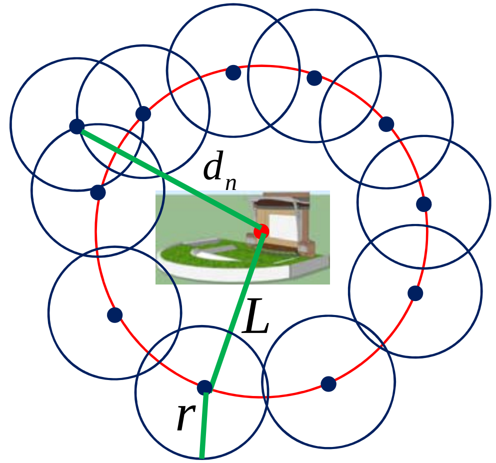
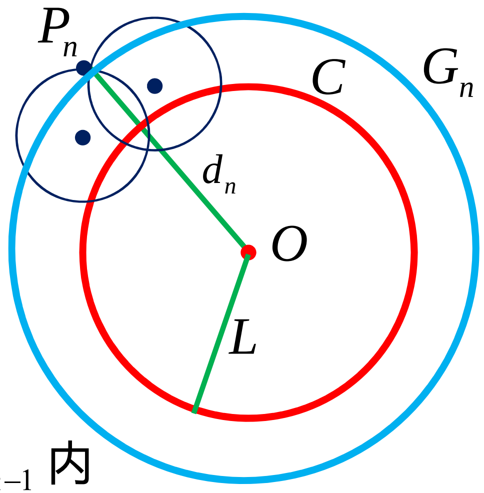
安全观演

- 安全观演
  - 广场某处正在进行一场露天表演，若干人先后到达附近并选择一个地点观看表演
    - 观众选择地点的要求
      - 与舞台中心的距离不小于 L
      - 与之前到达的任一观众的距离不小于 r
      - 在满足上述要求的情况下，观众选择与舞台中心距离最近的某个点
    - 观众选择地点的方式
      - 有引导：观众在工作人员引导下到达满足要求的地点
      - 无引导：观众自行选择满足要求的地点
  - 观演距离
    - 求第 n 个到达的观众与舞台中心的距离 d_n 的估计



观演距离

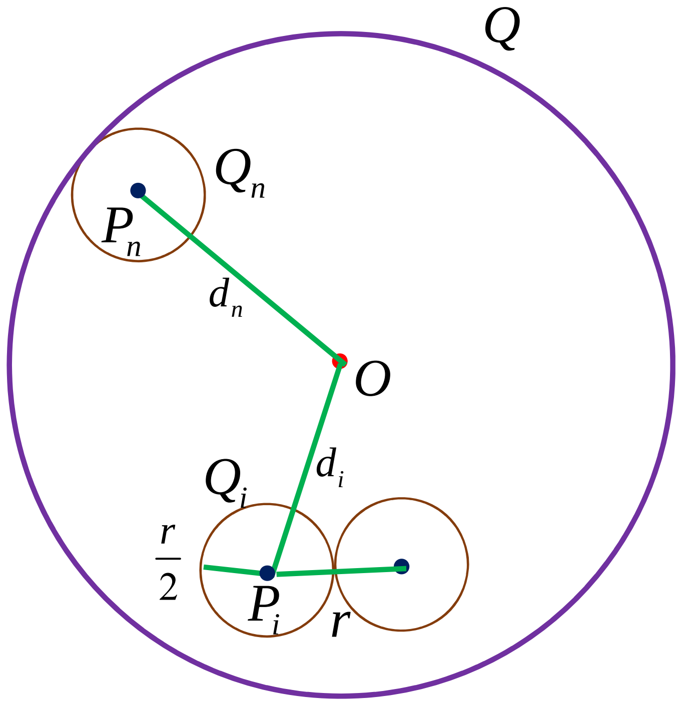
- 观演距离
  - 记舞台中心为 O。以 O 为圆心，半径为 R 的圆为 C
  - 记第 i 个到达的观众为 A_i，所选位置为 P_i。以 P_i 为圆心，r 为半径的圆为 C_i
    - $d_i = |OP_i| \geq L$
    - P_i 不在圆 C 内，也不在圆 $C_1, C_2, \cdots, C_{i-1}$ 内
    - $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$
      - 若 $d_i > d_{i+1}$，则 A_i 到达时可选择 P_{i+1}，矛盾
- （无引导）观演距离的上界
  - 观众 A_n 无法选到与点 O 距离小于 d_n 的点
    - 以 O 为圆心，半径为 d_n 的圆内的所有点均在圆 C 或 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 内
    - $\pi \cdot d_n^2 \leq (n-1) \cdot \pi r^2 + \pi L^2 \Rightarrow d_n \leq \sqrt{(n-1) r^2 + L^2}$



观演距离

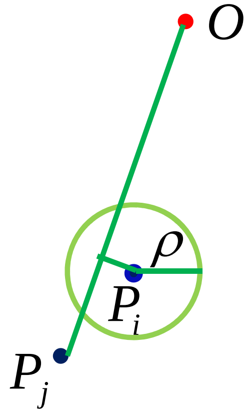
- 观演距离的下界
  - 记以 P_i 为圆心，$\frac{r}{2}$ 为半径的圆记为 Q_i
    - 圆 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 两两互不相交
    - 圆 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ 均在以 O 为圆心，半径为 $d_n + \frac{r}{2}$ 的圆内
    - $\pi\left(d_n + \frac{r}{2}\right)^2 \geq n \cdot \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow d_n \geq \left(\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2}\right) r$

