Section 2.1

7

a) Yes   b) No c) No

12

a) true   b) true   c) false   d) true   e) true f) true   g) false

27

对于“if”部分，已知$A \subseteq B$，我们要证明$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$，即如果$C \subseteq A$，那么$C \subseteq B$。但这可以直接由练习19得到。对于“只有当”部分，已知$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$，我们要证明$A \subseteq B$。假设$\{a\} \subseteq A$。那么$a \subseteq A$，所以$\{a\} \in \mathcal{P}(A)$。由于$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$，可得$\{a\} \in \mathcal{P}(B)$，这意味着$\{a\} \subseteq B$。但这就推出$a \in B$，正如所愿

35

a) $\{(0,0),(0,1),(0,3),(1,0),(1,1),(1,3),(3,0),(3,1),(3,3)\}$

b) $\{(1,1),(1,2),(1,a),(1,b),(2,1),(2,2),(2,a),(2,b),(a,1),(a,2),(a,a),(a,b),(b,1),(b,2),(b,a),(b,b)\}$

39

m^n

42

$(A*B)*(C*D)$和$A*(B*C)*D$之间的唯一区别是括号，所以在实际应用中，可以认为它们本质上是相同的。根据定义8，$(A*B)*(C*D)$的元素由有序对(x,y)组成，其中$x \in A*B$，$y \in C*D$，所以$(A*B)*(C*D)$的典型元素看起来像$((a,b),(c,d))$。根据定义9，$A*(B*C)*D$的元素由三元组(a,x,d)组成，其中$a \in A$，$d \in D, x \in B*C$，所以$A*(B*C)*D$的典型元素看起来像$(a,(b,c),d)$。结构$((a,b),(c,d))$和$(a,(b,c),d)$是不同的。更准确地说，在$(A*B)*(C*D)$和$A*(B*C)*D)$之间存在一个自然的一一对应关系，由$((a,b),(c,d)) \longleftrightarrow (a,(b,c),d)$给出

Section 2.2

20

a) 假设$x \in A \cup B$。那么$x \in A$或$x \in B$。无论哪种情况，显然$x \in A \cup B \cup C$。这就证明了所需的包含关系。

b) 假设$x \in A \cap B \cap C$。那么x同时属于这三个集合。特别地，它既属于A又属于B，因此属于$A \cap B$，正如所愿。

c) 假设$x \in (A-B)-C$。那么$x \in A-B$且$x \notin C$。由于$x \in A-B$，我们知道$x \in A$(我们也知道$x \notin B$,但是这里不会用到)。由于我们已经证明了$x \in A$但是 $x \notin C$, 我们就证明了 $x \in A-C$.

d) 为了证明左边给出的集合是空集，只需假设 x是该集合中的某个元素并导出一个矛盾，从而证明不存在这样的 x. 所以假设 $x \in (A-C) \cap (C-B)$. 那么 $x \in A-C$且 $x \in C-B$. 这第一个语句意味着按定义有 $x \notin C$, 而第二个意味着有 $x \in C$. 这是不可能的，所以我们的反证法就完成了。

e) 为了建立等式，我们需要证明两个方向的包含关系. 为了证明 $(B-A) \cup (C-A) \subseteq (B \cup C)-A$, 假设 $x \in (B-A) \cup (C-A)$. 那么要么 $x \in (B-A)$ 要么 $x \in (C-A)$. 不失一般性地, 假设前者成立(后者情况下的证明完全相同.) 那么有 $x \in B$且有$x \notin A$. 从第一个断言中, 我们可以推出有 $x \in B \cup C$. 因此我们可以得出结论有 $x \in (B \cup C)-A$, 正如所愿. 反过来, 即要显示 $(B \cup C)-A \subseteq (B-A) \cup (C-A)$, 假设 $x \in (B \cup C)-A$. 这意味着有 $x\ in (B \Cup C)$ 且有$x \notin A$. 第一个断言告诉我们要么 x in B 要么 $x \in C$. 因此要么$x \in B-A$ 要么 $x \in C-A$. 无论哪种情况, 都有$x \in (B-A) \cup (C-A)$.

