数学建模 (10)

1.

(1)

每个人有策略集{维修,不维修},记为x;={0,1},0表示不维修,1表示维修。

某人i的收益为: $w_i = v \Sigma_i x_i - c x_i$

达到Nash均衡时,满足:

$$orall i \in [1,n], orall x_i' = \{0,1\} - x_i, w_i(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots x_n) \geq w_i(x_1,x_2,\ldots,x_i',\ldots x_n)$$

称此时的纯策略集 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 满足Nash均衡。

由于v>c, 因此Nash均衡为: x_i=1, 其余为0

即:

{1,0,.....,0},{0,1,0,.....,0},.....,{0,0,.....,1}一共n种

(2)

前面n-1个人均不维修的概率为 $P = (1-p)^{n-1} = q^{n-1}$

纯策略参与维修:

$$w_n = v - c$$

纯策略视而不见:

$$w_n = v \cdot (1 - q^{n-1})$$

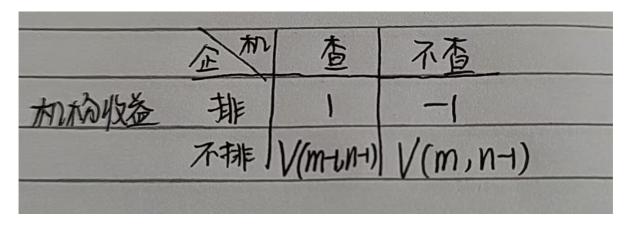
(3)

可以假设次博弈问题是对称的,在混合博弈下,任何一个市民都以p的概率选择维修,以1-p的概率选择 视而不见。对某个市民i分析,他以上述方式做出选择,不论是维修还是视而不见,对于其他任意市民j的 期望收益都是一样的(否则该市民j将会选择纯策略而不是混合策略)因此:

$$egin{aligned} p \cdot v + (1-p) \cdot v \cdot [1-(1-p)^{n-2}] &= p \cdot (v-c) + (1-p) \cdot (v-c) \ &\Rightarrow v (p+1-p-(1-p)^{n-1}) = v-c \ &\Rightarrow [1-(1-p)^{n-1}] = 1-rac{c}{v} \ &\Rightarrow 1-p = \sqrt[n-1]{rac{c}{v}} \ &\Rightarrow p = 1 - \sqrt[n-1]{rac{c}{v}} \end{aligned}$$

也就是说,在n比较大的情况下,每个人参与维修的概率p将会趋近于0,也就是每个人都选择视而不见。

(1)



(2)

对于V(m,n+1)的表达式,考虑V(m,n)到V(m,n+1)的递推式,考虑第一天。第一天企业排放的概率为 p, 应有不论机构检查还是不检查,对于机构的期望收益都应该是一样的(否则机构将直接选择查或者不 查),因此:

$$p \cdot 1 + (1 - p) \cdot V(m - 1, n) = p \cdot (-1) + (1 - p) \cdot V(m, n)$$

$$\Rightarrow \frac{2p}{1 - p} = V(m, n) - V(m - 1, n)$$

$$\Rightarrow p = \frac{V(m, n) - V(m - 1, n)}{2 + V(m, n) - V(m - 1, n)}$$

机构第一天检查的概率设为q,对企业来说,不论他排放还是不排放,其期望收益都是一样的。因此:

$$q \cdot 1 + (1-q) \cdot (-1) = q \cdot V(m-1,n) + (1-q) \cdot V(m,n)$$

$$\Rightarrow q = \frac{1 + V(m,n)}{2 + V(m,n) - V(m-1,n)}$$

因此,

$$V(m,n+1)$$
 = 第一天检查的概率・第一天查了获得的收益 + 第一天没查的概率・第一天没查获得的收益
$$=q\cdot [p+(1-p)V(m-1,n)]+(1-q)\cdot [p+(1-p)V(m-1,n)] \\ =p+(1-p)V(m-1,n) \\ =rac{V(m,n)+V(m-1,n)}{2+V(m,n)-V(m-1,n)}$$

对于V(m+1,n)的表达式,考虑V(m,n)到V(m+1,n)的递推式。

初始条件有:

$$V(0,n) = -1$$
$$V(n,n) = 1$$

(3)

取m=1, 则:

$$V(1,n+1) = rac{V(1,n) + V(0,n)}{2 + V(1,n) - V(0,n)} = rac{V(1,n) - 1}{V(1,n) + 3}$$

一个数列的递推式,即:

$$a_{n+1} = rac{a_n - 1}{a_n + 3} = 1 - rac{4}{a_n + 3}$$
 $a_1 = 1$

最后在n趋近于无穷时, V(1,n)将会趋近于-1。因此其不动点为-1

$$a_{n+1} + 1 = rac{2a_n + 2}{a_n + 3}$$
 $\Rightarrow rac{2}{1 + a_{n+1}} = rac{a_n + 3}{a_n + 1} = 1 + rac{2}{1 + a_n}$
 $\Rightarrow \{rac{2}{1 + a_{n+1}}\} = (n - 1) + 1$
 $\Rightarrow a_{n+1} = V(1, n) = rac{2 - n}{n}$