数学建模：第 8 次作业

周炜

计算机科学与技术

日期：2022 年 12 月 10 日

1 题目一

一、中铁网发售某地区的铁路车票，近期推出一款名为“中铁卡”的优惠产品。每张中铁卡售价为C元，有效期为T天，可随时购买，立即生效。购买了中铁卡的乘客在其有效期内购买面值为p元的车票只须实付βp元，其中$0<\beta<1$。已知准备购买的n张车票价格p_j和购票时间$t_j, j=1,\cdots,n$，其中$t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$，欲使购买中铁卡和车票支付的总金额最小。

为此，构造有向图$G=(V,E)$，其中$V=\{u,w,v_1,\cdots,v_n\}$，v_j对应于需购买的第j张车票。试确定G的边和每条边的权，使该问题等价于寻找图G中自u到w的一条最短有向路。

若不购买中铁卡，按照时间顺序，有 $u \xrightarrow{p_1} v_1 \xrightarrow{p_2} v_2 \xrightarrow{p_3} ... \xrightarrow{p_n} v_n$

加入中铁卡后，为方便起见，引入 α_i, 可以记 $v_i \xrightarrow{C} \alpha_i, i = 1, 2, 3...n$ 为购买中铁卡。并且假设，在 v_i 处购买中铁卡后，在有效期 T 内，满足 $t_{k_i} - t_i \le T \le t_{k_i+1} - t_i$, 则有

$$v_i \xrightarrow{\beta p_{i+1}} v_{i+1} \xrightarrow{\beta p_{i+2}} ... \xrightarrow{\beta p_{k_i}} v_{k_i}$$

为此，引入拉普拉斯变换中的单位阶跃函数 $u(t) = \begin{cases} 1, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$，此时如果在 v_i 处购买中铁卡，可以把 $< v_i, v_j >$ 的边权重从原始的 p_{i+1} 修正为 $p_{i+1} - u(t_i + T - t_j)(1 - \beta)p_{i+1}$

由于需要将图限制在 $V = (u, w, v_1, v_2, ..., v_n)$ 中，对上述分析过程需要做出一定修改

综上分析，不妨记 $u = v_0$，$w = v_{n+1}$，并且假设 $j_1, j_2, ..., j_{k_i} (k_i \le n + 1)$ 是一系列满足 $0 \le t_i + T - t_{j_\alpha}, \alpha = 1, 2, ...k_i$ 的点，则对任意的 v_i，有 $< v_i, v_j >$ 的边权重有

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} C + \beta \sum\limits_{s=i+1}^{j} p_s, j = \max\{j_1, j_2, ..., j_{k_i}\} \\ p_{i+1}, j = i + 1 \\ 0, j = others \end{cases} \qquad i, j = 0, 1, 2, ...n + 1$$

2 题目二

二、中世纪英国学者 Alcuin 在他的著作中给出了下面的过河问题。现有 n 件物品需用一艘船从河的左岸运至右岸。两件不同的物品之间可能存在排斥性，即它们不能同时位于河的一侧，除非此时船也在河的这一侧。用图 $G=(V,E)$ 表示物品之间的排斥性。V 中每个顶点表示一件物品，两个顶点之间有边相连当且仅当这两个顶点表示的物品是排斥的。所有物品和船的一种状态可用三元组 (V_L,V_R,b) 表示，其中 V_L,V_R 分别代表位于河左岸和右岸的物品集，且有 $V_L\cup V_R=V$，$V_L\cap V_R=\varnothing$，$b\in\{左,右\}$ 表示船所在的位置。船从左岸到达右岸，或从右岸到达左岸的过程称为一次运输。每次运输时船至多装载 k 件物品，k 称为船的容量。现要求给出一由多次运输组成的可行运输方案，将所有物品从左岸运到右岸。

（1）请用图论语言表示一次允许的运输过程导致的状态变化，进而完整描述上述问题。

（2）记 $\beta(G)$ 为 G 的最小顶点覆盖所包含顶点的数目，k^* 为 G 的 **Alcuin 数**，即存在可行运输方案时船容量的最小值，证明 $\beta(G)\le k^*\le\beta(G)+1$。

（3）设 X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2 为 V 的子集，$X=X_1\cup X_2\cup X_3$，$Y=V\setminus X$，这些子集满足以下条件：