37

a) 设$(x,y) \in A \times (B-C)$，这意味着$x \in A$且y是B中的元素但不是C中的元素。因此，$(x,y) \in A \times B$且 $(x,y) \notin A \times C$, 所以根据集合差的定义，$(x,y) \in (A \times B)-(A \times C)$. 反过来，设$(x,y) \in (A \times B)-(A \times C)$. 那么 $(x,y) \in A \times B$且 $(x,y) \notin A \times C$. 因此，$x \in A$且 $y \in B$, 而且由于$x \in A$, 必须有 $y \notin C$. 这意味着 $y \in B-C$, 所以确实有 $(x,y) \in A \times (B-C)$.

b) 注意右边的补集必须是相对于$U \times U$. 这不是真的。例如，设 $U=a,b$, $A=a$, $B=b$, 和 $C=\emptyset$. 那么左边是 (b,a), 而右边是 $(a,a),(b,a),(b,b)$.

47

Yes

56

a) 随着i增加，集合变得更小：$\cdots \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$. 所有的集合都是正整数集$Z^+$的子集。因此，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = Z^+$. 每个正整数都被至少一个集合排除（事实上是无穷多个），所以$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

b) 所有的集合都是自然数集N（非负整数）的子集。数字0在每个集合中，每个正整数只在一个集合中，所以$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = N$ 和 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = 0$.

c) 随着i增加，集合变得更大：$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \cdots$. 所有的集合都是正实数集$R^+$的子集，每个正实数最终都被包含进来，所以$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = R^+$. 因为 A_1 是其他所有集合的子集，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = (0;1)$ （所有介于0和1之间（不包括）的实数）。

d) 这次，像(a)部分一样，随着i增加，集合变得更小：$\cdots \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$. 因为 A_1 包含了其他所有的集合，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (1;\infty)$ （所有大于 1 的实数）。随着 i增加，每个数字最终都被排除了，所以$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. 注意 ∞ 不是一个实数，所以我们不能写 $\bigcap_{i=1}^{\infty} Ai = \infty$.

71

a) $0, 1$　b) $1 / 3, 2 / 3$　c) $1, 0$　d)$1 / 6, 5 / 6$

Section 2.3

6

a) 定义域是$Z^+ \times Z+$，值域是$Z+$.

b) 由于一个正整数的最大十进制位不能为0，所以定义域是Z^+，值域是 $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$.

c) 定义域是所有二进制串的集合。1的个数减去0的个数可以是任何正数或负数或0，所以值域是Z.

d) 定义域给定为Z^+. 显然值域也是Z^+.

e) 定义域是二进制串的集合。值域是由1组成的字符串的集合，即$\{\epsilon; 1; 11; 111; \cdots\}$，其中 ϵ 是空字符串（不包含任何符号）

14

a) 是满射的，因为对于每一个整数n，都有$f(0; -n) = n$.

b) 不是满射的，因为例如2不在值域中。要看出这一点，如果$m2 - n2 = (m - n)(m + n) = 2$，那么$m$和$n$必须具有相同的奇偶性（都是偶数或都是奇数）。在任何一种情况下，$m - n$和$m + n$都 是偶数，所以这个表达式可以被4整除，因此不能等于2。

c) 是满射的，因为对于每一个整数n，都有$f(0; n - 1) = n$.

d)是满射的。要得到负值，我们令$m = 0$；要得到非负值，我们令$n = 0$.

e)不是满射的，原因与(b)部分相同。事实上，在这里值域显然是(b)部分值域的子集

31

a) $f(S) = \{0, 1, 3\}$　b) $f(S) = \{0, 1, 3, 5, 8\}$
c) $f(S) = \{0, 8, 16, 40\}$　d) $f(S) = \{1, 12, 33, 65\}$

40

构造复合函数，我们有$(f \circ g)(x) = acx + ad + b$和$(g \circ f)(x) = cax + cb + d$. 这些函数相等当且仅当 $ad + b = cb + d$. 换句话说，对于所有满足$ad + b = cb + d$的四元组(a, b, c, d)，相等性成立

72

要证明对于所有$z \in Z$和所有$x \in X$，都有 $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1})(z) = z$和$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g)(x) = x$. 对于第一个，我们有 $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1})(z) = (f \circ g)((g^{-1} \circ f^{-1})(z)) = (f \circ g)(g{-}1(f{-}1(z))) = f(g(g{-}1(f{-}1(z)))) = f(f^{-1}(z)) = z$: 第二个相等式也类似

