
补充材料1：卷积与图像去噪

鲁 鹏

北京邮电大学 计算机学院 智能科学与技术中心

补充1：卷积与图像去噪

- 图像去噪与卷积
- 高斯卷积核
- 图像噪声与中值滤波器

补充1：卷积与图像去噪

- 图像去噪与卷积
- 高斯卷积核
- 图像噪声与中值滤波器

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

2

噪声图像



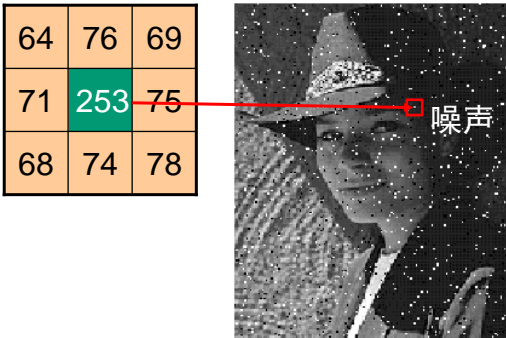
噪声图像

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

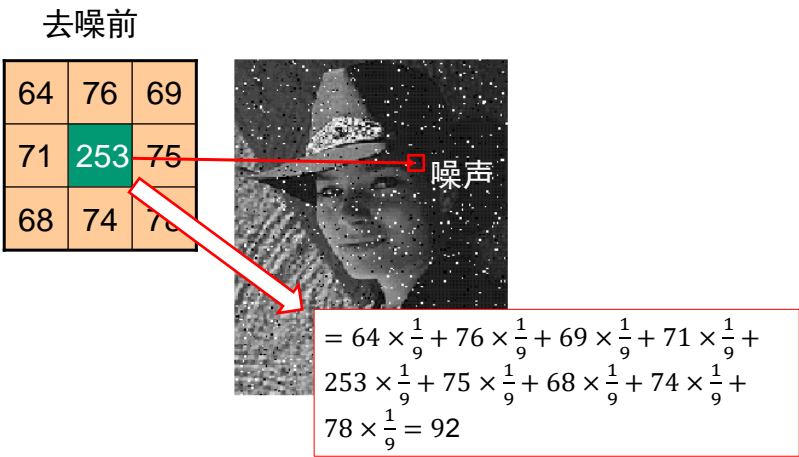
3

噪声图像

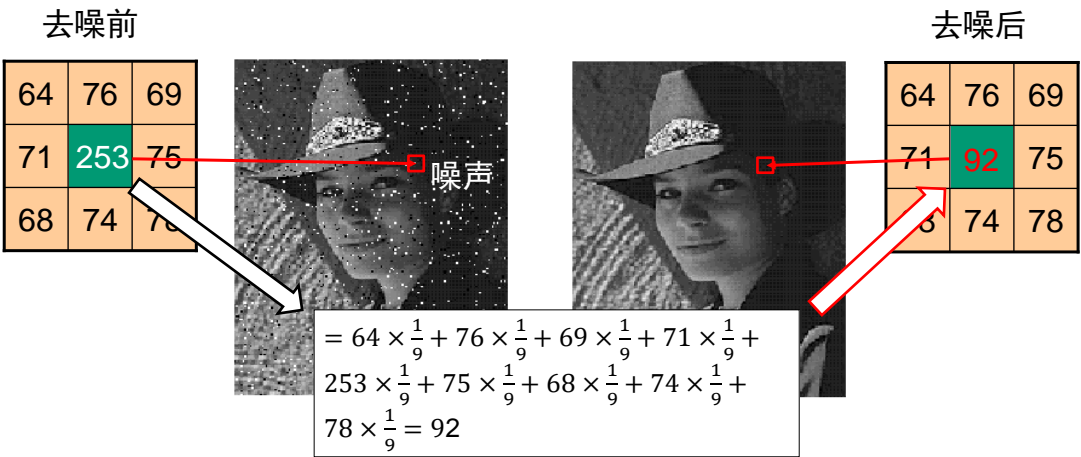


噪声图像

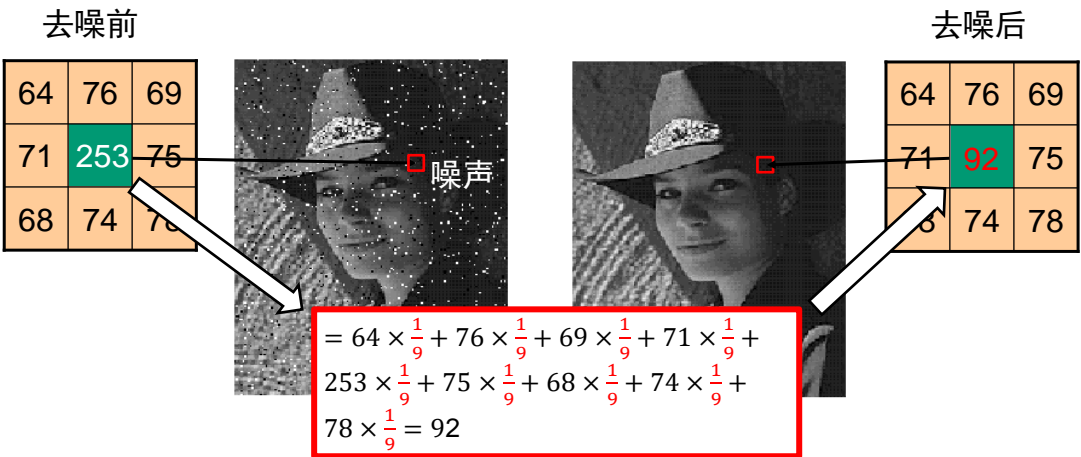
图像去噪



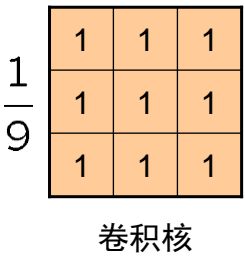
图像去噪



图像去噪

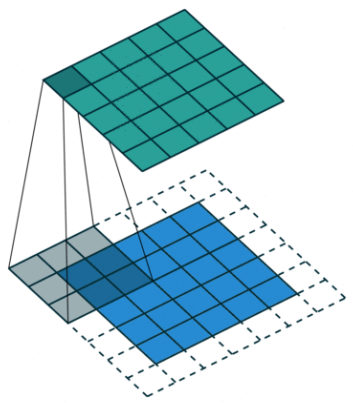


卷积核



卷积的定义

卷积后图像



输入图像

卷积的定义

令 F 为图像， H 为卷积核， F 与 H 的卷积记为 $R = F * H$

$$R_{ij} = \sum_{u,v} H_{i-u,j-v} F_{u,v}$$

卷积的定义

令 F 为图像， H 为卷积核， F 与 H 的卷积记为 $R = F * H$

