

# 第8讲

## 总结与复习

# 课程简介

## 学习目标:

流体力学属于基础理论课程，但又具有明显的应用技术学科特性。以动量传递为主要特征的流体力学，是动力工程和工程热物理、化学工程与技术、能源和机械工程等学科的基础知识。通过对《工程原理-动量传递》的学习，使学生掌握流体的基本物性，掌握流体宏观的平衡和运动的基本规律，掌握流体与固体壁面之间的相互作用规律，并会应用这些规律解决工程实际中的基本流动问题。

理论联系实际，旨在介绍流体力学原理、熟悉基本知识的同时，将所学知识用于工程实际问题的分析、讨论和解决，培养工程科学思维和表达能力。

# 可测量结果

- ✓ 能解释流体的基本概念：包括流体与固体相比所具有的特点，流体的连续介质模型，流体压缩性和膨胀性，流体的黏性。
- ✓ 能解释“静止”的概念；理解流体平衡的微分方程式，会应用不可压流体重力场中的静压公式进行计算；解决工程中各类平衡流体对壁面的作用力。
- ✓ 能解释“拉格朗日法”和“欧拉法”对流体运动的描述；能解释流体运动中几个基本概念；掌握控制体分析方法；理解和掌握连续性方程的物理意义及其工程应用。
- ✓ 了解流体运动微分方程式的含义；理解和掌握伯努利方程的物理意义及其工程应用；掌握动量方程式的工程应用。
- ✓ 掌握理想流体概念；会求解流函数与速度势
- ✓ 掌握量纲分析，会应用相似性原理分析具体问题。
- ✓ 理解边界层理论，了解湍流基本概念。
- ✓ 掌握管道中不同流动状态的阻力计算。

# 课程内容

- 一、流体的基本概念；
- 二、流体静力学，包括流体平衡概念、流体平衡微分方程式等；
- 三、流体运动学，包括描述流体运动的方法、连续性方程、流体微元运动分析；
- 四、流体动力学，包括伯努利方程、动量方程式；
- 五、量纲分析和相似性原理；
- 六、边界层理论与湍流；
- 七、流体动力学在工程中的应用，包括管中阻力。

# 1. 流体力学的基本概念

## 流体力学

研究流体介质的特性、状态和在各种力的驱动下发生的流动以及质量、动量、能量输运规律的力学分支学科。

关键词： 流体、黏度；流动、力；

- 流体的介质特性
- 流动所遵循的规律
- 流体与周围物体的相互作用
- 流动带来的质量、动量、能量输运规律

静力学—“静止”流体的平衡条件、压力分布；

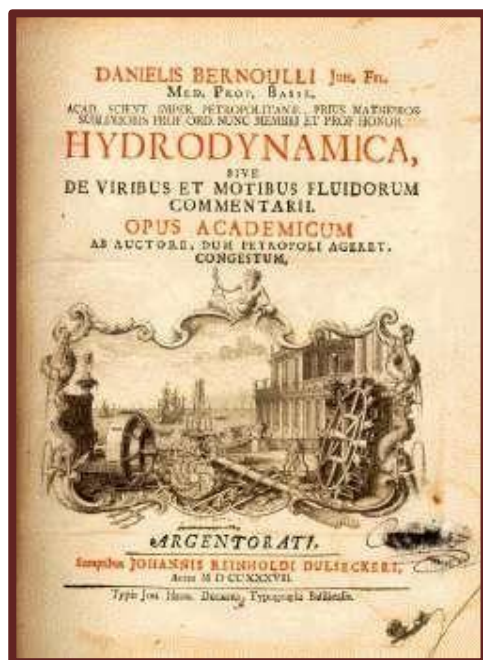
运动学— 流体运动的特征、规律；

动力学— 外力作用下流体运动规律及固体壁面的作用力、阻力。

## 17世纪中叶以后：形成学科-流体力学

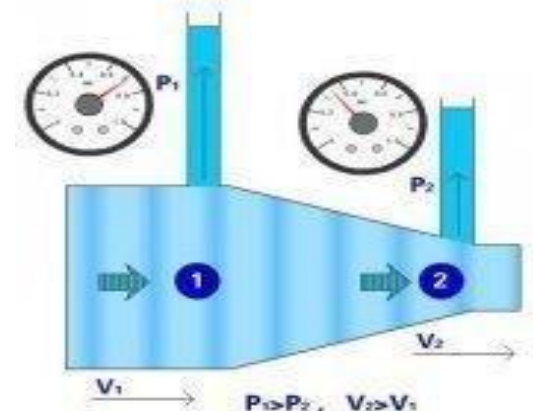
伯努利 (D.Bernoulli, 1700-1782, 瑞士)

建立了流体位势能、压强势能和动能之间的  
能量转换关系——伯努利方程。



$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

1738年，出版了世界第一部《流体力学》专著，奠定了流体静力学的基础。





# 牛顿

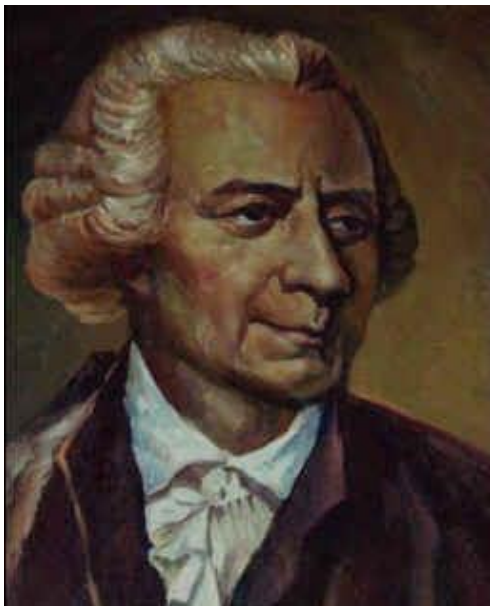
伟大的数学家、物理学家、天文学家和哲学家  
最卓越的贡献是**微积分**和**经典力学**的创建。

恩格斯概括：“牛顿由于发明了万有引力定律  
而创立了科学的天文学，由于进行了光的分解  
而创立了科学的光学，由于创立了二项式定理  
和无限理论而创立了科学的数学，由于认识了  
力的本性而创立了科学的力学”。

**建立了牛顿内摩擦定律，为粘性流体力学初步  
奠定了理论基础，并讨论了波浪运动等问题。**



牛 顿 (1642-1727)



## 欧拉

(L. Euler, 1707–1783, 瑞士)

经典流体力学奠基人，出版《流体运动一般原理》  
提出了流体的连续介质模型，建立了理想流体运动  
微分方程

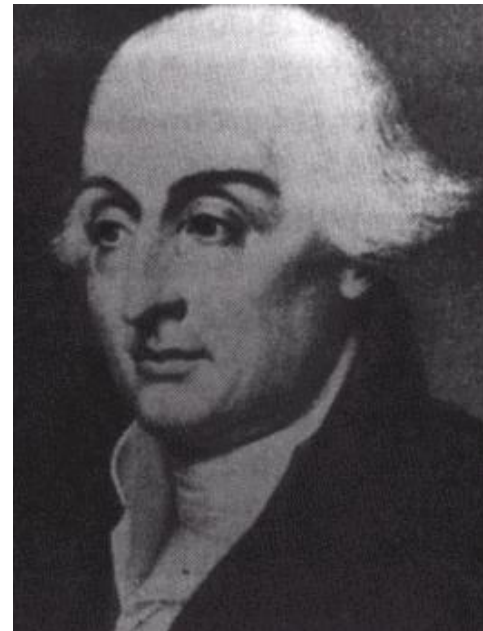
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}$$

## 拉格朗日(法国)

(J. L. Lagrange, 1736–1813, )

提出新的流体动力学微分方程，使流体动力学的解  
析方法有了进一步发展，并提出了流函数的概念。

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0$$







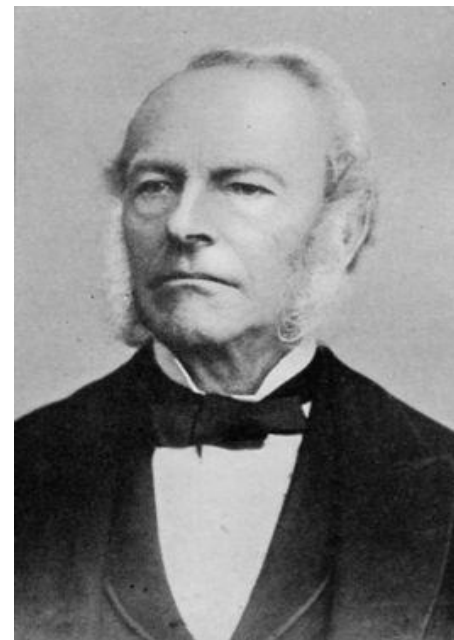
**纳维** (法国)(C.L.M.H. Navier, 1785-1836)

首先提出了不可压缩粘性流体运动的微分方程组；

**斯托克斯** (英国)

(G.G.Stokes, 1819-1903)

严格导出了这些方程，并把流体质点的运动分解为平动、转动、均匀膨胀或压缩及由剪切所引起的变形运动。



**纳维-斯托克斯方程 (N-S方程)**

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

**雷诺**(英国北爱尔兰)

(O.Reynolds, 1842-1912)



O.Reynolds (1842-1912)

证实粘性流体两种流动状态  
——层流和湍流；

建立了不可压缩流体湍流运动的方程组：  
雷诺方程，为湍流的研究奠定了基础。

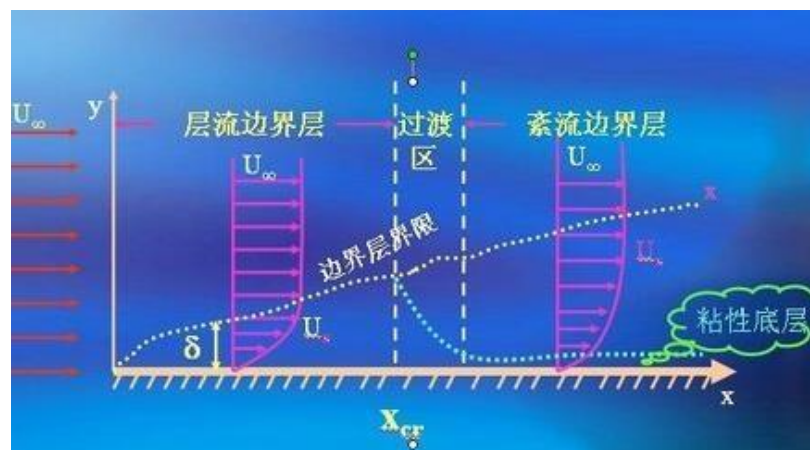


## 普朗特 (德国)

L. Prandtl, 1875—1953



建立了边界层理论，解释了阻力产生的机制。提出混合长度理论，论述了有限翼展机翼理论。对现代航空工业的发展作出了重要的贡献。

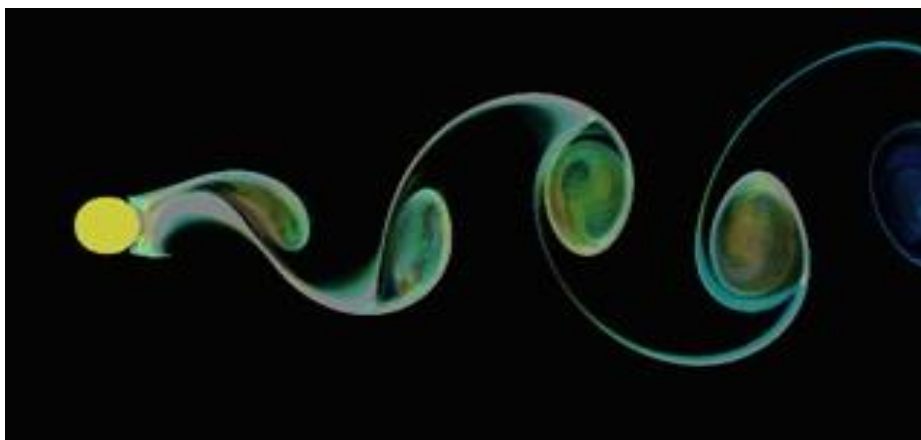


**冯.卡门** (T. von Kármán , 1881-1963, 匈牙利、美国)

在1911-1912年连续发表的论文中，提出了分析带旋涡尾流及其所产生的阻力的理论，人们称这种尾涡的排列为卡门涡街。

在1930年的论文中，提出了计算湍流粗糙管阻力系数的理论公式。

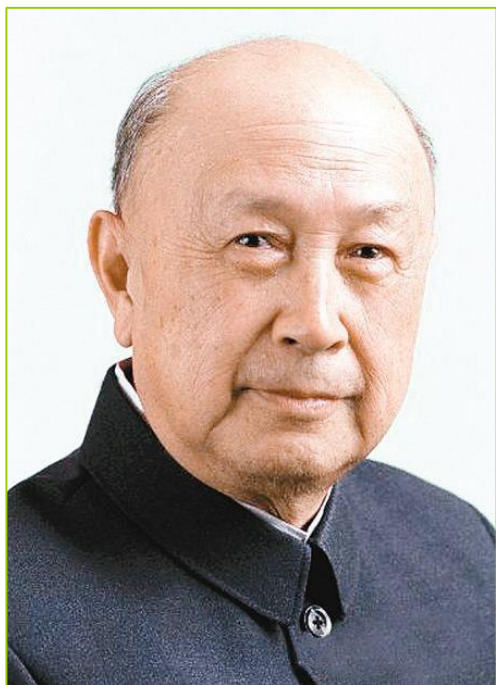
在湍流边界层理论、超声速空气动力学、火箭及喷气技术等方面都有重要贡献。



20世纪最伟大的航天工程学家，开创了数学、力学等基础科学在航空航天和其他技术领域的应用，被誉为“航空航天时代的科学奇才”。

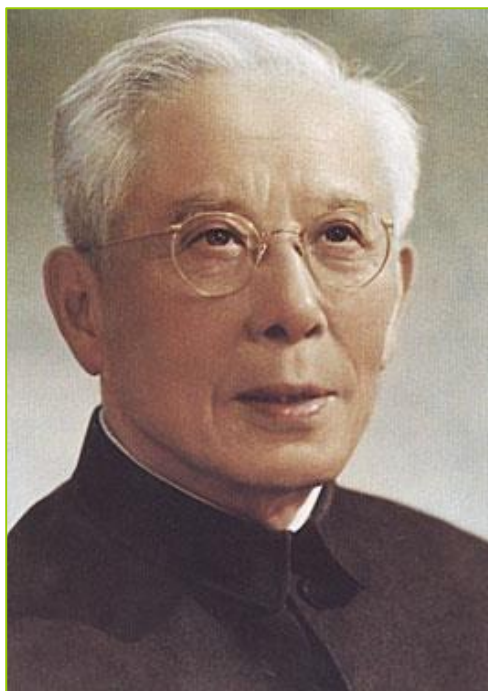


**钱学森** (1911-2009)



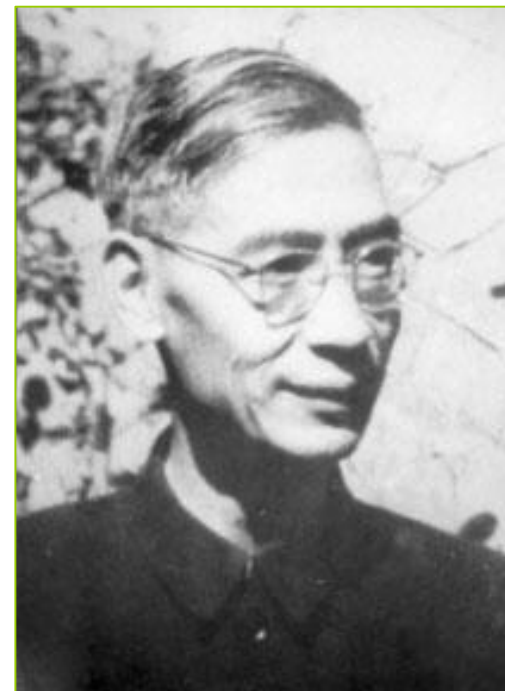
力学家、空气动力学家。  
为中国火箭导弹和航天事业的创建与发展作出了杰出的贡献。