75

a) 真；因为$\lfloor x \rfloor$已经是一个整数，所以$\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor$

b) 假；$x = \frac{1}{2}$是一个反例

c) 真；如果x或y是一个整数，那么根据表1中的性质4b，差值为0。如果 x和y都不是整数，那么$x = n + \epsilon$和$y = m + \delta$，其中n和m是整数，ϵ和δ是小于1的正实数。那么$m + n < x + y < m + n + 2$, 所以 $\lceil x + y \rceil$要么是$m + n + 1$, 要么是$m + n + 2$. 因此，给定的 表达式要么是$(n + 1) + (m + 1) - (m + n + 1) = 1$, 要么是 $(n + 1) + (m + 1) - (m + n + 2) = 0$

d) 假； $x = \frac{1}{4}$ 和 $y = 3$ 是一个反例

e) 假； $x = \frac{1}{2}$ 是 一个反例

Section 2.4

10

a) 对于每个情况，我们只需要使用最初几个的初始条件，然后使用递推关系式插入n = 0; 1; 2; 3; 4; 5。

$a_0 = -1, a_1 = -2a_0 = 2, a_2 = -2a_1 = -4, a_3 = -2a_2 = 8, a_4 = -2a_3 = -16, a_5 = -2a_4 = 32$

b) 对于每个情况，我们只需要使用最初几个的初始条件，然后使用递推关系式插入n = 0; 1; 2; 3; 4; 5。

$a_0 = 2, a_1 = -1, a_2 = a_1 - a_0 = -3, a_3 = a_2 - a_1 = -2, a_4 = a_3 - a_2 = 1, a_5 = a_4 - a_3 = 3$

c) 对于每个情况，我们只需要使用最初几个的初始条件，然后使用递推关系式插入n = 0; 1; 2; 3; 4; 5。

$a_0 = 1, a_1 = 3a_2^0 = 3, a_2 = 3a_2^1 = 27 = 3^3, a_3 = 3a_2^2 = 2187 = 3^7, a_4 = 3a_2^3 = 14348907 = 3^{15}, a_5 = 3a_2^4 = 617673396283947 = 3^{31}$

d) 对于每个情况，我们只需要使用最初几个的初始条件，然后使用递推关系式插入n = 0; 1; 2; 3; 4; 5。

$a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 2a_1 + a_2^0 = 1, a_3 = 3a_2 + a_2^1 = 3, a_4 = 4a_3 + a_2^2 = 13, a_5 = 5a_4 + a_2^3 = 74$

e) 对于每个情况，我们只需要使用最初几个的初始条件，然后使用递推关系式插入n = 0; 1; 2; 3; 4; 5。

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = a_2 - a_1 + a_0 = 2, a_4 = a_3 - a_2 + a_1 = 1, a_5 = a_4 - a_3 + a_2 = 1$

25

a) 一个1和一个0，接着是两个1和两个0，接着是三个1和三个0，依此类推；1，1，1

b) 正整数按照递增顺序列出，每个偶数正整数列出两次；9，10，10

c) 奇数位置的项是2的连续幂次；偶数位置的项都是0；32，0，64

d) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$; 384, 768, 1536

e) $a_n = 15 - 7(n-1) = 22 - 7n$; −34, −41, −48

f) $a_n = (n^2 + n + 4)/2$; 57, 68,80

g) $a_n = 2n^3$; 1024, 1458,2000

h) $a_n = n! + 1$;362881, 3628801,39916801

33

a) 21

b) 78

c) 18

d) 18

41

将 $k^2(k-3)$ 展开：

$k^2(k-3) = k^3 - 3k^2$

然后，我们可以将原式变形为：

$$\sum_{k=10}^{20} k^2(k-3) = \sum_{k=10}^{20} (k^3 - 3k^2) \qquad = \sum_{k=10}^{20} k^3 - \sum_{k=10}^{20} 3k^2$$

现在，我们可以分别计算两个求和式。首先计算 $\sum_{k=10}^{20} k^3$：

$\sum_{k=10}^{20} k^3 = 10^3 + 11^3 + \cdots + 20^3$

这是一个等差数列求和，可以用求和公式来计算：

$\sum_{k=10}^{20} k^3 = \frac{(10+20)(20-10+1)}{2}^2 = 6050$

接下来，计算 $\sum_{k=10}^{20} 3k^2$：

$\sum_{k=10}^{20} 3k^2 = 3\sum_{k=10}^{20} k^2$

我们可以使用平方和公式来计算 $\sum_{k=10}^{20} k^2$：

$\sum_{k=10}^{20} k^2 = \frac{(20)(20+1)(2\cdot20+1)-(9)(9+1)(2\cdot9+1)}{6} = 2870$

因此，

$$\sum_{k=10}^{20} k^2(k-3) = \sum_{k=10}^{20} k^3 - \sum_{k=10}^{20} 3k^2 \qquad = 6050 - 3\cdot 2870 \ = 34320$$

因此，$\sum_{k=10}^{20} k^2(k-3) = 34320$