$$R_{ij} = \sum_{u,v} H_{i-u,j-v} F_{u,v}$$

卷积的定义

令 F 为图像， H 为卷积核， F 与 H 的卷积记为 $R = F * H$

$$R_{ij} = \sum_{u,v} H_{i-u,j-v} F_{u,v}$$

卷积的定义

令 F 为图像， H 为卷积核， F 与 H 的卷积记为 $R = F * H$

$$R_{ij} = \sum_{u,v} H_{i-u,j-v} F_{u,v}$$

使用 H 将 F 卷积到域 R

卷积性质

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

14

卷积性质

- 叠加性: $\text{filter}(f_1 + f_2) = \text{filter}(f_1) + \text{filter}(f_2)$
- 平移不变性: $\text{filter}(\text{shift}(f)) = \text{shift}(\text{filter}(f))$

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

15

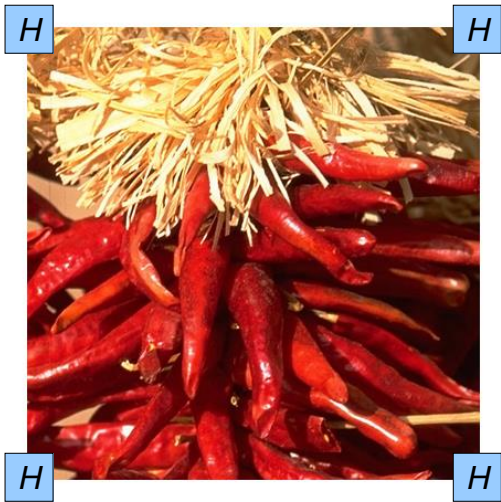
更多性质

- 交换律: $a * b = b * a$
- 结合律: $a * (b * c) = (a * b) * c$
- 分配律: $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
- 标量: $ka * b = a * kb = k(a * b)$