**周培源** (1902-1993)



理论学家、流体力学家。  
在爱因斯坦广义相对论引力论和湍流理论方面获得了杰出成就。

**郭永怀** (1909-1968)



空气动力学家、应用数学家。  
在跨声速流动、边界层理论、激波与爆轰理论等方面做出了杰出成就。

## 流体力学的学科定位

流体力学既是一门基础科学，  
同时又是一门应用科学。

- 是一门既针对具体物质但又需要抽象思维的学科；
- 渗透力强、介入学科群广泛、对其他学科牵引作用大；
- 是现代工程技术的基础性学科。

### 流体力学的应用领域

数学、天体物理、地球物理、**大气物理、航空航天、水利、海洋、机械、船舶、环境、能源、灾害、化工、材料、生命、仿生等。**



## 流体力学的研究方法

### 流体力学研究的三步曲



观察是创新的源泉、**实验**和**理论**是本质和规律的探寻。

#### ■ 实验研究

根据实际问题利用相似理论建立实验模型。实验流体力学(Experimental Fluid Mechanics)

#### ■ 理论分析

根据实际问题建立理论模型，并进行数学求解。理论流体力学(Theoretical Fluid Mechanics)

#### ■ 数值计算

根据理论分析方法建立数学模型，选择合适计算方法，数值求解得出结果，用实验方法加以验证。计算流体力学(Computational Fluid Mechanics)

# 可压缩性 (compressibility)

$$\beta \equiv \frac{dP}{dV/V}$$

$$\beta \equiv -\frac{dP}{d\rho/\rho}$$

声速公式

$$C = (kRT)^{1/2}$$

马赫数  $Ma=V/C$

$Ma < 0.3$ : *incompressible flow*, where density effects are negligible.

不可压缩

$0.3 < Ma < 0.8$ : *subsonic flow*, where density effects are important but no shock waves appear.

亚音速

$0.8 < Ma < 1.2$ : *transonic flow*, where shock waves first appear, dividing subsonic and supersonic regions of the flow. Powered flight in the transonic region is difficult because of the mixed character of the flow field.

跨音速

$1.2 < Ma < 3.0$ : *supersonic flow*, where shock waves are present but there are no subsonic regions.

超音速

$3.0 < Ma$ : *hypersonic flow* [11], where shock waves and other flow changes are especially strong.

高超音速

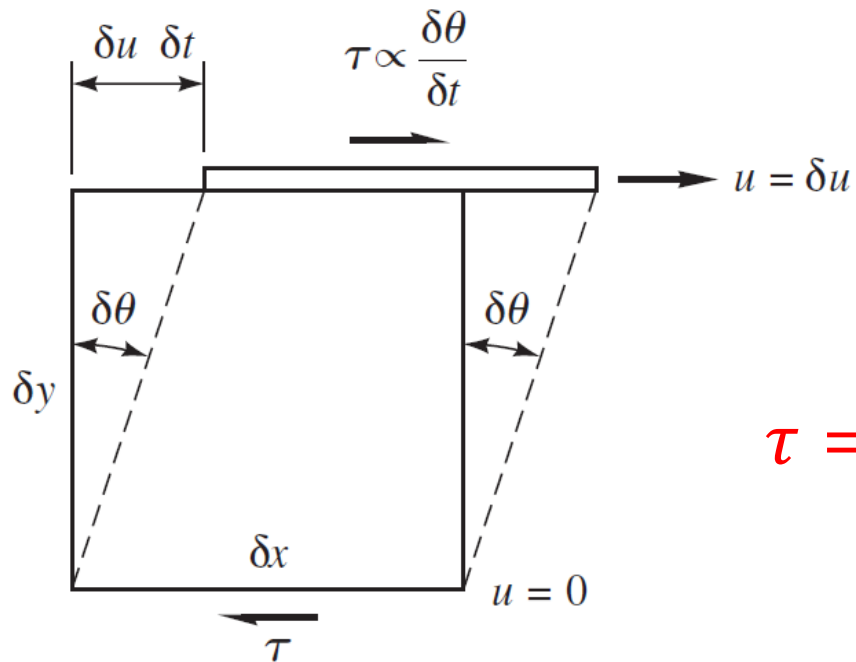
# 层流流动剪应力

固体：剪切模量=剪应力/剪应变

流体：黏度/粘度（黏性/粘性，viscosity）= 剪应力/剪应变率

剪应力 shear stress      剪应变率 shear strain rate

和温度、组分、压力有关，但与剪应变率无关



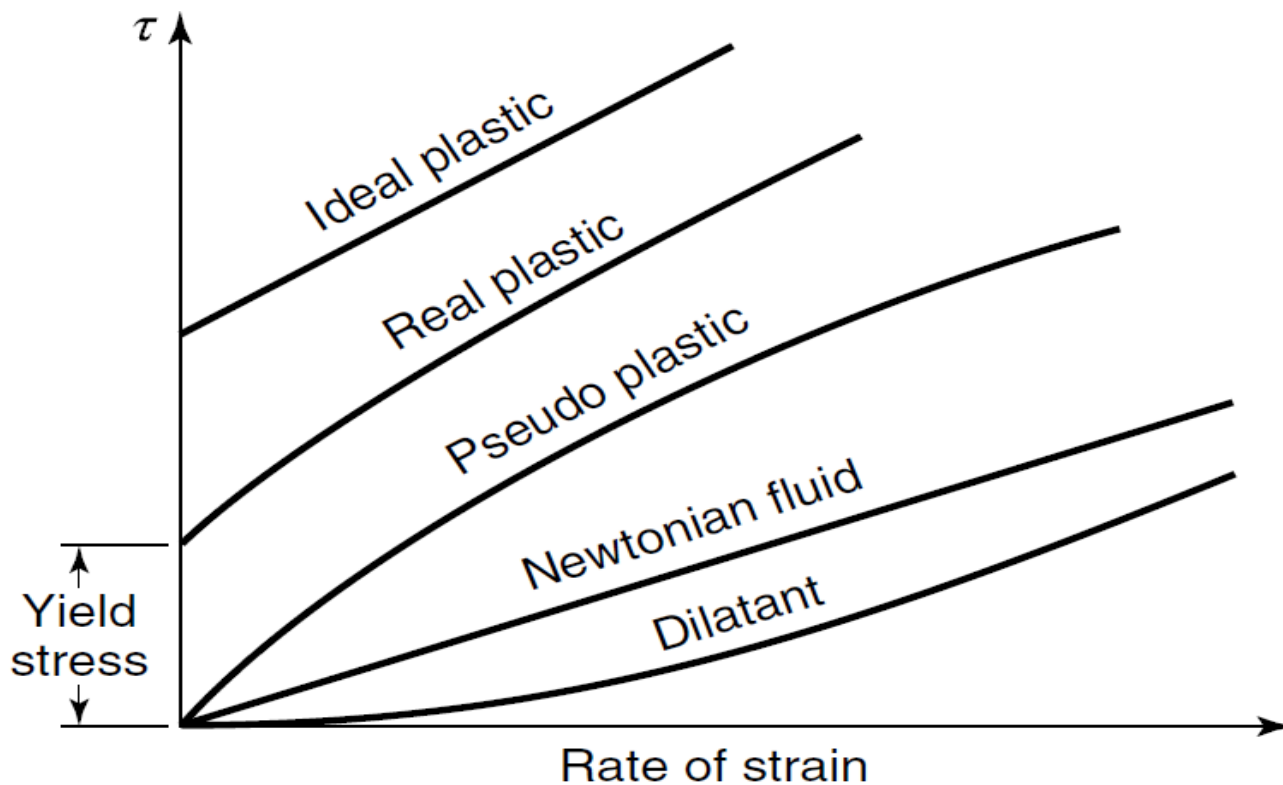
$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$\frac{F/L^2}{(L/t)(1/L)} = \frac{Ft}{L^2}$$

量纲

SI: kg/m·s 或者 Pa·s

单位



塑性流体

打印机墨水

剪切变稀 (shear thinning)

发胶, 糖浆, 血浆 (plasma)、油漆

剪切变稠 (增稠, shear thickening)

橡皮泥、流沙、玉米淀粉和水混合物

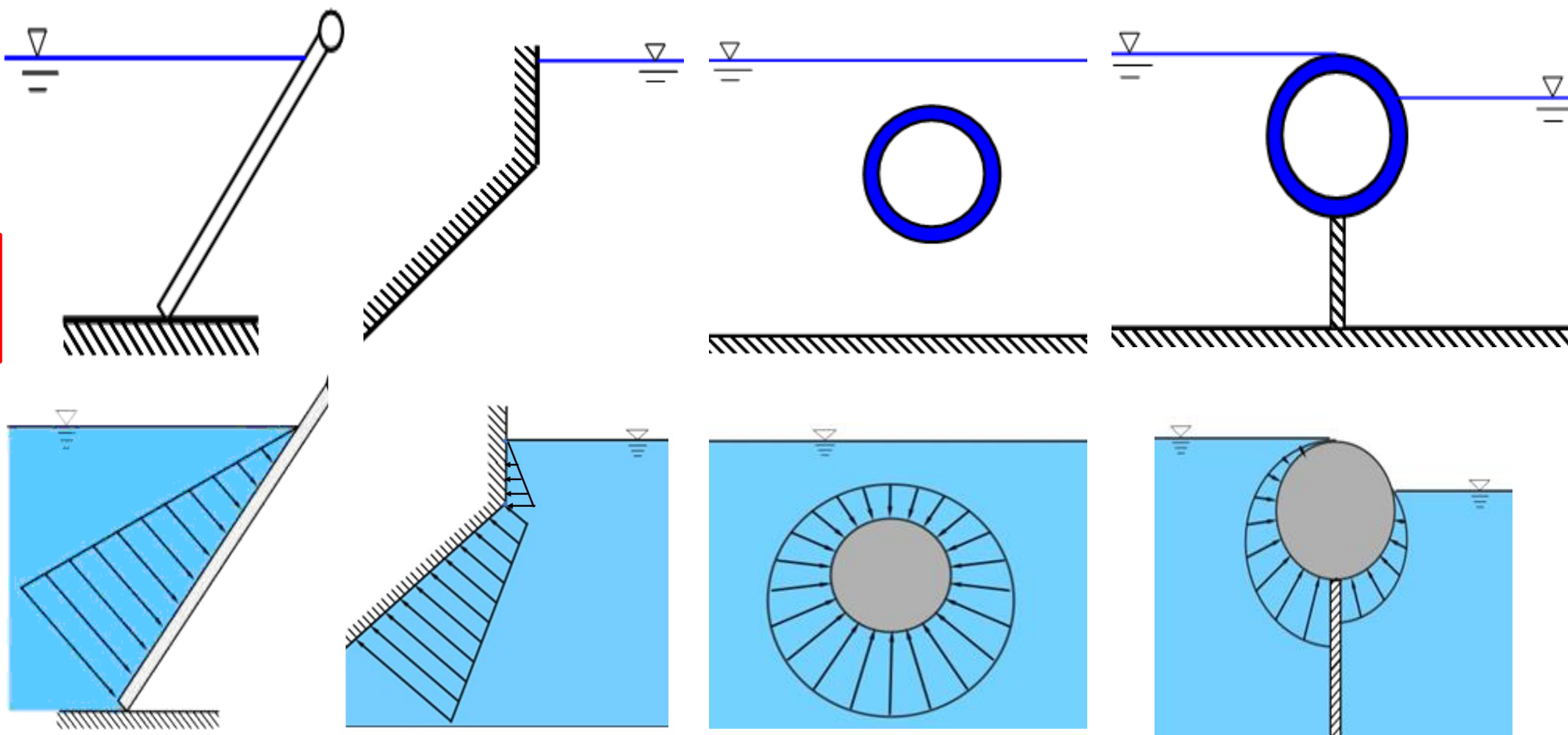
$$\tau = m \left| \frac{dv}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv}{dy}$$

## 2. 流体静力学

静压强特性

- 各向等值性—点性质(point property)，与方向无关
- 作用垂向性—总是作用于物体表面法向
- 压强变化最大的方向沿着重力方向
- 压强等值面垂直于重力方向

