

# 第十七章

## 稳态热传导

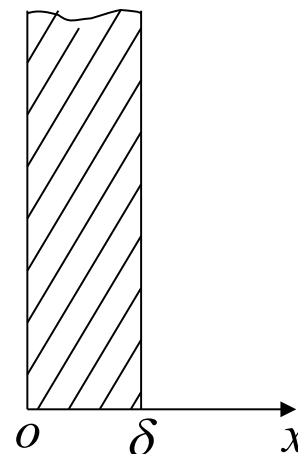
## §17 - 1 一维导热

本节将针对一维、稳态、常物性、无内热源情况，考察平板和圆柱内的导热。

直角坐标系：
$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}$$

### 1 单层平壁的导热

- a 几何条件：单层平板； $\delta$
- b 物理条件： $\rho$ 、 $c$ 、 $\lambda$  已知；无内热源
- c 时间条件：稳态导热： $\partial t / \partial \tau = 0$
- d 边界条件：第一类



根据上面的条件可得：

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \dot{\Phi} \Rightarrow \frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

控制方程

边界条件

第一类边条：

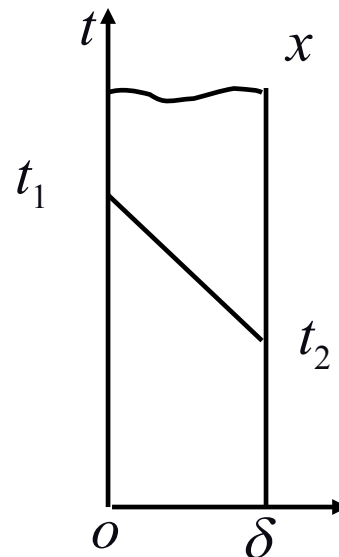
$$\begin{cases} x = 0, t = t_{w1} \\ x = \delta, t = t_{w2} \end{cases}$$

直接积分，得：

$$\frac{dt}{dx} = c_1 \Rightarrow t = c_1 x + c_2$$

带入边界条件：

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{t_2 - t_1}{\delta} \\ c_2 = t_1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{t_2 - t_1}{\delta} x + t_1 \\ \frac{dt}{dx} = \frac{t_2 - t_1}{\delta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{线性分布} \\ \text{带入 Fourier 定律} \end{array} \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q = -\lambda \frac{t_2 - t_1}{\delta} = \frac{\Delta t}{\delta/\lambda} \\ \Phi = \frac{\Delta t}{\delta/(A\lambda)} \end{array} \right.$$

$$r_\lambda = \frac{\delta}{\lambda} \quad R_\lambda = \frac{\delta}{A\lambda}$$

热阻分析法适用于一维、稳态、无内热源的情况

## 2 多层平壁的导热

多层平壁：由几层不同材料组成

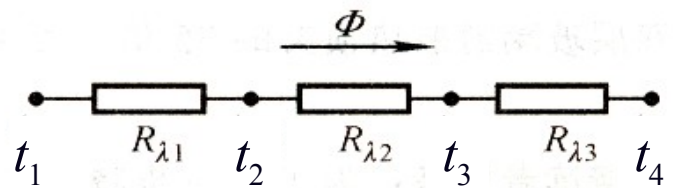
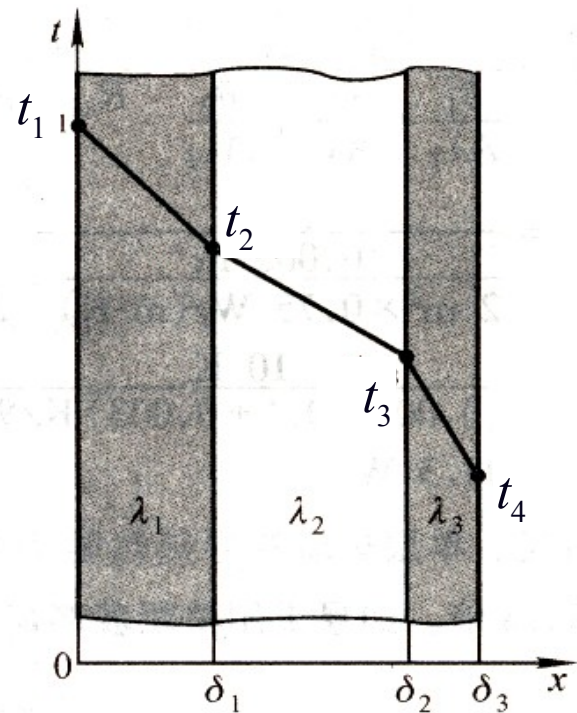
例：房屋的墙壁 — 白灰内层、水泥砂浆层、红砖（青砖）主体层等组成

假设各层之间接触良好，可以近似地认为接合面上各处的温度相等

❖ 边界条件： $x = 0$   $t = t_1$

$$x = \sum_{i=1}^n \delta_i \quad t = t_{n+1}$$

❖ 热阻： $r_1 = \frac{\delta_1}{\lambda_1}, \dots, r_n = \frac{\delta_n}{\lambda_n}$



三层平壁的稳态导热

由热阻分析法:

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n r_i} = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}$$

问: 现在已经知道了  $q$ , 如何计算其中第  $i$  层的右侧壁温?

