数学建模 1

(1) 假设伪币重 $(1-\varepsilon)W$ $(\varepsilon<1)$

设全集为 T (下标 $1\cdots N$)，其中 $T_{i_1}\cdots T_{i_m}$ 为伪币 $(m\le N)$

$T_{i_1}\cdots T_{i_m}$ 即为伪币指标集 I

第一次 $M_1=(N-m\varepsilon)W$ 差值 $D=m\varepsilon W$

第二次 $M_2=p\dfrac{1-p^N}{1-p}NW-(p^{i_1}+\cdots+p^{i_m})\varepsilon W$

差值 $D'=(p^{i_1}+\cdots+p^{i_m})\varepsilon W$

则

$$\frac{M_1-NW}{M_2-\frac{p-p^{N+1}}{1-p}NW}=\frac{\sum_{j=1}^{m}T_{i_j}}{\sum_{j=1}^{m}T_{i_j}p^{i_j}}$$

$M_1-NW=\mathrm{card}(I)\varepsilon W$ （εW 用 $\dfrac{M_2-p\frac{1-p^N}{1-p}NW}{p^{i_1}+\cdots+p^{i_m}}$ 代入）

(2) $p>N$ 需要满足

令 $k=\dfrac{D'}{D}=\dfrac{p^{i_1}+\cdots+p^{i_m}}{m}$ $(i_1<\cdots<i_m,\ m<p)$

对固定的 k，定义 $m, i_1\cdots i_m$ 唯一，即

$n\le N<p$，$j_1<\cdots<j_n$ 时 $\dfrac{p^{i_1}+\cdots p^{i_m}}{m}=\dfrac{p^{j_1}+\cdots+p^{j_n}}{n}$

因此 $n(p^{i_1}+\cdots+p^{i_m})=m(p^{j_1}+\cdots+p^{j_n})$

当 $p>N$ 时，以 p 为底的整数的十进制表示唯一，

因此 $m=n$，$i_1=j_1$，$i_2=j_2\cdots\cdots i_m=j_m$

$\therefore$ 两次称量即可求出指标集 I

可给出 $p=N+1$，$N+2\cdots\cdots$

数学建模2

(1) 先取出一~~枚~~枚硬币，其它硬币平分放在天平两侧

i. 天平平衡 取出的一枚是伪币

ii. 若不平衡，取出轻的 $\frac{2^N-2}{2}$ 枚硬币，再取出一枚硬币，其它硬币平分放在天平两侧，重复上述过程

第1次操作前有 2^N-1 枚硬币

第2次 $\frac{2^N-1-1}{2}=2^{N-1}-1$ 枚

⋮

$N-1$ 次 $2^{N-N+1+1}-1=3$ 枚

第 N 次 3枚中任取2枚放在天平两侧，一定能找出伪币

(2) 由(1) $b=\Phi x$ 则不妨令 b 为 N 维，Φ 为 $N\times(2^N-1)$

构造 Φ 第1列前 2^{N-1} 个元素为1，后 2^{N-1} 个元素为 -1，最后一个元素为0（也可任意 [illegible]，不为1，-1即可）

第2列 先将其分成长为 2^{N-1}，2^{N-1} 与1的三部分，其中 2^{N-1} 的部分前 2^{N-2} 个元素为1，后 2^{N-2} 个元素为-1，最后一个元素为0

1的那部分为0（同第一列最后一个元素取值）

$$\underbrace{1\cdots1}_{2^{N-2}}\ \underbrace{-1\cdots-1}_{2^{N-2}}\ 0\ \Big|\ \underbrace{1\cdots1}_{2^{N-2}}\ \underbrace{-1\cdots-1}_{2^{N-2}}\ 0\ \Big|\ 0$$

以此类推 可得 Φ

最后一列为 1 -1 0 的循环 [illegible]（最后 N 个元素均0）

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & 0 \\ 1 \cdots 1 & 1 \cdots 1 & 0 & & 1 \cdots 1 & -1 \cdots -1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots \\ 1 \; -1 \; 0 & 1 \; -1 \; 0 & 1 \; -1 \; 0 & \cdots & & & & 0 & 0 \; 0 \end{pmatrix}$$

由(1)，可知 Φ 可由 b 唯一确定 $\vec{x}$

(3) 假设 x^* 是 $\Phi x = b$ 的唯一解，并且假设，如果有其它解 x，则 $x = x^* + \eta$，其中 $\Phi\eta = 0$，并且是 Φ 的零空间 $N(\Phi)$，则 $\eta \in N(\Phi)$

假设 x^* 不唯一，有另一个解 x^{**}，则 $\Phi(x^* - x^{**}) = 0$ $\Longrightarrow$ $x^* - x^{**} \in N(\Phi)$，又 $x^* - x^{**} \neq \vec{0}$。由假设 x^*，x^{**} 都属于 Σ_k，由 k-sparse 的定义可知，$x^* - x^{**} \in \Sigma_{2k}$

因而，若 $\Phi x = b$ 解不唯一，则 $N(\Phi)$ 必含非0 的 2k-sparse 向量

【引理】 $\Sigma_{2k} \cap N(\Phi) = \{0\}$ 当且仅当 Φ 中任意 2k 个列向量线性无关。下证：

必要性：假设 $\Sigma_{2k} \cap N(\Phi) = \{0\}$，令 Φ_j 为第 j 列，并令 $T \subseteq \{1, 2 \cdots N\}$ 是具有基数的索引的任意子集 $|T| = 2K$

考虑子集 $\{\Phi_j : j \in T\}$ 在 Φ 中 2K列中

若 $\sum_{j \in T} x_j \Phi_j = 0$，存在 x_j 使之成立，则对于包含 x_j 分

量的向量 x，对 $j \in T$，$\Phi x = 0$，否则 $x_j = 0$

$\therefore x \in \Sigma_{2k} \cap \mathcal{N}(\Phi) = \{0\} \Longrightarrow x = \vec{0}$

因此对所有 j，$\{\Phi_j : j \in T\}$ 是一个线性无关的集合

充分性：设 Φ 中的 2k 列的每个子集 $\{\Phi_j : j \in T\}$ 是线性无关的。考虑 $\forall x \in \Sigma_{2k} \cap \mathcal{N}(\Phi)$，令 $T \subseteq \{1, 2 \cdots N\}$ 是任意一组 2k 个的集合。令 $x_j \neq 0$，则 $j \in T$；并且 $x_j = 0$，若 $j \notin T$。用此来构造一个子集 $\{\Phi_j : j \in T\}$ 是 Φ 中的 2k 列，且满足

$$\sum_{j \in T} x_j \Phi_j = \Phi x = 0$$

$\because x \in \mathcal{N}(\Phi)$，但由假设 $\{\Phi_j : j \in T\}$ 线线无关，则 $x_j = 0 \ (j = 1 \cdots N)$，$\therefore x = 0$ 即 $\Sigma_{2k} \cap \mathcal{N}(\Phi) = \{0\}$

证毕

由[引理]可知，当 $k < \frac{n}{2}$ 时，若 Φ 中任意 2k 个列向量线性无关，则 $b = \Phi x$ 在 Σ_k 中至多只有一解