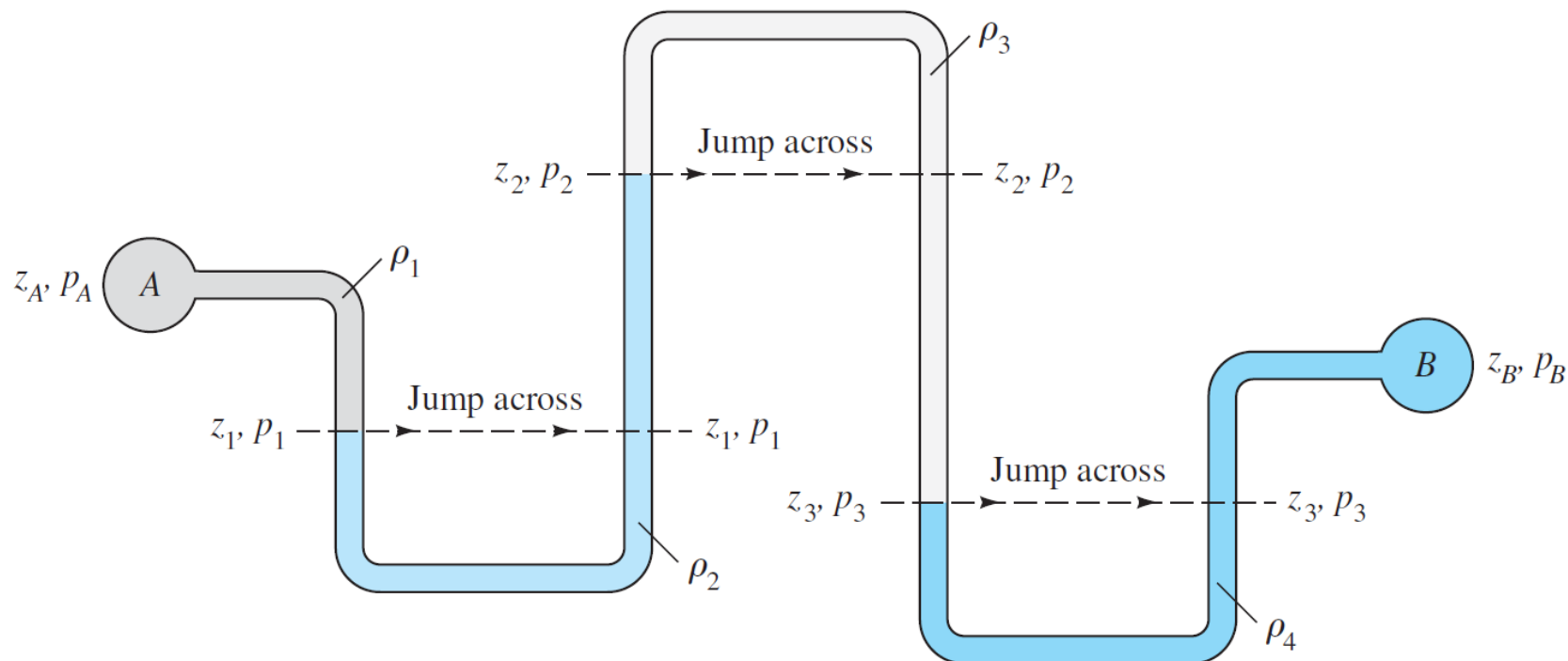
会画静压强  
受力图



# 例：多种流体的压力计

帕斯卡定理

会求A、B两点的压强关系



$$p_A + \rho_1 g(z_A - z_1) - \rho_2 g(z_2 - z_1) + \rho_3 g(z_2 - z_3) - \rho_4 g(z_B - z_3) = p_B$$



## 例：大气压强计算（等温假设）

在重力作用下，大气压强分布的变化有

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

对理想气体，压强可表示为  $p = \rho RT$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g$$

对  $z_1$ 、 $z_2$  两个高度积分，得到

$$\int_1^2 \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} \int_1^2 \frac{dz}{T}$$

等温假设下，有

$$p_2 = p_1 \exp \left[ -\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0} \right] \quad \underline{R = 287 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})}$$

几个需要注意的地方：

高度对重力的影响

$$g = g_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2$$

教材 例2中

$$P = \rho RT/M$$

$$\frac{P}{P_{\text{atm}}} = \exp \left\{ -\frac{Mgy}{RT} \right\}$$

通用气体常数  $R = 8314.3 \text{ J}/(\text{kmol K})$

需要除以分子量 29，才能不混淆

## 例：大气压强计算（有温度变化）

温度随着高度（< 11000 m）的变化

$$T \approx T_0 - Bz$$

$$B = 0.00650 \text{ K/m}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{R(T_0 - Bz)} g$$

$$\int_1^2 \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_1^2 \frac{dz}{T_0 - Bz}$$

$$\text{得到 } p = p_0 \left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{g/(RB)}$$

估算5000 m高度上的气压

变温度条件下，有

$$p \approx 54000 \text{ Pa}$$

等温假设下，有

$$p_2 = p_1 \exp \left[ -\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0} \right]$$

$$p \approx 56000 \text{ Pa}$$

存在4% 误差！

### 3. 流体分析基本原理

#### 流体力学遵循的定律及对应方程

定律

方程

质量守恒定律

连续性方程

牛顿运动第二定律

动量方程

热力学第一定律

能量方程

## □ 两种运动描述(观点)的对比

### 拉格朗日描述

描述物理量的随体变化

着眼于质点

有限质点

强调历史相关(如轨迹)

不适合描述流体微元的运动  
变形特征

通常表达式较为复杂,  
但此方法很重要

### 欧拉描述

描述物理量的空间变化

着眼于空间点

场

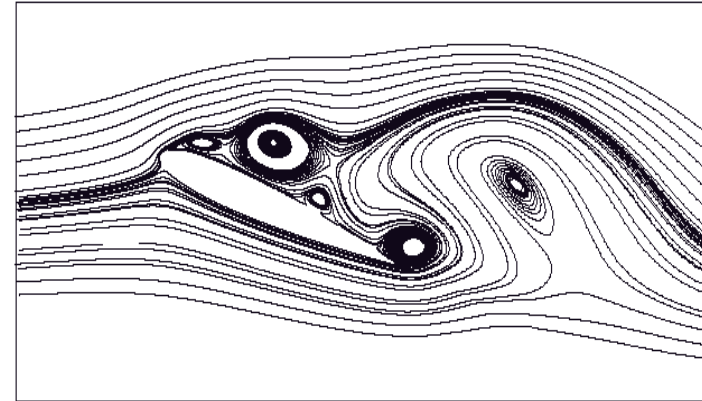
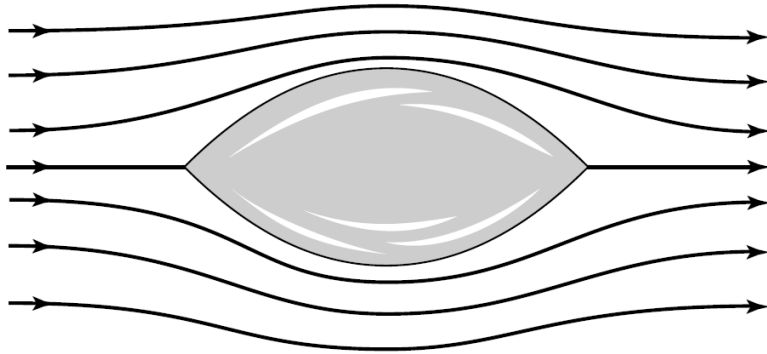
强调瞬时的空间相关

适合描述流体微元的运动  
变形特征

表达式简单,  
在流体力学中常用

## 流线(streamline)

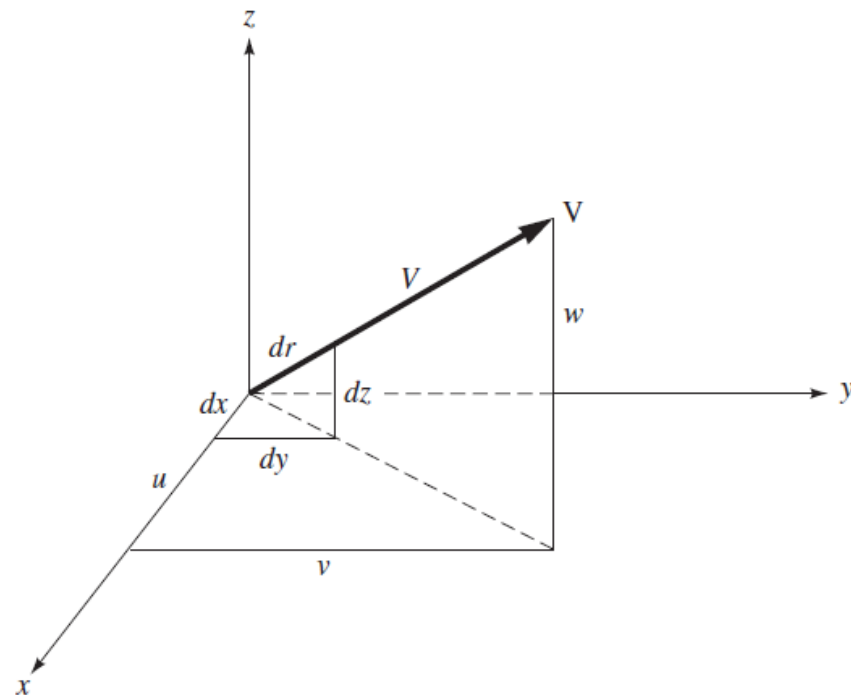
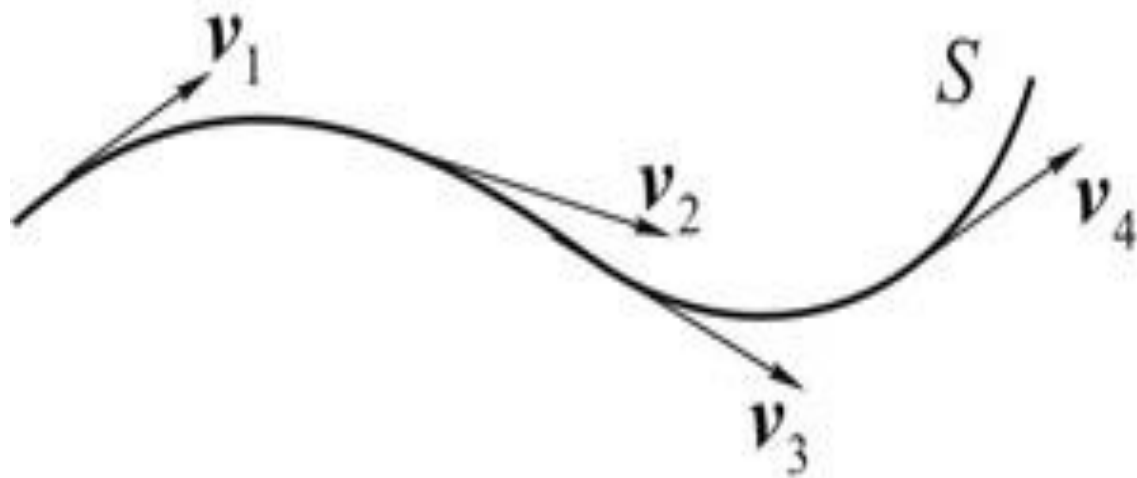
- 流线是流场中任一时刻的一条几何曲线，其上各点的速度矢量均与此曲线相切。因此，流线是同一时刻，不同流体质点所组成的曲线。由欧拉法引出。



## □ 流线特点:

- 流线是假想的线，且具有瞬时性（ $t$ 是参数）；
- 在定常流中，速度场不随时间改变，即  $\partial \vec{v} / \partial t \equiv 0$ ，流线簇也不随时间改变，用一幅流线图就可以表示出流场的全貌。
- 流线不能相交和分支，否则在同一空间点上流体质点将同时有几个不同的流动方向。
- 流线不能突然折转，是一条光滑的连续曲线。
- 流线密集的地方，表示流场中该处的流速较大，稀疏的地方，表示该处的流速较小。





- 流线积分方程
- 能够根据速度求流线方程

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{dr}{V}$$

**P1.81** Use Eq. (1.39) to find and sketch the streamlines of the following flow field:

$$u = Kx; v = -Ky; w = 0, \text{ where } K \text{ is a constant.}$$

**P1.82** A velocity field is given by  $u = V \cos\theta$ ,  $v = V \sin\theta$ , and  $w = 0$ , where  $V$  and  $\theta$  are constants. Derive a formula for the streamlines of this flow.

## 例：流线计算

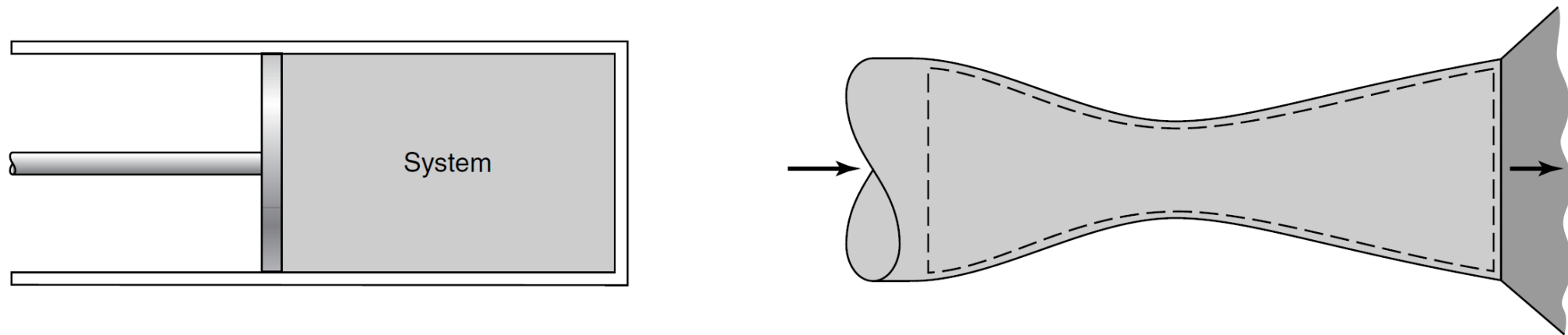
已知速度场  $u = x + t, \quad v = -y - t$

求：过(1,1)点的流线

解：  $\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y-t} \Rightarrow (x+t)(y+t) = c_1$

$$(1+t)(1+t) = c_1 \quad \longrightarrow \quad (x+t)(y+t) = (1+t)^2$$

在 $t=0$ 时刻，流线方程为  $xy = 1$



- 守恒律需要在某一系统 (system) 内才成立
- 多数情况下，难以对变化多端的流动定义一个系统
- 控制体 (control volume) 相对容易定义，适合于变化多端的流动分析
- 控制体可以是有限尺寸，也可以是无限小

# 几类分析方法的特点

## □ 控制体（large-scale）分析

对任何流动情况都是“准确”的，在边界上的平均或者“一维”物理量，适合工程应用  
Bernoulli, Prandtl

## □ 微分（differential, small-scale）分析

适用于任何流动，但多数情况没有精确的解析解，可用数值模拟（CFD，计算流体力学）  
Euler, d'Alembert

## □ 实验或者量纲（experimental or dimensional）分析

适用于理论、数值、实验，能降低实验费用  
Rayleigh, Buckingham

# 积分形式（控制体）的动量平衡方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{作用在控制体} \\ \text{的合力} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{控制体的} \\ \text{动量增长率} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{流出控制体的} \\ \text{动量变化率} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{流入控制体的} \\ \text{动量变化率} \end{array} \right\}$$

控制体的动量平衡方程，  
或者动量定理  
(momentum theorem)

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left( \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\mathcal{V} \right) + \int_{CS} \mathbf{V} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA$$