（i）X_1,X_2,X_3 两两不交，X 为 G 的独立集；

（ii）$|Y|\le k$，Y_1,Y_2 为 Y 的非空子集；

（iii）$X_1\cup Y_1$ 和 $X_2\cup Y_2$ 为 G 的独立集；

（iv）$|Y_1|+|Y_2|\ge|X_3|$

试设计一可行运输方案，并证明其运输次数不超过 $2|V|+1$。

2.1

$(L_t|B_t|R_t)$ 表示第 t 次运输中的运输情况，其中 L_t,B_t,R_t 分别表示第 t 次运输过程中左岸、船上和右岸的点的集合。“→”“←”分别表示第 t 次的运输方向，一次允许的运输过程则可以表示为：

存在有限的序列:$(L_1,B_1,R_1),(L_2,B_2,R_2),...,(L_s,B_s,R_s)$ 使之满足三个条件：

1. 对任意的 t，L_t,B_t,R_t 为点集 V 的一个划分，L_t 和 R_t 是 G 的独立集, 且 $|B_t|\le k(|B_t|$ 表示集合 B_t 中的元素个数)

2. $L_1\cup B_1=V,R_1=\emptyset;B_s\cup R_s=V,L_s=\emptyset$

3. 对于偶数 $t\ge 2$，有 $B_t\cup R_t=B_{t-1}\cup R_{t-1},L_t=L_{t-1}$; 对于奇数 $t\ge 3$, 有 $L_t\cup B_t=L_{t-1}\cup B_{t-1}R_t=R_{t-1}$

s 为运输方案的长度，显然，s 是一个奇数

2.2

在任何可行的运输方案的第一次运输期间，左岸将留下了一个稳定的集合 L_1 并用船运送了集合 B_1(至少要有 $\beta(G)$ 个顶点，否则与假设矛盾)，这表明 $\beta(G) \le k^*$

不妨考虑一个容量 $k = \beta(G)+1$ 的船，假设 C 为 G 的最小顶点覆盖所包含顶点的集合，则装满 $\beta(G)$ 个顶点后，船上还剩下一个容量，在 $V-C$ 取出一个顶点放在船中，向右运移到河对岸。重复该步骤，可以将所有的 $V-C$ 运送到对岸。然后最后一步中，把 C 在对岸放下。这说明 $k \ge \beta(G)+1$ 时，运输一定是可行的。

综上所诉，

$$\beta(G) \le k^* \le \beta(G)+1$$

2.3

首先证明如果运输次数不多于 2|V|+1 时在满足题设的条件下一定满足 (i)(ii)(iii)(iv)

不失一般性，考虑一个可行的运输过程 (L_k, B_k, S_k)，且 $B_k \ne B_{k+1}, 1 \le k \le s-1$。根据（2）中所得到的结论，存在一个顶点覆盖 $Y \subset V$，满足 $|Y| = k$ (Y 不一定是最小顶点覆盖)，并且其补集 $X = V - Y$ 稳定，下面将分成三种情况进行讨论：

1. 存在 $L_t \cap Y \ne \emptyset, R_t \cap Y \ne \emptyset$, 令 $Y_1 = L_t \cap Y, X_1 = L_t \cap X, Y_2 = R_t \cap Y, X_2 = R_t \cap X, X_3 = B_t \cap X$, 显然 Y_1 和 Y_2 是不相交集合，并且 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$，满足假设条件 (i)(ii)(iii)，因此有

$$|Y| = k \ge |B_t \cap X| + |B_t \cap Y| = |X_3| + (|Y| - |Y_1| - |Y_2|)$$

同时有 $|Y_1| + |Y_2| \ge |X_3|$ 满足条件 (iv)

2. 存在 $1 \le t \le s$，使得 $B_t = Y$，如果 t 是奇数 (船是正向移动，即运到对岸), 由于题目假设 $B_{t-1} \ne B_t \ne B_{t+1}$, 这表明 $L_{t-1} \cap Y \ne \emptyset$ 并且 $R_{t+1} \cap Y \ne \emptyset$。进一步，$X$ 中的每一个元素一定包含在 $L_{t-1} \cup B_{k-1}$ 或者 $R_{k+1} \cup B_{k+1}$ 中的一个. 令 $Y_1 = L_{t-1} \cap Y, X_1 = L_{t-1} \cap X, Y_2 = R_{t+1} \cap Y, X_2 = R_{t+1} \cap X, X_3 = (B_{t-1} \cup B_{t+1} \cap X)$, 那么 X_1, X_2, X_3 成对不相交，即满足 (i)(ii)(iii), 由上述条件可以得到：

$$|Y| = k \ge |B_{t-1} \cap X| + |B_{t-1} \cap Y| = |B_{t-1} \cap X| + |Y| - |Y_1|$$

