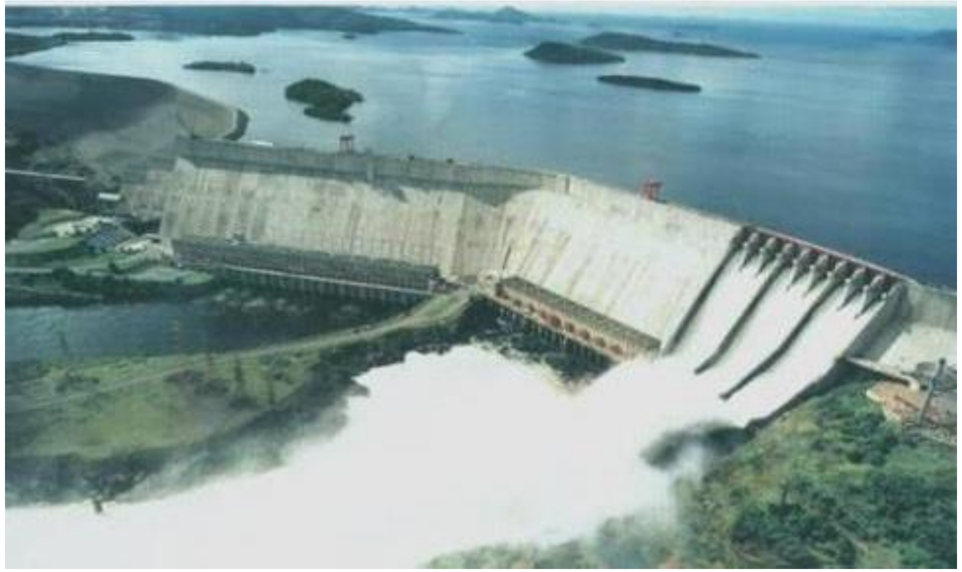
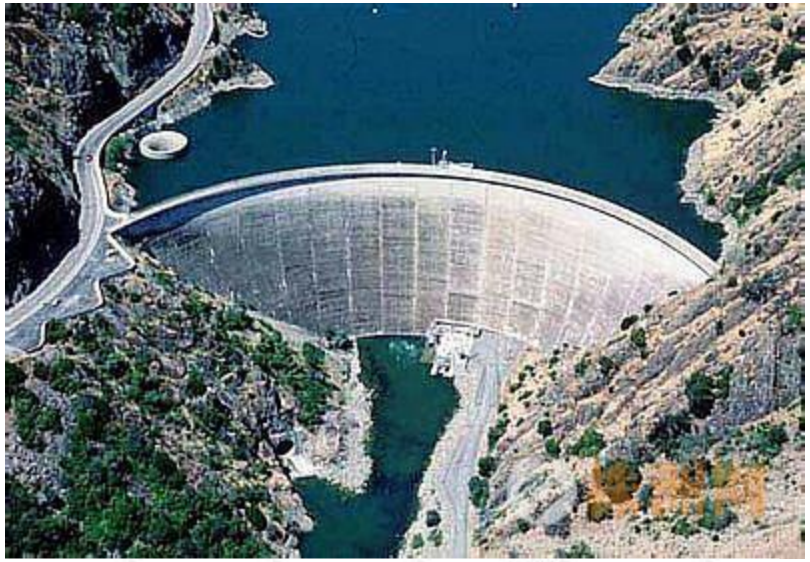
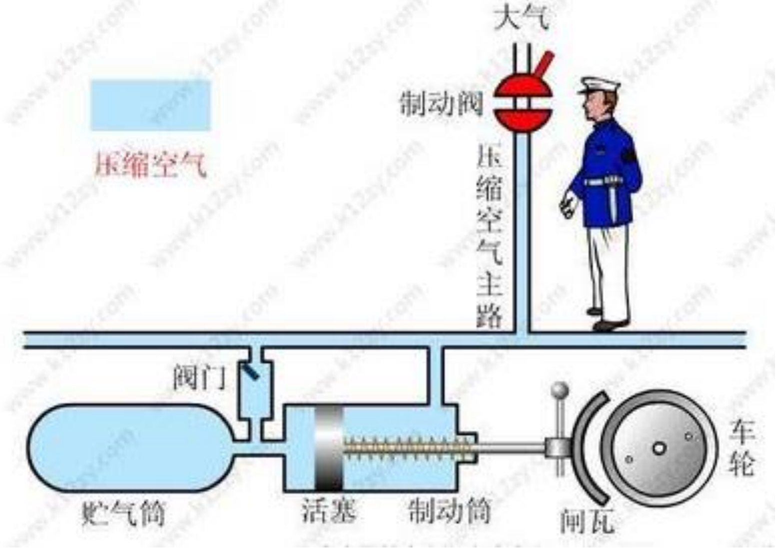
第2讲（第2章）

流体静力学

流体静力学：研究静止流体的力学规律以及这些规律在工程上的应用







流体的静止状态

□ 流体的静止与相对静止

静止状态：流体相对于惯性系没有运动； ➡ 平衡状态

相对静止：流体相对于非惯性系没有运动；➡ 相对平衡状态

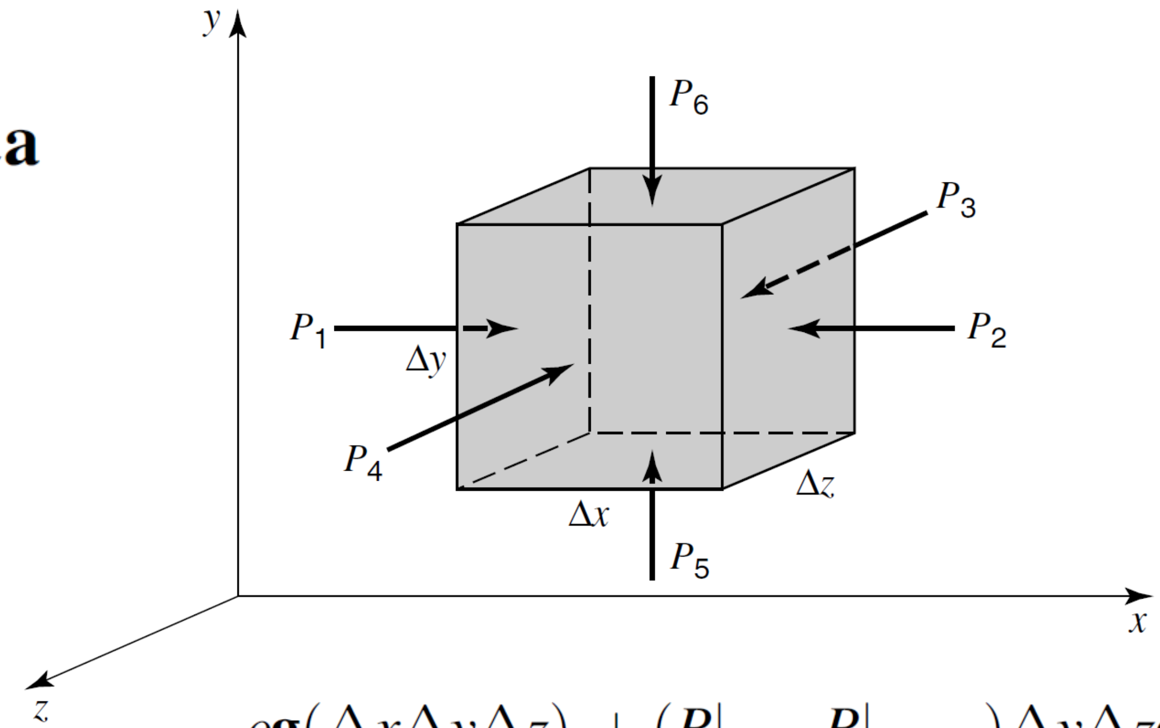
- 流体静止(平衡)时速度场处处为零，静压强场成为决定性因素.
- 静止/相对静止流体，质点之间没有相对运动，粘性作用表现不出来，剪应力为零.

- 惯性系（静止/匀速运动）中，压强分布与重力平衡；
- 非惯性系中，压强分布除与重力外, 还要与惯性力分布平衡.

受力分析

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$



流体微元
Element of fluid

$$\rho \mathbf{g}(\Delta x \Delta y \Delta z) + (P|_x - P|_{x+\Delta x})\Delta y \Delta z \mathbf{e}_x + (P|_y - P|_{y+\Delta y})\Delta x \Delta z \mathbf{e}_y + (P|_z - P|_{z+\Delta z})\Delta x \Delta y \mathbf{e}_z = 0$$

除以 $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$，有

$$\rho \mathbf{g} - \frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{\Delta x}\mathbf{e}_x - \frac{P|_{y+\Delta y} - P|_y}{\Delta y}\mathbf{e}_y - \frac{P|_{z+\Delta z} - P|_z}{\Delta z}\mathbf{e}_z = 0$$

求极限 $$\rho \mathbf{g} = \lim_{\Delta x, \Delta y \Delta z \to 0} \left[\frac{P|_{x+\Delta x} - P|_x}{\Delta x} \mathbf{e}_x + \frac{P|_{y+\Delta y} - P|_y}{\Delta y} \mathbf{e}_y + \frac{P|_{z+\Delta z} - P|_z}{\Delta z} \mathbf{e}_z \right]$$

得到 $$\rho \mathbf{g} = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

或者用梯度算子表示 $$\rho \mathbf{g} = \nabla P$$

- 压强变化最大的方向沿着重力方向
- 压强等值面垂直于重力方向

流体静力学控制方程

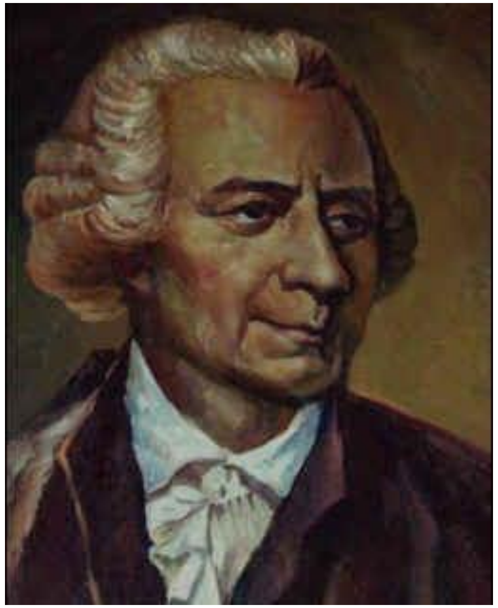
□ 欧拉(Euler)平衡方程

$$f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0$$

或：

$$\boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p = 0$$

$$\begin{cases} f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$



方程意义：静止流体中压强的空间变化⇐由**体积力**存在产生.

