$c_1\cos x + c_2\sin x + (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})e^{-x}$ 。

21.$y'' + 6y' + 5y = -10x + 8.$ e的次数为0

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1e^{-x} + c_2e^{-5x}$ ，设特解为 $y_0 = Ax + B, y_0' = A, y_0'' = 0$ ，所以就有 $6A + 5(Ax + B) = -10x + 8$ ，则 $A = -2, B = 4$ ，于是解为 $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-5x} - 2x + 4$ 。

22.$y' + 4y = x^2.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = ce^{-4x}$ ，设特解为 $y_0 = Ax^2 + Bx + C$ ，则有 $y_0' = 2Ax + B$ ，所以可以得到 $A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{8}, C = \frac{1}{32}$ ，那么解就为 $y = Ce^{-4x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}$ 。

23.$y'' + 4y' + 1 = 0.$ 不属于齐次线性方程，属于非齐次，等号坐标不能有常数

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1 + c_2e^{-4x}$ ，设特解为 $y_0 = Ax$ ，于是有 $y_0' = A$ ，则可得 $A = -\frac{1}{4}$ ，那么就可以得到解为 $y = c_1 + c_2e^{-x} - \frac{1}{4}x$ 。 特征根是齐次方程单根，特解应设为xQ（x）e

24.$y'' + 2y' + y = 2e_{-x}.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = (c_1 + c_2x)e^{-x}$ ，设特解为 $y_0 = Ax^2e^{-x}$ ，于是有 $y_0' = 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x}$ ，$y_0'' = 2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2e^{-x}$ ，则有 $A = 1$ ，那么解为 $y = (c_1 + c_2x + x^2)e^{-x}$ 。

25.$y'' - 4y = e^{2x}, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x}$ ，设特解为 $y_0 = Axe^{2x}$ ，于是有 $y_0'' = (4A + 4Ax)e^{2x}$ ，则有 $A = \frac{1}{4}$ ，那么有 $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x}$ ，则有 $y' = -2c_1e^{-2x} + 2c_2e^{2x} + \frac{1}{4}xe^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x}$ ，代入初值条件 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 + 2c_2 + \frac{1}{4} = 2 \end{cases}$ ，得到 $\begin{cases} c_1 = \frac{1}{16} \\ c_2 = \frac{15}{16} \end{cases}$ ，于是得到解为 $y = \frac{1}{16}e^{-2x} + (\frac{15}{16} + \frac{1}{4})e^{2x}$ 。

26.$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos 2t, x|_{t=0} = \frac{dx}{dt}|_{t=0} = -2.$ 常数变易法

解：齐次方程的通解 $\widetilde{x} = c_1\cos t + c_2\sin t$ ，设特解为 $x_0 = Ae^{2it}$ ，则有 $x_0'' = -4Ae^{2it}$ ，于是就得到 $A = -\frac{1}{3}$ ，所以 $x = c_1\cos t + c_2\sin t - \frac{1}{3}\cos 2t$, $x' = -c_1\sin t + c_2\cos t + \frac{2}{3}\sin 2t$ ，代入初始条件就得到 $\begin{cases} c_1 - \frac{1}{3} = -2 \\ c_2 = -2 \end{cases}$ ，得到 $\begin{cases} c_1 = -\frac{5}{3} \\ c_2 = -2 \end{cases}$ ，于是解为 $x = -\frac{5}{3}\cos t - 2\sin t - \frac{1}{3}\cos 2t$ 。

27.$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \sin at, a > 0.$ 常数变易法

解：齐次方程的通解 $\widetilde{x} = c_1\cos t + c_2\sin t$

$a \neq 1$ 时：设特解为 $x_0 = Ae^{ait}$ ，此时有 $x_0'' = -a^2Ae^{ait}$ ，可得 $A = \frac{1}{1-a^2}$ ，于是有 $x = c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{1-a^2}\sin at$ 。

$a = 1$ 时：设特解为 $x_0 = Ate^{it}$ ，此时有 $x_0'' = (2Ai - At)e^{it}$ ，可得 $A = -\frac{1}{2}$ ，于是就有解为 $x = c_1\cos t + c_2\sin t - \frac{1}{2}t\sin t$ 。