对一维流动，有

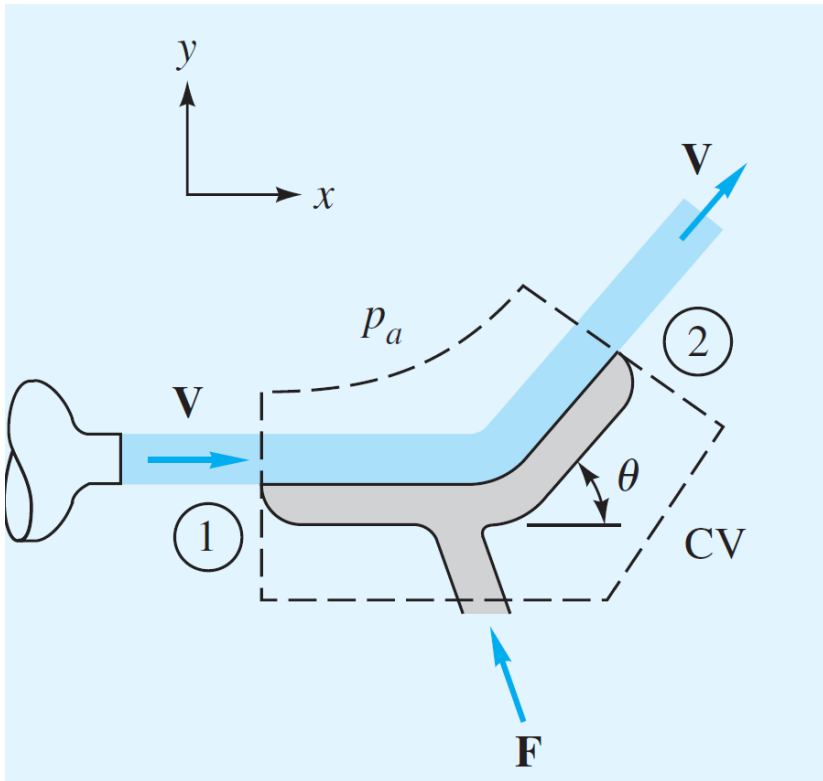
$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left( \int_{CV} \mathbf{V} \rho d\mathcal{V} \right) + \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{\text{out}} - \sum (\dot{m}_i \mathbf{V}_i)_{\text{in}}$$

注意符号！

## 例：水流冲击的受力分析

As shown in Fig. 3.8a, a fixed vane turns a water jet of area  $A$  through an angle  $\theta$  without changing its velocity magnitude. The flow is steady, pressure is  $p_a$  everywhere, and friction on the vane is negligible. (a) Find the components  $F_x$  and  $F_y$  of the applied vane force.

$$V_1 = V_2 = V$$



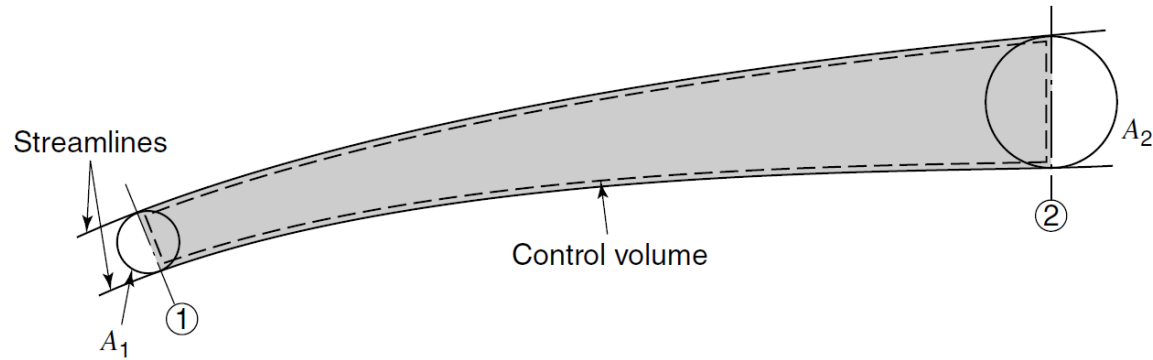
$$\mathbf{F}_{\text{vane}} = \dot{m}_2 \mathbf{V}_2 - \dot{m}_1 \mathbf{V}_1$$

$$F_x = \dot{m}V(\cos \theta - 1) \quad F_y = \dot{m}V \sin \theta$$

$$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} = \dot{m}V[\sin^2 \theta + (\cos \theta - 1)^2]^{1/2} = 2\dot{m}V \sin \frac{\theta}{2}$$



# 伯努利方程 (Bernoulli Equation)



$$\frac{\delta Q}{dt} = 0 \quad \frac{\delta W_s}{dt} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{c.v.}} e \rho dv = 0$$

稳态、不可压缩、无黏、等温流动的控制体

$$\begin{aligned} \iint_{\text{c.s.}} \rho \left( e + \frac{P}{\rho} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA &= \iint_{A_1} \rho \left( e + \frac{P}{\rho} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \left( gy_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} \right) (-\rho_1 v_1 A_1) \\ &+ \iint_{A_2} \rho \left( e + \frac{P}{\rho} \right) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \left( gy_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} \right) (-\rho_2 v_2 A_2) \end{aligned}$$

$$0 = \left( gy_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} \right) (\rho v_2 A_2) - \left( gy_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} \right) (\rho v_1 A_1) \quad \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

$$gy_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = gy_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}$$

或两边除以g，得

$$y_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} = y_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g}$$

具有长度量纲 **xx头 (xx head)**

## 4. 层流流动分析：从控制体到流体微元

**流体微元：** 由大量流体质点组成的具有线性尺度效应的微小流体团。

控制体

流体微元

不关心细节

从另一种角度

穿过表面的物理量

导出微分方程

物理量的总变化

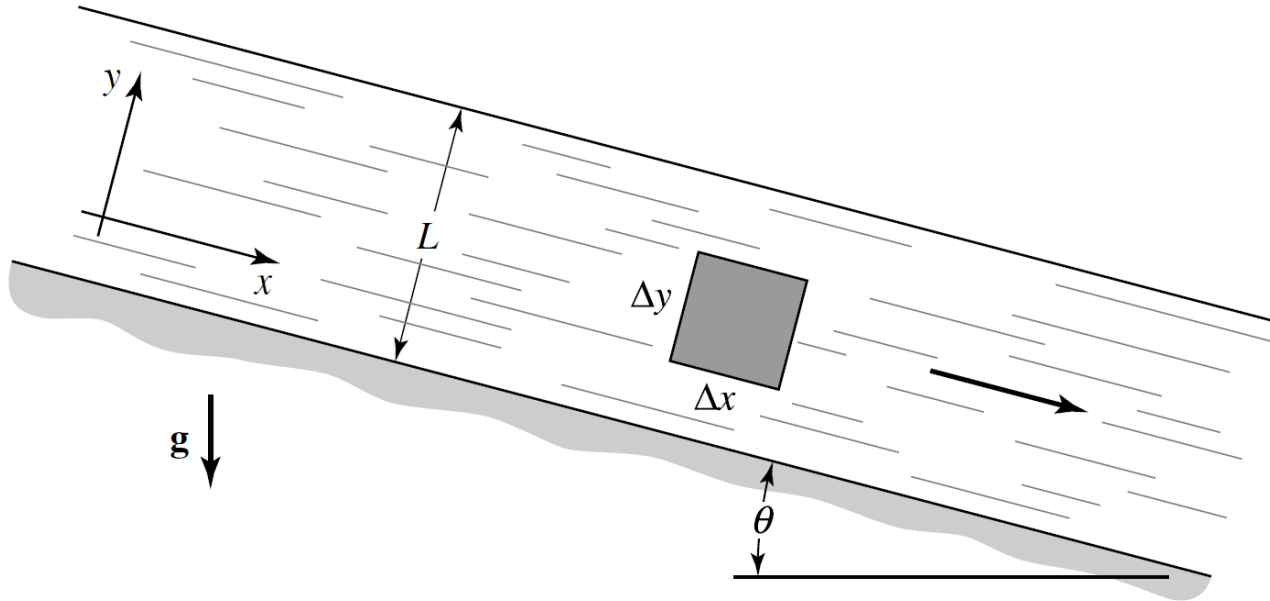
理解各种物理量变化机制

积分

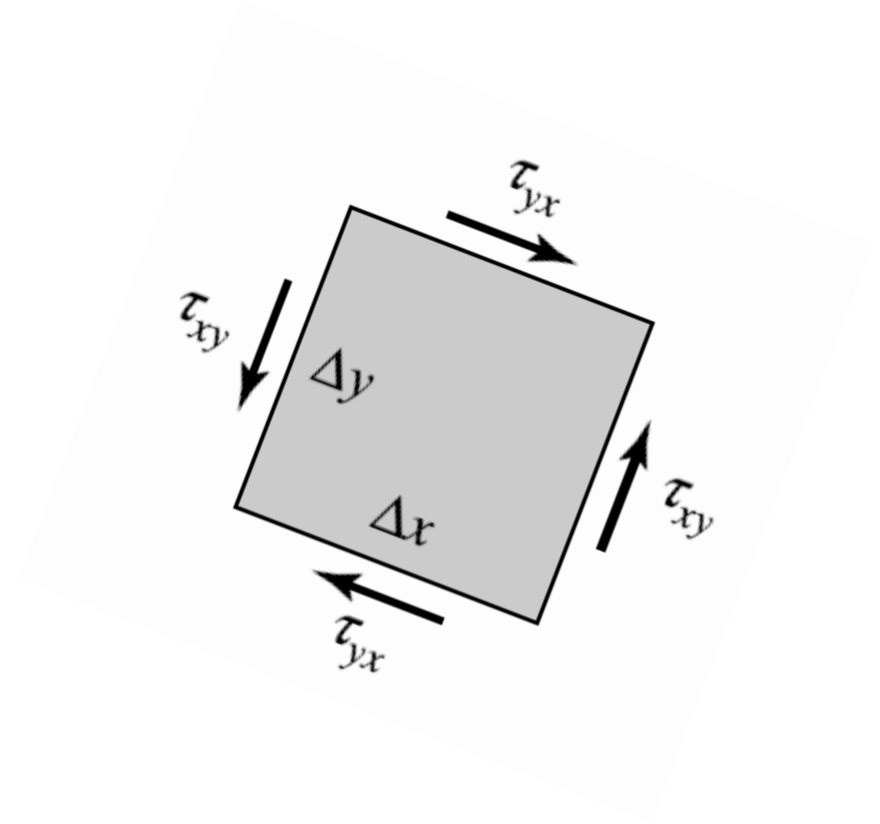


微分

## 例：牛顿流体沿倾斜平面向下的层流流动



注意坐标和微元的选取



回忆一下剪应力下标含义

$x$ 方向动量守恒

$$\Sigma F_x = \iint_{\text{c.s.}} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{c.v.}} \rho v_x dV$$

在微元上计算各项

$$\Sigma F_x = P \Delta y|_x - P \Delta y|_{x+\Delta x} + \tau_{yx} \Delta x|_{y+\Delta y} - \tau_{yx} \Delta x|_y + \rho g \Delta x \Delta y \sin \theta$$

$$\iint_{\text{c.s.}} \rho v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \rho v_x^2 \Delta y|_{x+\Delta x} - \rho v_x^2 \Delta y|_x$$

稳态流动，有

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\text{c.v.}} v_x \rho dV = 0$$

充分发展流动，有

$$\rho v_x^2 \Delta y|_{x+\Delta x} - \rho v_x^2 \Delta y|_x = 0$$

各项代入第一个方程，得

$$\tau_{yx} \Delta x|_{y+\Delta y} - \tau_{yx} \Delta x|_y + \rho g \Delta x \Delta y \sin \theta = 0$$

$$\frac{\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y}{\Delta y} + \rho g \sin\theta = 0$$

求极限，有  $\frac{d}{dy} \tau_{yx} + \rho g \sin\theta = 0$

对 $y$ 求积分，有  $\tau_{yx} = -\rho g \sin\theta y + C_1$

利用 $y=L$ 处为自由面，剪应力为零的条件，得

$$\tau_{yx} = \rho g L \sin\theta \left[ 1 - \frac{y}{L} \right]$$

牛顿流体存在剪应力与剪应变存在线性关系，上式可变为  $\frac{dv_x}{dy} = \frac{\rho g L \sin\theta}{\mu} \left[ 1 - \frac{y}{L} \right]$

对上式再一次积分，有  $v_x = \frac{\rho g L \sin \theta}{\mu} \left[ y - \frac{y^2}{2L} \right] + C_2$

$$\frac{dv_x}{dy} = \frac{\rho g L \sin \theta}{\mu} \left[ 1 - \frac{y}{L} \right]$$

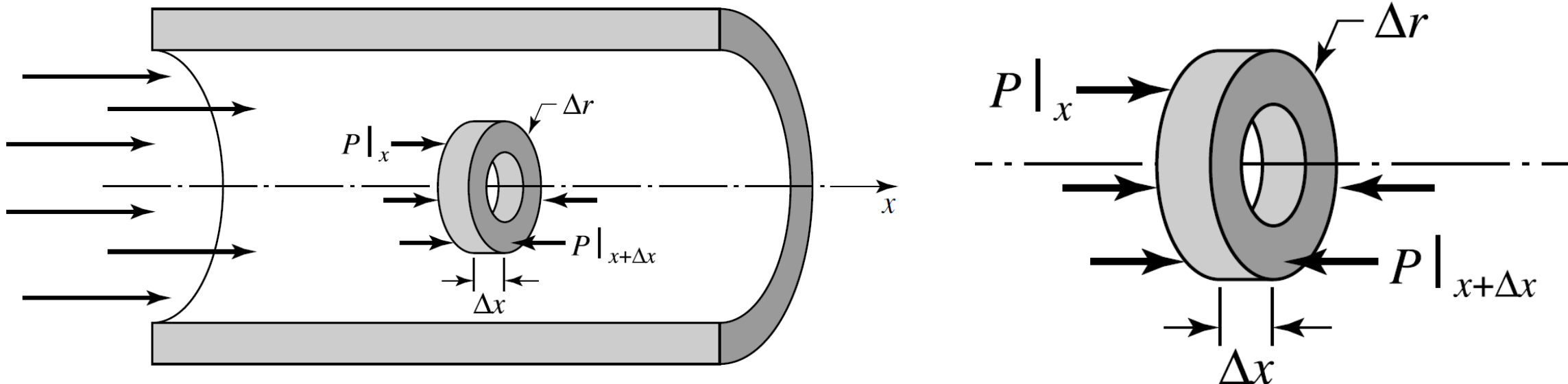
考虑到  $y=0$  壁面处的无滑移速度条件，得  $C_2 = 0$

得到抛物型速度分布  $v_x = \frac{\rho g L^2 \sin \theta}{\mu} \left[ \frac{y}{L} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{L} \right)^2 \right]$

