数模 1-1

(1) 显然，L_1是右不变的，即 $L_1(\vec{u},\vec{v})=L_1(\vec{u}\vec{v}^{-1},1)$

且 $L_1(\vec{u},\vec{v})=L_1(\vec{v},\vec{u})$

取 μ_i 为 σ_i^j ($j=1,\cdots,k$) 的中位数

即 $\mu=\text{median}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots\sigma_k)$ 或记为 $\mu=\text{hmed}(\sigma_1\cdots\sigma_k)$

令 $u\in R^n$ 为一种 $\sigma_1^{i_1},\sigma_2^{i_2}\cdots\sigma_k^{i_k}$ 的排序，u_i为u第i个元素

下证 $\sum_{i=1}^{k}L_1(\mu,\sigma_i)\le\sum_{i=1}^{k}(u,\sigma_i)$

首先，由中位数的定义，我们易知，对数集X，有

$$\text{median}(X)=\arg\min_{\hat{x}}\sum_{x\in X}|\hat{x}-x|$$

因而 $\sum_{i=1}^{k}L_1(\mu,\sigma_i)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}|\mu_i-\sigma_j^i|$

$$\le\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}|u_i-\sigma_j^i|=\sum_{i=1}^{k}L_1(u,\sigma_i)$$

即此时μ为 $\sum_{i=1}^{k}L_1(\mu,\sigma_i)$ 最小

现~~定义~~：给定 $\hat{a}\in R^n$，则$\hat{a}$的一种诱导排序满足 a 若$a\in S_n$时有 $\hat{a}(i)<\hat{a}(j)\Rightarrow a(i)<a(j)$

对$\forall i,j$均成立。(如给定 $\hat{\alpha}=(2,1,3,2)$，则 $\hat{\alpha}$的诱导排序可以是 $(2,1,4,3)$ 或 $(3,1,4,2)$) 记作 $\alpha=ind(\hat{\alpha})$

可以得到(引理1) 设$p\ge1$，$\hat{\alpha}\in R^n$，$\alpha=ind(\hat{\alpha})$，τ为$\hat{\alpha}$的任意排序，则 $L_p^p(\alpha,\hat{\alpha})\le L_p^p(\tau,\hat{\alpha})$

下证引理1：若 $\tau=\alpha$，结论显然成立

$\tau\ne\alpha$时，则存在对(i,j)满足 $\hat{\alpha}(i)<\hat{\alpha}(j)$

(注：L_p^p表示 $(L_p)^p=\left[\left(\sum_{i=1}^{n}|u(i)-v(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p=\sum_{i=1}^{n}|u(i)-v(i)|^p$)

但不满足 $\tau(i)>\tau(j)$。~~下面将证~~ 由反证法，如果交换 i,j 后 $L_p(\tau,\hat{\alpha})$ 不增加，则引理1成立，下证：

假设 $\bar{\tau}$ 为 τ 交换 i,j 后的排序，如果 $\bar{\tau}(l)=\tau(l)$，$l\notin\{i,j\}$

则 $L_p^p(\bar{\tau},\hat{\alpha})\le L_p^p(\tau,\hat{\alpha})$ 成立

要证 $L_p^p(\bar{\tau},\hat{\alpha})-L_p^p(\tau,\hat{\alpha})=|\bar{\tau}(i)-\hat{\alpha}(i)|^p+|\bar{\tau}(i)-\hat{\alpha}(j)|^p-|\tau(i)-\hat{\alpha}(i)|^p-|\tau(j)-\hat{\alpha}(j)|^p$

$=|\tau(j)-\hat{\alpha}(i)|^p+|\tau(i)-\hat{\alpha}(j)|^p+|\tau(i)-\hat{\alpha}(i)|^p-|\tau(j)-\hat{\alpha}(j)|^p$