28.$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 2\sin x + \cos x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1 + c_2e^{-3x}$ ，设特解为 $y_0 = A\sin x + B\cos x$ ，可得 $y_0' = A\cos x - B\sin x, y_0 = -A\sin x - B\cos x$ ，于是就可得到 $A = \frac{1}{10}, B = -\frac{7}{10}$ ，那么解就为 $y = c_1 + c_2e^{-3x} + \frac{1}{10}\sin x - \frac{7}{10}\cos x$ 。

29.$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + 2k^2x = 5k^2\sin kt.$

解：　$k = 0$ 时：为齐次方程，　$x = c_1t + c_2$ ；

$k \neq 0$ 时：齐次方程的通解为 $\widetilde{x} = e^{-kt}(c_1\cos kx + c_2\sin kx)$ ，设特解为 $x_0 = Ae^{kit}$ ，则有 $x_0' = Akie^{kit}, x_0'' = -Ak^2e^{kit}$ ，于是得到 $A = 1 - 2i$ ，那么解为 $x = e^{-kt}(c_1\cos kt + c_2\sin kt) + \sin kt - 2\cos kt$ 。

30.$2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 4 - e^x.$ 非齐次线性方程的叠加原理

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2e^{-x}$ ，设特解为 $y_{01} = A, y_{02} = Be^x$ ，则有 $A = 4, B = -\frac{1}{6}$ ，那么就有解为 $y = c_1e^{-\frac{x}{2}} + c_2e^{-x} + 4 - \frac{1}{6}e^x$ 。

31.$2y'' + 5y' = \cos^2 x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y} = c_1 + c_2e^{-\frac{5}{2}}$ ，因为 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ，则我们设特解为 $y_{01} = Ax, y_{02} = Be^{2xi}$ ，于是可得到 $A = \frac{1}{10}, B = \frac{-4-5i}{164}$ ，那么解为 $y = c_1 + c_2e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{x}{10} - \frac{1}{41}\cos 2x + \frac{5}{164}\sin 2x$ 。

32.$y'' + y = \sin x\cos x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1\cos x+c_2\sin x$ ，因为 $2\sin x\cos x=\sin 2x$ ，所以设特解为 $y_0=Ae^{2ix}$ ，则有 $y_0''=-4Ae^{2ix}$ ，可得 $A=-\frac{1}{6}$ ，那么解为 $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{6}\sin 2x$ 。

33.$y''-2y'+2y=e^{-x}\cos x.$ cosx等效e^ix

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)$ ，设特解为 $y_0=Ae^{(-1+i)x}$ ，则有 $y_0'=A(-1+i)e^{(-1+i)x}, y_0''=-2Aie^{(-1+i)x}$ ，于是可得 $A=\frac{1+i}{8}$ ，那么解为 $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+\frac{1}{8}e^{-x}(\cos x-\sin x)$ 。

特解应该改为Acos2x+Bsin2x

34.$y''+4y=x\sin 2x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$ ，设特解为 $y_0=x(Ax+B)e^{2ix}$ ，则有 $y_0''=[2A+4i(2Ax+B)-4(Ax^2+Bx)]e^{2ix}$ ，于是可得 $A=-\frac{i}{8},B=\frac{1}{16}$ ，那么解为 $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{8}x^2\cos 2x+\frac{1}{16}x\sin 2x$ 。

f(x)=Pe^ax,其中a=0，不是特征根

35.$y'''-y''-4y'+4y=x^2+3.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}$ ，设特解为 $y_0=Ax^2+Bx+C$ ，则有 $y_0'=2Ax+B, y_0''=2A, y_0'''=0$ ，于是可得 $A=\frac{1}{4},B=\frac{1}{2},C=\frac{11}{8}$ ，那么解为 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{11}{8}$ 。

36.$y^{(4)}+2y''+y=x.$

解：齐次方程的通解为 $\widetilde{y}=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$ ，设特解为 $y_0=Ax+B$ ，则有 $y_0''=y^{(4)}=0$ ，于是可得 $A=1,B=0,$ 那么解为 $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x+x$ 。

37. 设 $y=(c_1+x)e^x+c_2e^{-2x}$ 是微分方程 $y''+ay'+by=ge^{cx}$ 的通解，则常数 a,b,c,g 分别等于多少？

解：因为通解为 $y=(c_1+x)e^x+c_2e^{-2x}$ ，则可见 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$ ，所以 $a=1,b=-2,c=1$ ，有上式可见特解为 $y_0=xe^x$ ，则有 $y_0'=e^x+xe^x, y_0''=2e^x+xe^x$ ，所以有 $g=3$ 。即有 $a=1,b=-2,c=1,g=3$ 。