- 体积力分布已知，由欧拉平衡方程⇒求得压强分布.
- 流体压强 $p(x,y,z)$在一点邻域内的空间增量可用全微分表示

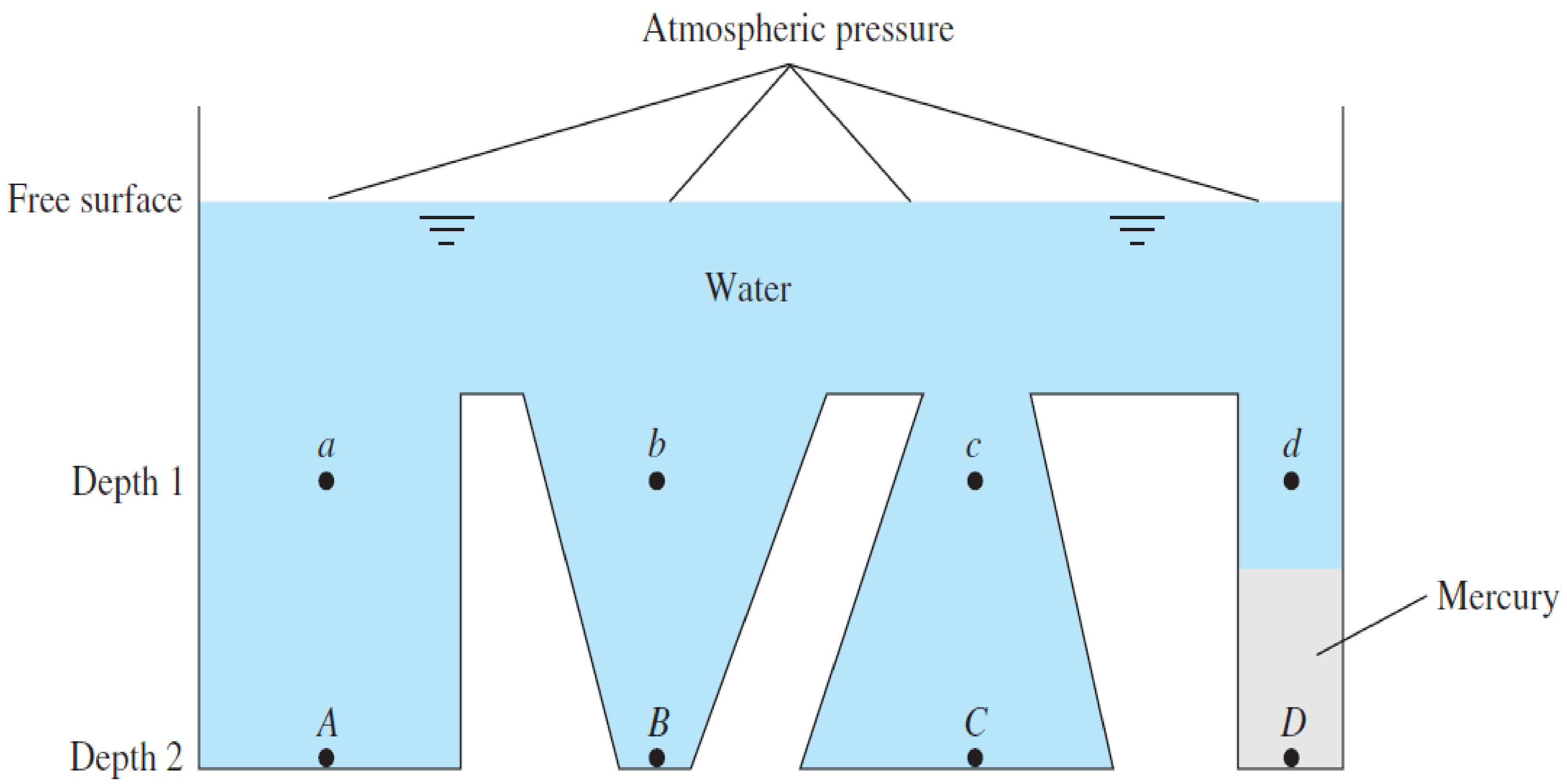
$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

此式为压强全微分式，沿任何方向积分该式可得该方向的压强分布.

