数学建模（10）

1.

（1）

每个人有策略集{维修，不维修}，记为x_i={0,1}，0表示不维修，1表示维修 。

某人i的收益为：$w_i = v\Sigma_j x_j - c\,x_i$

达到Nash均衡时，满足：

$$\forall i \in [1,n], \forall x_i' = \{0,1\} - x_i, w_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots x_n) \geq w_i(x_1, x_2, \dots, x_i', \dots x_n)$$

称此时的纯策略集{x_1,x_2,......,x_n}满足Nash均衡。

由于v>c，因此Nash均衡为：x_i=1，其余为0

即：

{1,0,......,0},{0,1,0,......,0},......,{0,0,......,1}一共n种

（2）

前面n-1个人均不维修的概率为$P = (1-p)^{n-1} = q^{n-1}$

纯策略参与维修：

$$w_n = v - c$$

纯策略视而不见：

$$w_n = v \cdot (1 - q^{n-1})$$

（3）

可以假设次博弈问题是对称的，在混合博弈下，任何一个市民都以p的概率选择维修，以1-p的概率选择视而不见。对某个市民i分析，他以上述方式做出选择，不论是维修还是视而不见，对于其他任意市民j的期望收益都是一样的（否则该市民j将会选择纯策略而不是混合策略）因此：

$$\begin{gathered}
p \cdot v + (1-p) \cdot v \cdot [1 - (1-p)^{n-2}] = p \cdot (v-c) + (1-p) \cdot (v-c) \\
\Rightarrow v(p + 1 - p - (1-p)^{n-1}) = v - c \\
\Rightarrow [1 - (1-p)^{n-1}] = 1 - \frac{c}{v} \\
\Rightarrow 1 - p = \sqrt[n-1]{\frac{c}{v}} \\
\Rightarrow p = 1 - \sqrt[n-1]{\frac{c}{v}}
\end{gathered}$$

也就是说，在n比较大的情况下，每个人参与维修的概率p将会趋近于0，也就是每个人都选择视而不见。

2.

（1）

机构收益	企 \ 机	查	不查
	排	1	-1
	不排	V(m-1,n-1)	V(m, n-1)

（2）

对于V(m,n+1)的表达式，考虑V(m,n)到V(m,n+1)的递推式，考虑第一天。第一天企业排放的概率为p，应有不论机构检查还是不检查，对于机构的期望收益都应该是一样的（否则机构将直接选择查或者不查），因此：

$$\begin{aligned} p\cdot 1+(1-p)\cdot V(m-1,n) &= p\cdot(-1)+(1-p)\cdot V(m,n) \\ \Rightarrow \frac{2p}{1-p} &= V(m,n)-V(m-1,n) \\ \Rightarrow p &= \frac{V(m,n)-V(m-1,n)}{2+V(m,n)-V(m-1,n)} \end{aligned}$$

机构第一天检查的概率设为q，对企业来说，不论他排放还是不排放，其期望收益都是一样的。因此：

$$\begin{aligned} q\cdot 1+(1-q)\cdot(-1) &= q\cdot V(m-1,n)+(1-q)\cdot V(m,n) \\ \Rightarrow q &= \frac{1+V(m,n)}{2+V(m,n)-V(m-1,n)} \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} V(m,n+1) &= \text{第一天检查的概率}\cdot\text{第一天查了获得的收益}+\text{第一天没查的概率}\cdot\text{第一天没查获得的收益} \\ &= q\cdot[p+(1-p)V(m-1,n)]+(1-q)\cdot[p+(1-p)V(m-1,n)] \\ &= p+(1-p)V(m-1,n) \\ &= \frac{V(m,n)+V(m-1,n)}{2+V(m,n)-V(m-1,n)} \end{aligned}$$

对于V(m+1,n)的表达式，考虑V(m,n)到V(m+1,n)的递推式。

初始条件有：

$$\begin{aligned} V(0,n) &= -1 \\ V(n,n) &= 1 \end{aligned}$$

（3）

取m=1，则：

$$V(1,n+1)=\frac{V(1,n)+V(0,n)}{2+V(1,n)-V(0,n)}=\frac{V(1,n)-1}{V(1,n)+3}$$

一个数列的递推式，即:

$$a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+3}=1-\frac{4}{a_n+3}$$
$$a_1=1$$

最后在n趋近于无穷时，V(1,n)将会趋近于-1。因此其不动点为-1

$$a_{n+1}+1=\frac{2a_n+2}{a_n+3}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{1+a_{n+1}}=\frac{a_n+3}{a_n+1}=1+\frac{2}{1+a_n}$$
$$\Rightarrow \{\frac{2}{1+a_{n+1}}\}=(n-1)+1$$
$$\Rightarrow a_{n+1}=V(1,n)=\frac{2-n}{n}$$