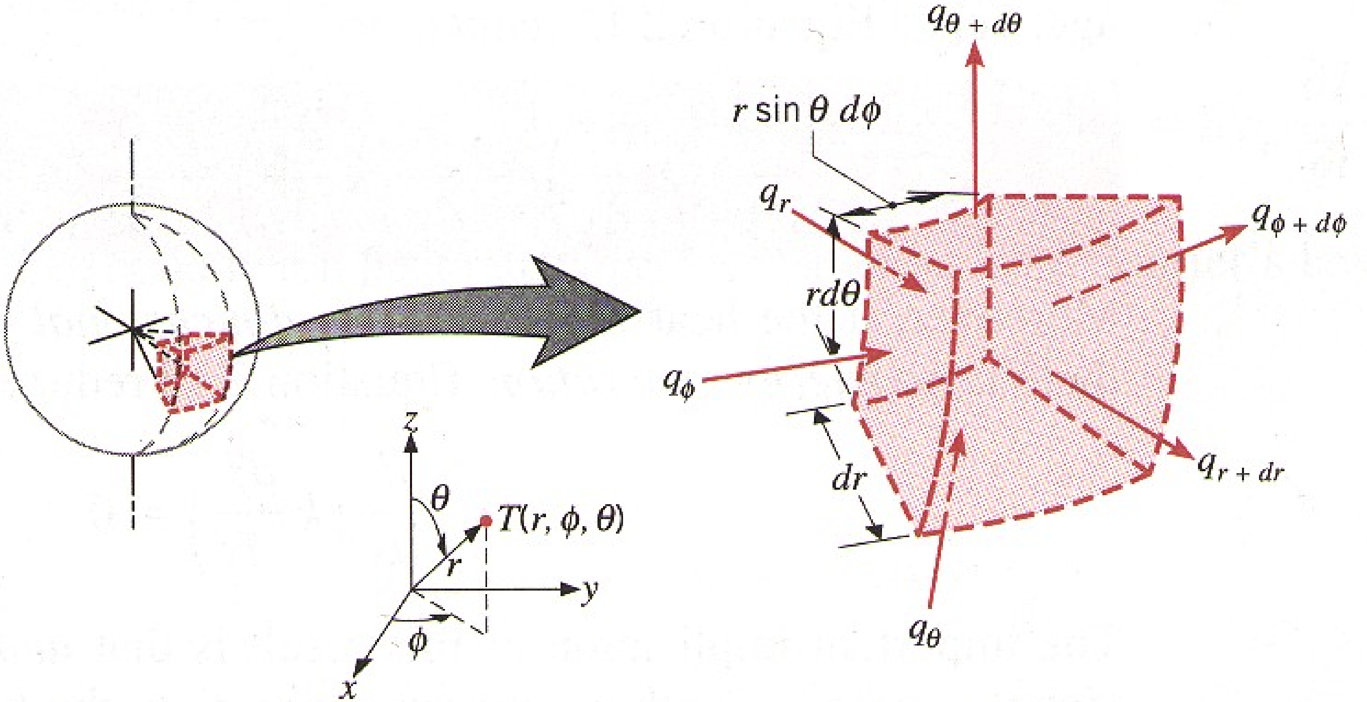
$$q_\phi = -\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \phi}$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}$$

$$x = r\cos\phi;\quad y = r\sin\phi;\quad z = z$$

$$\mathbf{q} = -\lambda \mathrm{grad} t = -\lambda \nabla t = -\lambda\left(\mathbf{i}\frac{\partial t}{\partial r} + \mathbf{j}\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \phi} + \mathbf{k}\frac{\partial t}{\partial z}\right)$$

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r \frac{\partial t}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda \frac{\partial t}{\partial \phi}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}) + q_v$$



球坐标系
（ *r*, *θ*， *Φ*）

$$q_r = -\lambda\frac{\partial t}{\partial r}$$

$$q_\theta = -\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}$$

$$q_\phi = -\lambda\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}$$

$$x = r\sin\theta\cdot\cos\phi;\quad y = r\sin\theta\cdot\sin\phi;\quad z = r\cos\theta$$

$$\mathbf{q} = -\lambda\,\mathrm{grad}\,t = -\lambda\nabla t = -\lambda\left(\mathbf{i}\frac{\partial t}{\partial r} + \mathbf{j}\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta} + \mathbf{k}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\right)$$

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r^2\frac{\partial t}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\lambda\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda\frac{\partial t}{\partial \phi}) + q_v$$

导热微分方程式的不适应范围：非**傅里叶**导热过程

- 极短时间（如10）产生极大的热流密度的热量传递现象，如激光加工过程。
- 极低温度（接近于0 K）时的导热问题。

§16 - 3 常见的边界条件

导热微分方程式的理论基础：傅里叶定律 + 热力学第一定律

它描写物体的温度随时间和空间变化的关系；
它没有涉及具体、特定的导热过程。通用表达式。

对特定的导热过程：需要得到满足该过程的补充说明条件的唯一解

单值性条件：确定唯一解的附加补充说明条件

完整数学描述：导热微分方程 + 单值性条件

单值性条件包括四项：几何、物理、时间、边界

1、几何条件　　说明导热体的几何形状和大小

如：平壁或圆筒壁；厚度、直径等

2、物理条件　　说明导热体的物理特征

如：物性参数 λ、c 和 ρ 的数值，是否随温度变化；有无内热源、大小和分布；是否各向同性

3、时间条件　　说明在时间上导热过程进行的特点

稳态导热过程不需要时间条件 — 与时间无关

对非稳态导热过程应给出过程开始时刻导热体内的温度分布

$$t\big|_{\tau=0} = f(r)$$

时间条件又称为初始条件　　（Initial conditions）

4、边界条件

说明导热体边界上过程进行的特点
反映过程与周围环境相互作用的条件

边界条件一般可分为三类：（ Boundary conditions ）

第一类、第二类、第三类边界条件

（1）第一类边界条件

已知任一瞬间导热体边界上温度值： $t|_s = t_w$

s — 边界面； $t_w = f(x,y,z)$ — 边界面上的温度

稳态导热： $t_w = \text{const}$

非稳态导热： $t_w = f(\tau)$

例：

$$x = 0, \quad t = t_{w1}$$

$$x = \delta, \quad t = t_{w2}$$

（2）第二类边界条件

已知物体边界上热流密度的分布及变化规律：

$$q\big|_s = q_w = f(r,\tau)$$

根据傅里叶定律：

$$q_w = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_n \qquad -\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_n = \frac{q_w}{\lambda}$$

第二类边界条件相当于已知任何时刻物体边界面法向的温度梯度值

稳态导热： $q_w = const$ 非稳态导热： $q_w = f(\tau)$

特例：绝热边界面： $q_w = -\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w = 0$

（3）第三类边界条件

当物体壁面与流体相接触进行对流换热时，已知任一时刻边界面周围流体的温度和表面传热系数

牛顿冷却定律： $q_w = h(t_w - t_f)$

傅里叶定律： $q_w = -\lambda\left(\partial t/\partial n\right)_w$

$$-\lambda\left(\partial t/\partial n\right)_w = h(t_w - t_f)$$

导热微分方程式的求解方法

积分法、杜哈美尔法、格林函数法、拉普拉斯变换法 、分离变量法、积分变换法、数值计算法

导热微分方程＋单值性条件＋求解方法 ➔温度场

作业

- 16.1