Assignment-3

谢俊

3210103939

2022.10.11

1 Question I

1.1

$P = \alpha + \beta + \gamma^2 * (\alpha + \beta) + \gamma^4 * (\alpha + \beta) + \cdots$
$= \lim_{n\to\infty} (\alpha + \beta) * \frac{1-\gamma^{2n}}{1-\gamma^2}$
$= \frac{\alpha+\beta}{1-\gamma^2}$
又因为 $\alpha + \beta + \gamma = 1$
所以 $P\{A1\} = \frac{1}{1+\gamma}$

1.2

$a = \beta\gamma + \frac{\beta^2(\alpha+\beta)}{1-\gamma^2}$
$b = \gamma(1 - \frac{\alpha+\beta}{1-\gamma^2})$
$P\{A2\} = \alpha + a + b = \frac{1+\beta^2}{1+\gamma} - (1-\gamma)\beta$

1.3

由 1.2, 可知 $P\{A2\} = \frac{1+\beta^2}{1+\gamma} - (1-\gamma)\beta$
易知 $0.5 < P\{A1\}, P\{A2\} < 1$
$P\{A2\} - P\{A1\} = \beta(\frac{\beta - 1 + \gamma^2}{1+\gamma})$
其正负取决于 $\beta - 1 + \gamma^2$, 因为 $\beta + \gamma \leqslant 1$
所以 $\beta - 1 + \gamma^2 \leqslant 0$
也就是 $0.5 < P\{A2\} \leqslant P\{A1\}$
所以第二种更公平.

2 Question II

2.1

由题 $X_n = \{Y_n, 1\}$

其中 1 表示全为阴性只需检测一次.

所以 $E(X_n)=1+(1-(1-p)^n)E(Y_n)$

2.2

2.2.1 n 为偶数

显然在第一次检测后可以分为两个 $\dfrac{n}{2}$ 的人群, 记为 G1,G2.

先对 G1 进行检测, 若为阳性, 那么对于 G1 要进行一次 $E(Y_{\frac{n}{2}})-1$(其中-1 表示 G1 的第一次检测已经在此处做过), 而在这种情况下,G2 不一定有阳性, 所以是一个 $E(X_{\frac{n}{2}})$.

而若 G1 为阴性, 只需要再检测 G2 的 $E(Y_{\frac{n}{2}})$, 总共为 $2+E(Y_{\frac{n}{2}})$

对于第一种情况, 由题, 概率为 $\dfrac{1-(1-p)^{\frac{n}{2}}}{1-(1-p)^n}=\dfrac{1}{1+(1-p)^{\frac{n}{2}}}$

$E(Y_n)=1+\dfrac{1}{1-(1-p)^n}(E(Y_{\frac{n}{2}})+E(X_{\frac{n}{2}}))+(1-\dfrac{1}{1-(1-p)^n})(1+E(Y_{\frac{n}{2}}))$

$E(Y_n)=\dfrac{2+(1-p)^{\frac{n}{2}}+2E(Y_{\frac{n}{2}})}{1+(1-p)^{\frac{n}{2}}}$

2.2.2 n 为奇数

显然在第一次检测后可以分为两个人群,$\dfrac{n-1}{2}$ 记为 G1,$\dfrac{n+1}{2}$ 记为 G2.

分析与上述相同, 只是有些地方下标小改.

假设 G1 为阴性, 概率为 $\dfrac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}$.

所以 $E(Y_n)=1+\dfrac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}(E(X_{\frac{n+1}{2}})+E(Y_{\frac{n-1}{2}}))+(1-\dfrac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n})E(Y_{\frac{n+1}{2}})$

$E(Y_n)=1+\dfrac{1-(1-p)^{\frac{n-1}{2}}}{1-(1-p)^n}(E(Y_{\frac{n-1}{2}})+1)+\dfrac{1-(1-p)^{\frac{n+1}{2}}}{1-(1-p)^n}E(Y_{\frac{n+1}{2}})$