$L = 10, r = 1, n = 1000 \qquad 15.31 \leq d_n \leq 33.15$



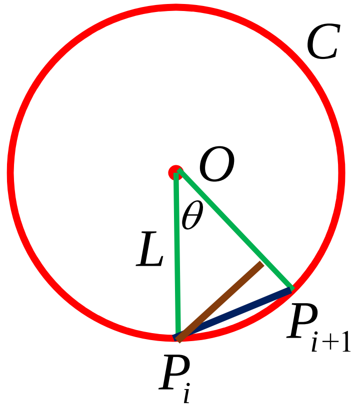
安全观演

- 安全观演
  - 无遮视野
    - 若以 P_i 为圆心，ρ 为半径的圆周与线段 OP_j 相交，则 A_j 被 A_i 遮挡
      - 若 A_j 不被 A_i 遮挡，点 P_i 到直线 OP_j 的距离大于 ρ



- （有引导）无遮视野人数的下界
  - n 名观众位于 C 的内接正 n 边形顶点
    - 相邻两顶点 P_i 与 P_{i+1} 夹角 $\theta = \angle P_i O P_{i+1} = \dfrac{2\pi}{n}$
    - $\left|P_i P_{i+1}\right| = 2L\sin\dfrac{\theta}{2} = 2L\sin\dfrac{\pi}{n}$
    - P_i 到直线 OP_j 距离为 $L\sin\theta = L\sin\dfrac{2\pi}{n}$

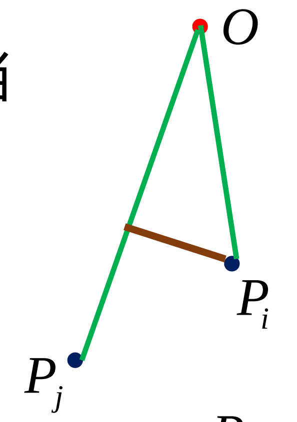
$$\Rightarrow \begin{cases} 2L\sin\dfrac{\pi}{n} \geq r \\ L\sin\dfrac{2\pi}{n} \geq \rho \end{cases}$$

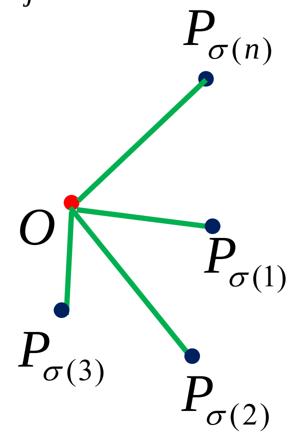


$$L = 10, n = 60 \qquad 2L\sin\frac{\pi}{n} \approx 1.04672, L\sin\frac{2\pi}{n} \approx 1.04528$$

无遮视野

- 存在遮挡的充分条件
  - 若 $d_i \le d_j$，$\angle P_iOP_j$ 为锐角且 $\sin\angle P_iOP_j \le \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_j}\right)$，则 A_j 被 A_i 遮挡
    - 过 P_i 垂直于 OP_j 的直线垂足位于线段 OP_j 上
    - 点 P_i 到直线 OP_j 的距离为 $d_i \sin\angle P_iOP_j \le d_i \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_j}\right) \le \rho$
- 无遮视野人数的上界
  - 若 n 名观众未发生遮挡
    - n 条线段在点 C 将周角分为 n 个角 $\angle P_{\sigma(i)}OP_{\sigma(i+1)}$，这里 $\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，并记 $\sigma(n+1)=\sigma(1)$
    - $2\pi = \sum_{i=1}^{n} \angle P_{\sigma(i)}OP_{\sigma(i+1)}$
    - $\sin\angle P_{\sigma(i)}OP_{\sigma(i+1)} > \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{d_{\sigma(i)}}+\frac{1}{d_{\sigma(i+1)}}\right)$





无遮视野

- 无遮视野人数的上界
  - $2\pi = \sum_{i=1}^{n} \angle P_{\sigma(i)} O P_{\sigma(i+1)} \geq \sum_{i=1}^{n} \sin \angle P_{\sigma(i)} O P_{\sigma(i+1)} \geq \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{d_{\sigma(i)}} + \frac{1}{d_{\sigma(i+1)}} \right)$

$$= \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_{\sigma(i)}} = \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(i-1)r^2 + L^2}}$$

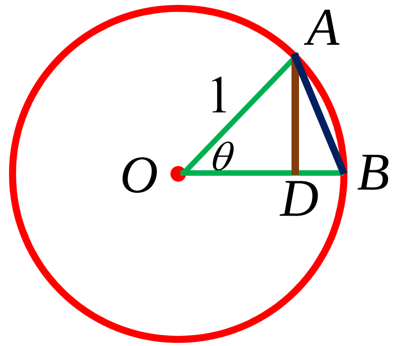
$$\boxed{d_n \leq \sqrt{(n-1)r^2 + L^2}}$$

$$\geq \rho \sum_{i=1}^{n} \int_{i}^{i+1} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)r^2 + L^2}} = \rho \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{(x-1)r^2 + L^2}}$$

$$= \frac{2\rho}{r^2} \sqrt{(x-1)r^2 + L^2} \Big|_{1}^{n+1} = \frac{2\rho}{r^2} \left(\sqrt{nr^2 + L^2} - L \right)$$

$$n \leq \left(\frac{\pi r}{\rho} \right)^2 + \frac{2\pi L}{\rho} \qquad n \leq 732$$

$$L = 10, r = 1, \rho = \frac{1}{6} \qquad n \leq 731$$



$$S_{\Delta AOB} \leq S_{扇形AOB}$$

$$\frac{1}{2} \sin\theta \leq \pi \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\boxed{若\ \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)，\sin\theta \leq \theta}$$