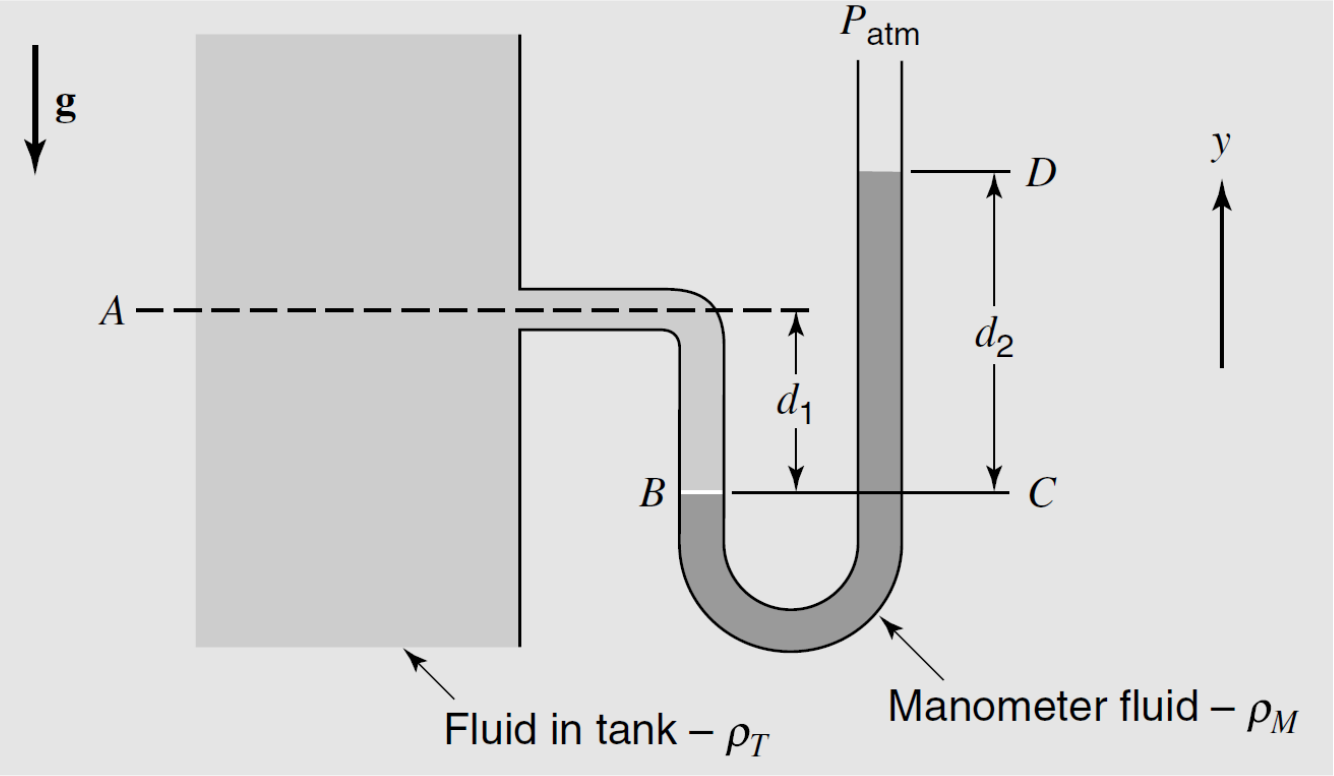
均质液体静压强分布

□ 均质液体在重力场中的压强分布

液体内部压强与液体的深度有关，与盛液体的容器形状无关



例子1：压力计（Manometer）



$$\frac{dP}{dy}\mathbf{e}_y = -\rho g \mathbf{e}_y$$

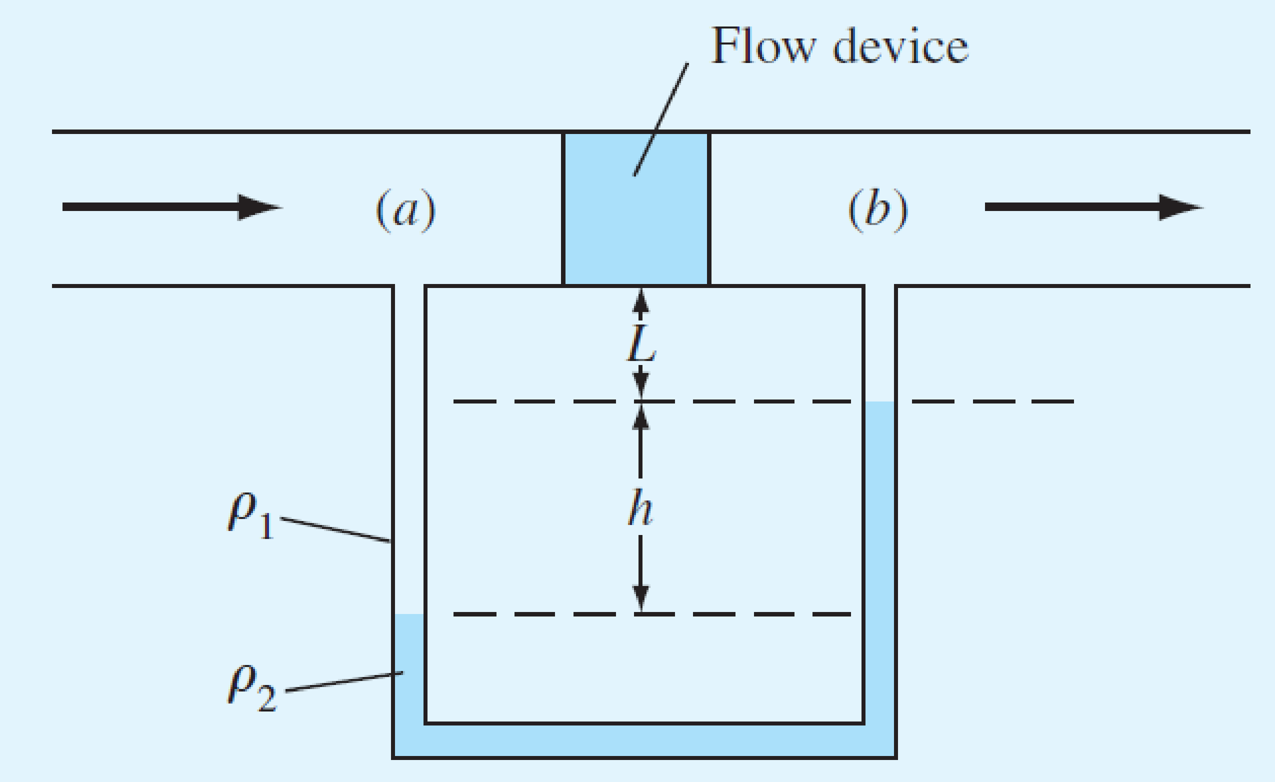
$$P_{atm} - P_C = -\rho_m g d_2$$

$$P_A - P_B = -\rho_T g d_1$$

$$P_A - P_{atm} = \rho_m g d_2 - \rho_T g d_1$$

测量A点压强

例子2：流动装置前后的压强变化

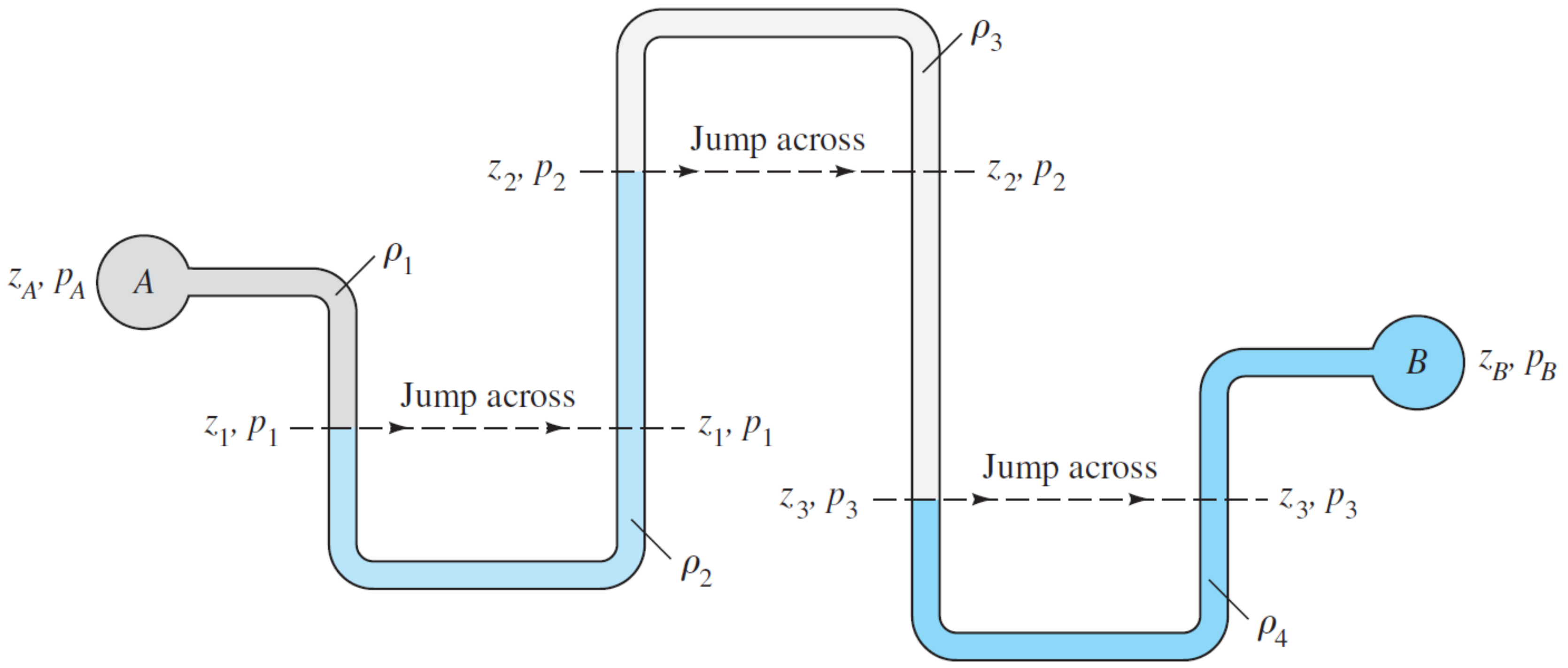


测量a、b两点的压强差

$$p_a + \rho_1 gL + \rho_1 gh - \rho_2 gh - \rho_1 gL = p_b$$

$$p_a - p_b = (\rho_2 - \rho_1)gh$$

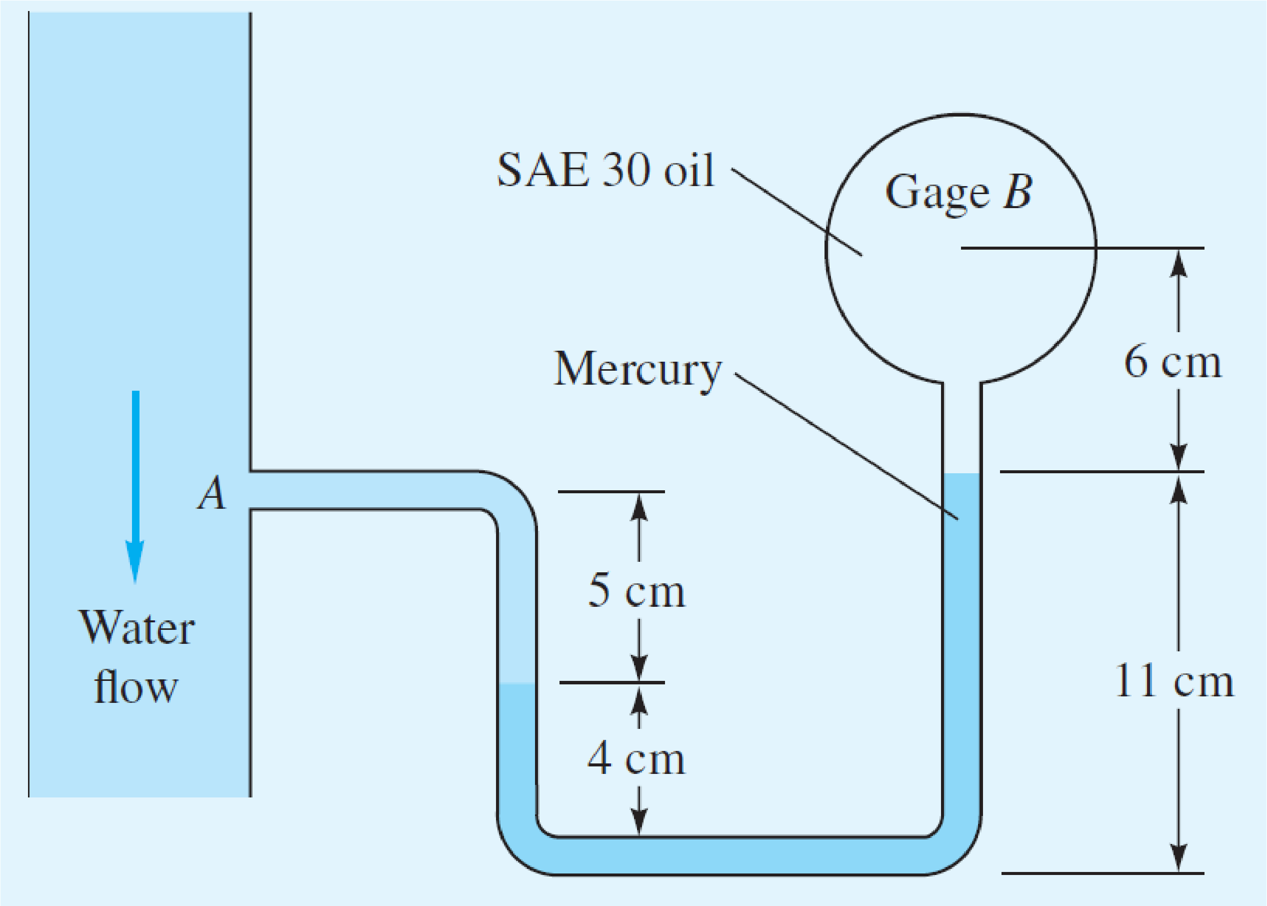
例子3：多种流体的压力计



A、B两点的压强关系

$$p_A - p_B = (p_A - p_1) + (p_1 - p_2) + (p_2 - p_3) + (p_3 - p_B)$$
$$= -\rho_1 g(z_A - z_1) - \rho_2 g(z_1 - z_2) - \rho_3 g(z_2 - z_3) - \rho_4 g(z_3 - z_B)$$

例子4：另一种压强计算



已知B点压强$P_B = 87\ kPa$，求A点压强P_A

$$P_A + \rho_w g|\Delta Z|_w = P_B + \rho_o g|\Delta Z|_o + \rho_m g|\Delta Z|_m$$

$$P_A = P_B + \rho_o g|\Delta Z|_o + \rho_m g|\Delta Z|_m - \rho_w g|\Delta Z|_w$$