第一层:  $q = \frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_1 - t_2) \Rightarrow t_2 = t_1 - q \frac{\delta_1}{\lambda_1}$

第二层:  $q = \frac{\lambda_2}{\delta_2}(t_2 - t_3) \Rightarrow t_3 = t_2 - q \frac{\delta_2}{\lambda_2}$

$\vdots$                        $\vdots$

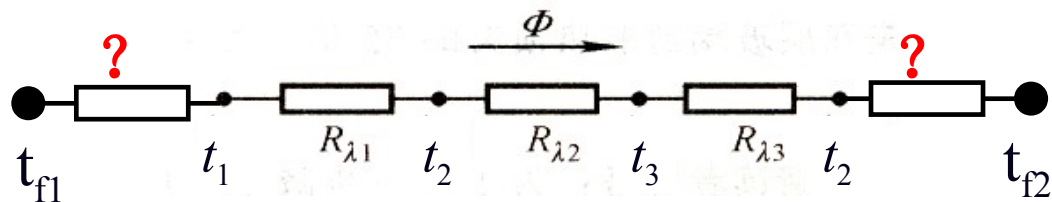
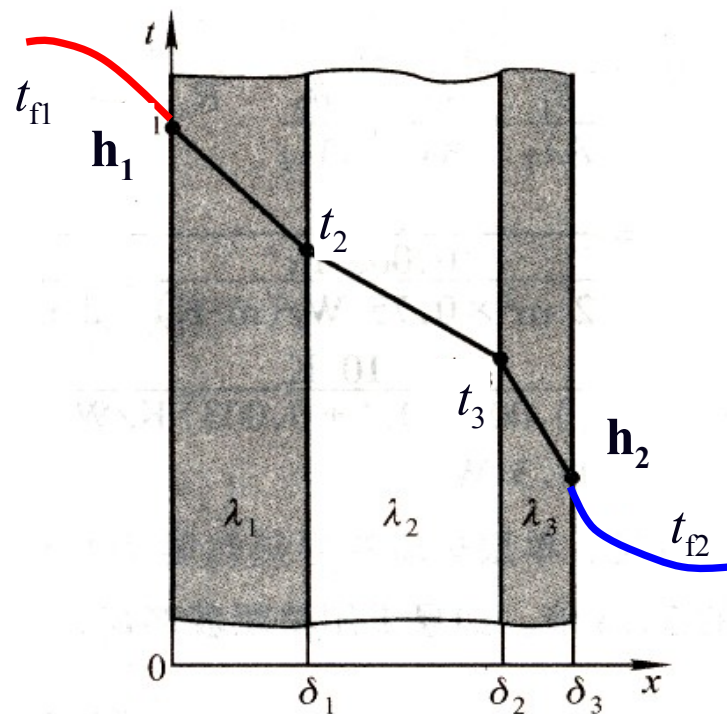
第  $i$  层:  $q = \frac{\lambda_i}{\delta_i}(t_i - t_{i+1}) \Rightarrow t_{i+1} = t_i - q \frac{\delta_i}{\lambda_i}$

## 多层、第三类边条

$$q = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_2}}$$

单位:  $\left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$

传热系数?



三层平壁的稳态导热

### 3 单层圆筒壁的导热

圆柱坐标系:

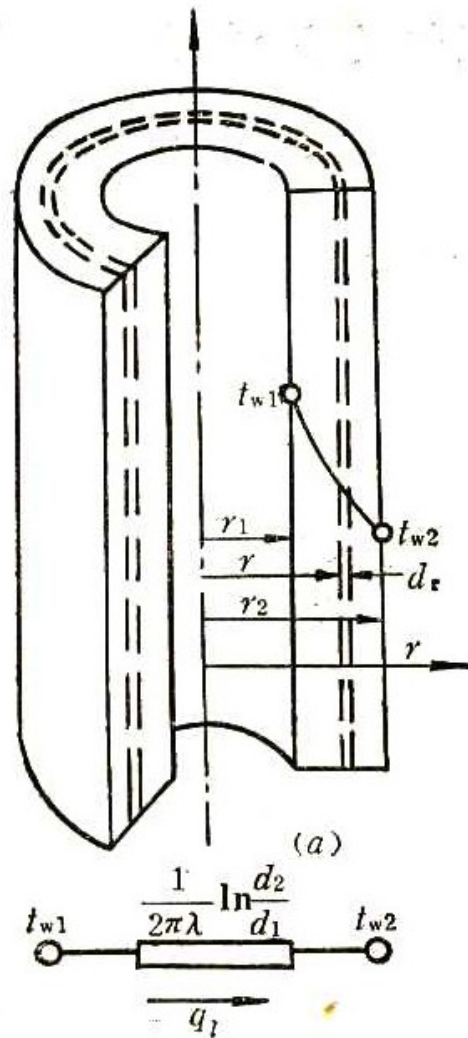
$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + \dot{\Phi}$$

假设单管长度为  $l$ ，圆筒壁的外半径小于长度的  $1/10$ 。

一维、稳态、无内热源、常物性:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dt}{dr} \right) = 0 \quad (a)$$

第一类边界条件: 
$$\begin{cases} r = r_1 \text{ 时} & t = t_{w1} \\ r = r_2 \text{ 时} & t = t_{w2} \end{cases}$$





对上述方程 (a) 积分两次：

第一次积分

第二次积分

$$r \frac{dt}{dr} = c_1 \Rightarrow t = c_1 \ln r + c_2$$

应用边界条件

$$t_{w1} = c_1 \ln r_1 + c_2; \quad t_{w2} = c_1 \ln r_2 + c_2$$

获得两个系数

$$c_1 = \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\ln(r_2/r_1)}; \quad c_2 = t_{w1} - (t_{w2} - t_{w1}) \frac{\ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$\Rightarrow t = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{\ln(r_2/r_1)} \ln(r/r_1)$$

将系数带入第二次积分结果

显然，温度呈对数曲线分布

圆筒壁内温度分布:

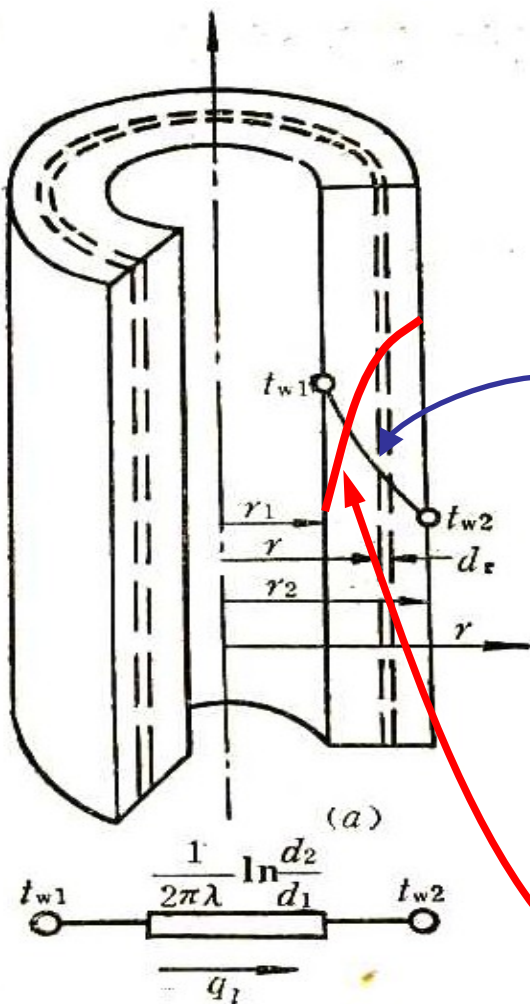
$$t = t_{w1} - (t_{w1} - t_{w2}) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$$

