浙江大学 2021 – 2022 学年 秋学期

复变函数与积分变换 期末考试 A 卷答案及评分参考

---

1. (1) 写出 $(\sqrt{3}+i)^i$ 的实部和虚部.

   解. $(\sqrt{3}+i)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,(\sqrt{3}+i)}$〈3 分〉 $= e^{i(\ln 2 \overset{+\frac{\pi}{6}}{+} 2k\pi i)}, k \in \mathbb{Z}$〈3 分〉 $= e^{2k\pi\,{}^{-\frac{\pi}{6}}}(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2))$〈2 分〉. 所以 $\mathrm{Re}\,(\sqrt{3}+i)^i = e^{2k\pi\,{}^{-\frac{\pi}{6}}}\cos(\ln 2), \mathrm{Im}\,(\sqrt{3}+i)^i = e^{2k\pi\,{}^{-\frac{\pi}{6}}}\sin(\ln 2), k \in \mathbb{Z}$.

   (2) 求方程 $\cos^3 z = 3\cos z + 2$ 的复数解.

   解. 令 $t = \cos z$, 原方程为 $t^3 = 3t + 2$, 有解 $t = -1, t = 2$〈2 分〉. 由 $\cos z = -1$ 有 $z = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.〈2 分〉. 由 $\cos z = 2$ 有 $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2$, 解得 $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}, z = 2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3}), k \in \mathbb{Z}$.〈4 分〉

   (3) 设 $z = x + iy$. 求实数 a 的值, 使得函数 $f(z) = x^2 + y^2 + ax + 2xyi$ 在复平面中有可导的点, 且在可导点处求其导数.

   解. 函数 $f(z)$ 的实部 $u = x^2 + y^2 + ax$ 和虚部 $v = 2xy$ 均在复平面任意点处可微, 且 $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+a & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$〈3 分〉, 由柯西-黎曼条件, 需 $2x + a = 2x, 2y = -2y$. 即 $a = 0, x \in \mathbb{R}, y = 0$〈3 分〉. 所以当 $a = 0$ 时, 函数 $f(z)$ 在实轴上每一点处可导. 导数 $f'(x) = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})\big|_x = 2x$.〈2 分〉

2. 计算以下积分, 这里的圆为逆时针方向一周.

   (1) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}\sin(z-1)}{z^2-1}\mathrm{d}z.$

   解. 被积函数 $f(z)$ 在 $|z| = 2$ 内有奇点 $z = 0, -1, 1$, 分别为本性奇点, 单极点, 可去奇点. 由留数定理, 所求积分 $I = 2\pi i(\mathrm{Res}\,(f(z),0) + \mathrm{Res}\,(f(z),-1) + \mathrm{Res}\,(f(z),1))$〈2 分〉. 因为 $f(z)$ 在 $0 < |z| < 1$ 的罗朗展开为 3 个级数乘积

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\sin 1}{(2n)!}z^{2n} - \frac{(-1)^n\cos 1}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}.$$

   其中 $\dfrac{1}{z}$ 的系数, 即

$$\mathrm{Res}\,(f(z),0) = \sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2(k+n+1)(2k+1)\sin 1 - \cos 1)}{(2k+1)!(2(k+n+1))!}.〈2 分〉$$

又 $\operatorname{Res}(f(z),-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)\dfrac{e^{\frac{1}{z}}\sin(z-1)}{z^2-1} = \dfrac{\sin 2}{2e}$〈2分〉以及 $\operatorname{Res}(f(z),1) = 0$〈2分〉, 所以

$$I = 2\pi i\left(\frac{\sin 2}{2e} + \sum_{k,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2(k+n+1)(2k+1)\sin 1 - \cos 1)}{(2k+1)!(2(k+n+1))!}\right).$$

(2) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\left(\frac{1}{\sin z} + \frac{1}{(z-2)^2}\right)\mathrm{d}z.$

解. 所求积分 $I = \displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{\sin z}\mathrm{d}z + \oint_{|z|=3}\frac{1}{(z-2)^2}\mathrm{d}z$. 前者 $I_1 = 2\pi i\operatorname{Res}(\dfrac{1}{\sin z},0) = 2\pi i\dfrac{1}{(\sin z)'}\Big|_{z=0} = 2\pi i.$〈4分〉, 后者被积函数 $\dfrac{1}{(z-2)^2}$ 在 $|z|=3$ 上有原函数 $\dfrac{1}{2-z}$, 因此为 $I_2 = 0$〈4分〉. 所以 $I = 2\pi i$.

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta.$

解. 被积函数 $\dfrac{1-\cos^2\theta}{5-4\cos\theta} = \dfrac{4-5\cos\theta+5\cos\theta-4\cos^2\theta}{4(5-4\cos\theta)} = \dfrac{1}{4}\cos\theta + \dfrac{4-5\cos\theta}{4(5-4\cos\theta)}$.
由于 $\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta = 0$, 所求定积分化为复积分 $I = \dfrac{1}{4}\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{4-5\frac{z+z^{-1}}{2}}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}}\frac{1}{iz}\mathrm{d}z$. 整理得

$$I = \frac{1}{8i}\oint_{|z|=1}\frac{8z-5(z^2+1)}{z(5z-2(z^2+1))}\mathrm{d}z.$$

在单位圆周内, 被积函数 $f(z)$ 仅有单极点 $z=0$ 和 $z=\frac{1}{2}$. 故 $I = \frac{1}{8i}2\pi i(\operatorname{Res}(f(z),0) + \operatorname{Res}(f(z),\frac{1}{2}))$. 其中 $\operatorname{Res}(f(z),0) = z\dfrac{8z-5(z^2+1)}{z(5z-2(z^2+1))}\Big|_{z=0} = \frac{5}{2}$〈4分〉,
$\operatorname{Res}(f(z),\frac{1}{2}) = \dfrac{8z-5(z^2+1)}{z(5z-2(z^2+1))'}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$〈4分〉. 所以所求积分为 $I = \dfrac{\pi}{4}$.

