一、一博物馆的展览区为由若干面直形墙围成的封闭区域。为保护藏品安全，在区域内的若干个固定位置放置监控仪。监控仪不可移动，可观测到任意方向、任意距离的藏品情况，但无法观测到墙壁后区域的情况。现希望用最少的监控仪监控博物馆的全部区域。

（1）试给出上述问题的一种数学描述；

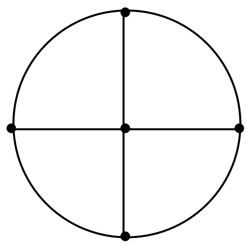
（2）记$G(M)$为博物馆M所需监控仪数量的最小值，

$$g(n)=\max\left\{G(M) \mid M\text{ 由 }n\text{ 面墙围成}\right\}。$$

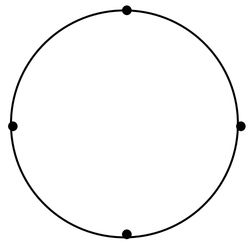
试求$g(3)$，$g(4)$，$g(5)$的值，并证明$g(6)>g(5)$；

（3）求$g(n)$。（提示：任意平面多边形可用不相交的对角线划分为若干个三角形，这一过程称为三角剖分（triangulation），三角剖分后得到的平面图的色数必为 3。）

二、考虑图上的**警察与小偷游戏**（cop and robber game）。给定连通无向图$G=(V,E)$。游戏开始前，每位警察先占据图中一个顶点，小偷再选择图中一个顶点。随后警察和小偷轮流行动，在每一轮中，所有警察先行动，小偷后行动。每次行动可沿图上一条边从一个顶点到达另一个顶点，也可原地不动。



W_4



C_4

警察和小偷都了解图的形状并能在行动前看到其他人的位置。若在某次行动后，某个警察和小偷位于同一顶点，则称警察抓获小偷。对某个图G，不论警察和小偷的初始位置为何以及小偷如何行动，警察总能采取相应的行动方案在有限轮后抓获小偷所需的最少警察数称为图G的警察数（cop-number），记为$c(G)$。

（1）分别求轮W_4和圈C_4的警察数；

（2）证明：若$c(G)=1$，必存在顶点u,w，使得$N(u)\cup\{u\}\subseteq N(w)\cup\{w\}$，这里$N(v)$是图中与$v$有边相连的顶点集；

（3）试通过建立该问题与图论中某问题的联系给出$c(G)$的一个上界；

（4）设在G中没有长度为 3 或 4 的圈，G的最小度$\delta(G)=d$。证明：（ⅰ）若警察数不超过$d-1$，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷；（ⅱ）若警察数不超过$d-1$，小偷至第$t-1$轮警察行动后仍未被抓获，则他总可以采取某种行动，使得在第t轮仍未被抓获；（ⅲ）$c(G)\ge\delta(G)$。