圆筒壁内温度分布曲线的形状?

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{t_{w1} - t_{w2}}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}; \quad \frac{d^2t}{dr^2} = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r^2}$$

若  $t_{w1} > t_{w2}$  :  $\frac{d^2t}{dr^2} > 0$  向上凹

若  $t_{w1} < t_{w2}$  :  $\frac{d^2t}{dr^2} < 0$  向上凸



下面来看一下圆筒壁内部的热流密度和热流分布情况

$$t = t_{w1} - (t_{w1} - t_{w2}) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \Rightarrow \frac{dt}{dr} = - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{r}$$

$$q = -\lambda \frac{dt}{dr} = \frac{\lambda}{r} \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\ln(r_2/r_1)} \quad \begin{matrix} [\text{W}] \\ [\text{m}^2] \end{matrix}$$

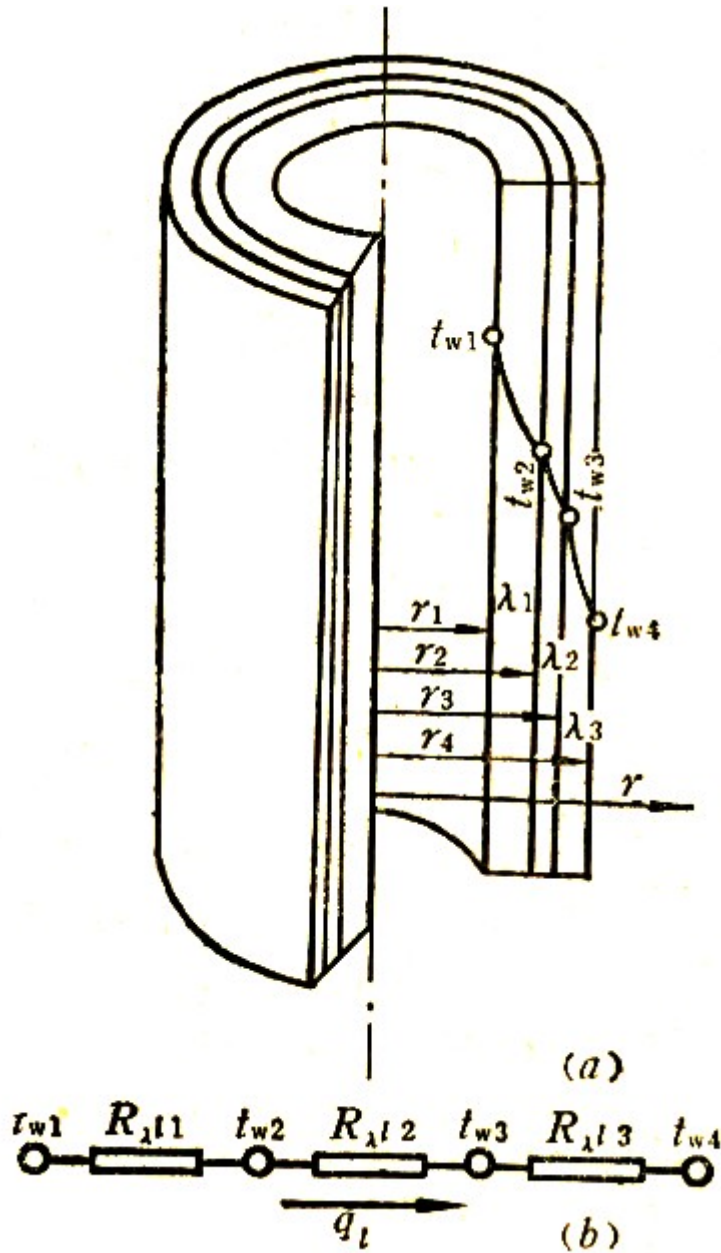
虽然时稳态情况，但  
热流密度  $q$  与半径  
 $r$  成反比！

$$\Phi = 2\pi r l q = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda l}} = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{R_\lambda} \quad [\text{W}]$$

长度为  $l$  的圆筒  
壁的导热热阻

## 4 n 层圆筒壁

由不同材料构成的多层圆筒壁，其导热热流量可按总温差和总热阻计算

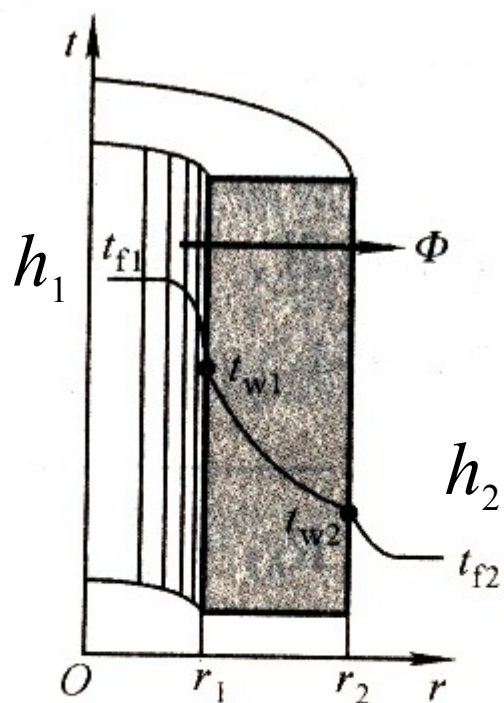


$$\Phi = \frac{t_{w1} - t_{w(n+1)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i L} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \quad [\text{W}]$$

$$q_l = \frac{t_{w1} - t_{w(n+1)}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \quad [\text{W/m}]$$