$y=L$  自由面处速度最大，有  $v_{\max} = \frac{\rho g L^2 \sin \theta}{2\mu}$

简单积分比较，可以得到  $v_{avg} = \frac{2v_{max}}{3}$

# 圆管情况



$$v_{\text{avg}} = \frac{v_{\text{max}}}{2} = - \left( \frac{dP}{dx} \right) \frac{R^2}{8\mu}$$

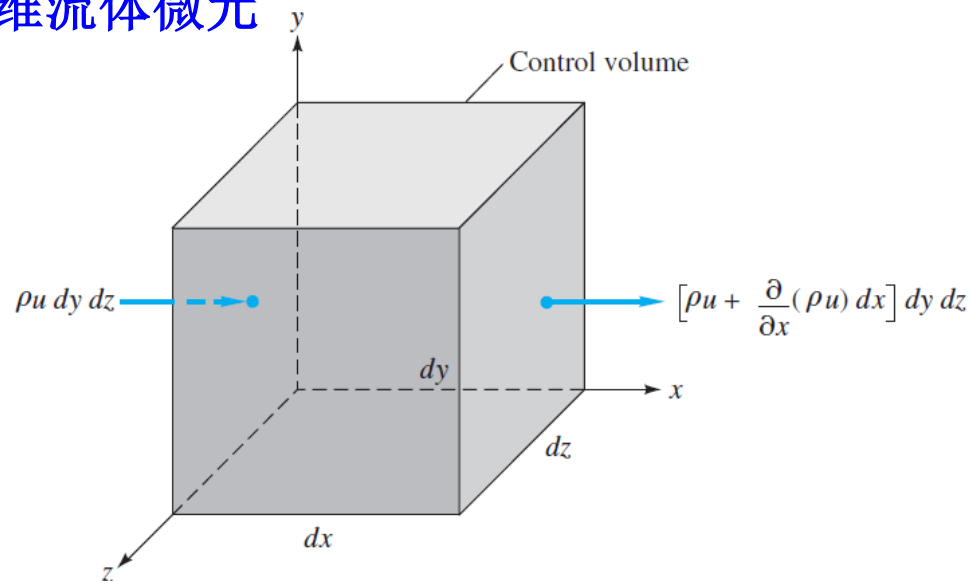
$$- \frac{dP}{dx} = \frac{8\mu v_{\text{avg}}}{R^2} = \frac{32\mu v_{\text{avg}}}{D^2}$$

**Hagen-Poiseuille equation, 海根-泊肃叶方程**



# 微分形式的质量守恒方程（连续方程）

取三维流体微元



微元无限小，有  $\iiint_{CV} \rho dV \approx \rho dx dy dz$

根据质量守恒关系，有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dx dy dz = 0$$

除以  $dx dy dz$ ，得到连续方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0$$

或者写成矢量形式  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$

散度 divergence

定常流动，有  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$

不可压缩流动，有  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$

Face	Inlet mass flow	Outlet mass flow
x	$\rho u dy dz$	$\left[ \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dx \right] dy dz$
y	$\rho v dx dz$	$\left[ \rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dy \right] dx dz$
z	$\rho w dx dy$	$\left[ \rho w + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dz \right] dx dy$

## 例：判断满足质量守恒

存在速度场  $\mathbf{V} = (a_1x + b_1y + c_1z)\mathbf{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\mathbf{j} + (a_3x + b_3y + c_3z)\mathbf{k}$  ,

在什么情况下, 是质量守恒的不可压缩流动?

各个速度分量代入不可压缩连续方程  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}(a_1x + b_1y + c_1z) + \frac{\partial}{\partial y}(a_2x + b_2y + c_2z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_3x + b_3y + c_3z) = 0$$

得到条件

$$a_1 + b_2 + c_3 = 0$$

注意：其他系数可以任意选取

能够判断流动是否满足质量守恒

# 不可压缩Navier-Stokes方程形式及欧拉方程

对不可压缩流动

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

NS方程化简为:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

1. incompressible flow,
2. constant viscosity,
3. laminar flow.<sup>2</sup>

引入随体导数概念:  
(substantial derivative)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

写成矢量形式:

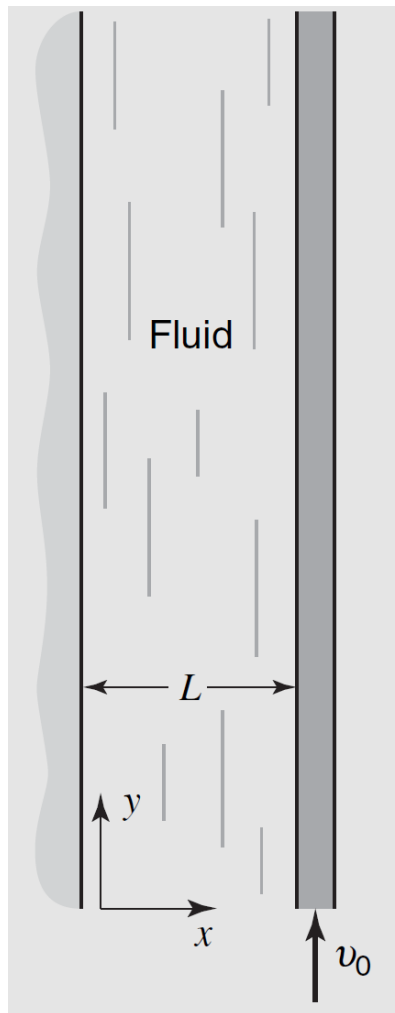
$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

如果无黏性, 则变为欧拉方程 (Euler's equation):

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla P$$

记忆!

# 例：垂直平板间的不可压缩牛顿流体定常流动分析



求解不可压缩NS方程

各项表达式

得到控制方程  
(governing equations)

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right\} = 0 \quad \text{为什么?}$$

$$\rho \mathbf{g} = -\rho g \mathbf{e}_y$$

$$\nabla P = \frac{dP}{dy} \mathbf{e}_y$$

$$\frac{dP}{dy} \quad \text{为常数}$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \mu \frac{d^2 v_y}{dx^2} \mathbf{e}_y \quad \text{只有在y方向存在速度分量}$$

$$0 = -\rho g - \frac{dP}{dy} + \mu \frac{d^2 v_y}{dx^2}$$

$$0 = -\rho g - \frac{dP}{dy} + \mu \frac{d^2 v_y}{dx^2}$$

对 $x$ 积分一次，得到

$$\frac{dv_y}{dx} + \frac{x}{\mu} \left\{ -\rho g - \frac{dP}{dy} \right\} = C_1$$

再对 $x$ 积分一次，得到

$$v_y + \frac{x^2}{2\mu} \left\{ -\rho g - \frac{dP}{dy} \right\} = C_1 x + C_2$$

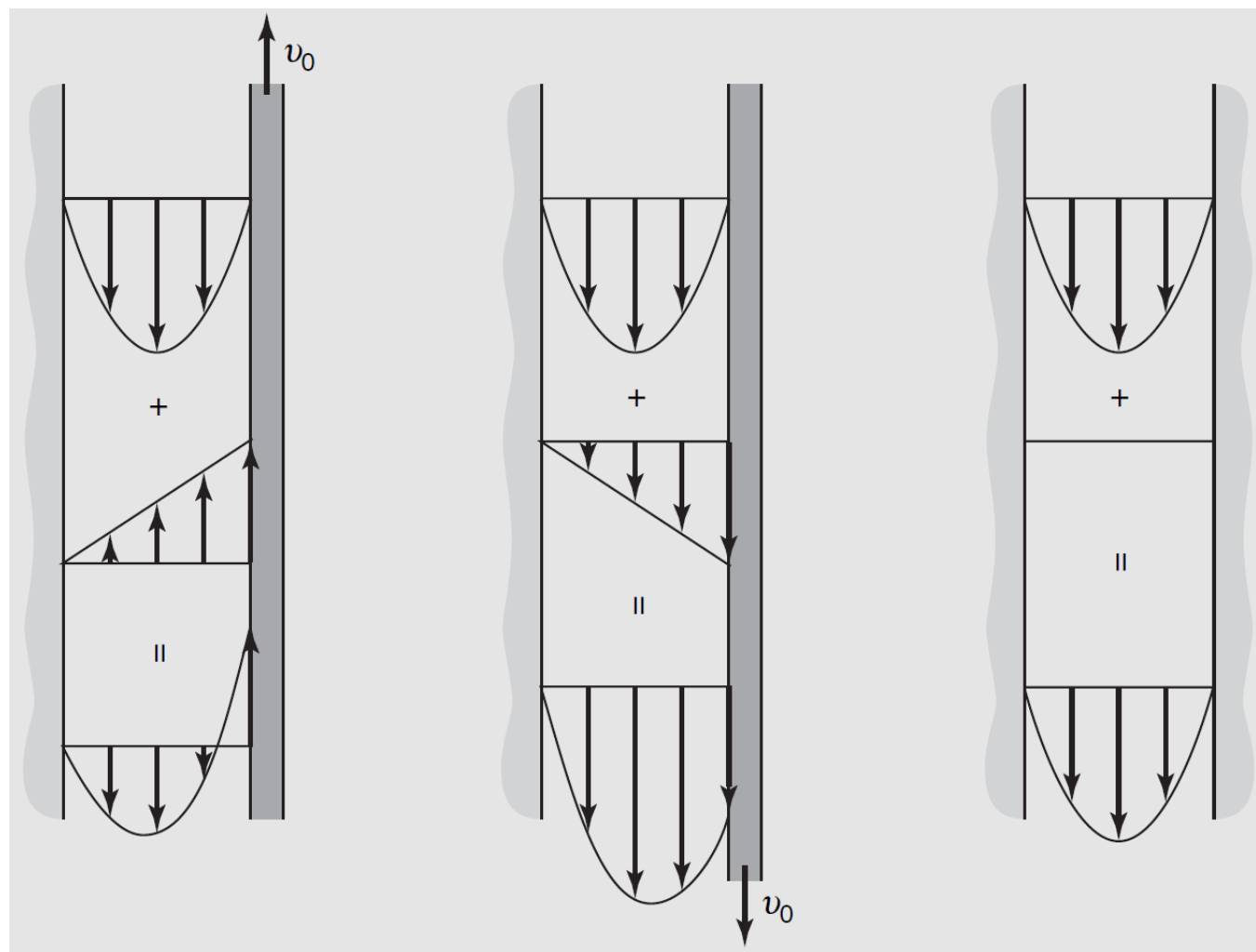
利用平板上的两个边界条件  $x = 0, v_y = 0$  以及  $x = L, v_y = v_0$ ，可以确定两个积分常数，

$$C_1 = \frac{v_0}{L} + \frac{L}{2\mu} \left\{ -\rho g - \frac{dP}{dy} \right\} \quad \text{and} \quad C_2 = 0$$

最终的速度表达式为

$$v_y = \underbrace{\frac{1}{2\mu} \left\{ -\rho g - \frac{dP}{dy} \right\} \{Lx - x^2\}}_{\text{①}} + \underbrace{v_0 \frac{x}{L}}_{\text{②}}$$

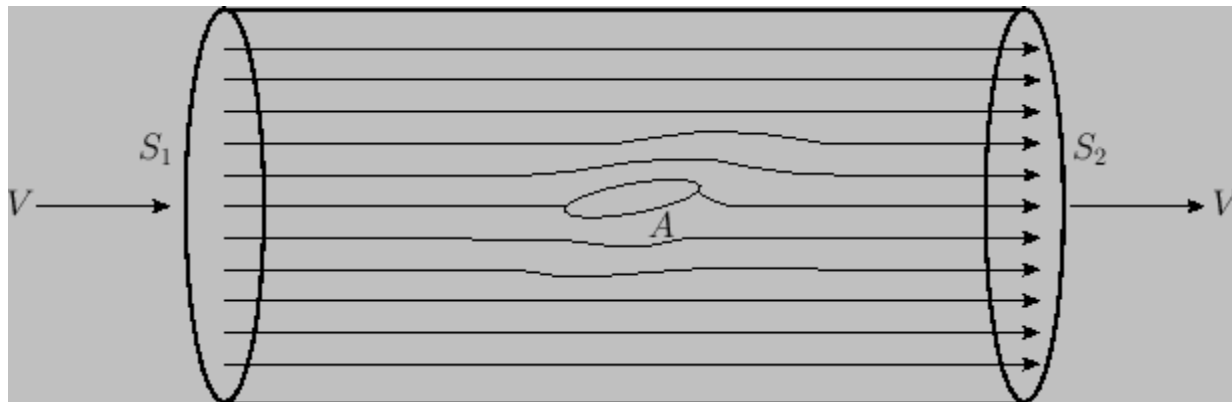
两个速度的线性叠加！  
为什么？



不同运动速度的线性叠加

## 5. 理想流体流动和量纲分析

理想流体 (inviscid fluid): 黏度为0



达朗贝尔佯谬 (d'Alembert's Paradox, 1752):

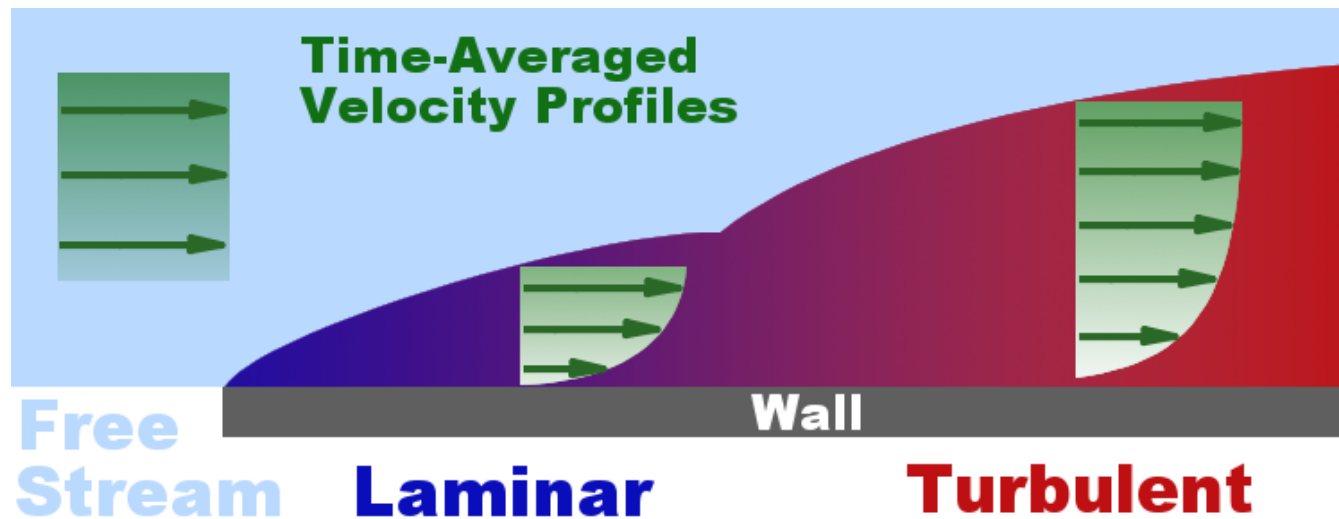
在均匀流场里任何形状的物体受力为零!

