故 $F(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，其傅里叶系数：

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)dx(\text{令 } x+t=\mu)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\mu)du=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\right]^2=a_0^2,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nxdx,$$

$$\xlongequal{x+t=u}\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\cos n(u-t)du$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(u)(\cos nu\cos nt+\sin nu\sin nt)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_nf(t)\cos nt+b_nf(t)\sin nt]dt=a_n^2+b_n^2,$$

同理，

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi}f(u)(\sin nu\cos nt-\cos nu\sin nt)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[b_nf(t)\cos nt-a_nf(t)\sin nt]dt=b_na_n-a_nb_n=0,$$

由 $f(x)$ 的连续性，$F(x)$ 也连续，且以 2π 为周期，按收敛定性定理

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx,$$

特别地

$$F(0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n,$$

由 $A_0=a_0^2$，$A_0=a_n^2+b_n^2$ 及 $F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(0+t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt$，

得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

这一结论，在教材中已经给出了另一方式的论证，但不够严密。

第十二章　　习题

下面各题应先验证满足定理条件，再根据定理计算

1. 设 $F(u)=\int_u^{u^2}e^{-ux^2}dx$，求 $F'(u)$.

解　$F'(u)=-\int_u^{u^2}x^2e^{-ux^2}dx+2ue^{-u^5}-e^{-u^3}$.

2. 设 $F(u)=\int_0^u(x+u)f(x)dx$，其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $F''(u)$.

解 $F(u)=\int_0^u(x+u)f(x)dx=\int_0^u xf(x)dx+u\int_0^u f(x)dx$

于是

$$F'(u)=uf(u)+\int_0^u f(x)dx+uf(u)=2uf(u)+\int_0^u f(x)dx$$

$$F''(u)=2f(u)+2uf'(u)+f(u)=3f(u)+2uf'(u)$$

3. 设 $F(u)=\int_0^u f(x+u,x-u)dx$，求 $F'(u)$，其中 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 都是连续函数.

解 $F'(u)=f(2u,0)+\int_0^u[f'_1(x+u,x-u)-f'_2(x+u,x-u)]dx$

4. 设 $F(a)=\int_0^a\frac{\ln(1+ax)}{x}dx$，求 $F'(a)$.

解 $F'(a)=\frac{1}{a}\ln(1+a^2)+\int_0^1\frac{1}{1+ax}dx$

$$=\frac{1}{a}\ln(1+a^2)+\frac{1}{a}\ln(1+ax)\Big|_0^1=\frac{2\ln(1+a^2)}{a}$$

研究下列积分在指定区间上的一致收敛性：

5. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}dx(-\infty<u<+\infty)$

解 由 $\left|\frac{\cos ux}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}, x\in(-\infty\infty)$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$，

因此 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}dx$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

6. $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin\beta x dx$，$(i)a_0\leqslant a<+\infty$，其中 $a_0>0$；$(ii)0<a<+\infty$

解 (i) 由于当 $0<a_0\leqslant a<+\infty$ 时，$|e^{-ax}\sin\beta x|\leqslant e^{-a_0x}$，

而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$ 收敛，故积分

$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin\beta x dx$ 在区间 $0<a_0\leqslant a<+\infty$ 上一致收敛。

(ii) 当 $\beta=0$，时，$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cdot\sin 0x dx=\int_0^{+\infty}0dx$

显然一致收敛，当 $\beta\neq0$ 时，不妨设 $\beta>0$，我们可以证明不一致收敛，事实上对 $A>0$，由于

$$\lim_{a\to0^+}\int_A^{+\infty}e^{-ax}\sin\beta x dx=\lim_{a\to0^+}\frac{e^{-ax}}{a^2+\beta^2}[-a\sin\beta x-\beta\cos\beta x]$$

$$=\lim_{a\to0^+}\frac{e^{-aA}}{a^2+\beta^2}[-a\sin\beta A-\beta\cos\beta A]=-\frac{\beta\cos\beta A}{\beta^2}=-\frac{\cos\beta A}{\beta}\left(令 A=2n\pi\frac{1}{\beta}\right)$$

$$= -\frac{1}{\beta}$$

存在 $0 < a_0 < +\infty$ 使 $\left|\int_A^{+\infty} \sin\beta x dx\right| > \frac{1}{2\beta}\left(A = \frac{2n\pi}{\beta}\right)$ 因此，

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\beta}$，对任何正数 $N > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\pi}{\beta} = +\infty$，当 n 充分大时，有 $A = \frac{2n\pi}{\beta} > N$，取
述的 a_0

$\left|\int_A^{+\infty} e^{-a_0x}\sin\beta x\right|dx = \frac{1}{2\beta} > \frac{1}{4\beta} = \varepsilon_0$，故此广义积分在 $0 < a \leqslant b$ 上不一致收敛.