38. 设 $y=x\sin x$ 为 $y''+by'+cy=A\cos x+B\sin x$ 的一个解，则常数 b,c,A,B 分别等于多少？

解：因为 $y=x\sin x$ 是解，可见非齐次项 e^{aix} 中的 ai 一定是特征根（不然不会有 x ），所以有 $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$ ，那么 $b=0,c=1$ ，又有 $y'=\sin x+x\cos x, y''=2\cos x-x\sin x$ ，我们可以得到 $A=2,B=0$ 。即有 $b=0,c=1,A=2,B=0$ 。

39. 设 $y=x^2e^x$ 为 $y''+by'+cy=Ae^x$ 的一个解，则常数 b,c,A 分别等于多少？

解： $y=x^2e^x$ 是解，所以有非线性项可见 $\lambda=1$ 是 2 重根，所以 $b=-2,c=1$ ，又因为 $y'=2xe^x+x^2e^x, y''=(2+4x+x^2)e^x$ ，则有 $A=2$ 。即有 $b=-2,c=1,A=2$ 。

40. 求一个阶数尽可能低的常系数线性齐次微分方程，是得函数 $y_1=2xe^x$ 与 $y_2=3\sin 2x$ 是它的解。

解：可见 y_1,y_2 是线性无关的。则一定还有 $\cos 2x$ ， y_1 前面有 x ，则至少是两重的。所以 $\lambda_1=2i,\lambda_2=-2i,\lambda_3=\lambda_4=1$ ，所以就有 λ 应满足 $\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$ ，所以就得方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$ 。

41. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $f(1)=0,f'(1)=0$ ，并设 $x>0$ 时

$$(3x^2-2f(x))ydx-(x^2f'(x)+\sin y)dy=0$$

为全微分方程，求 $f(x)$ ，并求上述全微分方程的通解。 欧拉方程算子解法，f(x)相当于y

解：有全微分知识可知： $3x^3-2f(x)=-x^2f''(x)-2xf'(x)$ ，即 $f(x)$ 满足 $x^2f''(x)+2xf'(x)-2f(x)+3x^3=0, f(1)=0, f'(1)=0$ ，令 $x=e^t$ ，则有 $f''+f'-2f=-3e^{3t}$ ，所以 $f(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^t-\frac{3}{10}e^{3t}$ ，即 $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{5x^2}-\frac{3}{10}x^3$ 。所以 $(\frac{18}{5}x^3+\frac{2}{5}x^{-2}-x)ydx-(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{5x}-\frac{9}{10}x^4+\sin y)dy=0$ ，则有 $\cos y+\frac{9}{10}x^4-\frac{2}{5x}-\frac{x^2}{2}=c$ 。

xkyk=D(D-1)```(D-K+1)dy/dt

42. 设 $f(x)$ 二阶可导，并设 $f'(x)=f(1-x)$ ，求 $f(x)$ 。

e^t 变为对t求导

解： $f''(x)=(f'(x))'=-f'(1-x)=-f(x)$，所以 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$，又因为 $f'(x)=f(1-x)$，所以有 $c_2\cos x-c_1\sin x=c_1\cos(1-x)+c_2\sin(1-x)$，则有 $c_2=\frac{1-\sin 1}{\cos 1}$。所以可以得到 $f(x)=c_1(\cos x+\frac{1-\sin 1}{\cos 1})$。

43. 求 $y''-y=e^{|x|}$ 的通解。

解： $x\geq 0$ 时： $y''-y=e^x\Rightarrow y=(c_1-\frac{1}{2})e^x+(c_2+\frac{1}{2})e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$； $x<0$ 时： $y''-y=e^{-x}\Rightarrow y=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{-x}$。

44. 设 $f(x)$ 二阶可导， $f(x)+f'(\pi-x)=\sin x, f(\frac{\pi}{2})=0.$ 求 $f(x)$。 二阶非齐次

解：令 $x'=\pi-x$，可得 $f'(x)=\sin x-f(\pi-x)$，所以 $f''(x)=\cos x+f'(\pi-x)=\cos x+\sin x-f(x)$，则有 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x\sin x$。又因为 $f(x)+f(\pi-x)=\sin x, f(\frac{\pi}{x})=0$，就得到 $c_1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}, c_2=-\frac{\pi}{4}$。所以有 $f(x)=(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{x}{2})\cos x+(-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$。