这个结论导致每个人都反应过度, 从而拒绝无黏流理论

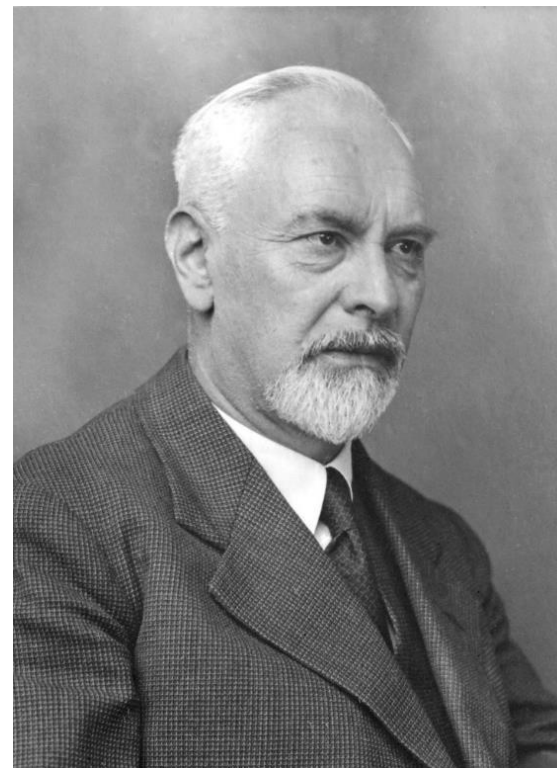


法国数学家达朗贝尔  
(1717-1783)





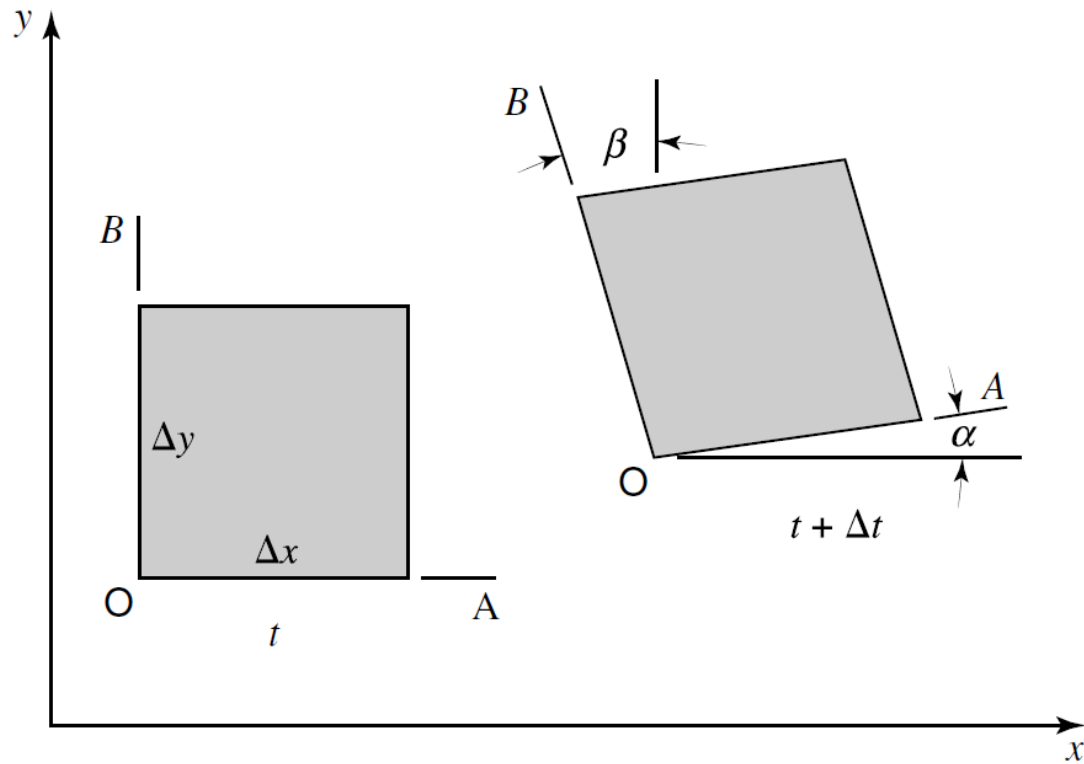
建立了边界层理论（boundary layer theory），解释了阻力产生的机制。提出混合长度理论，论述了有限翼展机翼理论。对现代航空工业的发展作出了重要的贡献。



**普朗特**（德国）

Ludwig Prandtl, 1875—1953

# 流体在一点上的旋转(rotation)



xy平面上流体微元的旋转

$$\omega_z = \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

在流体微元上表示, 有

$$\omega_z = \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( \frac{\arctan \{ [(v_y|_{x+\Delta x} - v_y|_x) \Delta t] / \Delta x \}}{\Delta t} + \frac{\arctan \{ -[(v_x|_{y+\Delta y} - v_x|_y) \Delta t] / \Delta y \}}{\Delta t} \right)$$

求极限, 得到

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

所有三个平面都可以写出类似的表达式

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$$

3个角速度分量构成一点领域内的角速度矢量:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{V})$$

$\nabla \times \mathbf{V}$  为流场中速度的旋度 (vorticity)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

会判断有旋无旋

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

$\nabla \times \mathbf{v} = 0$ , 称为流动无旋

# 流函数 (stream function)

连续性方程: 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

二维不可压缩流动: 
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

引入一个函数使得: 
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \equiv 0$$

对比上面两个方程, 得到:

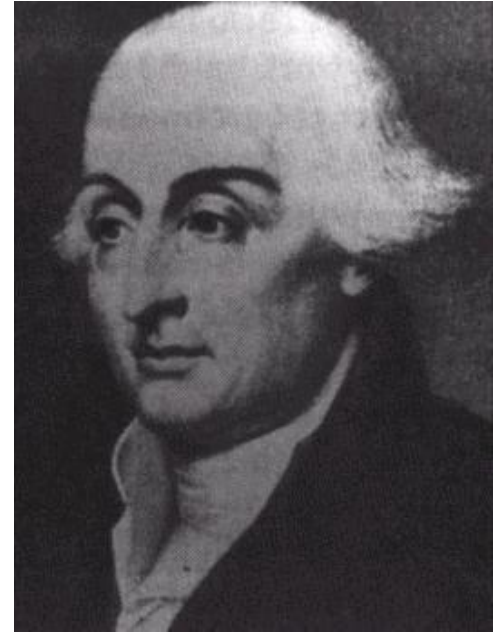
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

即速度表达为

$$\mathbf{V} = \mathbf{i} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \mathbf{j} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

函数  $\psi = \psi(x, y)$  称为流函数

□ 流函数将两个变量用一个高阶函数代替



**拉格朗日(法国)**

(J. L. Lagrange, 1736 – 1813)

提出新的流体动力学微分方程, 使流体动力学的解析方法有了进一步发展, 并提出了流函数和速度势的概念。

## 掌握：已知速度场，求流函数

已知速度场  $u = a(x^2 - y^2) \quad v = -2axy \quad w = 0$

首先检查是否满足连续性

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} [a(x^2 - y^2)] + \frac{\partial}{\partial y} (-2axy) = 2ax + (-2ax) \equiv 0$$

写出方程

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax^2 - ay^2 \quad (1)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2axy \quad (2)$$

对(1)积分，有

$$\psi = ax^2y - \frac{ay^3}{3} + f(x)$$

将上式对x求导，

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2axy + f'(x) = 2axy$$

对比后，必然有  $f(x) = \text{constant}$

流函数为

$$\psi = a \left( x^2y - \frac{y^3}{3} \right) + C$$

# 无旋流动的速度势 (velocity potential)

如果一个矢量的旋度为零，那么这个矢量可表达为一个标量的梯度

对无旋流动  $\nabla \times \mathbf{V} \equiv 0$  必然有  $\mathbf{V} = \nabla\phi$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

函数  $\phi = \phi(x, y, z, t)$  称为速度势函数(velocity potential function)，速度分量可表达为

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

速度势函数性质：

- 只有在无旋流动下存在
- 对可压缩、非稳态流动也适用
- 对三维流动适用

对不可压缩流动，连续性方程为  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

因此

$$\nabla^2 \phi = 0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

势函数满足拉普拉斯方程



# 流函数与势函数的性质

## 流函数

1. 二维稳态不可压缩流动，有黏无黏都存在流函数
2. 流函数为常数对应的各条线是流线
3. 流函数满足连续性方程
4. 对无旋稳态不可压缩流动，流函数满足拉普拉斯方程  $\nabla^2 \Psi = 0$

## 速度势

1. 只要流动无旋，就存在速度势
2. 速度势的梯度是速度
3. 对稳态不可压缩流动，速度势满足拉普拉斯方程  $\nabla^2 \phi = 0$
4. 对稳态不可压缩流动，速度势和流函数正交

# 掌握：求二维流动的流函数和速度势

已知二维流动的速度分布，求流函数和速度势

$$u = 16y - x \quad v = 16x + y$$

可以检查连续性是否满足

引入流函数，有

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 16y - x \quad (1) \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 16x + y \quad (2)$$

对方程1、2积分均可，选择对1进行积分，有

$$\Psi = 8y^2 - xy + f_1(x) \quad (3)$$

方程3对x进行微分，有

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = y - f_2(x) \quad (4) \quad \text{这里} \quad f_2(x) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x}$$

比较方程2和4，得到

$$f_2(x) = -16x$$

对上式积分，得到

$$f_1(x) = -8x^2 + C$$

代回方程3，得到

$$\Psi = 8y^2 - xy - 8x^2 + C$$

在此式中，常数C无意义，可去除

$$\underline{\Psi = 8y^2 - xy - 8x^2}$$

# 掌握：求二维流动的流函数和速度势

求解速度之前，先确认是无旋流动

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (16 - 16) = 0$$

引入速度势，有  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = 16y - x$

对x进行积分，有  $\phi = 16xy - \frac{x^2}{2} + f(y)$

速度势对y进行微分，并等于y方向的速度分量，有

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 16x + \frac{d}{dy}f(y) = 16x + y$$

对比各项，可得到  $\frac{d}{dy}f(y) = y$  也就是  $f(y) = \frac{y^2}{2}$

最后得到速度势

$$\phi = 16xy - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

---

# 量纲分析的特点与要求



- ❑ 降低成本
- ❑ 帮助思考和计划实验或者理论：哪些参数可以忽略、方程如何反映物理本质
- ❑ 通过标度律（**scaling law**）将实验模型获得的数据推广到实际原型上

量纲分析是一门需要练习的学术能力，也是一门艺术和技巧

Do you understand these introductory explanations? Be careful; learning dimensional analysis is like learning to play tennis: There are levels of the game. We can establish some ground rules and do some fairly good work in this brief chapter, but dimensional analysis in the broad view has many subtleties and nuances that only time, practice, and maturity enable you to master. Although dimensional analysis has a firm physical and mathematical foundation, considerable art and skill are needed to use it effectively.

Euler (1765)   Fourier (1822)   Rayleigh (1877)   Buckingham (1914) Pi theorem   /Vaschy (1892) /Riabouchinsky (1911)  
Bridgman (1922)

量纲和谐原理 凡是正确反映物理规律的方程，各项的量纲必然一致，称为量纲和谐原理

流体力学中的基本量纲 mass  $M$ , length  $L$ , time  $T$ , and temperature  $\Theta$

常用量纲分析方法：瑞利法、白金汉Pi定量

Quantity	Symbol	Dimensions	
		$MLT\Theta$	$FLT\Theta$
Length	$L$	$L$	$L$
Area	$A$	$L^2$	$L^2$
Volume	$\mathcal{V}$	$L^3$	$L^3$
Velocity	$V$	$LT^{-1}$	$LT^{-1}$
Acceleration	$dV/dt$	$LT^{-2}$	$LT^{-2}$
Speed of sound	$a$	$LT^{-1}$	$LT^{-1}$
Volume flow	$Q$	$L^3T^{-1}$	$L^3T^{-1}$
Mass flow	$\dot{m}$	$MT^{-1}$	$FTL^{-1}$
Pressure, stress	$p, \sigma, \tau$	$ML^{-1}T^{-2}$	$FL^{-2}$
Strain rate	$\dot{\epsilon}$	$T^{-1}$	$T^{-1}$
Angle	$\theta$	None	None
Angular velocity	$\omega, \Omega$	$T^{-1}$	$T^{-1}$
Viscosity	$\mu$	$ML^{-1}T^{-1}$	$FTL^{-2}$
Kinematic viscosity	$\nu$	$L^2T^{-1}$	$L^2T^{-1}$
Surface tension	$\Upsilon$	$MT^{-2}$	$FL^{-1}$
Force	$F$	$MLT^{-2}$	$F$
...	...	...	...