这表明 $|B_{t-1} \cap X| \le |Y_1|$, 由对称性，$|B_{t+1} \cap X| \le |Y_2|$, 两式合并得到 $|Y_1| + |Y_2| \ge |X_3|$ 即满足 (iv)

如果船反向移动，同理

3. 对所有 t 满足 $L_t \cap Y = \emptyset$ 或者 $R_t \cap Y = \emptyset$, 并且满足 $B_t \ne Y$ 。若 $R_s \cap Y \ne \emptyset$(如果 $R_s \cap Y = \emptyset$, 则同样可以变换为 $R_s \cap Y \ne \emptyset$), 令 $Y_1 = R_s \cap Y, X_1 = R_s \cap X, Y_2 = Y_1, X_2 = \emptyset, X_3 = B_s \cap X$。则有

$$|Y| = b \ge |B_s \cap X| + |B_s \cap Y| = |X_3| + (|Y| - |Y_1|)$$

, 满足条件 (i)(ii)(iii)(iv)。

一个可行的方案

用符号 $(L|B|R)$ 表示左侧有集集合 L，B 在船上，R 在右岸. 由于满足 (i)(ii)(iii)(iv)，我们可以得到下述方案：

步骤 1. 由条件 (ii)，船可以携带集合 Y，留下 X 在左岸，然后把 Y_1 放在对岸（假设为右岸），然后返回左岸，这之后两岸的情况为 $(X\,|Y - Y_1|\,Y_1)$。

完成该步骤，船移动了 2 次

步骤 2. 完成上一步骤后，船有 $|Y_1| \ge 1$ 的余量，将 X_1 切割成最大为 $|Y_1|$ 的子集合，然后分批过河，这样多次之后，两岸的情况为 $(X_2, X_3\,|Y - Y_1|\,X_1, Y_1)$

完成该步骤，船移动了 $2\,\lceil |X_1|\,/\,|Y_1| \rceil$ 次

步骤 3. 由于 $|Y_1| + |Y_2| \ge |X_3|$, 我们可以把 X_3 分成两个不相交子集 X_{31}, X_{32}, 并且这两个集合满足

$|X_{31}| \leq |Y_1|$,$|X_{32}| \leq |Y_2|$。从左岸出发走 4 次，每次后两岸的情况为：

$$(X_2, X_{32}\,|Y - Y_1, X_{31}|\,X_1, Y_1), \quad (X_2, X_{32}|Y|X_1, X_{31}),$$
$$(X_2, Y_2\,|Y - Y_2, X_{32}|\,X_1, X_{31}), \quad (X_2, Y_2\,|Y - Y_2|\,X_1, X_3).$$

完成该步骤，船移动了 4 次

步骤 4. 完成上一步骤后，船有至少 $|Y_2| \geq 1$ 的余量，可以将 X_2 载到对岸，之后两岸的情况为 $(Y_2\,|Y - Y_2|\,X)$

完成该步骤，船一移动了 ,$2\,\lceil |X_2|\,/\,|Y_2| \rceil$ 次

步骤 5. 最后只需要把 Y_2 放到右岸，最后两岸的情况是 $\emptyset|Y|X$

完成该步骤，船移动了 1 次

由于 $|V| \geq |X_1| + |X_2| + |X_3| + 1$, 这表明船最多移动了 $s = 2|V| - 2\,|X_3| + 5$ 次

(a) 如果 $|X_3| \geq 2$ ，$s \leq 2|V| + 1$

(b) 如果 $|X_3| = 1$, 改变步骤 2 中的最后一趟返程为 $(X_2, X_3 \mid Y \mid X_1)$ 以及步骤 3 为 $(X_2, Y_2\,|Y - Y_2, X_3|\,X_1)$ 和 $(X_2, Y_2\,|Y - Y_2|\,X_1, X_3)$。这样操作之后节省了 2 次移动，因此 $s \leq 2|V| + 1$

(c) 如果 $|X_3| = 0$, 改变步骤 2 中的最后一趟返程为 $(X_2|Y|X_1)$, 去除步骤 3, 并且把步骤 4 中的第一趟正程改为将 $|Y_2|$ 留在左岸，因此可以节省 4 次移动，因此 $s \leq 2|V| + 1$

综上所诉，其运输次数不超过 $2|V| + 1$