45. 设 $f(x)$ 是连续函数，并且满足 $f(x)=e^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$。

解：因为 $f(x)=e^x+\int_0^x(x-t)f(t)dt=e^x+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$ 所以 $f'(x)=e^x+\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x), f''(x)=e^x+f(x)$。所以就有 $f(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$。又因为 $f(0)=1, f'(0)=1$，所以 $c_1=\frac{3}{4}, c_2=\frac{1}{4}$。所以 $f(x)=\frac{3}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{2}xe^x$。

46. 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$，是确定常数 α,β,γ，并求该方程的通解。

解：将特解代入得 $\begin{cases}4+2\alpha+\beta=0\\ 3+2\alpha+\beta=\gamma\\ 1+\alpha+\beta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\ \beta=2\\ \gamma=-1\end{cases}$ 所以就可以得到 $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+xe^x$。

47. 质量为 1 克的质点被一力从某中心沿直线推开，该力的大小与这个中心到质点的距离成正比（比例常数为 4）；介质阻力和运动速度成正比（比例常数为 3）。在运动开始时，质点于中心的距离为 1 厘米，速度为 0，求质点的运动方程。

解：设距离为 x，则 $x''(t)=4x(t)-3x'(t), x(0)=1, x'(0)=0$，所以就有 $x(t)=c_1e^{-4t}+c_2e^t, c_1=\frac{1}{5}, c_2=\frac{4}{5}$，所以就有 $x(t)=\frac{1}{5}(4e^t+e^{-4t})$。

48. 重量为 P 牛顿的列车沿水平轨道作直线运动，当速度不大使列车受到阻力 $R=(a+bv)P$ 牛顿，其中 a,b 是常数， v 是列车速度。设机车的牵引力是 F 牛顿。当 $t=0$ 时， $s=0$（s 为走过的路程）， $v=0$。求火车的运动方程。

解： $S''=F/(P/g)-(a+bS')P/(P/g)=(Fg/P-ag)-bgS', S(0)=0, S'(0)=0$

$S(t)=c_1e^{-bgt}+c_2+\frac{1}{bg}(Fg/P-ag)t\Rightarrow c_1=-c_2=\frac{1}{b^2g}(F/g-a)$，

所以有 $S(t)=\frac{1}{b^2g}(F/g-a)(e^{-bgt-1+bgt})$。

49. 一电阻 $R=250$ 欧，电感 $L=1$ 亨，电容 $C=10^{-4}$ 法的串联电路，外加直流电压 $E=100$ 伏，当时间 $t=0$ 时，电流 $i=0$， $\frac{di}{dt}=100$ 安 / 秒，求电路重点流域时间的函数关系。

解： $100=250i+\int_0^t idt/c+li\Rightarrow i''+250i'+10^4i(t)=0\Rightarrow i(t)=c_1e^{-50t}+c_2e^{-200t}, i(0)=0, i'(0)=100$，则有 $c_1=-c_2=\frac{2}{3}\Rightarrow i(t)=\frac{2}{3}(e_{-50t}-e^{-200t})$。

求下列方程的通解（50～52）：

50.$x^2y''+3xy'+y=0.$ 欧拉方程算子解法

解：令 $x=e^t$，那么原式就变为： $y''(t)+2y'(t)+y=0$。该式的通解为 $y=c_1e^t+c_2te^t$，那么就得到 $y=\frac{1}{x}(c_1+c_2\ln x), x>0$。

51.$x^2y''-2xy'+2y=x\ln x.$（题目要改一下）

解：令 $x=e^t$，有 $y''(t)-3y't+2y=te^t$。该式的通解为 $y=c_1e^t+c_2e^{2t}+(At^2+Bt)e^t$，有 $A=-\frac{1}{2}, B=-1$，那么就得到解为 $y=x[c_1-\frac{1}{2}(\ln x)2-\ln x]+c_2x^2, x>0$。

52.$x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0.$

解： $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt})$，那么就有 $y'''-6y''+11y'-6y=0$，通解为 $y=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$，于是有解为 $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$。

53. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$， $f(r)$ 具有二阶导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$。求 $f(r)$。