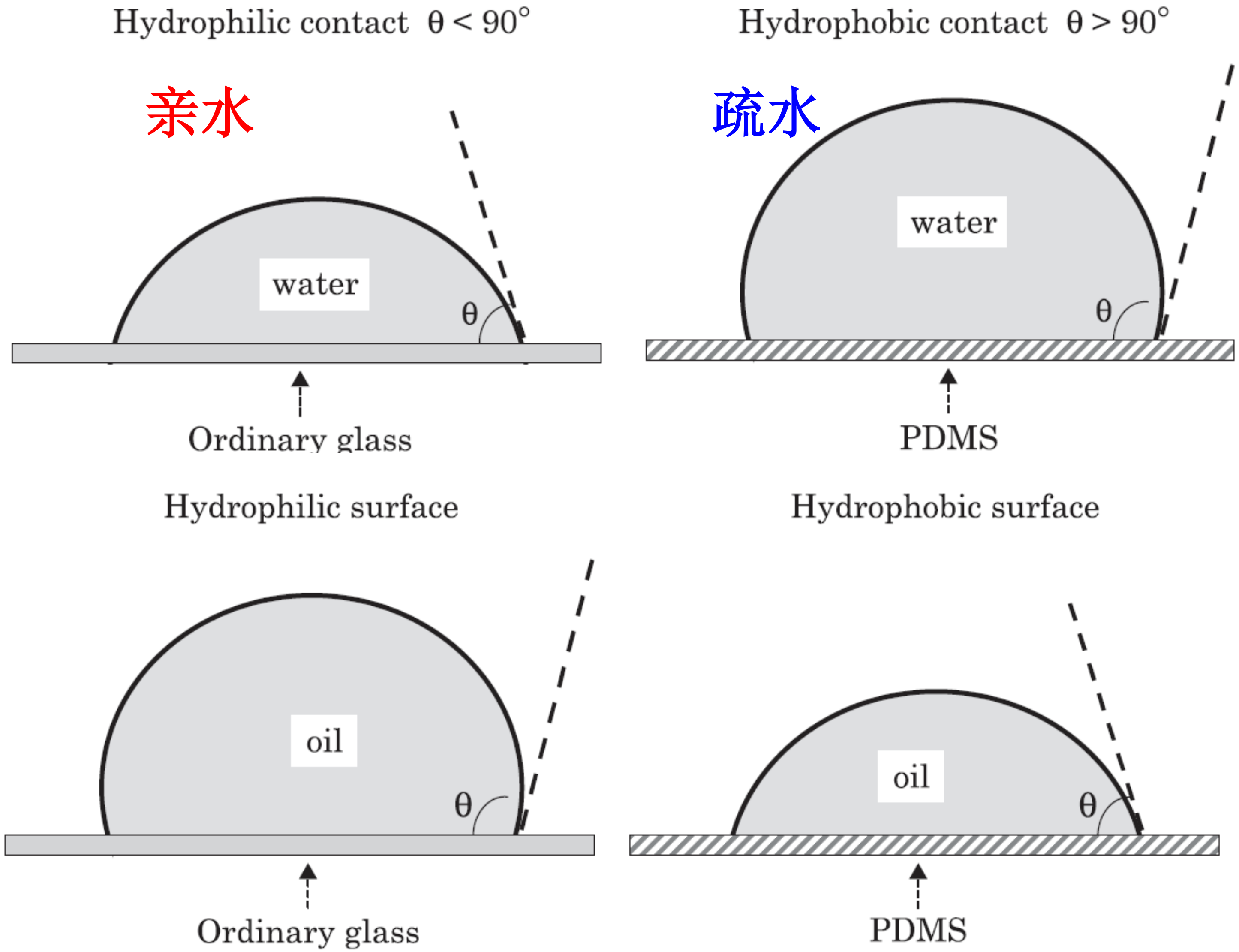
$$P_A = 96350\ Pa \approx 96.4\ kPa$$

注意有效数字！

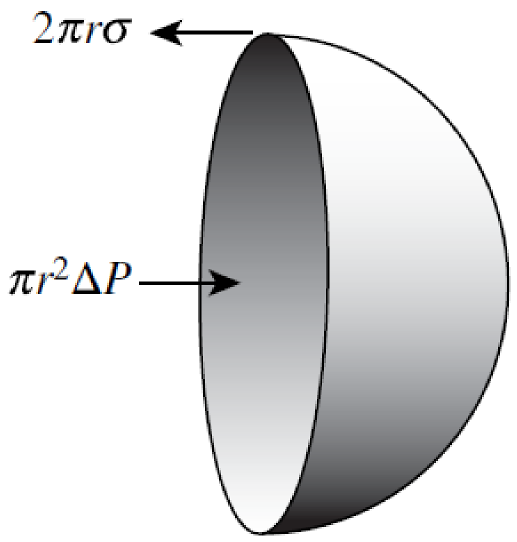
水 $\rho_w = 998\ kg/m^3$，水银 $\rho_m = 13550\ kg/m^3$，

油 $\rho_o = 891\ kg/m^3$

表面张力对测量的影响：润湿现象



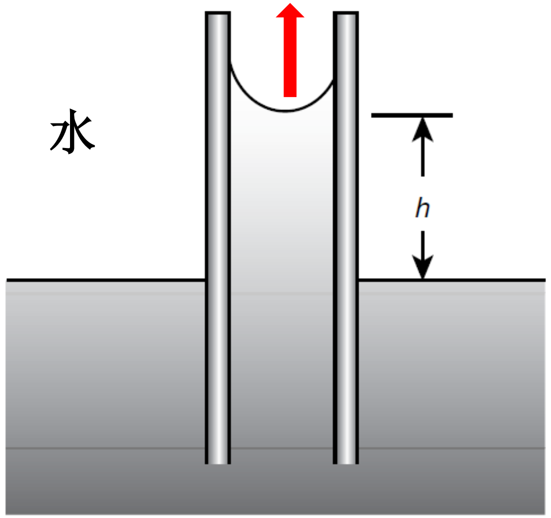
表面张力的影响

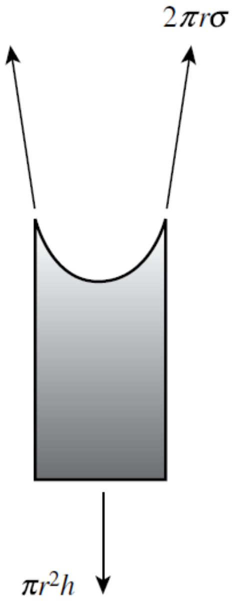


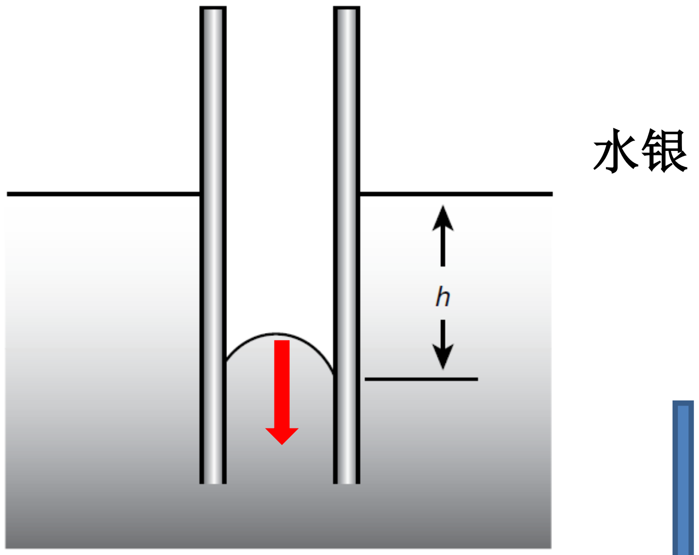
$$\pi r^2 \Delta P = 2\pi r\sigma$$

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{r}$$

自由面 表面张力







$$2\pi r\, \sigma \cos\theta = \rho g \pi r^2 h$$

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$$

$$h = \frac{2(0.44\ \mathrm{N/m})(\cos 130°)}{(13580\ \mathrm{kg/m^3})(9.81\ \mathrm{m/s^2})(2\times 10^{-3}\ \mathrm{m})}$$

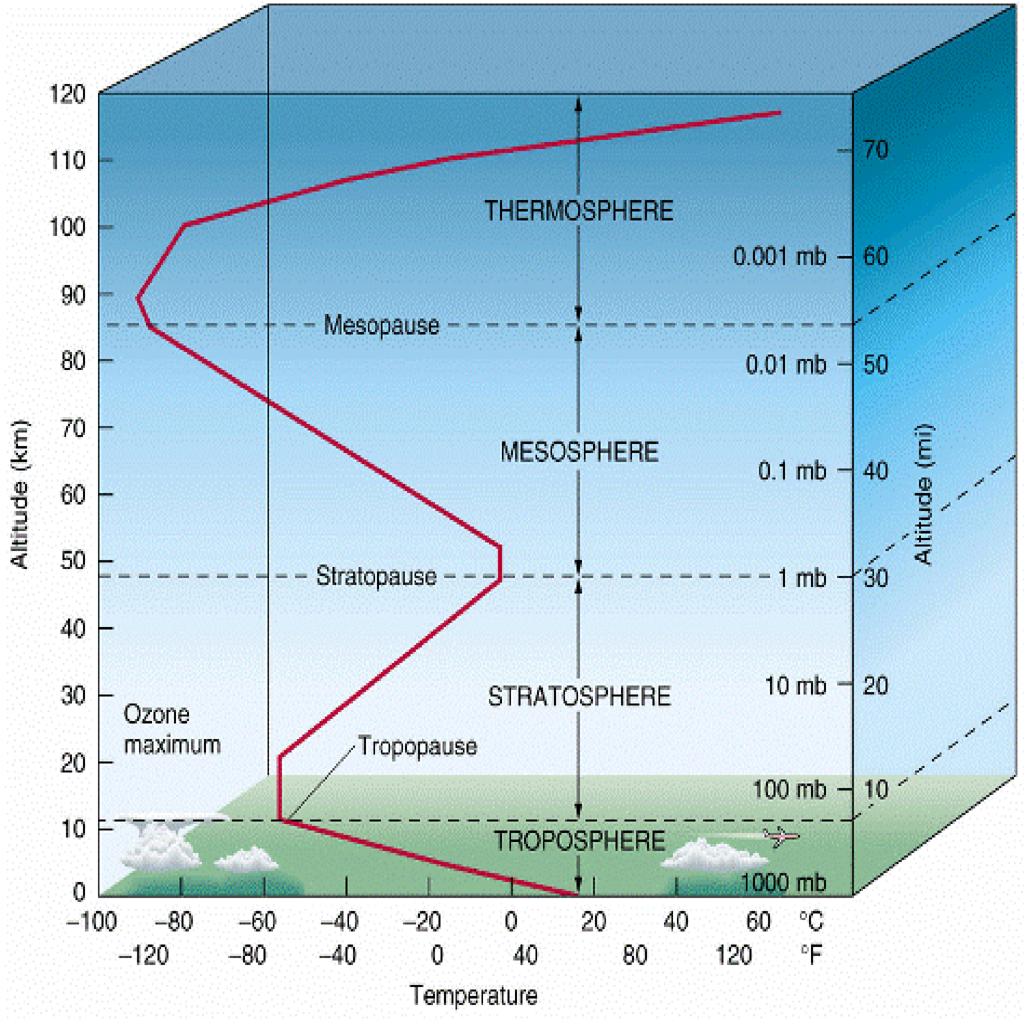
$$= 2.12\times 10^{-3}\ \mathrm{m}\ (2.12\ \mathrm{mm})$$