通过单位长度圆筒壁的热流量

# 单层圆筒壁，第三类边界条件，稳态导热

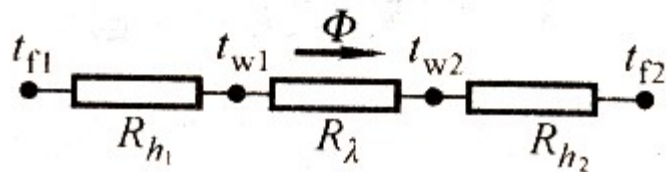


$$q_l|_{r_1} = 2\pi r_1 h_1 (t_{f1} - t_{w1}) = q_l = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$= q_l|_{r_2} = 2\pi r_2 h_2 (t_{w2} - t_{f2})$$

$$q_l = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1} + \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{h_2 2\pi r_2}}$$

$$= \frac{t_{f1} - t_{f2}}{R_l} \quad [\text{W/m}]$$



通过单位长度圆筒壁传热过程的热阻 [mK/W]

## (1) 单层圆筒壁

思考：温度分布应如何求出？

## (2) 多层圆筒壁

$$q_l = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{h_1 \pi d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi \lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{h_2 \pi d_{n+1}}}$$

通过球壳的导热自己推导

## 5 其它变面积或变导热系数问题

求解导热问题的主要途径分两步：

(1) 求解导热微分方程，获得温度场；

(2) 根据 Fourier 定律和已获得的温度场计算热流量；

对于稳态、无内热源、第一类边界条件下的一维  
导热

问题，可以不通过温度场而直接获得热流量。此  
时，

$$\Phi = -\lambda A \frac{dt}{dx}$$

当  $\lambda = \lambda(t)$ ,  $A = A(x)$  时，

$$\Phi = -\lambda(t) A(x) \frac{dt}{dx}$$

分离变量后积分，并注意到热流量  $\Phi$  与  $x$  无关（稳态），得

$$\Phi \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A(x)} = - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \frac{\Phi(t_2(x) - t_1(x))}{t_2 - t_1} = - \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt}{t_2 - t_1} (t_2 - t_1)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt}{t_2 - t_1} \Rightarrow \Phi = \frac{\bar{\lambda}(t_1 - t_2)}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A(x)}}$$

当  $\lambda$  随温度呈线性分布时，即  $\lambda = \lambda_0 + at$ ，则  $\bar{\lambda} = \lambda_0 + a \frac{t_1 + t_2}{2}$

实际上，不论  $\lambda$  如何变化，只要能计算出平均导热系数，就可以利用前面讲过的所有定导热系数公式，只是需要将  $\lambda$  换成平均导热系数。



## §17 — 2 具有内热源的一维导热

- 略

## §17-3 外延表面上的传热

第三类边界条件下通过平壁的一维稳态导热：

$$\Phi = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{\delta}{\lambda A} + \frac{1}{h_2 A}} \quad [\text{W}]$$

