

## 《数学建模》课程专项练习

一、某航空公司计划在全国选择若干个机场组建基地。设在机场  $j$  组建基地所需费用为  $c_j, j=1, \dots, n$ 。若该航空公司在机场  $i$  和机场  $j$  的基地组建完成，则可开通往返两地的航班并获得票款收益  $r_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$ 。该航空公司基地组建费用预算上限为  $B$ ，应选择在哪些机场组建基地才能使获得的票款收益最大。试写出该问题的数学规划。

二、考虑下面的设施选址问题。现有  $n$  个居民小区需提供某项服务，有  $m$  处地点可用于开设服务点。在地点  $i$  开设服务点所需开设费用为  $f_i, i=1, \dots, m$ 。设置在地点  $i$  的服务点为小区  $j$  提供服务所需的运营费用为  $c_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ 。现需选择若干地点开设服务点，并确定每个服务点的服务对象，使每个小区至少有一个服务点为其提供服务，并且总费用最小。试写出该问题的数学规划。

三、给定图  $G=(V, E)$ ，图的顶点着色问题要求给  $V$  中每个顶点着某一种颜色，且  $E$  中每一条边关联的两个顶点不着同一种颜色，并使得所用颜色数最少。试给出求解顶点着色问题的数学规划。

四、设有无向简单图  $G=(V, E)$ ，边  $v_i v_j \in E$  的权记为  $w_{ij}$ 。 $V$  的子集  $S, \bar{S}$  满足  $V=S \cup \bar{S}, S \cap \bar{S}=\emptyset$ 。令  $(S, \bar{S})$  表示所有一个端点在  $S$  中，另一个端点在  $\bar{S}$  中的边的全体，称为  $G$  的割， $(S, \bar{S})$  的权为  $(S, \bar{S})$  中所有边的权之和。求  $G$  的权最大的割的问题称为图的最大割问题 (max cut)。试写出最大割问题的数学规划。

五、某同学有  $T$  天时间可用于复习  $n(n \leq T)$  门课程，每门课程至少需要一天时间复习，每天只能用于复习一门课程。设用  $j$  天复习课程  $i$  可使该门课程成绩提高  $p_{ij}$  分， $i=1, \dots, n, j=1, \dots, T-n+1$ 。该同学应如何安排复习，可使所有课程的成绩提高总和尽可能大。

(1) 试写出求解该问题的整数规划；

(2) 试写出求解该问题的动态规划。

六、现有一  $n$  行  $m$  列的棋盘，在棋盘的部分格子中各放有一颗麦子。现有一机器人从棋盘左上角的格子出发收集麦子。机器人只能从当前所在格子向下或向右移动一格，到达放有麦子的格子后，即能收集该格子中的麦子。现要求在机器人到达棋盘右下角的格子时，收集的麦子数量尽可能多。试给出求解该问题的多项式时间算法。

七、现有两个字母表  $\Sigma$  上的字符串  $X, Y$ ，通过在字符串中插入空格将它们变为长度相等的字符串  $X', Y'$ ，并比较  $X'$  和  $Y'$  中位于相同位置的字符。若相同位置两个字符不同，则称为一类误差；若两个字符一个为空格，另一个为非空格，则称为二类误差。若两个字符串所有位置出现的一类误差与二类误差总数分别为  $n_1$  和  $n_2$ ，两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差定义为  $\alpha n_1 + \beta n_2$ 。例如对 AGGGCT 和 AGGCA 两个字符串，若在第二个字符串中插入空格使之成为 AGG—CA，Needleman-Wunsch 误差为  $\alpha + \beta$ 。序列比对问题 (sequence alignment) 希望给出一种空格插入方案，使两个字符串的 Needleman-Wunsch 误差最小。试给出求解该问题的动态规划，并估计其时间复杂度。