✓ 管道直径大于1厘米即可

大气压强计算

根据大气热力性质在垂向上的差异，
可将大气分为**五层**：
对流层、平流层、中间层、热层和散逸层

- **对流层**：最靠近地面的一层大气。
  - 低纬度地区高17km～18km，中纬度地区高10km～12km，高纬度地区高仅8km～9km
  - 气温随高度的增加而递减。**平均每上升100m，气温降低0.65 K。**
  - 对流运动显著。上冷下热，利于空气的对流。
  - 天气现象复杂多变。



大气层的垂直分布与温度和气压图

例5：大气压强计算

在重力作用下，大气压强分布的变化有

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

对理想气体，压强可表示为 $p = \rho RT$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g$$

对Z1、Z2 两个高度积分，得到

$$\int_1^2 \frac{dp}{p} = \ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R}\int_1^2 \frac{dz}{T}$$

等温假设下，有

$$p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0}\right] \qquad R = 287\ \mathrm{m^2/(s^2 \cdot K)}$$

几个需要注意的地方：

高度对重力的影响 $g = g_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2$

教材 例2中 $P = \rho RT/M$

$$\frac{P}{P_{atm}} = \exp\left\{-\frac{Mgy}{RT}\right\}$$

通用气体常数 $R = 8314.3\ J/(kmol\ K)$

需要除以分子量 29，才能不混淆

例6：温度变化情况下的大气压强计算

温度随着高度（< 11000 m）的变化

$$T \approx T_0 - Bz$$

$$B = 0.00650\ \mathrm{K/m}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{R(T_0 - Bz)} g$$

$$\int_1^2 \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R}\int_1^2 \frac{dz}{T_0 - Bz}$$

得到 $p = p_0(1 - \frac{Bz}{T_0})^{g/(RB)}$

估算5000 m高度上的气压

变温度条件下，有

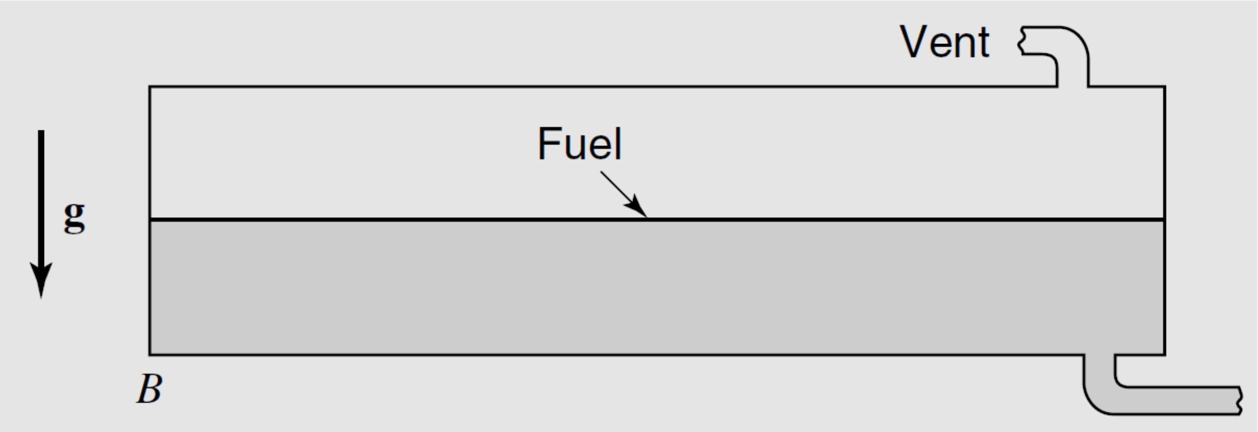
$$\boldsymbol{p \approx 54000\ Pa}$$

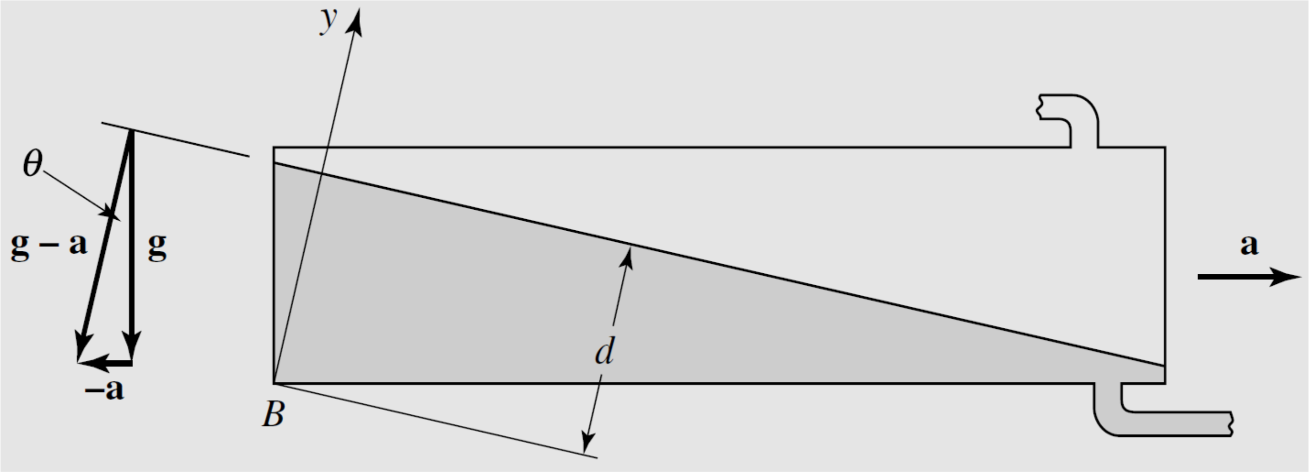
等温假设下，有 $p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0}\right]$

$$\boldsymbol{p \approx 56000\ Pa}$$

存在4% 误差！

例7：均匀直线加速度情况下的液体压强分布





$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = \rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \mathbf{a}$$

$$\nabla P = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a})$$

求B点压强

$$\frac{dP}{dy}\mathbf{e}_y = -\rho|\mathbf{g} - \mathbf{a}|\mathbf{e}_y = -\rho\sqrt{g^2 + a^2}\mathbf{e}_y$$

从0到d积分

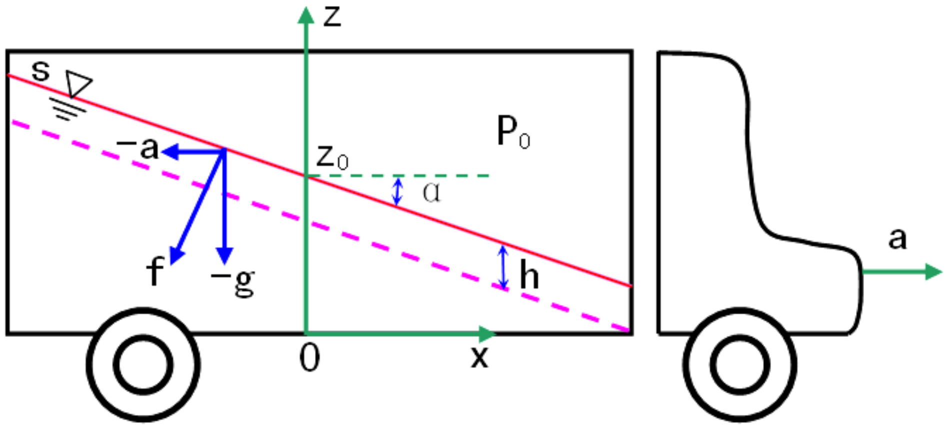
$$P_{\text{atm}} - P_B = \rho\sqrt{g^2 + a^2}(-d)$$

$$P_B - P_{\text{atm}} = \rho\sqrt{g^2 + a^2}(d)$$

如果车辆减速呢？

更普遍情况

- 贮液罐以匀加速度*a*作直线运动，图示坐标系中，体积力为



$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_g - \boldsymbol{a} \qquad \begin{cases} f_x = -a \\ f_y = 0 \\ f_z = -g \end{cases}$$

