数学建模第6次作业

3210106052 刘顺华

2022 年 11 月 19 日

一、(1)

针对$S(x)$，在dx年后，存在三种可能：死亡、属于$S(x+dx)$、属于$R(x+dx)$。针对$R(x)$，在dx年后，存在三种可能：死亡、属于$R(x+dx)$。

x到$x+dx$，$S(x)$中因天花死亡概率为$pqdx$,故死亡概率$pqdx+m(x)dx$，死亡$S(x)(pq+m(x))dx+R(x)m(x)dx$人

$S(x)$人中，期间感染天花人数为$S(x)qdx$,其中因天花死亡$S(x)pqdx$，因天花以外原因死亡$S(x)qdxm(x)dx$,共死亡$S(x)qdx(p+m(x)dx)$，剩余$S(x)qdx-S(x)qdx(p+m(x)dx)$属于$R(x+dx)$.

未感染天花$S(x)-S(x)qdx$，死亡$(S(x)-S(x)qdx)m(x)dx$，剩余$S(x)-S(x)qdx-(S(x)-S(x)qdx)m(x)dx$属于$S(x+dx)$.

感染过的$R(x)$人中，死亡$R(x)m(x)dx$,剩余$R(x)-R(x)m(x)dx$.

由此可得，$R(x+dx)=R(x)-R(x)mdx+S(x)qdx-S(x)qdx(p+m(x)dx)$

$dR=-Rmdx+Sqdx-Sq(p+mdx)dx$其中S、R、m为关于x的函数.

即得到微分方程：$dR=-Rmdx+Sqdx-Spqdx-Sqm(dx)^2$

一、(2)

由题意得$P(x)=S(x)+R(x)$,根据实际情况，我们可以得到$P(x+dx)=P(x)-D$其中D为dx年内，以P(x)为基数的人死亡的人数,$D=S(x)(pqdx+m(x)dx)+R(x)m(x)dx=S(x)pqdx+P(x)m(x)dx$

$dP=-Spqdx-Pmdx$、$dS=-Sqdx-(S-Sqdx)mdx$

有 $P(x+dx)=P(x)+dP(x)=P(x)-S(x)pqdx-P(x)m(x)dx$

$S(x+dx)=S(x)+dS(x)=S(x)-S(x)qdx-(S(x)-S(x)qdx)m(x)dx$

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\\
&=\lim_{dx\to 0}\frac{\frac{S(x)-S(x)qdx-(S(x)-S(x)qdx)m(x)dx}{P(x)-S(x)pqdx-P(x)m(x)dx}-\frac{S(x)}{P(x)}}{dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{\frac{S-Sqdx-(S-Sqdx)mdx}{P-Spqdx-Pmdx}-\frac{S}{P}}{dx}\\
&=\lim_{dx\to 0}\frac{PSqmdx+S^2pq-PSq}{P^2-PSpqdx-P^2mdx}\\
&=\frac{S^2pq-PSq}{P^2}=\frac{S^2pq}{P^2}-\frac{PSq}{P^2}=f^2pq-fq
\end{aligned}
$$

故$f'(x)+qf(x)=pqf^2(x)$为Bernoulli方程. 解得$f^{-1}(x)=p+C_0e^{qx}$其中C为常数.

二、（1）

由题，以天作为时间单位，则一个人流言传播的速度为A。对于一个Speaker(S)，其传播会遇到以下三种情况：一，传播给Ignorant(I),将其变为Speaker；二，传播给Speaker(S)，两者均变为Stiflers(R)；三，传播给Stiflers(R)，自己也变为Stiflers(R). 对于人群N，一个Speaker遇到以上情况的概率分别为$\frac{I(t)}{N}, \frac{S(t)}{N}, \frac{R(t)}{N}$

因此对一个Speaker产生的变化我们有以下微分方程组：

$$\begin{cases} dS(t) = [A\dfrac{I(t)}{N} - 2A\dfrac{S(t)}{N} - A\dfrac{R(t)}{N}]dt \\ dR(t) = [2A\dfrac{S(t)}{N} + A\dfrac{R(t)}{N}]dt \\ dI(t) = -A\dfrac{I(t)}{N}dt \end{cases}$$

若要研究整体S(t)产生的影响，我们对上述方程组右边乘S(t)，但我们会发现，这样会将Speaker传播给另一个Speaker的情况进行重复计算，我们对方程进行修正得到以下方程组：

$$\begin{cases} dS(t) = S(t)[A\dfrac{I(t)}{N} - A\dfrac{S(t)}{N} - A\dfrac{R(t)}{N}]dt \\ dR(t) = S(t)[A\dfrac{S(t)}{N} + A\dfrac{R(t)}{N}]dt \\ dI(t) = -S(t)A\dfrac{I(t)}{N}dt \end{cases}$$

二、（2）

对上题得到的方程除以基数N，我们可以得到

$$\begin{cases} ds(t) = s(t)[Ai(t) - As(t) - Ar(t)]dt \\ dr(t) = s(t)[As(t) + Ar(t)]dt \\ di(t) = -s(t)Ai(t)dt \end{cases}$$

$r = 1 - s - i$上式可化简为：

$$\begin{cases} s' = 2Asi - As \\ r' = As - Asi \\ i' = -Asi \end{cases}$$

解得$s = Ce^{\int A(2i-1)dt} \quad i = Ce^{-\int Asdt}$

二、（3）

由前面推导我们容易得到，$i' \le 0, r' \ge 0, i$单调递减，r单调递增，i，r均有界，故$t \to \infty,\quad \lim i(t), \lim r(t)$极限均存在,$s(t) + r(t) + i(t) = 1$,故$\lim s(t)$极限存在.

假设 $t \to \infty,\quad \lim s(t) \ne 0$,传播一定会继续，i(t)最终减少为0，最终一定会达到全员听闻过的状态，此时$\lim s(t) \ne 0$，仍存在传播，此时会导致s(t)减少（只能传播给r或s，最终成为r），导致$\lim s(t) = 0$，不符合$\lim s(t) \ne 0$，故$\lim_{t\to\infty} s(t) = 0$.

由上式$s' = 2Asi - As$以及上述分析得，在后期s单减收敛于0，因此，当t充分大时$s' < 0$有$As(2i-1) < 0, i < \frac{1}{2}$,又由于$i' \le 0fii$单调递减，故$\lim i(t) < 1/2$.

对此进行数学描述等价于：

$$\exists T, \exists t_0 > T, s'_{t_0} < 0, As_{t_0}(2i_{t_0} - 1) < 0, i_{t_0} < \frac{1}{2}$$

$$\text{i(t)单调递减}, \forall t > t_0, i(t) < i(t_0) < \frac{1}{2}, \lim_{t\to\infty} i(t) < \frac{1}{2}$$