一、

1. 对于一个n条边的多边形，希望找到最小的点集E，使得$\forall P$， P在多边形内，$\exists Q \in E$，使得线段PQ不与多边形任意一条边相交。

2. 首先我们证明，$g(n) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

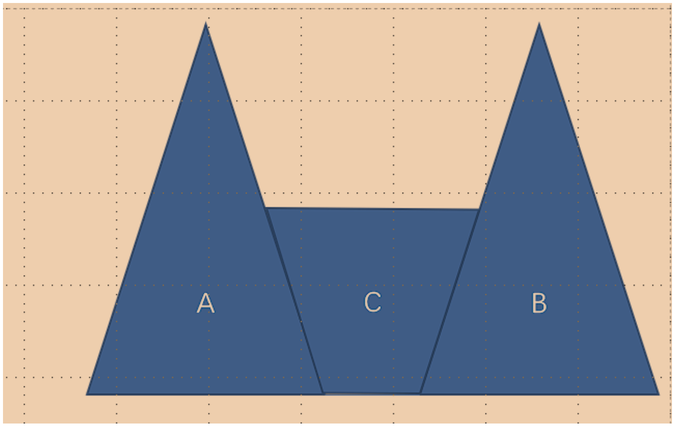
   由于三角剖分后得到的平面图的色数必为 3，故每个三角形的三个顶点颜色均不同。

   不失一般性，我们假设包含的点数最少的颜色为蓝色，则其中的点数至多为$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$。在每一个蓝色点处放置一个监控，则每个三角形都能被观测到，即整个多边形都能被观测到。因此，$g(n) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

   显然，$g(n) > 1$，

   所以我们有，$g(3) = 1, g(4) = 1, g(5) = 1$

   下面证明，$g(6) > 1$

   如上图所示6边形，其包含ABC三部分。不难发现，对于三角形A、B，他们能被全部观测当且仅当在三角形内或三角形上有监控。因此，上图至少需要两个监控。即$g(6) > 1$

3. 由2可知$g(n) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$，$g(3) = g(4) = g(5) = 1$

   下面证明，$g(n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

   - $3 \leq n \leq 5$时，成立
   - 对于任意多边形，按照上图中BC同样的方式加入三条边，则一定会使该多边形所需的监控数多一个。即$g(n) \geq g(n-3) + 1$

   由数学归纳法可知，$g(n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$成立

   综上所述，$g(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

二、

1.
   - 对于轮W_4，警察只需站在中心的点上，则无论小偷在哪，警察都能在第一回合将小偷抓捕，因此$c(W_4)=1$
   - 对于圈C_4，如果只有一个警察，小偷可以移动到离警察两步远的位置，并在警察每次移动后始终保持相同的距离。如果有两个警察，其中一个可以停留在一个顶点，另一个警察一定能将小偷抓捕。因此$c(C_4)=2$

2. 设警察所在的点为p，我们定义一个点q被警察控制（或直接称为支配），指$q\in N(p)\cup\{p\}$，即如果此时为警察的回合，在该点的小偷会被警察抓捕。

   假设$\forall u,w$，都有$N(u)\cup\{u\}\subsetneq N(w)\cup\{w\}$，即$w$不能控制所有$u$能够前往的点。

   游戏开始前，由条件可知，一定存在一个警察无法控制的点，小偷选择该点即可。

   游戏开始后，对于小偷行动前的每一个时刻，设此时小偷位于u，警察位于w，小偷只需要前往不被警察控制的点就可以不被抓捕。

   因此此时一定有$c(G)\neq 1$。

   即若$c(G)=1$，必存在顶点u,w，使得$N(u)\cup\{u\}\subseteq N(w)\cup\{w\}$

3. 不难发现，只要警察占据了图的最小支配集，则小偷无论在哪都会被警察抓捕。因此$c(G)\le$最小支配集的点数

4.
   1. 小偷在第一轮必定被抓住当且仅当警察占据了图的支配集。

      下面证明，图的最小支配集的点数一定大于等于 d

      w是支配集外任意一点，$N(w)=\{w_1,w_2,\dots,w_n\},n\ge d$。则$w_i$要么为支配集中的点，要么被支配集中某个点支配。我们将在支配集中的w_i直接记为v_i，即$N(w)=\{v_1,v_2,\dots,v_k,w_{k+1},w_{k+2},\dots,w_n\}$

      - $w_j(j>k)$不能被$v_1,v_2,\dots,v_k$中的任何点支配，否则将形成长度为3的圈
      - 不同的$w_j(j>k)$不能被同一个点支配，否则将形成长度为4的圈

      因此，$N(w)$要被支配至少需要n个不同的点，即支配集的点数至少为$n\ge d$

      即最小支配集的点数一定大于等于d

      因此，若警察数不超过$d-1$，则不论警察选择哪些顶点，小偷总可以选择某个顶点使得警察无法在第一轮抓获小偷

2. 若在$t-1$轮警察行动后小偷所在地为x，$N(x)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\},n\geq d$

   由上一问的分析可知，$N(x)$要被支配至少需要n个不同的点，此时仅有不超过$d-1$个警察，因此$N(x)$中一定存在一个不被支配的点。

   则小偷只需要前往这个不被任何警察支配的点就可在第t轮逃脱抓捕。

3. 由数学归纳法可知，如果警察数不超过$d-1$，则小偷永远可以逃脱抓捕。因此$c(G)\geq d=\delta(G)$