由压强全微分： $dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) = \rho(-adx - gdz)$

$$p = -\rho\,(ax + gz) + c$$

由边界条件： $x=0$， $z=z_0$， $p=p_0$ 得 $c=p_0+\rho g z_0$

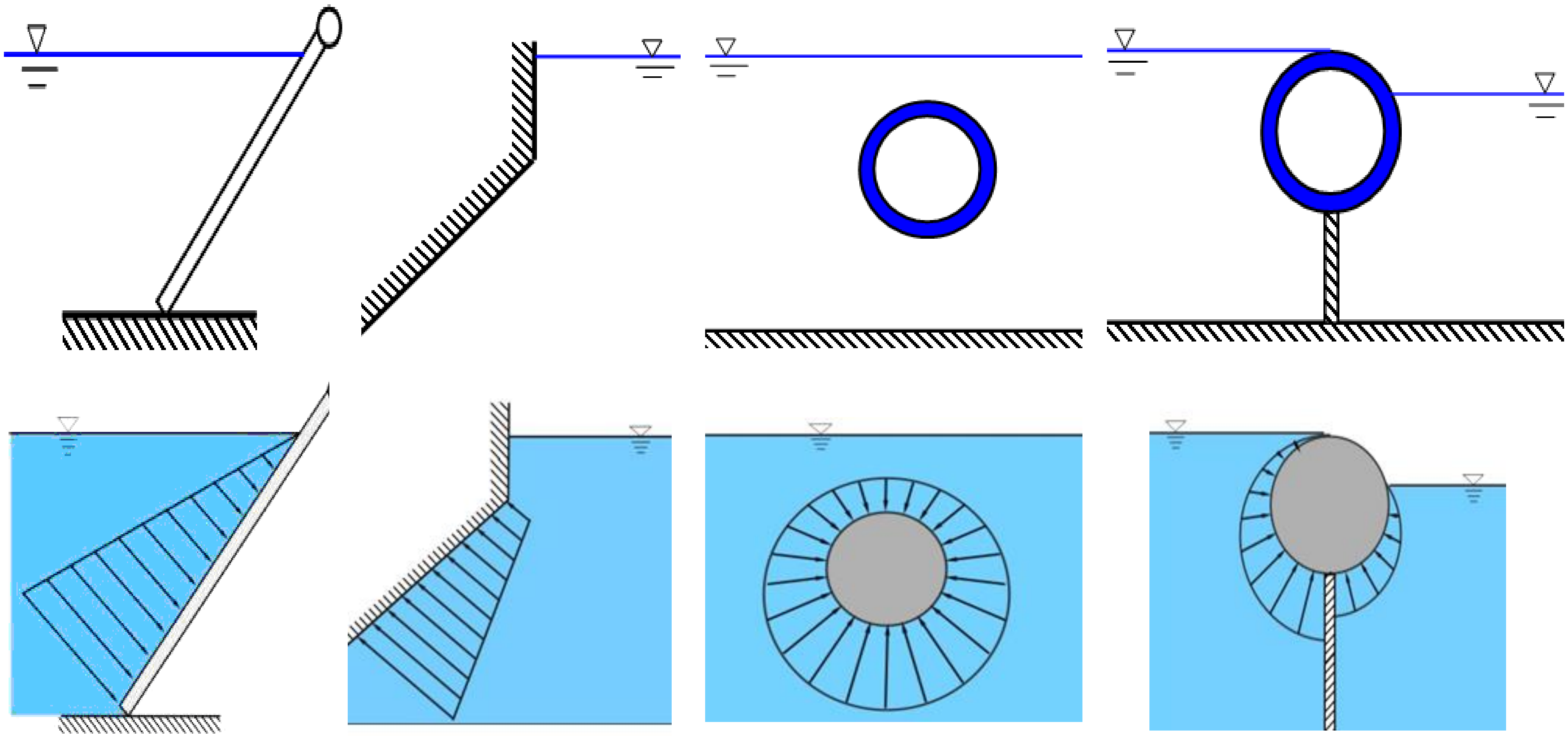
$$\boxed{p = p_0 + \rho\, g[(z_0 - z) - \frac{a}{g}x]}$$

均质液体作匀加速直线运动时的压强公式

可见：流场中压强 $\boldsymbol{p}$ 是 x、z的函数，即压强不仅沿液面深度变化，而且还沿水平方向变化.

[例] 静压强分布图

已知：静止液体的自由液面上为大气压强，试定性地画出液体中斜面和曲面上的压强分布.

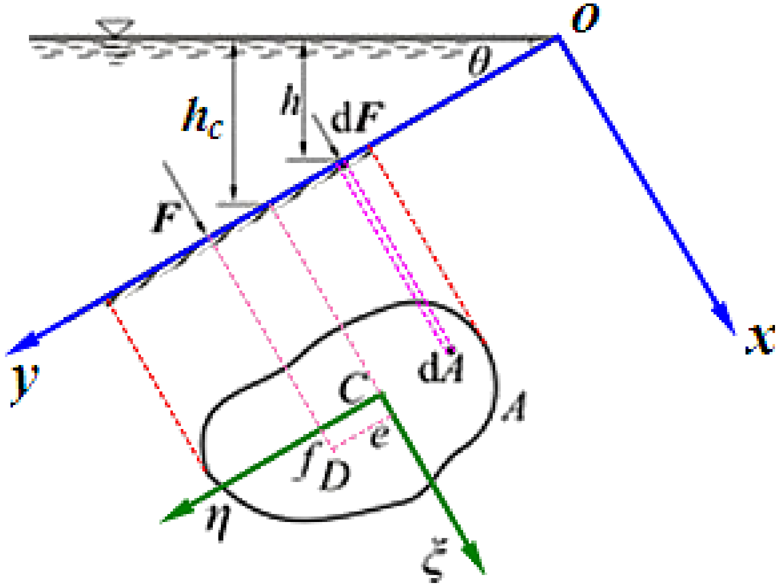


浸没平壁的受力分析

□ 平面壁的总压力

均质液体中一倾斜平壁(倾角θ), 大气压液面与平面壁交于O点. 求平壁上任意形状面积A的总压力。

取直角坐标系xoy，x轴位于液面上，y轴沿壁向下.



在面积A上任取一面积元dA，淹没水深h=***ysinθ***，面元上的压强合力（用表压）垂直指向面元

$$
\begin{aligned}
dF &= p_{dA}\cdot dA \\
&= \rho g h_{dA}\cdot dA \\
&= \rho g y\sin\theta\cdot dA
\end{aligned}
$$

对A积分可得总压力

$$
F=\int_A \rho g y\sin\theta\cdot dA
$$

$$
=\rho g\sin\theta\int_A y dA
$$

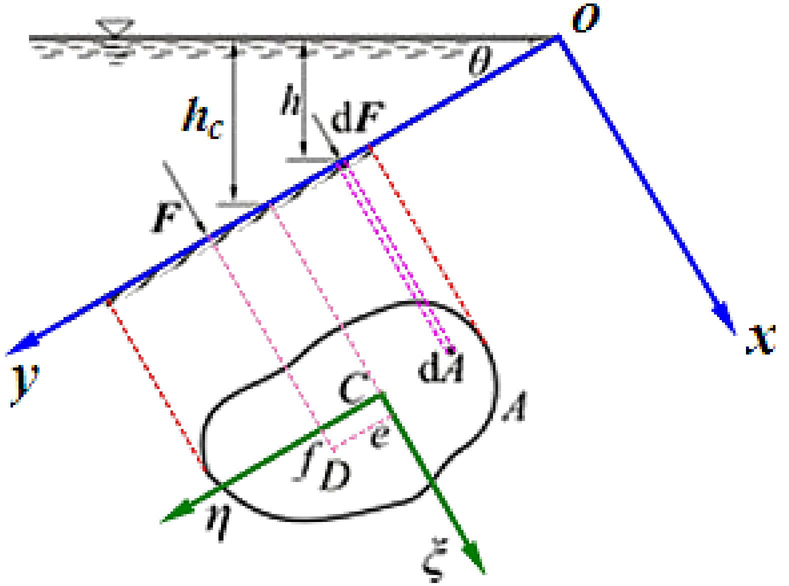
浸没平壁的受力分析

□ 平面壁的总压力

• 由几何学，面积矩可表示为

$$\int_A y dA = y_c A$$

式中 y_c 为面积A形心 C的坐标，上式可写为



$$F = \rho g y_c \sin\theta\, A = \rho g h_c A = p_c A$$

$h_c = y_c \sin\theta$ 为形心的淹没水深，p_c为形心压强。

此式表明：作用于面积A的总压力等于其形心压强乘以面积，方向垂直指向壁面。

浸没平壁的受力分析

□ 平面壁总压力的作用点

均质静止流体对平壁的压强合力中心称为总压力作用点.

由于压强在深度方向线性增长，均质静止流体对斜平壁的总压力作用点不可能与形心重合，而应在形心以下.

- 总压力作用点位置的确定——用积分法.

力矩合成法：作用于面积A的各面元dA上的压力对ox轴的力矩积分
＝等于总压力对ox轴的力矩

$$\boxed{Fy_{\mathrm{D}} = \int_A y\mathrm{d}F = \rho\, g \sin\theta \int_A y^2 \mathrm{d}A}$$

$$\boxed{dF = \rho g y \sin\theta \cdot dA}$$

利用 $F = p_c A = \rho g y_c \sin\theta A$ 可得

$$y_D = \frac{\int_A y^2 dA}{y_C A} = \frac{I_{xx}}{y_C A}$$

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA$$

壁面A对ox轴的二阶惯性矩

浸没平壁的受力分析

同理：作用于面积A的各面元dA上的压力对oy轴的力矩积分

＝等于总压力对oy轴的力矩

$$\boxed{Fx_D = \int_A xdF = \rho g\sin\theta\int_A xydA}$$

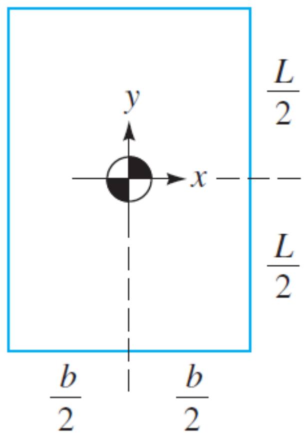
利用 $F = p_c A = \rho g y_c \sin\theta A$ 可得

$$x_D = \frac{\int_A xydA}{y_C A} = \frac{I_{xy}}{y_C A}$$

$$I_{xy} = \int_A xydA$$

壁面A对oy轴的二阶惯性矩

常见形状的二阶惯性矩

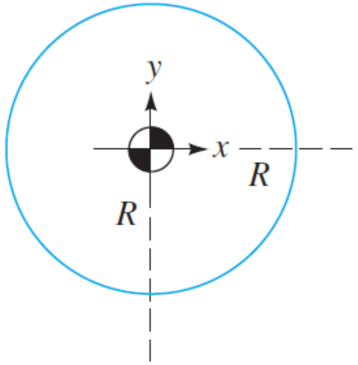


$A = bL$

$I_{xx} = \dfrac{bL^3}{12}$

$I_{xy} = 0$

(a)