为了增加传热量，可以采取哪些措施？

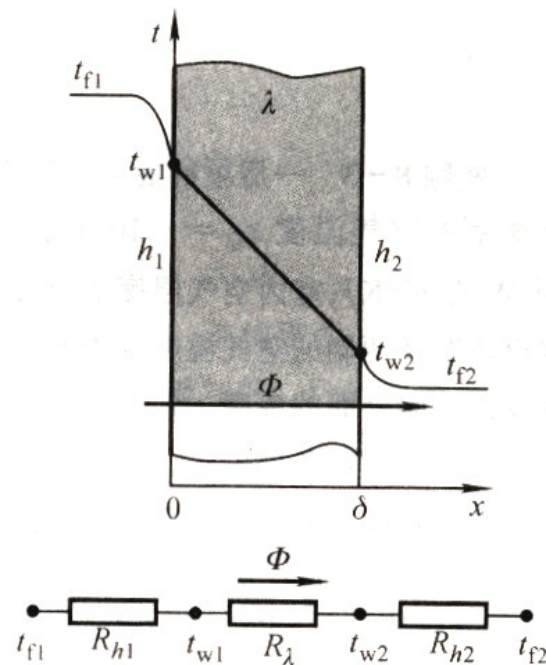
(1) 增加温差 ( $t_{f1} - t_{f2}$ )，但受工艺条件限制

(2) 减小热阻：

a) 金属壁一般很薄 ( $\delta$  很小)、热导率很大，故导热热阻一般可忽略

b) 增大  $h_1$ 、 $h_2$ ，但提高  $h_1$ 、 $h_2$  并非任意的

c) 增大换热面积  $A$  也能增加传热量



在一些换热设备中，在换热面上加装肋片是增大换热量的重要手段

肋壁：直肋、环肋；等截面、变截面

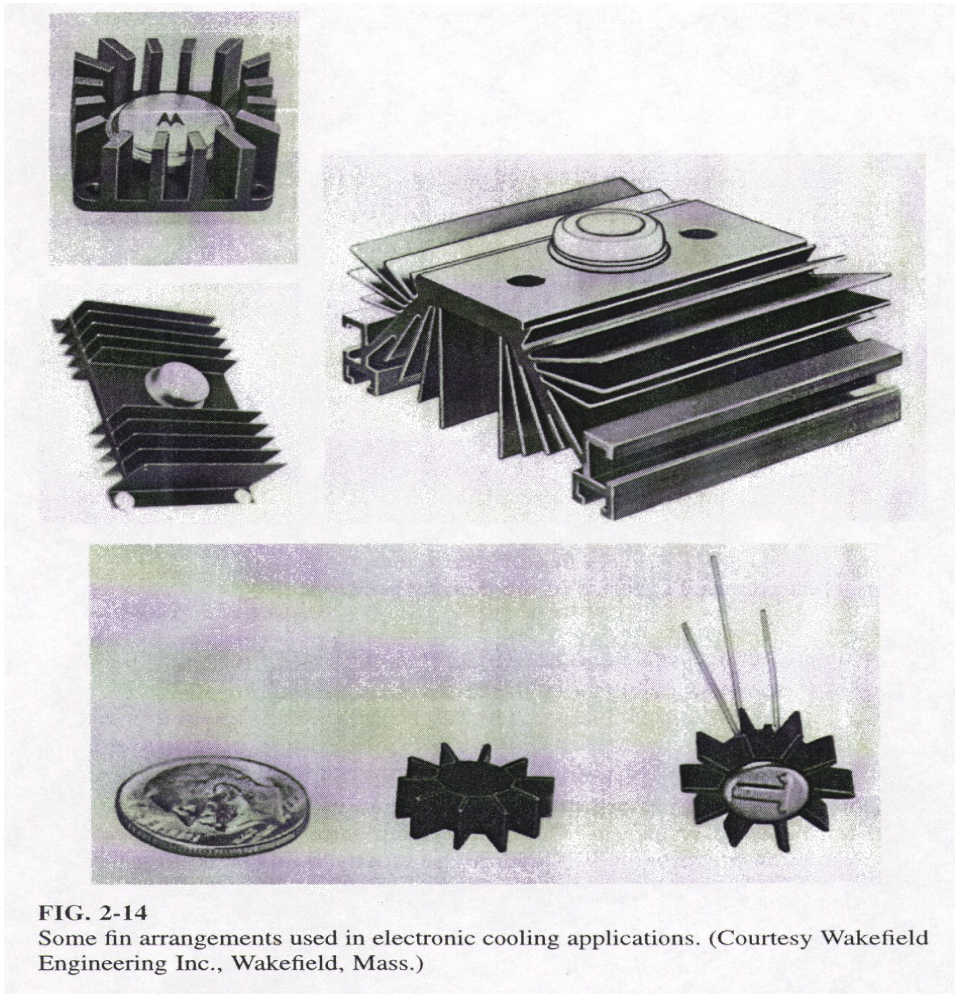
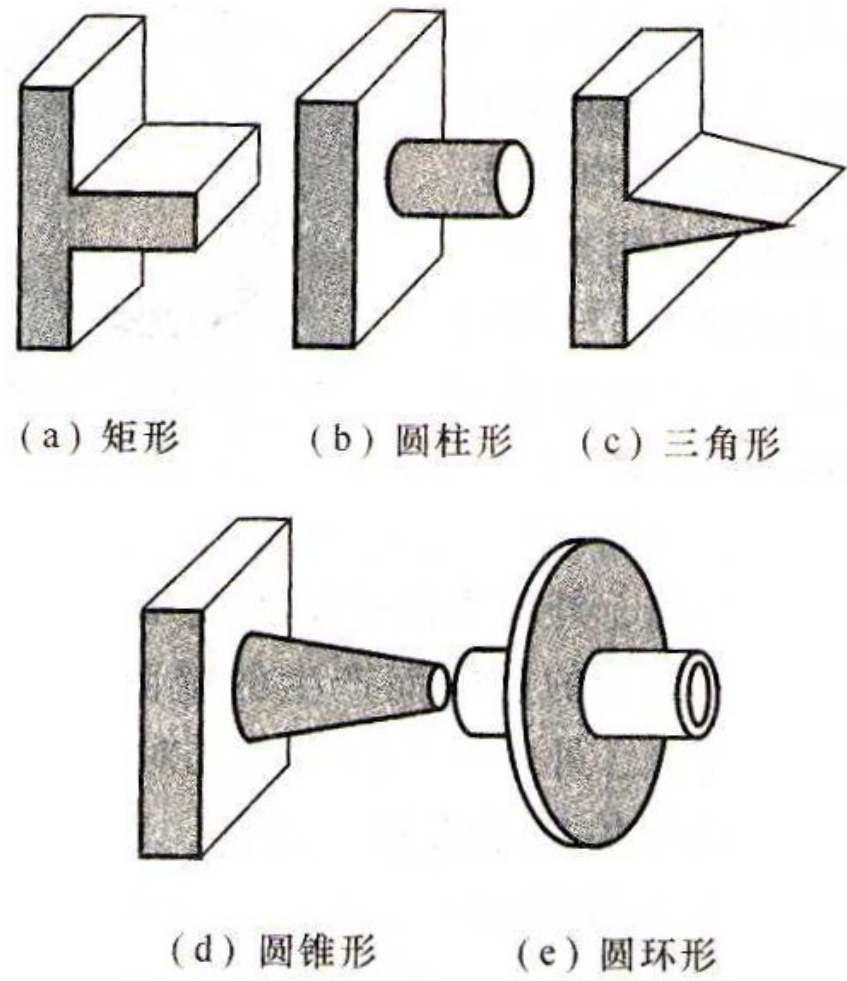


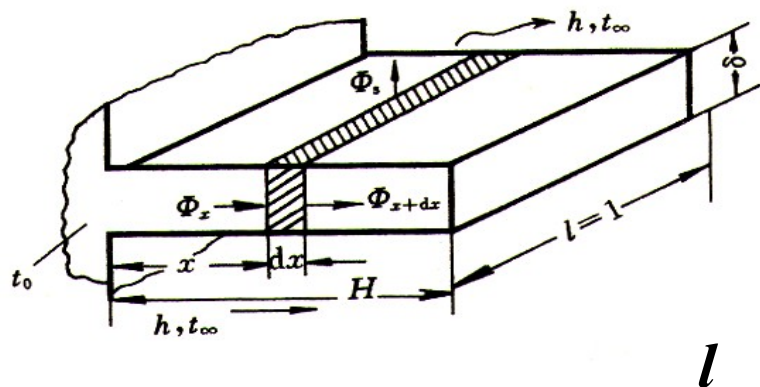
FIG. 2-14  
Some fin arrangements used in electronic cooling applications. (Courtesy Wakefield Engineering Inc., Wakefield, Mass.)



