一、学校希望从n名学生中录取一名，学生以随机顺序逐个前来面试。通过面试可给出已面试者的综合素质高低顺序，某位学生是否被录取须在该学生面试后立即决定，在作出不录取决定后方能面试下一名学生。考虑到最优秀的学生可能在录取后选择其他学校，学校希望录取到所有考生中综合素质第二名的学生的概率尽可能大。

（1）分别记f_k和g_k为综合素质在前k名面试的学生中居于第一名和第二名的学生在所有学生中居于第二名的概率。求f_k和g_k；

（2）记v_k为不录取前k名学生后，采用最优策略可能录取到综合素质第二名的学生的概率的最大值。试写出v_k满足的递推关系；

（3）求v_k，并给出相应的最优策略。

二、n支球队通过淘汰赛决出冠军。赛程分为r轮，第l轮共有m_l场比赛，$l=1,2,\cdots,r$，r和$m_1,m_2,\cdots,m_r$的值由赛制规定。每场比赛在两支球队间进行，比赛结果为一支球队获胜，一支球队落败，落败的球队被淘汰。同一轮中的各场比赛同时进行，一支球队不能参加同一轮的两场比赛，不同轮的比赛先后进行。每轮所有比赛的对阵双方在该轮开始前从所有当前未被淘汰的球队中以完全随机的方式选出。只有一支球队未被淘汰时赛程结束，该球队即为冠军。

记队i的水平值为v_i，$i=1,\cdots,n$，设队i与队j比赛时，队i获胜的概率为$\dfrac{v_i}{v_i+v_j}$，队j获胜的概率为$\dfrac{v_j}{v_i+v_j}$。记$n=2^s+k$，其中s,k为正整数，$0\le k<2^s$。设$v_1>v=v_2=\cdots=v_n>0$。

（1）试给出为保证赛制可行$m_1,m_2,\cdots,m_r$应满足的条件；

（2）问$n=4$时共有多少种不同的赛制。采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最大，采用哪种赛制可使队1获得冠军的概率最小；

（3）若$m_1=k$，求队1在第一轮结束后未被淘汰的概率f_1，若$m_1=j<k,m_2=k-j$，求队1在第二轮结束后未被淘汰的概率f_2，并证明$f_1-f_2>0$；

（4）证明：$r=s+1$且$m_1=k,m_l=2^{s-l+1},l=2,3,\cdots,s+1$的赛制对队1最为有利。