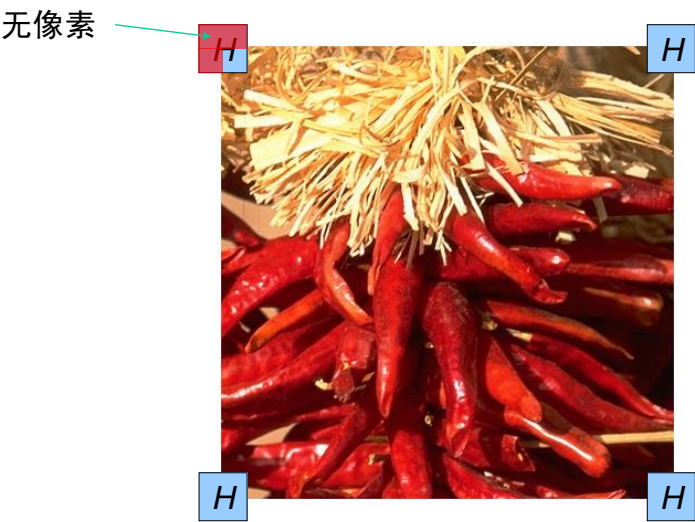
小结

在这一节中，我们学习了一种基础的图像操作，卷积操作。希望大能够理解什么是卷积，能够掌握卷积的关键性质，同时也知道如何利用卷积核来对图像进行卷积。

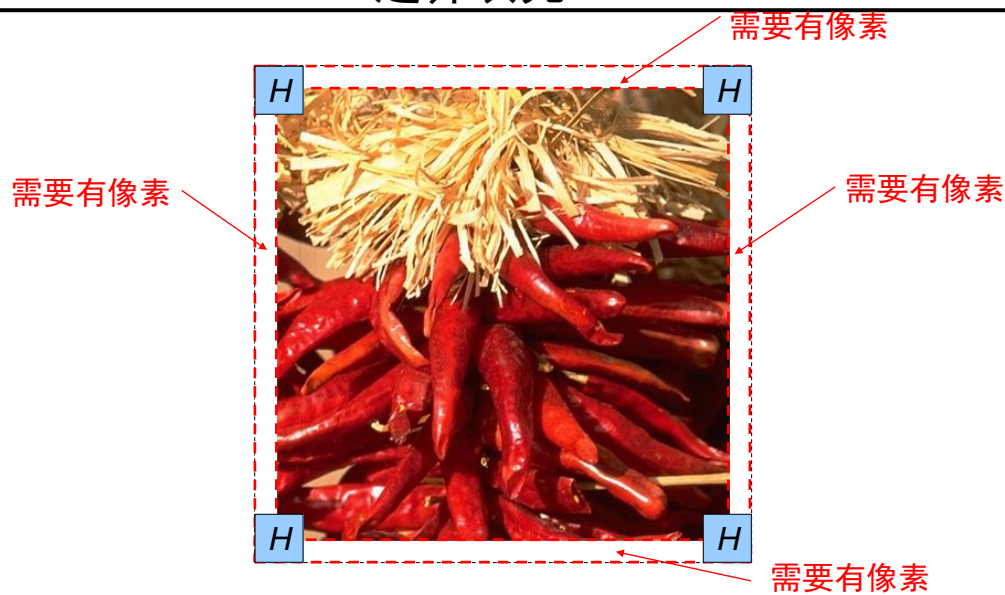
边界填充



边界填充



边界填充



2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

20

边界填充

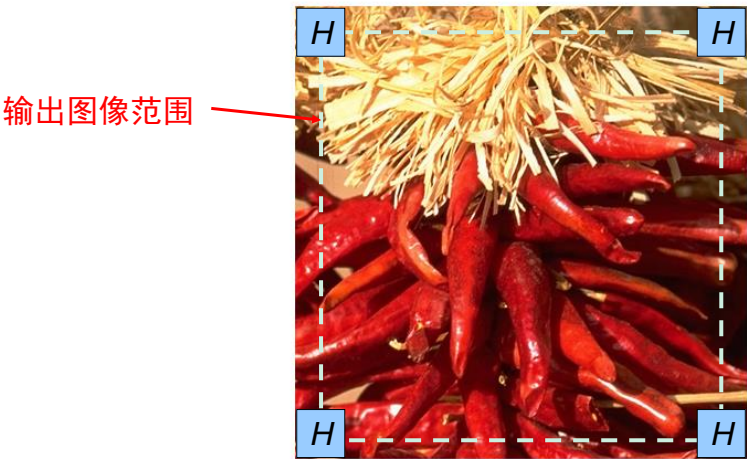


2020/4/21

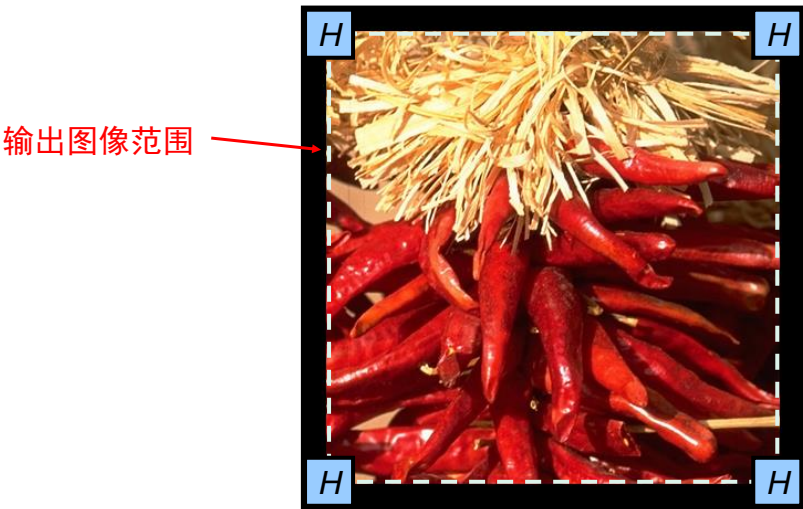
北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

21

边界填充



边界填充



边界填充



拉伸



镜像

小结

- 卷积操作后的图像要小于输入时图像，通过边界填充，我们可以实现卷积前后图像的尺寸不变；

小结

- 卷积操作后的图像要小于输入时图像，通过边界填充，我们可以实现卷积前后图像的尺寸不变；
- 一种最常用的边界填充就是常数填充。

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

26

卷积示例