# 量纲分析法：瑞利法（掌握）

## 1. 确定影响某一物理过程的影响因素

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

## 2. 假设其中一个物理量 $x_i$ ，可以表达为其他物理量的指数乘积形式

$$x_i = k x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n} \quad \dim x_i = k \dim (x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n})$$

## 3. 根据量纲和谐原理，求出各物理量的指数

## 4. 根据实验或分析求出系数 $k$

瑞利法适合比较简单问题，一般影响因素不超过4个



# 白金汉Pi ( $\pi$ ) 定理 (Buckingham Pi Theorem)

为了处理更复杂情况, Buckingham发展了一套理论来进行量纲分析, 称为 pi ( $\pi$ ) 定理:

$\pi$  定理的基本内容概括为: 任何一个物理过程, 如果包含有  $n$  个有关物理量, 其中有  $m$  个 (一般取  $m=3$ ) 为具有独立量纲的基本物理量, 则这个物理过程可由  $n$  个物理量组成的  $(n-m)$  个无量纲量表达的关系式所描述。因这些无量纲量用  $\pi$  表示, 故称该定理为  $\pi$  定理。

选取的基本物理量不能组合成无量纲量, 但加上一个变量后能成为无量纲参数

例如

$$v_1 = f(v_2, v_3, v_4, v_5) \quad MLT$$

如果选取  $v_2, v_3, v_4$  为无量纲化的独立物理量, 就有

$$\Pi_1 = (v_2)^a (v_3)^b (v_4)^c v_1 = M^0 L^0 T^0 \quad \Pi_2 = (v_2)^a (v_3)^b (v_4)^c v_5 = M^0 L^0 T^0$$





# 例：圆周运动分析

例：已知作用在做圆周运动物体上的离心惯性力 $F$ 与物体质量 $m$ ，速度 $V$ 和圆周半径 $R$ 有关，试用瑞利法给出离心力 $F$ 的表达式

$$F = f(m, v, R)$$

$$F = km^{a_1}V^{a_2}R^{a_3}$$

$$\dim F = k \dim (m^{a_1}V^{a_2}R^{a_3})$$

$$MLT^{-2} = M^{a_1}(LT^{-1})^{a_2}(L)^{a_3}$$

根据量纲和谐原理，得到方程组

$$\left. \begin{array}{l} \text{L:} \quad 1 = a_2 + a_3 \\ \text{T:} \quad -2 = -a_2 \\ \text{M:} \quad 1 = a_1 \end{array} \right\} \text{解得} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

所以

$$F = kmV^2/R$$

# 例：管道流动

At low velocities (laminar flow), the volume flow  $Q$  through a small-bore tube is a function only of the tube radius  $R$ , the fluid viscosity  $\mu$ , and the pressure drop per unit tube length  $dp/dx$ . Using the pi theorem, find an appropriate dimensionless relationship.

$$Q = f\left(R, \mu, \frac{dp}{dx}\right)$$

根据量纲和谐原理，得到方程组

$$Q = k R^{a_1} \mu^{a_2} \frac{dp^{a_3}}{dx}$$

$$\dim Q = k \dim \left( R^{a_1} \mu^{a_2} \frac{dp^{a_3}}{dx} \right)$$

$$\begin{array}{lcl} L & 3 = a_1 - a_2 - 2a_3 & a_1 = 4 \\ T & -1 = -a_2 - 2a_3 & a_2 = -1 \\ M & 0 = a_2 + a_3 & a_3 = 1 \end{array} \longrightarrow$$

$$L^3 T^{-1} = L^{a_1} (M L^{-1} T^{-1})^{a_2} (M L^{-2} T^{-2})^{a_3}$$

所以

$$Q = k \frac{dp}{dx} R^4 / \mu$$

$Q$	$R$	$\mu$	$dp/dx$
$\{L^3 T^{-1}\}$	$\{L\}$	$\{M L^{-1} T^{-1}\}$	$\{M L^{-2} T^{-2}\}$



# 几个重要的无量纲参数

$$\text{Reynolds number } Re = \frac{\rho UL}{\mu}$$

雷诺数 惯性效应与黏性效应之比，  
管道Re数2300

$$\text{Euler number (pressure coefficient) } Eu = \frac{p_a}{\rho U^2}$$

欧拉数

$$\text{Froude number } Fr = \frac{U^2}{gL}$$

弗罗德数

$$\text{Weber number } We = \frac{\rho U^2 L}{\gamma}$$

韦伯数

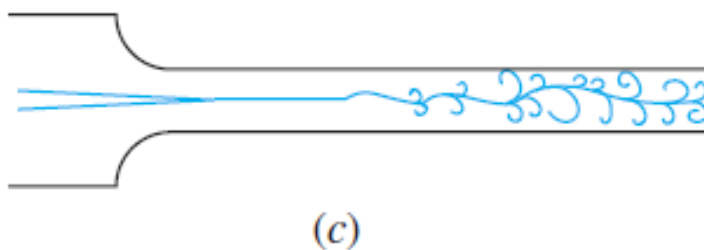
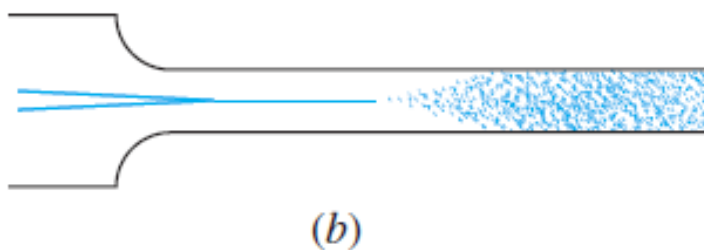
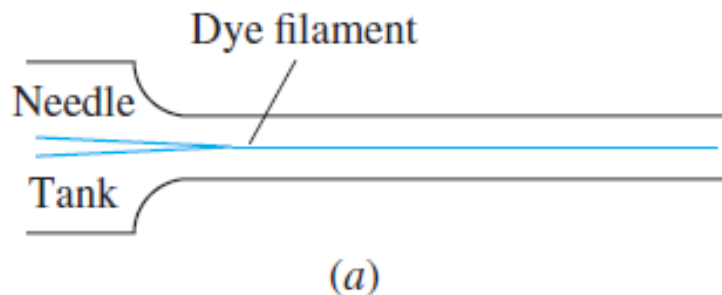
$$\text{Mach number } Ma = \frac{U}{a}$$

马赫数，速度与声速之比  
根据马赫数大小分不可压缩流、  
亚音速...

$$\text{Strouhal number } St = \frac{\omega L}{U}$$

斯托哈尔数，振荡流动

## 6. 黏性流体的流动和湍流



湍流/紊流/乱流 (turbulent flow)



雷诺实验

Source: Reynolds, "An Experimental Investigation of the Circumstances which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous and of the Law of Resistance in Parallel Channels," Phil. Trans. R. Soc., vol. 174, 1883, pp. 935–982.

雷诺 (英国北爱尔兰)

(Osborne Reynolds, 1842-1912)

证实粘性流体两种流动状态

——层流和湍流；

建立了不可压缩流体湍流运动的方程组：

雷诺方程，为湍流的研究奠定了基础。

临界Re数 (critical Re number)

$$Re_{d,crit} \approx 2300$$

- 这里的Re数是对圆管而言
- 流动扰动的存在
- 如果消除扰动，Re直到40000还可为层流

# 流动阻力(drag)

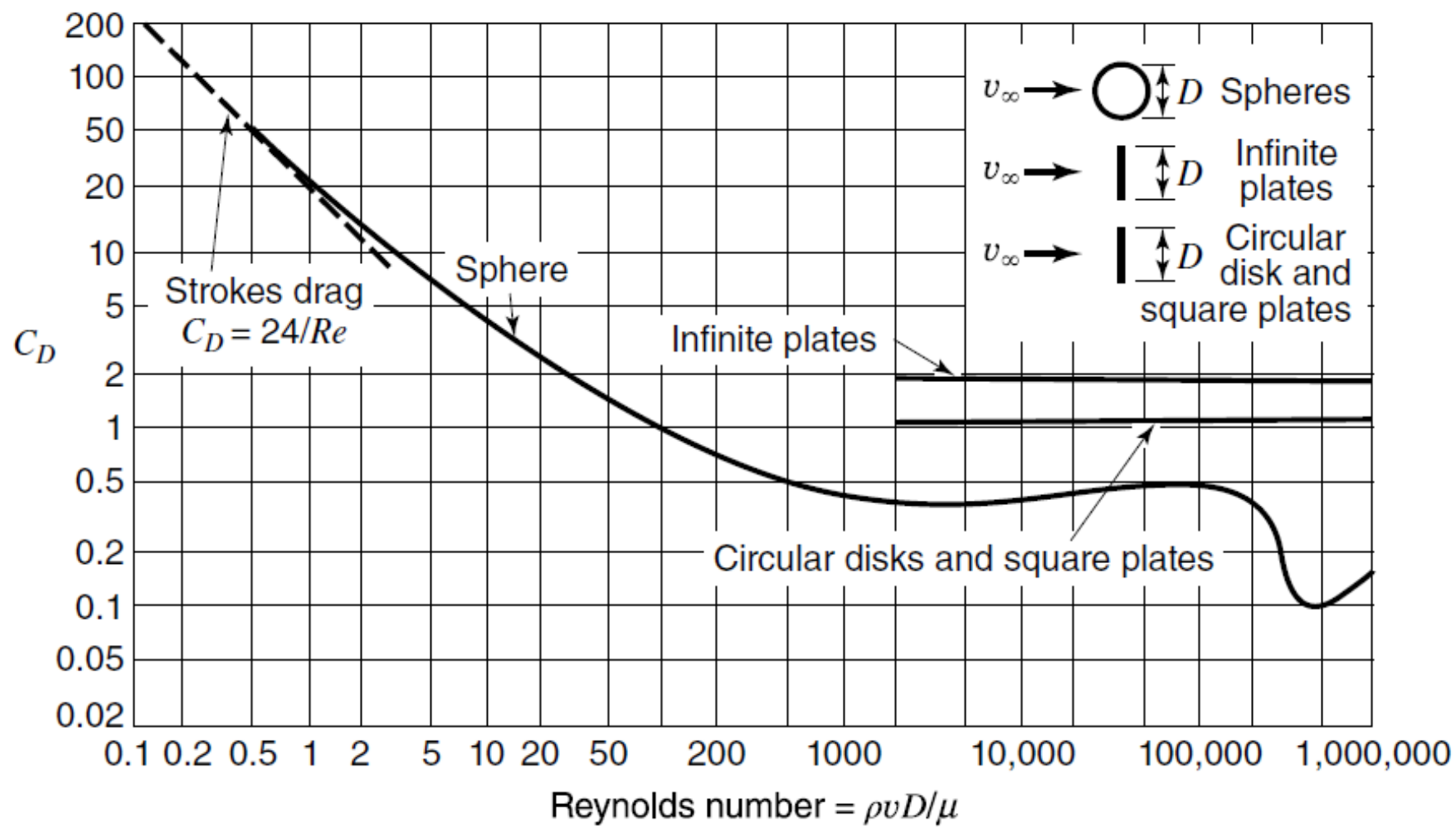
摩擦形成的阻力（**frictional drag**）来自于剪应力，可表达为表面摩擦系数的形式

$$\frac{F}{A} \equiv C_f \frac{\rho v_{\infty}^2}{2}$$

压力也会产生阻力（**pressure drag**），可表达为压力系数的形式

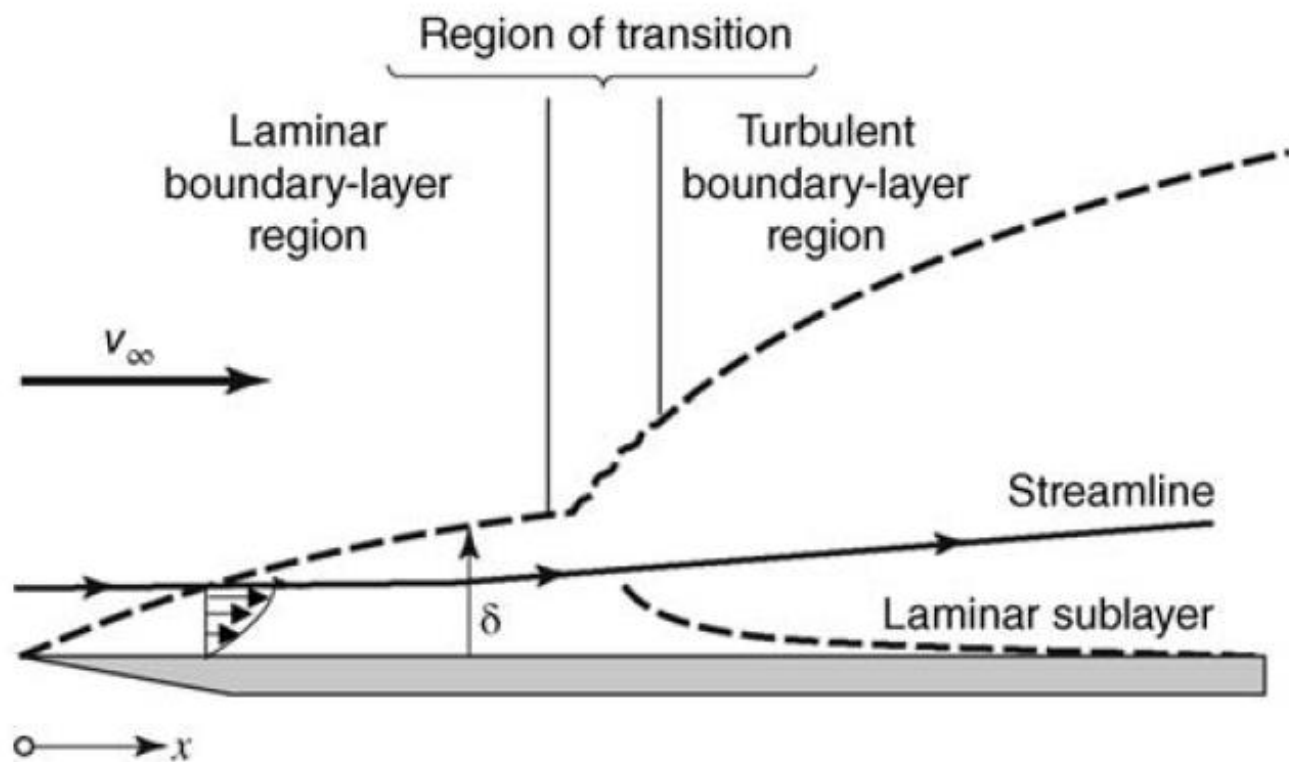
$$\frac{F}{A_P} \equiv C_D \frac{\rho v_{\infty}^2}{2}$$

注意参考面积的不同



不同外形物体的阻力系数对比

普朗特(1904)



当地雷诺数

$$\text{Re}_x \equiv \frac{xv\rho}{\mu}$$

边界层结构示意图

- (a)  $\text{Re}_x < 2 \times 10^5$  the boundary layer is laminar
- (b)  $2 \times 10^5 < \text{Re}_x < 3 \times 10^6$  the boundary layer may be either laminar or turbulent
- (c)  $3 \times 10^6 < \text{Re}_x$  the boundary layer is turbulent

# 布拉休斯解的作用

## 1. 边界层厚度

$\eta = 2.5$  时, 有  $v_x/v_\infty \cong 0.99$ , 因此在这一点上, 令  $y = \delta$

$$\eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = \frac{\delta}{2} \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = 2.5$$

得到  $\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{v_\infty}}$  或者

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\frac{v_\infty x}{\nu}}} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$



# 布拉休斯解的作用

## 2. 对宽为W、长为L的平板，Blasius解得到的平均摩擦系数

壁面速度梯度  $\frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{v_\infty}{4} \left( \frac{v_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} f''(0) = 0.332 v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$   $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{v_\infty}{4} \left( \frac{v_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} f''$

壁面剪切应力  $\tau_0 = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \mu 0.332 v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$

壁面摩擦系数  $C_{fx} \equiv \frac{\tau}{\rho v_\infty^2 / 2} = \frac{F_d / A}{\rho v_\infty^2 / 2} = \frac{0.332 \mu v_\infty \sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}}{\rho v_\infty^2 / 2}$

$$= 0.664 \sqrt{\frac{\nu}{x v_\infty}} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

局部点x的表达式

对宽为W、长为L的平板的平均摩擦系数

$$C_{fL} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{fx} dx = \frac{1}{L} \int_0^L 0.664 \sqrt{\frac{\nu}{v_\infty}} x^{-1/2} dx$$
$$= 1.328 \sqrt{\frac{\nu}{L v_\infty}} \quad C_{fL} = \frac{1.328}{\sqrt{\text{Re}_L}}$$