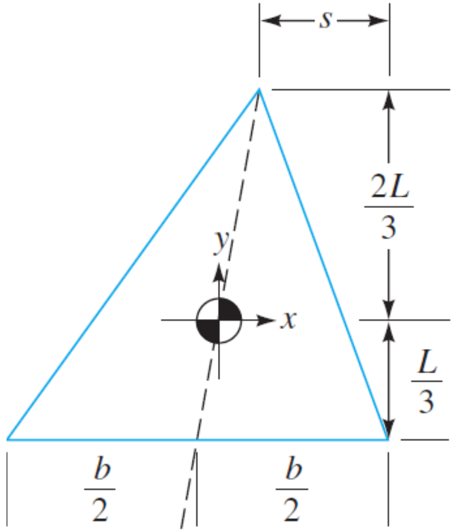


$A = \pi R^2$

$I_{xx} = \dfrac{\pi R^4}{4}$

$I_{xy} = 0$

(b)

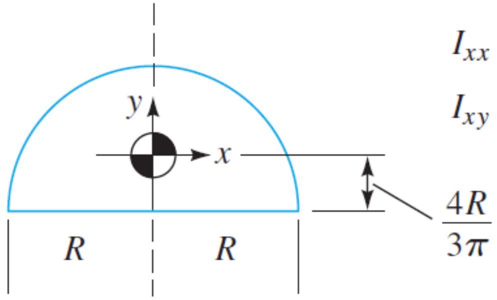


$A = \dfrac{bL}{2}$

$I_{xx} = \dfrac{bL^3}{36}$

$I_{xy} = \dfrac{b(b-2s)L^2}{72}$

(c)



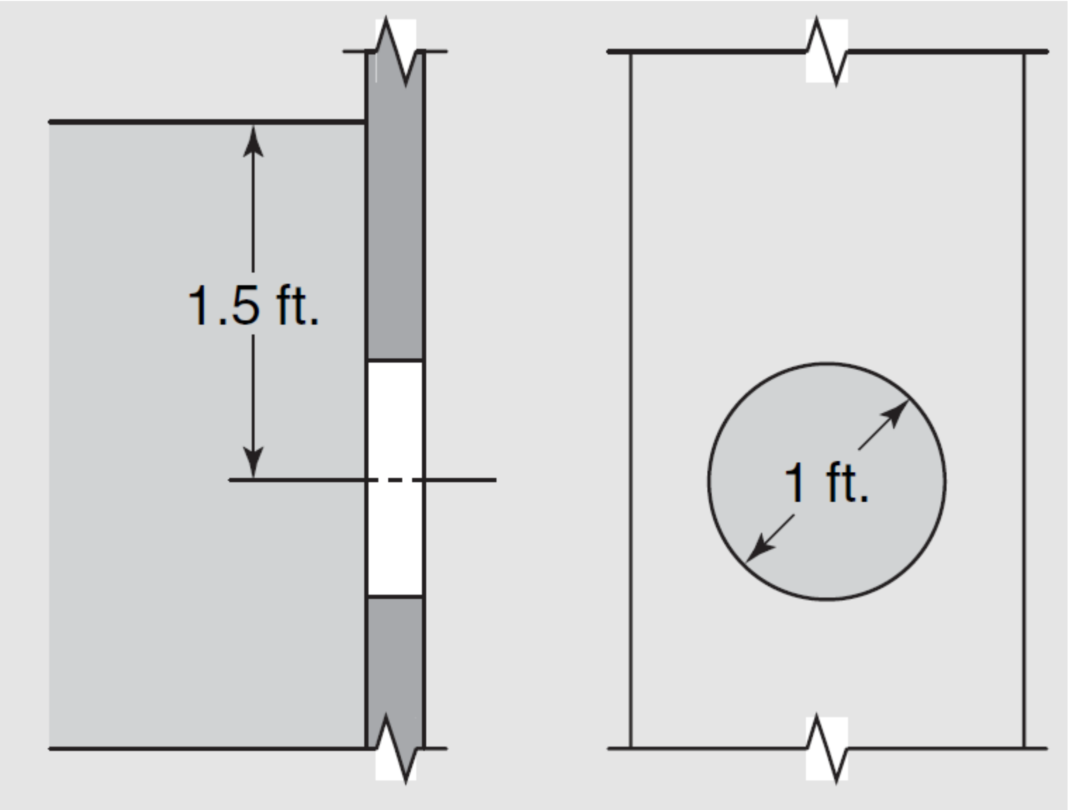
$A = \dfrac{\pi R^2}{2}$

$I_{xx} = 0.10976R^4$

$I_{xy} = 0$

(d)

例8：水下窗口受力分析



受力 $F = \rho g \sin\alpha\, A\bar{\eta}$

$$F = \rho g A\bar{\eta} = \frac{(62.4\,\text{lb}_\text{m}/\text{ft}^3)(32.2\,\text{ft/s}^2)(\pi/4\,\text{ft}^2)(1.5\,\text{ft})}{32.2\,\text{lb}_\text{m}\text{ft/s}^2\,\text{lb}_\text{f}}$$

$$= 73.5\,\text{lb}_\text{f}(327\,\text{N})$$

作用位置

$$\eta_{\text{c.p.}} = 1.5 + \frac{\pi R^4}{4\pi R^2 1.5}\,\text{ft} = 1.542\,\text{ft}$$

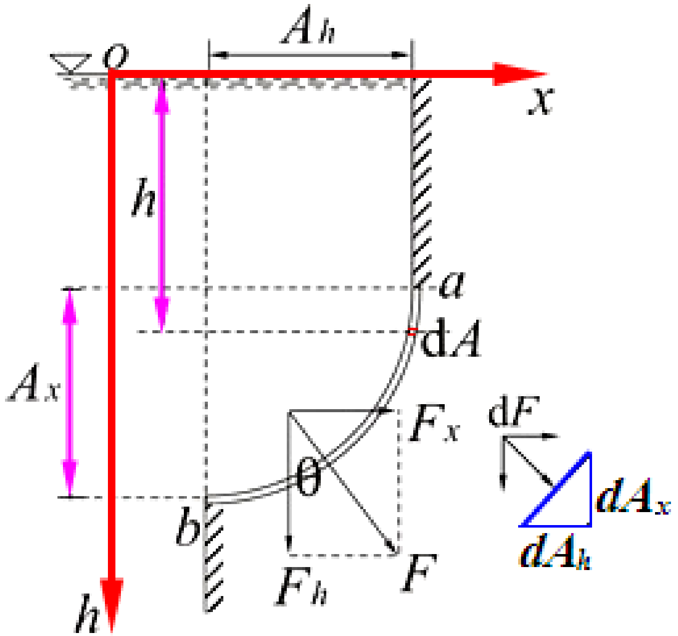
流体对曲面壁的作用力

(1) 二维曲面

曲壁ab，左侧盛水，坐标系oxh如图示.

在曲线ab上任取一面积元dA，水平方向投影面积dA_x，垂直方向投影面积dA_h，淹没水深h

作用在dA上液体压力的分量式为



$$dF_x = \rho g h dA_x \qquad dF_h = \rho g h dA_h$$

- 垂直分力

$$F_h = \int_{A_h} \rho g h dA_h = \rho g \int_{A_h} h dA_h = \rho g \tau_p$$

$\tau_p = \int_{A_h} h dA_h$ 称为压力体。 $\rho g \tau_p$ 即为压力体内液体的重量。

表明：液体对曲壁总压力的垂直分量等于压力体内液体的重量.
垂直分力的作用线通过压力体的重心.

□ 水平分力

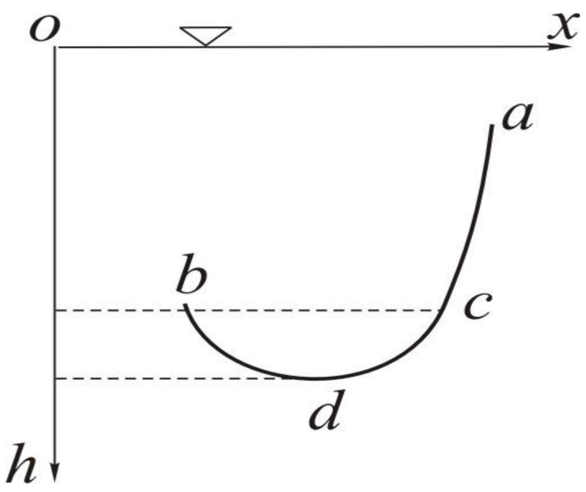
$$F_x = \int_{A_x} \rho g h dA_x = \rho g \int_{A_x} h dA_x = \rho g h_{xc} A_x$$