≥ 0

只要证 $0\ge|\tau(j)-\hat{\alpha}(i)|^p+|\tau(i)-\hat{\alpha}(j)|^p-|\tau(i)-\hat{\alpha}(i)|^p-|\tau(j)-\hat{\alpha}(j)|^p$

令 $f(z)=|z-\hat{\alpha}(i)|^p-|z-\hat{\alpha}(j)|^p$，下证 $f(z)$ 为非减函数

因为 $\hat{\alpha}(i)<\hat{\alpha}(j)$，单独考虑区域 $z\le\hat{\alpha}(i)$，当 $f(z)=(\hat{\alpha}(i)-z)^p-(\hat{\alpha}(j)-z)^p$；区域 $\hat{\alpha}(i)\le z\le\hat{\alpha}(j)$，当 $f(z)=(z-\hat{\alpha}(i))^p-(\hat{\alpha}(j)-z)^p$

区域 $z\ge\hat{\alpha}(j)$，当 $f(z)=(z-\hat{\alpha}(i))^p-(z-\hat{\alpha}(j))^p$

上述三个区域内函数通过求导，可以直接证明 f 在每个区域内都是非递减的，因此 f 非递减 （后续使用引理1将不注明）

综上，引理1得证。令 $p=1$，可得 $L_1(a,\hat{\alpha})\le L_1(\alpha,\hat{\alpha})$

取 $\sigma'=\mathrm{ind}(\mu)$

σ^* 可从 μ 得到，由引理1变化即可得

(2) $\sum_{i}|\beta_j-\sigma_j^i|=\sum_{i}|(\frac{1}{k}\sum_{i'}\sigma_j^{i'}-\sigma_j^i|$ （β_j的定义）

$=\frac{1}{k}\sum_{i}|\sum_{i'}(\sigma_j^{i'}-\sigma_j^i)|$

$\le\frac{1}{k}\sum_{i,i'}|\sigma_j^{i'}-\sigma_j^i|$ （三角不等式）

$\le\frac{1}{k}\sum_{i,i'}|\sigma_j^{i'}-\mu_j|+\frac{1}{k}\sum_{i,i'}|\mu_j-\sigma_j^i|$ （三角不等式）

$=\frac{1}{k}\sum_{i,i'}|\sigma_j^{i'}-\mu_j|+\frac{1}{k}\sum_{i,i'}|\sigma_j^i-\mu_j|$

$=\sum_{i'}|\sigma_j^{i'}-\mu_j|+\sum_{i}|\sigma_j^i-\mu_j|$

$=2\sum_{i}|\mu_j-\sigma_j^i|$

即 $\sum_{i=1}^{k}|\beta_j-\sigma_j^i|\le 2\sum_{i=1}^{k}|\mu_j-\sigma_j^i|$

取 $\sigma''=ind(\beta)$ ，β为$\beta_1\cdots\beta_k$的组合

如：

A	B	C
B	D	D
C	A	B
D	C	A

$\beta'(A)=8$，$\beta'(B)=6$，$\beta'(C)=8$，$\beta'(D)=8$

σ''可以是 $\sigma''=$ B A CD

B A DC

B C AD

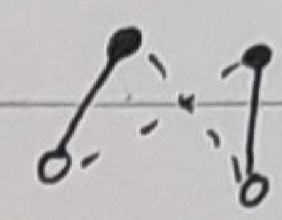
B C DA

B D AC

B D CA 中一种

(3) 一致性引理：若 $a' \le b'$，且 $a<b$，则有

$$|a-a'|+|b-b'| \le |a-b'|+|a'-b|$$



(证明可由二维空间推导至 n 维的数学归纳法证明，此处省略)