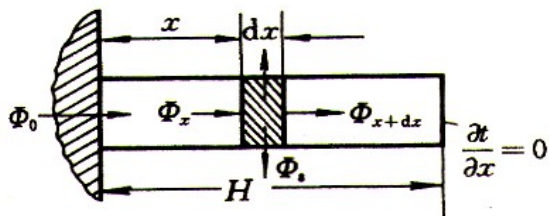
(a) 矩形      (b) 圆柱形      (c) 三角形

(d) 圆锥形      (e) 圆环形

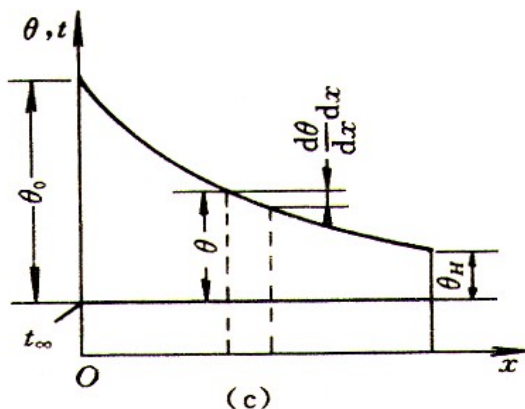
# 1 通过等截面直肋的导热



(a)



(b)



(c)

已知:

- (1) 矩形直肋
- (2) 肋根温度为  $t_0$  ,  
且  $t_0 > t_\infty$
- (3) 肋片与环境的表面传热系数为  $h$ .
- (4)  $\lambda$  ,  $h$  和  $A_c$  均保持不变

求:

温度场  $t$  和热流量  
 $\Phi$

**分析：**严格地说，肋片中的温度场是三维、稳态、无内热源、常物性、第三类边条的导热问题。但由于三维问题比较复杂，故此，在忽略次要因素的基础上，将问题简化为一维问题。

**简化：** a 宽度  $l \gg \delta$  and  $H \Rightarrow$  肋片长度方向温度均匀

$$\Rightarrow l = 1$$

b  $\lambda$  大、 $\delta \ll H$ ，认为温度沿厚度方向均匀

**边界：**肋根：第一类；肋端：绝热；四周：对流换热

**求解：**这个问题可以从两个方面入手：

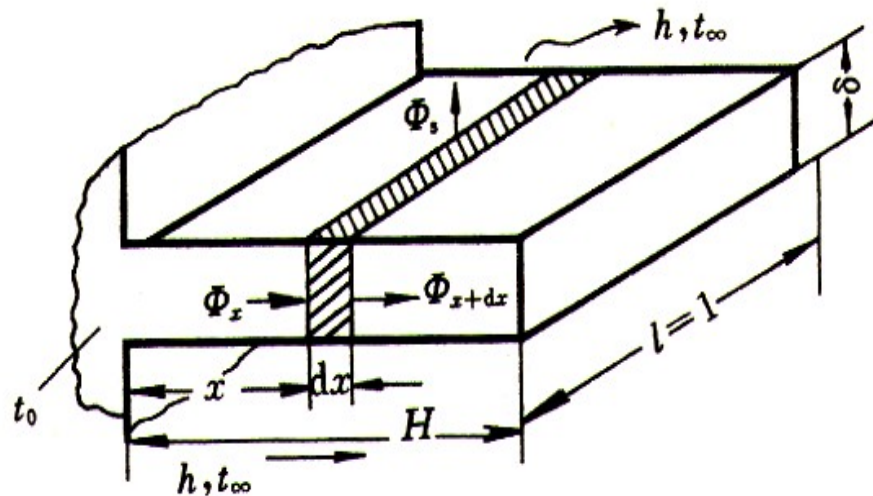
a 导热微分方程，例如书上第 16 章

b 能量守恒 + Fourier law



能量守恒:  $\Phi_x = \Phi_{x+dx} + \Phi_d$

Fourier 定律:  $\Phi_x = -\lambda A_c \frac{dt}{dx}$



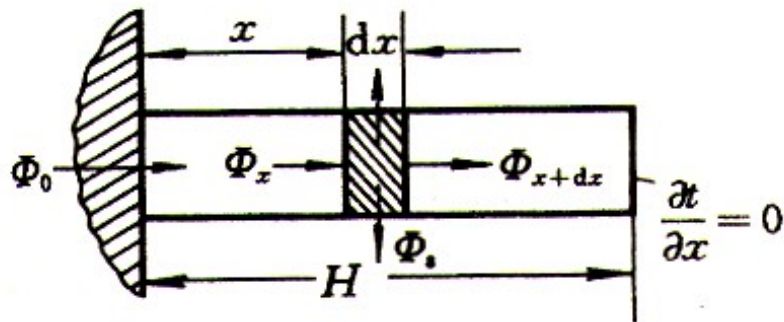
$$\Phi_{x+dx} = \Phi_x + \frac{d\Phi_x}{dx} dx = \Phi_x - \lambda A_c \frac{d^2 t}{dx^2} dx$$

Newton 冷却公式:  $\Phi_d = h(Pdx)(t - t_\infty)$

$$\Rightarrow \frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A_c} (t - t_\infty) = 0$$

关于温度的二阶非  
齐次常微分方程

导热微分方程:  $\frac{d^2 t}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A_c} (t - t_\infty) = 0$



引入过余温度  $\theta = t - t_\infty$   $m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}} = \text{const}$

则有:  $\frac{d^2 \theta}{dx^2} = m^2 \theta$

混合边界条件:  $\begin{cases} x = 0 \text{ 时, } \theta = \theta_0 = t_0 - t_\infty \\ x = H \text{ 时, } \frac{d\theta}{dx} = 0 \end{cases}$

方程的通解为:  $\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx}$

应用边界条件可得:  $c_1 = \theta_0 \frac{e^{-mH}}{e^{mH} + e^{-mH}} \quad c_2 = \theta_0 \frac{e^{mH}}{e^{mH} + e^{-mH}}$