h_{xc} 为A_x的形心的淹没水深。

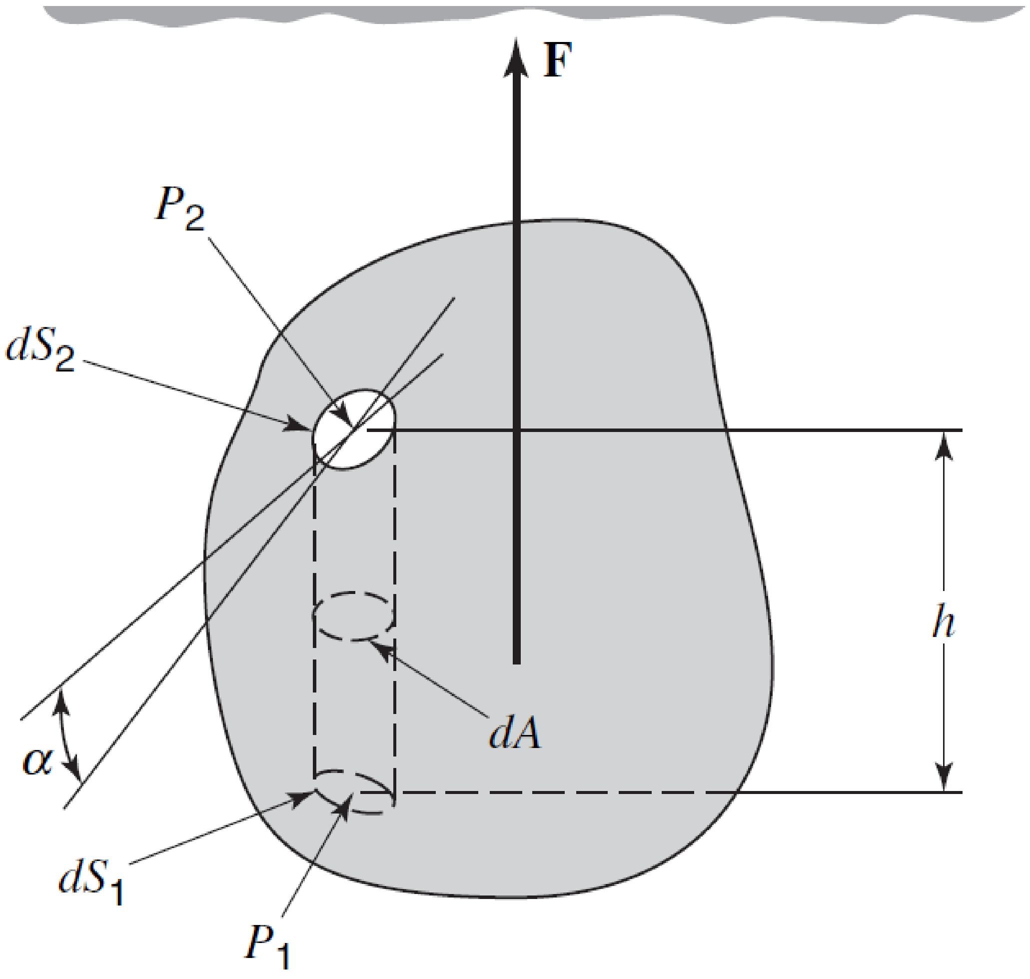
表明：液体对曲壁总压力的水平分量等于曲壁在该方向投影面上的总压力. 水平分力的作用线通过投影面积的压强中心，指向曲壁.

若曲壁在水平方向的投影有重叠部分:
如右图中ab曲线中的cdb段，

cd和bd的水平分力大小相等，方向相反，
合力为零，总压力水平分力由ac段决定.



浮力



微元上表面$dS2$的作用力

$$-P_2\, dS_2 \cos\alpha\, \mathbf{e}_y$$

合力有

$$d\mathbf{F} = (P_1 - P_2)\, dA\, \mathbf{e}_y - \rho_B g h\, dA\, \mathbf{e}_y$$

因为 $P_1 - P_2 = \rho g h,$

$$d\mathbf{F} = (\rho - \rho_B) g h\, dA\, \mathbf{e}_y$$

积分，得

$$\mathbf{F} = (\rho - \rho_B) g V \mathbf{e}_y$$

阿基米德浮力定律

全部或部分浸没在静止均质流体中的物体，在重力场中所受的浮力竖直向上，大小等于它所排开该流体的重量，作用线通过它所排开流体的重心。

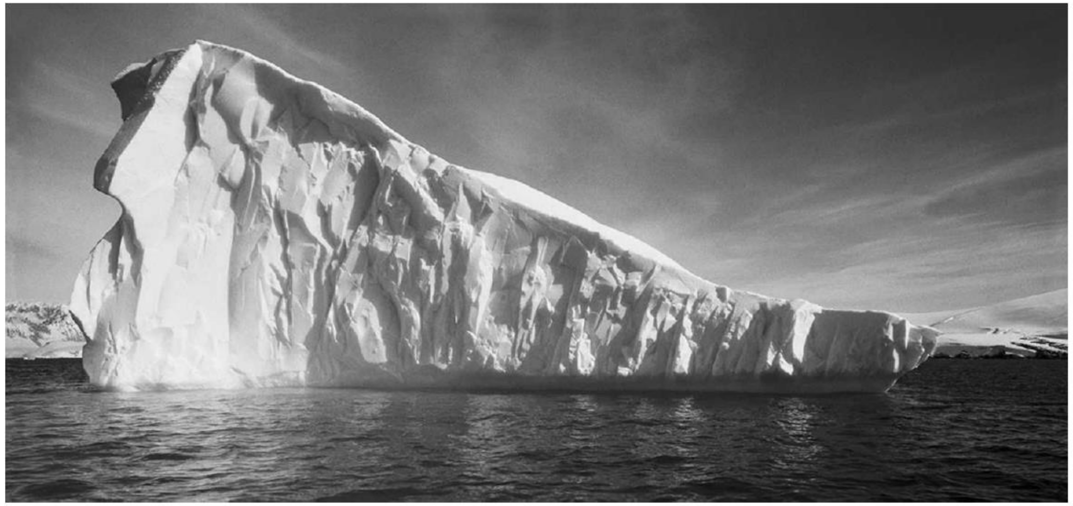
浮体、潜体和沉体：

当|F|>W时，物体上浮露出液面，称为浮体；

当|F|=W时，物体悬浮在液体内，称为潜体；

当|F|<W时，物体下沉至底面，　称为沉体；

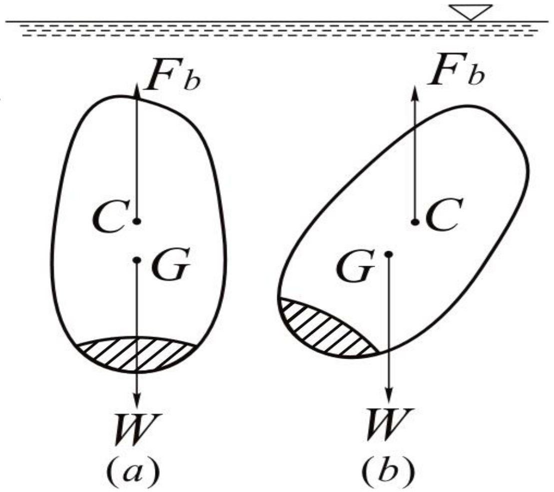
浮力

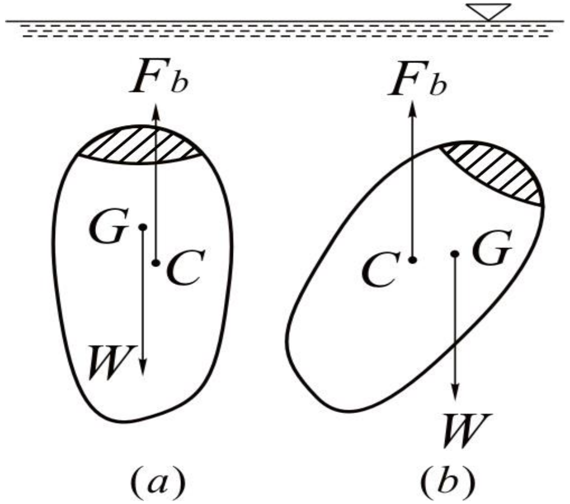


□ 潜体的稳定性

潜体平衡的稳定性取决于物体重心与浮心的相对位置.

- **稳定平衡**：平衡时重心位于浮心正下方.
  当物体倾斜时，重力W与浮力F构成一恢复力偶，使物体回到平衡位置.
- **不稳定平衡**：平衡时重心位于浮心正上方.
  当物体倾斜时，重力与浮力构成一倾倒力偶，使物体倾复.
- **随遇平衡**：平衡时重心与浮心重合.
  当物体倾斜时，既不发生恢复，也不发生倾倒.
  只有在均质液体中的均质潜体才有可能达到随遇平衡.





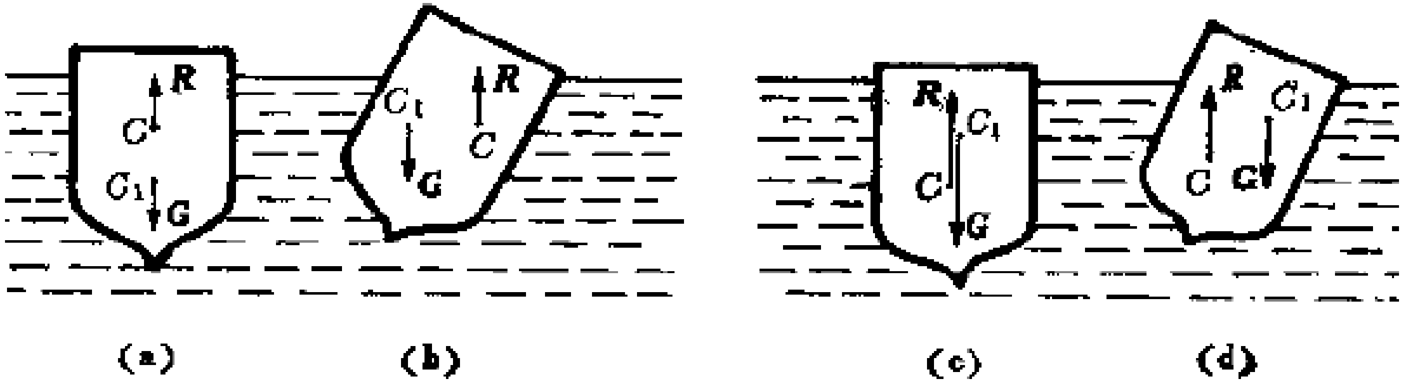
潜体与浮体的稳定性

□ 浮体的稳定性

平衡条件 $\begin{cases} \text{合力为零} \\ \text{合力矩为零} \end{cases}$

浮体倾斜时，产生浮力部分的体积、形状和浮心位置都可能改变，情况比潜体复杂

- 当浮体重心低于浮心时，浮体处于稳定平衡状态；
- 当浮体重心高于浮心时，需要用定倾中心与中心位置判断平衡状态.



课后作业

2.1、 2.8、 2.13

请将习题中的英制单位均化成国际标准单位后给出答案

1 ft（英尺）= 30.48 cm，1 in （英寸）= 2.54 cm