对 $\forall\, u \in R^n$

$$\sum_i L_1(\sigma', \sigma_i) \le \sum_i L_1(\sigma', \mu) + \sum_i L_1(\mu, \sigma_i) \quad \text{(三角不等式)}$$

$$\le \sum_i L_1(u, \mu) + \sum_i L_1(\mu, \sigma_i) \quad \text{(一致性引理)}$$

$$\le \sum_i L_1(u, \sigma_i) + 2\sum_i L_1(\mu, \sigma_i) \quad \text{(三角不等式)}$$

$$\le \sum_i L_1(u, \sigma_i) + 2\sum_i L_1(u, \sigma_i) \quad \text{题(1)结论}$$

$$= 3\sum_i L_1(u, \sigma_i)$$

u 用 σ^* 代入 $\quad \sum_i L_1(\sigma', \sigma_i) \le 3\sum_i L_1(\sigma^*, \sigma_i)$

即 $d(\sigma', \Sigma) \le 3d(\sigma^*, \Sigma)$

$$\sum_i L_1(\sigma'', \sigma_i) \le \sum_i L_1(\sigma'', \beta) + \sum_i L_1(\beta, \sigma_i) \quad \text{(三角不等式)}$$

$$\le \sum_i L_1(u, \beta) + \sum_i L_1(\beta, \sigma_i) \quad \text{(一致性引理)}$$

$$\le \sum_i L_1(u, \sigma_i) + 2\sum_i L_1(\beta, \sigma_i) \quad \text{(三角不等式)}$$

$$\le \sum_i L_1(u, \sigma_i) + 4\sum_i L_1(\mu, \sigma_i) \quad \text{(题(2)结论)}$$

(题(3)-1 结论)

$$\le 5\sum_i L_1(u, \sigma_i)$$

u 用 σ^* 代入 $\quad \sum_i L_1(\sigma'', \sigma_i) \le 5\sum_i L_1(\sigma^*, \sigma_i)$

即 $d(\sigma', \Sigma) \le 5d(\sigma^*, \Sigma)$

数模 1-2　　令没有进行比赛的比分为 0:0

(1) 令 P $\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 57 \\ 10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 3 \\ 45 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$　由 $q_{ij}=P_{ij}-P_{ji}$ 得到

$$Q \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 12 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -7 \\ -12 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $S = Q \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$

(2) 令 R $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 17 & -12 \\ -9 & 0 & 12 & 13 \\ -17 & -12 & 0 & 9 \\ 12 & -13 & -9 & 0 \end{pmatrix}$　记 $r_{ij}=\sum(q_{ik}+q_{kj})$

$=\sum p_{ik}-\sum p_{ki}+\sum p_{kj}-\sum p_{jk}$

$k\le l$，k 可等于 i,j（不影响结果）

$$S^{(2)} = R\cdot(1,1,1,1)^T = (14,16,-20\ \ -10)^T$$

(3) 记 $a=(1,1,1,\cdots,1)$　记 q_{ij} 组成矩阵 Q

p_{ij} 组成矩阵 P，r_{ij} 组成矩阵 R，由题意可得

$S=Q\cdot a^T$　　$Q=P-P^T$　　$Q=-Q^T$　　$M=M^T$

$R=Q\cdot M+M^TQ = QM+MQ$　　$R=-R^T$

$$S^{(2)}=Ra^T=MS+QMa^T=MS+Q\cdot(l\cdot a^T)=MS+l\cdot Qa^T$$
$$=MS+lS$$

(为 $|T_1|=|T_2|=\cdots=l$ 实数

$i \langle n \rangle j$ 　n 条路径

M^2 中 $m_{ij}^{(2)} = \begin{cases} n, & n \le l \\ 0 \end{cases}$ 表示 i 和 j 两队间存在两级比赛时的中间队的可能数量（不包括 i,j 自身）

(4) 可验证 $S^{(3)} = M\cdot S^{(2)} + l S^{(2)}$

~~假设 假设~~ $S^{(r)} = M\cdot S^{(r-1)} + l S^{(r-1)} = (M + l\cdot E) S^{(r-1)}$

~~则 $S^{(n+1)}$~~ 设 $L = l\cdot E$

则 $S^{(r)} = (M+L) S^{(r-1)} \cdots = (M+L)^{r-1} S$