解：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=r^{-2}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+(r^{-1}-x^2r^3)\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2r^{-1}\frac{\partial f}{\partial r}=0$$

$$\Rightarrow r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2r\frac{\partial f}{\partial r}=0$$

$$f(r)=c_1+\frac{c_2}{r}$$

已知下列方程对应的齐次线性方程的一个解 y_1 ，求该方程的通解（ 54~ 56 ）：

54.$x^3y'''-xy'+y=0$ ，已知 $y_1=x$ 。

降阶法

解： $y''-x^{-2}y'+x^{-3}y=0$ ，令 $y=xu$ ，

$$\Rightarrow xu''+[2-\frac{1}{x}]u'=0$$

$$\Rightarrow u=c_1+c_2e^{-\frac{1}{x}}$$

$$y=c_1x+c_2xe^{-\frac{1}{x}}$$

55.$(1-x^2)y'''-xy''+y'=0$ ，已知 $y_1=x^2$ 。

解：令 $z=y'$ ，则 $z=2x$ 。原式就变为 $z''-\frac{x}{1-x^2}z'+\frac{x}{1-x^2}z=0$

三阶先降为二阶，再用z=uz1

$$\Rightarrow 2xu''+[4-\frac{2x^2}{1-x^2}]u'=0$$

$$z=c_1x+c_2\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$z=c_1x+c_2\sqrt{1-x^2}$$

$$y=c_1+c_2x^2+c_3(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$$

56.$(1-x^2)y''+2xy'-2y=-2$ ，已知 $y_1=x$ 。

解： $y''+\frac{2x}{1-x^2}y'-\frac{2}{1-x^2}y=0$ ，令 $y=xu$

$$\Rightarrow xu''+[2+\frac{2x}{1-x^2}x]u'=0$$

$$\Rightarrow u=c_1+c_2(x+\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow y=c_1x+c_2(x^2+1)+y^*,y^*=1$$

$$\Rightarrow y=c_1x+c_2(x^2+1)+1$$

57. 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是二阶非齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

所对应的齐次线性方程两个线性无关的解，它们的朗斯基行列式为 $W(x)$ 。试证明：该非齐次线性方程的通解为

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{1}{W(x)}[y_1(\xi)y_2(x)-y_2(\xi)y_1(x)]f(\xi)d\xi$$

其中 $p(x),q(x)$ 和 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续， $x_0\in(a,b)$ 。

解：变动任意常数法。 $y=u_1y_1+u_2y_2$

$$\Rightarrow\begin{cases}u_1'y_1+u_2'y_2=0\\u_1'y_1'+u_2'y_2'=f(x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1' = -\frac{y_2 f}{w}, u_2' = \frac{y_1 f}{w}$$

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{w(\xi)}[y_1(\xi)y_2(x) - y_2(\xi)y_1(x)]f(\xi)d\xi$$

求下列方程的通解（ 58∼ 61 ）：

58.$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

解： $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + y^*, y^* = e^x x \ln|x|$ 代入上题的公式得到

$$y = e^x(x\ln|x| + c_1 + c_2 x)$$

59.$y'' - y = 2\sec^3 x$.

解：

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + y^*, y^* = -\frac{\cos 2x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

60.$y''' + 4y' = 4\cot 2x$.

解：

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_3 + y^*$$

$$(y')^* = \int (\cos 2\xi \sin 2x - \sin 2\xi \cos 2x) \ln|\cos 2\xi| d\xi$$

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + c_3 + \frac{1}{2} ln|\sin 2x| - \frac{1}{2}\cos 2x \ln|\cos 2x - \cot 2x|$$

61.$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.

解： $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + y^*, y^* = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1) + e^{-2x}(-e^x+1)$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1)$$

62. 用幂级数解法求 $y'' + 4xy = 0$ 的通解。

解：令 $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ，

$$y'' = \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^{i-2} i(i-1) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)a_{i+2}x^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} [(i+1)(i+2)a_{i+2} + 4a_{i-1}]x^i + 2a_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_{i+2} = a_{i-1}\frac{4}{(i+1)(i+2)}, a_2 = 0$$

$$a_{3k} = \frac{(-4)^k a_0}{3k(3k-1)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}$$

$$a_{3k+1} = \frac{(-4)^k a_0}{(3k+1)3k\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}$$

$$a_{3k+2} = 0$$

$$\Rightarrow y = c_1(1 + \cdots + \frac{(-4)^k a_0 x^{3k}}{3k(3k-1)\cdots 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2} + \cdots) + c_2(x + \cdots + \frac{(-4)^k a_0 x^{3k+1}}{(3k+1)3k\cdots 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3})$$