# 湍流基本概念

## 湍流 (turbulence、紊流、乱流)

就是指由Navier-Stokes方程所描述的粘性流体当超过临界雷诺数后，从规则流动转捩为在时空中紊乱复杂的多尺度涡旋运动的形态。

湍流的复杂性包括：

计算的复杂性，尺度的复杂性，状态的复杂性，转捩的复杂性，预测的复杂性，描述的复杂性，测量的复杂性，各种结果解释的复杂性。因此，湍流研究进展十分缓慢。

湍流边界层厚度

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.376}{Re_x^{1/5}}$$

湍流平板平均摩擦系数

$$C_{fL} = \frac{1}{L} \int_0^L C_{fx} dx = 0.072 Re_L^{-1/5}$$

## 7. 封闭管道中的流动

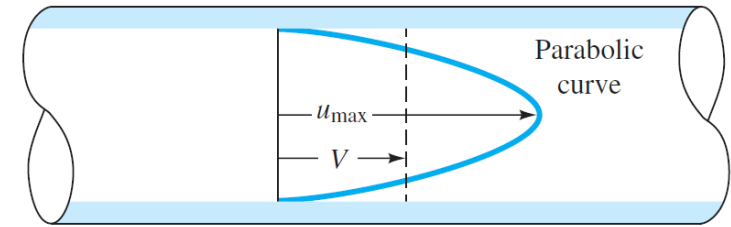
压力降可以表达成  $\frac{h_L}{v^2/g} = \phi_1\left(\frac{L}{D}, \frac{e}{D}, \text{Re}\right) = \frac{L}{D} \phi_2\left(\frac{e}{D}, \text{Re}\right)$

用摩擦系数来表达上式，有

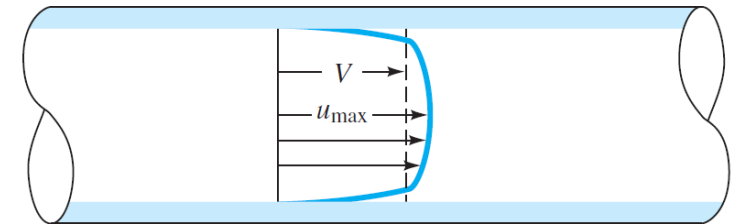
$$h_L = 2f_f \frac{L}{D} \frac{v^2}{g} \quad \text{或者} \quad h_L = f_D \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g}$$

$f_f$  称为范宁（Fanning）摩擦系数， $f_D$  称为达西（Darcy）摩擦系数

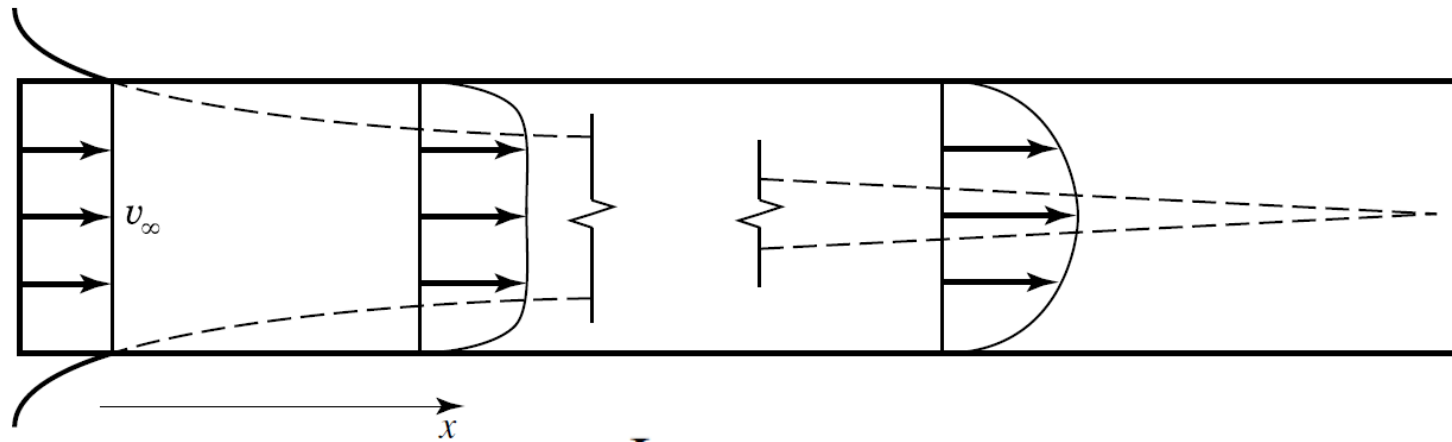
$$\frac{F}{A} \equiv C_f \frac{\rho v_\infty^2}{2}$$



(a)



# 圆管流动入口端的摩擦系数



入口效应  
Entrance effect

充分发展的层流  
流向速度剖面不变

$$\frac{L_e}{D} = 0.0575 \text{ Re}$$

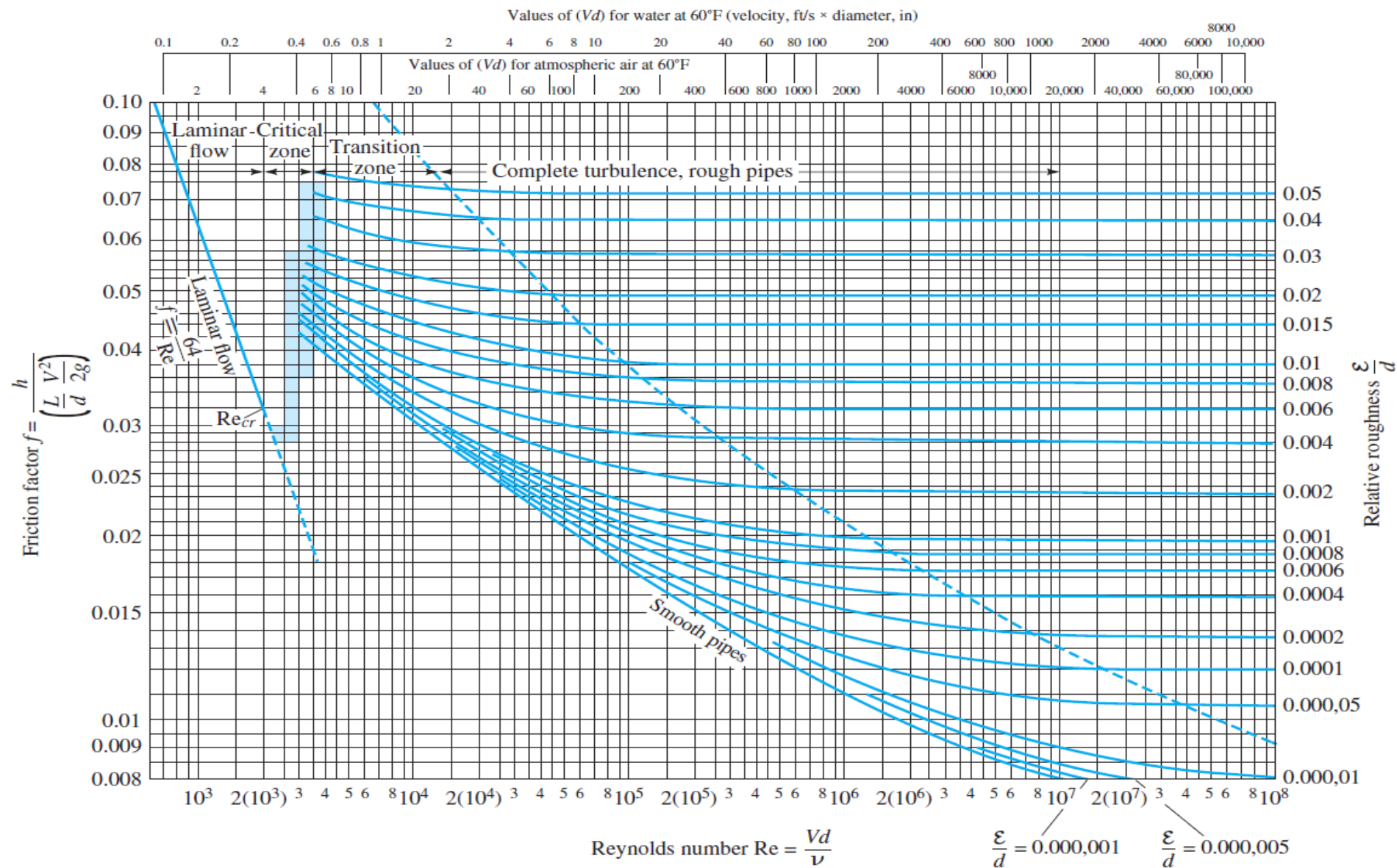
充分发展的湍流

教材认为无解析公式  $L_e > 50D$

但最近的计算流体力学 (CFD) 结果提出了经验公式  $\frac{L_e}{d} \approx 1.6 \text{ Re}_d^{1/4}$  for  $\text{Re}_d \leq 10^7$

$\text{Re}_d$	4000	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$
$L_e/d$	13	16	28	51	90

# 莫迪图 (Moody Chart)



# 各种常用材料的壁面粗糙度

$\epsilon$				
Material	Condition	ft	mm	Uncertainty, %
Steel	Sheet metal, new	0.00016	0.05	$\pm 60$
	Stainless, new	0.000007	0.002	$\pm 50$
	Commercial, new	0.00015	0.046	$\pm 30$
	Riveted	0.01	3.0	$\pm 70$
	Rusted	0.007	2.0	$\pm 50$
Iron	Cast, new	0.00085	0.26	$\pm 50$
	Wrought, new	0.00015	0.046	$\pm 20$
	Galvanized, new	0.0005	0.15	$\pm 40$
	Asphalted cast	0.0004	0.12	$\pm 50$
Brass	Drawn, new	0.000007	0.002	$\pm 50$
Plastic	Drawn tubing	0.000005	0.0015	$\pm 60$
Glass	—	Smooth	Smooth	
Concrete	Smoothed	0.00013	0.04	$\pm 60$
	Rough	0.007	2.0	$\pm 50$
Rubber	Smoothed	0.000033	0.01	$\pm 60$
Wood	Stave	0.0016	0.5	$\pm 40$

# 圆管流动压头损失 (head loss)

压头损失

$$h_L = 2 f_f \frac{L}{D} \frac{v^2}{g}$$

求解摩擦系数的显式公式

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = -3.6 \log_{10} \left[ \frac{6.9}{\text{Re}} + \left( \frac{e}{3.7D} \right)^{10/9} \right]$$

误差<1.5%

For laminar flow ( $\text{Re} < 2300$ )

$$f_f = \frac{16}{\text{Re}}$$

For turbulent flow (smooth pipe,  $\text{Re} > 3000$ )

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4.0 \log_{10} \{ \text{Re} \sqrt{f_f} \} - 0.40$$

For turbulent flow (rough pipe, ( $\text{Re} > 3000$ ,  $D/e)/(\text{Re} \sqrt{f_f}) < 0.01$ )

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4.0 \log_{10} \frac{D}{e} + 2.28$$

And for transition flow

$$\frac{1}{\sqrt{f_f}} = 4 \log_{10} \frac{D}{e} + 2.28 - 4 \log_{10} \left( 4.67 \frac{D/e}{\text{Re} \sqrt{f_f}} + 1 \right)$$

计算中使用简化的显式公式即可!

# 管件、阀门等造成的压头损失

各种部件会引起额外的压头损失

也可以折合成等价长度  $L_{eq}$

$$h_L = \frac{\Delta P}{\rho} = K \frac{v^2}{2g}$$

$$h_L = 2 f_f \frac{L_{eq}}{D} \frac{v^2}{g}$$

$K$ 为不同部件的系数

	Fitting	$K$	$L_{eq}/D$
球阀	Globe valve, wide open	7.5	350
	Angle valve, wide open	3.8	170
阀门	Gate valve, wide open	0.15	7
	Gate valve, $\frac{3}{4}$ open	0.85	40
	Gate valve, $\frac{1}{2}$ open	4.4	200
	Gate valve, $\frac{1}{4}$ open	20	900
标准90度弯头	Standard 90° elbow	0.7	32
小半径90度弯头	Short-radius 90° elbow	0.9	41
大半径90度弯头	Long-radius 90° elbow	0.4	20
标准45度弯头	Standard 45° elbow	0.35	15
T型三通, 侧面	Tee, through side outlet	1.5	67
T型三通, 直流	Tee, straight through	0.4	20
180度弯头	180° Bend	1.6	75

具体各部件的水头损失系数不需要记忆

当量直径

$$D_{eq} = 4 \frac{\text{cross-sectional area of flow}}{\text{wetted perimeter}}$$

$$D_{eff} = D_h = \frac{4A}{\mathcal{P}}$$



# 管道湍流流动问题的四种分类(不涉及迭代)

1. Given  $d$ ,  $L$ , and  $V$  or  $Q$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ , and  $g$ , compute the head loss  $h_f$  (head loss problem). ✓
2. Given  $d$ ,  $L$ ,  $h_f$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ , and  $g$ , compute the velocity  $V$  or flow rate  $Q$  (flow rate problem). 需要迭代
3. Given  $Q$ ,  $L$ ,  $h_f$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ , and  $g$ , compute the diameter  $d$  of the pipe (sizing problem). 需要迭代
4. Given  $Q$ ,  $d$ ,  $h_f$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ , and  $g$ , compute the pipe length  $L$ . ✓

## 例：管道流动估算

Oil, with  $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$  and  $\nu = 0.00001 \text{ m}^2/\text{s}$ , flows at  $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$  through 500 m of 200-mm-diameter cast iron pipe. Determine (a) the head loss and (b) the pressure drop if the pipe slopes down at  $10^\circ$  in the flow direction.

$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{0.2 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.1 \text{ m})^2} = 6.4 \text{ m/s} \quad \frac{\varepsilon}{d} = \frac{0.26 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 0.0013 \quad \rightarrow \quad \text{Re}_d = \frac{Vd}{\nu} = \frac{(6.4 \text{ m/s})(0.2 \text{ m})}{0.00001 \text{ m}^2/\text{s}} = 128,000$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{f_f}} = -3.6 \log_{10} \left[ \frac{6.9}{\text{Re}} + \left( \frac{e}{3.7D} \right)^{10/9} \right] \quad f_f = 0.00563$$

$$\rightarrow h_L = 2 f_f \frac{L}{D} \frac{v^2}{g} = 2 \times 0.00563 \times \frac{500}{0.2} \times 6.4^2 / 9.81 = 117 \text{ m}$$

$$\rightarrow \Delta p = \rho g(h_L - L \sin 10^\circ) = 900 \times 9.81 \times (117 - 87) = 264870 \text{ Pa}$$