3. (1) 给出函数 $f(z) = z^2e^z$ 在 $z=1$ 处的泰勒级数并求 $f^{(4)}(1)$.

解. $f(z) = e(z-1+1)^2e^{z-1}$〈3分〉$= e((z-1)^2+2(z-1)+1)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^n$

$= e + 3e(z-1) + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{e}{n!} + \frac{2e}{(n-1)!} + \frac{e}{(n-2)!}\right)(z-1)^n$〈3分〉.

$f^{(4)}(1) = 4!\left(\dfrac{e}{4!} + \dfrac{2e}{(4-1)!} + \dfrac{e}{(4-2)!}\right) = 21e.$〈2分〉

(2) 给出函数 $f(z) = \dfrac{2z}{(1-z^2)^2}$ 在 $0<|z+1|<2$ 上的罗朗级数.

解. 由 $\dfrac{1}{1-z^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z+1}\dfrac{1}{1-\frac{z+1}{2}}$〈3分〉$= \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z+1}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^{n+1}}, 0 < |z+1| < 2$ 得 $f(z) = \left(\dfrac{1}{1-z^2}\right)'$〈3分〉$= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{2^{n+1}}(z+1)^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+3}}(z+1)^n$〈2分〉.

4. (1) 设区域 $D=\{z=x+iy \mid x<0, 0<y<\pi\}$, 区域 $G=\{w \mid \operatorname{Im} w>0\}$ 为上半平面. 给出一个从 D 到 G 的保角映射.

解. 首先使用指数函数 $\zeta=e^z$ 将区域 D 保角地映射为上半单位圆盘 $|\zeta|<1, \operatorname{Im}\zeta>0$⟨ 3 分⟩. 接着用分式线性映射 $\gamma=\dfrac{1+\zeta}{1-\zeta}$ 将上半单位圆盘映为第一象限 $\operatorname{Re}\gamma>0, \operatorname{Im}\gamma>0$⟨ 3 分⟩. 最后用幂函数 $w=\gamma^2$ 将第一象限映射为上半平面. 所以一个从 D 到 G 的保角映射是 $w=\left(\dfrac{1+e^z}{1-e^z}\right)^2$⟨ 2 分⟩

(2) 求一个分式线性映射 w 把上半平面 $\operatorname{Im} z>0$ 映为自身, 且 $w(i)=i, \arg w'(i)=\dfrac{\pi}{3}$.

解. $z-$ 平面和 $w-$ 平面上的分式线性映射 $\dfrac{z-i}{z+i}$ 和 $\dfrac{w-i}{w+i}$ 都把上半平面映射为单位圆盘且把 i 映为 0⟨ 4 分⟩, 由复合求导法则 $\dfrac{w-i}{w+i}=e^{i\frac{\pi}{3}}\dfrac{z-i}{z+i}$ 使得 $\arg w'(i)=\dfrac{\pi}{3}$.⟨ 3 分⟩ 解得 $w=\dfrac{\sqrt{3}z+1}{\sqrt{3}-z}$⟨ 1 分⟩.

5. (1) 求函数 $f(t)=2-2\cos t-t\sin t$ 的拉普拉斯变换.

解. $L[f(t)]=2L[u(t)]-2L[\cos t]+L[-t\sin t]=2\dfrac{1}{s}-2\dfrac{s}{s^2+1}+(L[\sin t])'=2\dfrac{1}{s}$⟨ 2 分⟩$-2\dfrac{s}{s^2+1}$⟨ 2 分⟩$+(\dfrac{1}{s^2+1})'$⟨ 3 分⟩$=2\dfrac{1}{s}-2\dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}=\dfrac{2}{s(s^2+1)^2}$.

(2) 求函数 $F(s)=\dfrac{2s}{s^4-1}$ 的拉普拉斯逆变换.

解. 由 $F(s)=\dfrac{2s}{(s^2-1)(s^2+1)}=\dfrac{s}{s^2-1}-\dfrac{s}{s^2+1}=\frac{1}{2}(\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{1}{s+1})-\dfrac{s}{s^2+1}$⟨ 4 分⟩, 得 $f(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}+e^t)-\cos t=\operatorname{ch} t$⟨ 2 分⟩$-\cos t$.⟨ 1 分⟩

6. 设函数 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 及其内部解析, 在 C 上不取零值. 证明 $f(z)$ 在 C 内的零点个数 (按重数计) 是 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$.

证明. 设 z_0 是 $f(z)$ 在 C 内的零点, 则在 z_0 附近 $f(z)=(z-z_0)^m\phi(z_0), \phi(z_0)\neq 0$ 解析. 所以在 z_0 附近, $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{m}{z-z_0}-\dfrac{\phi'(z)}{\phi(z)}$⟨ 3 分⟩. 因此在 z_0 点处的留数即为 m. 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为 $f(z)$ 在 C 内的所有零点, 重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_n$, 由留数定理得 $m_1+m_2+\cdots+m_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$⟨ 3 分⟩. □