最后可得等截面内的温度分布:

$$\theta = \theta_0 \frac{e^{m(H-x)} + e^{-m(H-x)}}{e^{mH} + e^{-mH}} = \theta_0 \frac{\text{ch}[m(H-x)]}{\text{ch}(mH)}$$

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

双曲正弦函数

双曲余弦函数

双曲正切函数



稳态条件下肋片表面的散热量 = 通过肋基导入肋片的热量

$$\Phi = -\lambda A \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = \lambda A_c \theta_0 m \cdot \text{th}(mH) = \frac{hP}{m} \theta_0 \cdot \text{th}(mH)$$

肋端过余温度：                      即  $x = H$

$$\theta = \theta_0 \frac{\text{ch}[m(H-x)]}{\text{ch}(mH)} = \theta_0 \frac{1}{\text{ch}(mH)}$$

## 几点说明:

(1) 上述推导中忽略了肋端的散热（认为肋端绝热）。对于一般工程计算，尤其高而薄的肋片，足够精确。若必须考虑肋端散热，取： $H_c = H + \delta/2$

(2) 上述分析近似认为肋片温度场为一维。

当  $Bi = h\delta/\lambda \leq 0.05$  时，误差小于 1%。对于短而厚的肋片，二维温度场，上述算式不适用；实际上，肋片表面上表面传热系数  $h$  不是均匀一致的 — 数值计算

## 2 肋片效率

为了从散热的角度评价加装肋片后换热效果，引进肋片效率 $\eta_f$

$$\text{肋片效率} = \frac{\text{实际散热量 } \Phi}{\text{假设整个肋表面处于肋基温度下的散热量 } \Phi_0}$$

$$\eta_f = \frac{\frac{hP}{m} \theta_0 \text{th}(mH)}{hPH\theta_0} = \frac{\text{th}(mH)}{mH}$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}} \quad \Rightarrow \quad mH = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A_c}} H = \sqrt{\frac{h2l}{\lambda l \delta}} H = \sqrt{\frac{2h}{\lambda \delta H}} H^{3/2}$$

$$l \gg \delta \quad \Rightarrow \quad P \approx 2l$$

$\delta H = A_L$  肋片的纵截面积

$$mH = \sqrt{\frac{2h}{\lambda \delta H}} H^{3/2} = \sqrt{2} \left( \frac{h}{\lambda A_L} \right)^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}}$$

可见，与参量  $\left( \frac{h}{\lambda A_L} \right)^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}}$  有关，其关系曲线

如图 17-14 所示。这样，矩形直肋的散热量可以不用计算，而直接

用图 17-14 查出  $\Phi = \eta_f \cdot h \cdot (PH) \cdot (t_0 - t_\infty)$

然后，散热量

影响肋片效率的因素：肋片材料的热导率  $\lambda$ 、肋片表面与周围介质之间的表面传热系数  $h$ 、肋片的几何形状和尺寸（ $P$ 、 $A$ 、 $H$ ）

### 3 通过环肋及三角形截面直肋的导热

为了减轻肋片重量、节省材料，并保持散热量基本不变，需要采用变截面肋片，环肋及三角形截面直肋是其中的两种。

对于变截面肋片来讲，由于从导热微分方程求得的肋片散热量计算公式相当复杂，因此，人们仿照等截面直肋。利用肋片效率曲线来计算方便多了，图 17 — 14 和 17 — 15 分别给出了三角形直肋和矩形剖面环肋的效率曲线。