63. 用广义幂级数法求 $4xy'' + 2y' + y = 0$ 的通解。

解：令 $y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^{i+\frac{1}{2}}$

$$y' = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)a_{i+2}x^i + \sum_{i=0}^{\infty} (i+\frac{1}{2})(i-\frac{1}{2})b_{i+2}x^{i-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}[4i(i+1)a_{i+1}+2(i+1)a_{i+1}+a_i]x^i+(2a_1+a_0)$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}[4(i+\frac{3}{2})(i+\frac{1}{2})b_{i+1}+2(i+\frac{3}{2}b_{i+1})+b_i]x^{i+\frac{1}{2}}=0$$

$$a_1=-\frac{a_0}{2}, a_{i+1}=-\frac{a_i}{(2i+2)(si+1)}, b_{i+1}=-\frac{b_i}{(2i+2)(2i+3)}$$

$$y=c_1(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^k}{(2k)!}+\cdots)$$

$$+c_2(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3!}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5!}x^{\frac{5}{2}}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{\frac{2k-1}{2}}}{(2k-1)!})$$

$$=c_1\cos\sqrt{x}+c_2\sin\sqrt{x}$$

64. 用幂级数解法求 $(1-x^2)y''-xy'+\frac{1}{9}y=0$ 满足 $y(0)=\sqrt{3}/2$， $y'(0)=\frac{1}{6}$ 的解。

解：同理 $\Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty}[(i+1)(i+2)a_{i+2}-i(i-1)a_i-ia_i+\frac{1}{9}a_i]x^i+\frac{a^0}{9}+a_2+x(\frac{a_1}{9}-a_1+a_3)=0$

$$\Rightarrow a_{i+2}=(i^2-\frac{1}{9})\frac{a_i}{(i+1)(i+2)}, a_2=-\frac{a_0}{9}, a_3=\frac{8}{9}a_1$$

由 $y(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}, y'(0)=\frac{1}{6}\Rightarrow a_0=\frac{\sqrt{3}}{2}, a_1=\frac{1}{6}$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}[1-\frac{1}{9}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{9}(2^2-\frac{1}{9})\frac{x^4}{4!}-\cdots-\frac{1}{9}(2^2-\frac{1}{9})\cdots[(2k-2)^2-\frac{1}{9}]\frac{x^{2k}}{(2k)!}-\cdots]$$

$$+\frac{1}{6}[x+(1-\frac{1}{9})(3^2-\frac{1}{9})\frac{x^5}{5!}+\cdots+(1-\frac{1}{9})(3^2-\frac{1}{9})\cdots[(2k-2)^2-\frac{1}{9}]\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}+\cdots]$$

65. 对于什么样的常数 p 和 q，方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=0$ 的所有解当 $t\to+\infty$ 时趋于零？

解：当 $\triangle>0$ 时， $\lambda_1=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{\triangle}}{2}, \lambda_2=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{\triangle}}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{-\lambda_2 t}=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2<\lambda_1<0\Rightarrow p>0, q>0$$

当 $\triangle=0$ 时，同理可得 $\Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2<0\Rightarrow p>0, q>0$

当 $\triangle<0$ 时， $\lambda_1=\alpha+i\beta, \lambda_2=\alpha-i\beta, \alpha=-\frac{p}{2}$

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}e^{\alpha t}(c_1\sin\beta t+c_2\cos\beta t)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha<0\Rightarrow p>0, q>0$$

综合得到 $p>0, q>0$

66. 给定方程 $\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=f(t)$，其中常数 $p>0, q>0$，函数 $f(t)$ 在 $0\le t<+\infty$ 上连续。试证明： (1) 如果 $f(t)$ 在 $0\le t<+\infty$ 上有界，则上述方程的每一个解在 $0\le t<+\infty$ 上也有界； (2) 如果当 $t\to+\infty$ 时 $f(t)\to 0$，则上述方程的每一个解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零。解：利用 57 与 65 的结论，可知对于齐次通解 (1) 、 (2) 显然成立，因此只需要证明特解即可。