7. $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}dx,\ 0 \leqslant \alpha < +\infty$.

解　此积分是收敛的. 事实上，当 $\alpha = 0$ 时积分为零；当 $\alpha > 0$ 时，设 $\sqrt{\alpha}x = t$，得

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

但是，此积分却不一致收敛，事实上，对任何的 $A > 0$，由于

$$\lim_{\alpha\to0^+}\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}dx = \lim_{\alpha\to0^+}\int_{\sqrt{\alpha}A}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故对于 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，必存在 $\alpha_0 > 0$，使得

$$\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha_0}\, e^{-\alpha_0 x^2}dx > \varepsilon_0,$$

即此积分不是一致收敛。

8. $I = \int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$，(i) $a \leqslant \alpha \leqslant b$，其中 $a > 0$；(ii) $0 \leqslant \alpha \leqslant b$.

解　显然，积分 I 对每一个定值 $\alpha \geqslant 0$ 是收敛的，事实上，当 $\alpha = 0$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx = 0；当\ \alpha > 0\ 时，\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx = -e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

(1) $a \leqslant \alpha \leqslant b$，则由于

$$0 < \int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx = e^{-\alpha A}$$

故对于任何的 $\varepsilon > 0$，可以找到不依赖于 α 的数 $A_0 = \frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$，使 $A > A_0$ 时就有

$\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx < e^{-aA_0} = \varepsilon$，于是，在区间 $0 < a \leqslant \alpha \leqslant b$ 上积分 I 一致收敛。

(ii) 如果 $0 \leqslant \alpha \leqslant b$，则不存在这样的数 A_0，事实上，取 $0 < \varepsilon < 1$ 就办不到，由于 $\alpha \to 0^+$ 时，$e^{-A\alpha} \to 1$，故对于足够小的 α 值，$e^{-A\alpha}$ 就比任意一个小于 1 的数 ε 为大，因此，在区间，$0 \leqslant \alpha \leqslant b$，积分为一致收敛。

求下列积分：

9. $I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-kx}dx$，其中 $k > 0$.

解 由 $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos 0x-\cos ax}{x}e^{-kx}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\cos xy}{x}\Big|_a^0\right)e^{-kx}dx$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\int_a^0-\sin xydy\right]e^{-kx}dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^a\sin xydy\right)e^{-kx}dx,$$

由 $\int_0^{+\infty}e^{-kx}\sin xydx$ 中的被积函数 $|e^{-kx}\sin xy|\leqslant e^{-kx}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-kx}dx=-\frac{1}{k}e^{-kx}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{k}$ 收敛。

故

$$\int_0^{+\infty}e^{-kx}\sin xydx \text{ 在 } 0\leqslant y\leqslant a \text{ 一致收敛。}$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^a\sin xydy\right]e^{-kx}dx=\int_0^a dy+\int_0^{\infty}\sin xye^{-kx}dx$$

$$=\int_0^a\left[\frac{e^{-kx}}{k^2+y^2}(-k\sin xy-y\cos xy)\right]\Big|_0^{+\infty}dy$$

$$=\int_0^a\frac{y}{k^2+y^2}dy=\frac{1}{2}\ln(k^2+y^2)\Big|_0^a$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+k^2}{k^2}$$

10. $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx\,(a>0)$

证 记 $f(x,a)=\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}$，在区域 $D:\{0\leqslant x<+\infty,0<a_1<a<a_2\}$ 上，$f(x,a),f'_a(x,a)=e^{-ax^2}$ 都连续，积分 $I(a)$ 在 $a_1\leqslant a\leqslant a_2$ 上收敛，又因 $|e^{-ax^2}|\leqslant e^{-a_1x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}e^{-a_1x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a_1}}$ 收敛，故 $\int_0^{+\infty}f'_a(x,a)dx$ 在 $a_1\leqslant a\leqslant a_2$ 上一致收敛，因此

$$I'(a)=\frac{d}{da}\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-(\sqrt{a}x)^2}d\sqrt{a}x\,(\text{令}\sqrt{a}x=t)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

于是 $I(a)=\int\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}da=\sqrt{a}\sqrt{\pi}+c$，由 $I(0)=0$，有 $c=0$，故 $I(a)=\sqrt{a\pi}$.