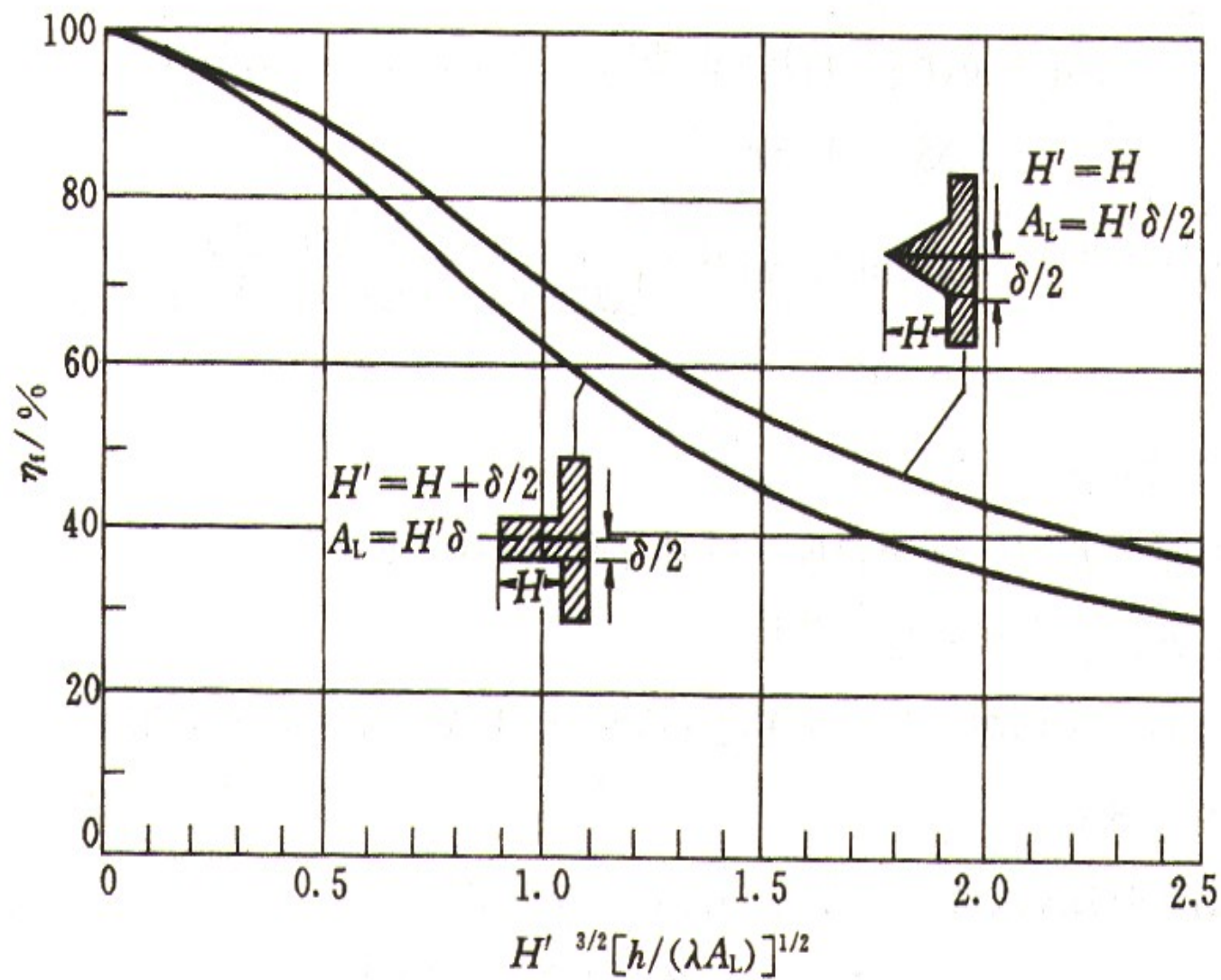


图 17 - 14

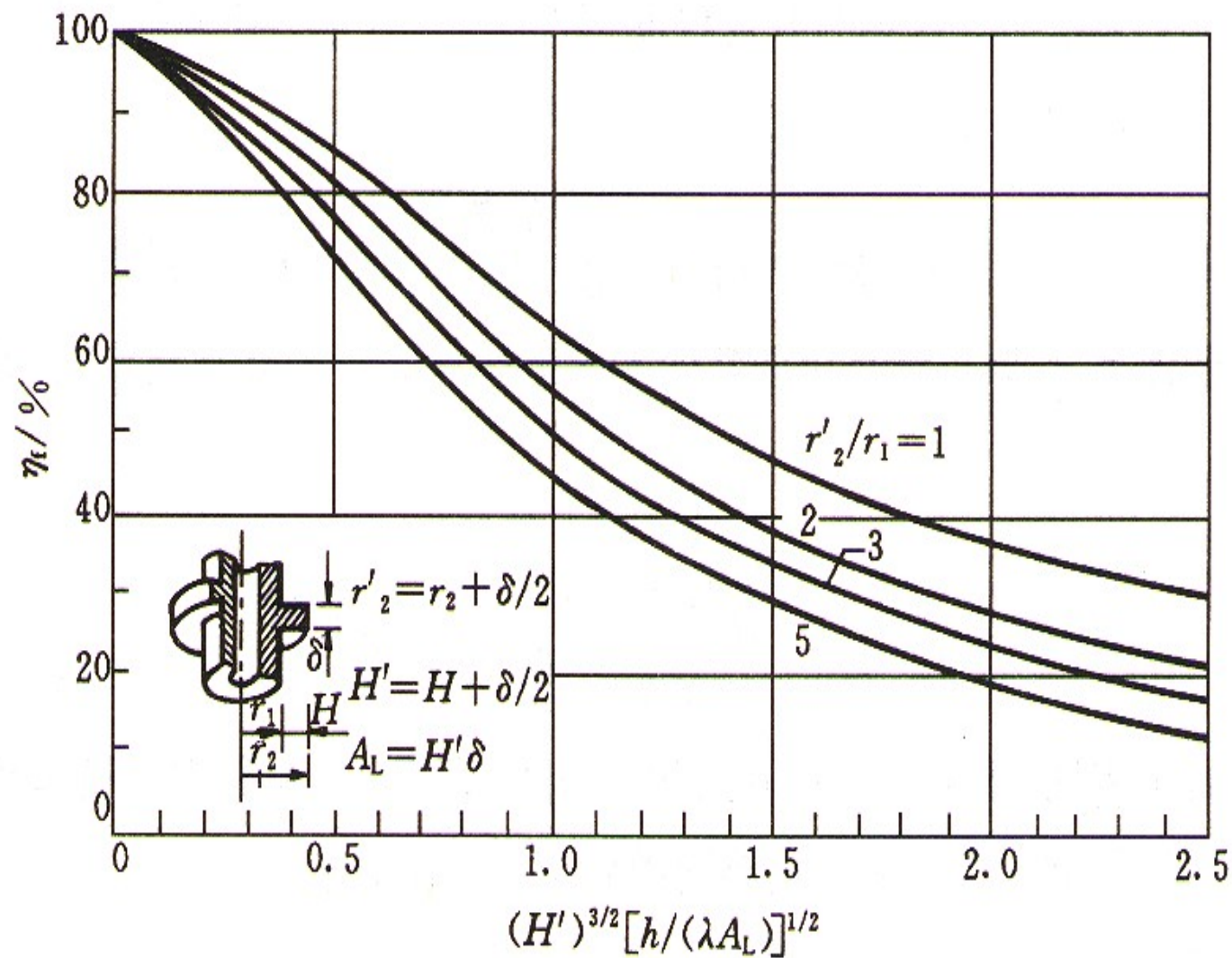


图 17-15

# §17 — 4 二维和三维系统

- 略



## 思考题：

- 1 矢量傅立叶定律的基本表达式及其中各物理量的定义。
- 2 温度场，等温面，等温线的概念。
- 3 利用能量守恒定律和傅立叶定律推导导热微分方程的基本方法。
- 4 使用热阻概念，对通过单层和多层平板，圆筒和球壳壁面的  
一维导热问题的计算方法。
- 5 利用能量守恒定律和傅立叶定律推导等截面和变截面肋片的导热微分方程的基本方法。

6 导热系数为温度的线性函数时，一维平板内温度分布曲线的形

状及判断方法。

7 肋效率的定义。

8 肋片内温度分布及肋片表面散热量的计算。

9 放置和环境空气中的有内热源物体一维导热问题的计算方法

10 导热问题三类边界条件的数学描述。

11 二维物体等温线的物理意义。从等温线分布上可以看出哪

些热物理特征。

# 作业

- 17.3
- 17.32