当 $\triangle>0$ 时

$(1)\lambda_2<\lambda_1<0, y_1=e^{\lambda_1 t}, y_2=e^{\lambda_2 t}$

$$W(\xi)=(\lambda_2-\lambda_1)e^{\lambda_1+\lambda_2}\xi$$

$$|y*|=|\int_0^t\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\xi}(e^{\lambda_1\xi+\lambda_2 t}-e^{\lambda_2\xi+\lambda_1 t})f(\xi)d\xi|$$

$$\le\frac{|f|_{\max}}{\lambda_1-\lambda_2}\int_0^t|e^{\lambda_2(t-\xi)}-e^{\lambda_1(t-\xi)}|d\xi$$

$$= \frac{|f|_{\max}}{\lambda_1-\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}[1-e^{\lambda_1}t] + \frac{1}{\lambda_2}(1-e^{\lambda_2 t})$$

$$\leq \frac{|f|_{\max}}{\lambda_1-\lambda_2}[-\frac{1}{\lambda_1}]$$

所以有界。

(2)$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0,$

$$s.t. \forall t > A, |f(t)| < \epsilon, e^{\lambda_1 t} < \epsilon, e^{\lambda_2 t} < \epsilon. \forall t, \exists M > 0, |f(t)| \leq M,$$

$$|y^*| \leq |\int_0^A y(\xi)d\xi| + \int_A^t y(\xi)d\xi$$

$$\leq \frac{M}{\lambda_1-\lambda_2}[-\frac{1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1(t-A)} - e^{\lambda_1 t}) + \frac{1}{\lambda_2}(e^{\lambda_2(t-A)} - e^{\lambda_2 t})] + \frac{\epsilon}{\lambda_1-\lambda_2}[-\frac{1}{\lambda_1}]$$

只需要 $t > 2A$ 就有

$$\leq \frac{M}{\lambda_1-\lambda_2}(-\frac{2\epsilon}{\lambda_1} - \frac{2\epsilon}{\lambda_2}) + \frac{\epsilon}{\lambda_1-\lambda_2}(-\frac{1}{\lambda_1}) \leq c_0\epsilon(t > 2A)$$

当 $\triangle = 0$ 时

(1)$\lambda_1 = \lambda_2 < 0, y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = te^{\lambda_1 t}, W(\xi) = e^{2\lambda_1 \xi}$

$$|y^*| = |\int_0^t (t-\xi)e^{\lambda_1(t-\xi)}f(\xi)d\xi|$$

$$\leq |f|_{\max}|[-\frac{t-\xi}{\lambda_1}e^{\lambda_1(t-\xi)} + \frac{1}{\lambda_1^2}e^{\lambda_1(t-\xi)}]|_0^t|$$

$$= |f|_{\max}\frac{1}{\lambda_1^2}|1-e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 te^{\lambda_1 t}|$$

所以有界.

(2) 同理， $\forall \epsilon > 0, \exists A, s.t. \forall t > A, |f(t)| < \epsilon$

$$e^{\lambda_1 t} < \epsilon, te^{\lambda_1 t} < \epsilon, \forall t, |f(t)| < M$$

$$|y^*| \leq |\int_0^A y(\xi)d\xi| + |\int_0^t y(\xi)d\xi|$$

$$M|\frac{-(t-A)}{\lambda_1}e^{\lambda_1(t-A)}| + M|\frac{t}{\lambda_1}e^{\lambda_1 t}| + \epsilon\frac{1}{\lambda_1^2}|1-e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 t3^{\lambda_1 t}| < c_0\epsilon$$

只需要 $t > 2A$ 即可。

当 $\triangle < 0$ 时

(1)$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, \alpha = -\frac{p}{2}$

$$W(\xi) = e^{2\alpha\xi}, y_1 = e^{\alpha t}\cos\pi t, y_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$|y^*| = |\int_0^t e^{\alpha(t-\xi)}\sin\beta(t-\xi)f(\xi)d\xi|$$

$$\leq |f|_{\max}\int_0^t e^{\alpha(t-\xi)d\xi}$$

$$= |f|_{\max}\frac{1}{(-\alpha)}(1-e^{\alpha t})$$

所以有界。

(2) 同理 $\forall \epsilon > 0, \exists A, s.t. \forall t > A, |f(t)| < \epsilon, e^{\alpha t} < \epsilon, \forall t, |f(t)| < M$

$$|y^*| \leq |\int_0^A y(\xi)d\xi| + |\int_A^t y(\xi)d\xi|$$

$$\leq M\frac{1}{(-\alpha)}|e^{\alpha(t-A)} - e^{\alpha t}| + \epsilon\frac{1}{-\alpha}[1-e^{\alpha(t-A)}] \leq c_0\epsilon$$

只需要 $t > 2A$ 即可。