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

27

卷积示例



原图

0	0	0
0	1	0
0	0	0

单位脉冲核

?

卷积示例



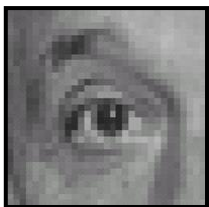
原图

0	0	0
0	1	0
0	0	0



无变化

卷积示例



原图

0	0	0
0	0	1
0	0	0

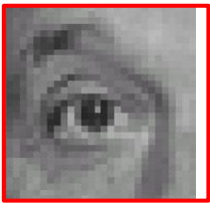
?

卷积示例



原图

0	0	0
0	0	1
0	0	0



向左平移一个像素

卷积示例



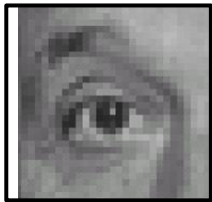
原图

0	0	0
0	0	1
0	0	0



向左平移一个像素

0	0	0
1	0	0
0	0	0



向右平移一个像素

卷积示例



原图

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

?

卷积示例



原图

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9



卷积示例



原图

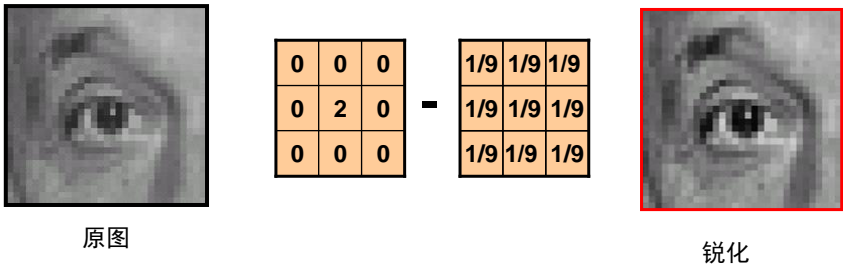
0	0	0
0	2	0
0	0	0

-

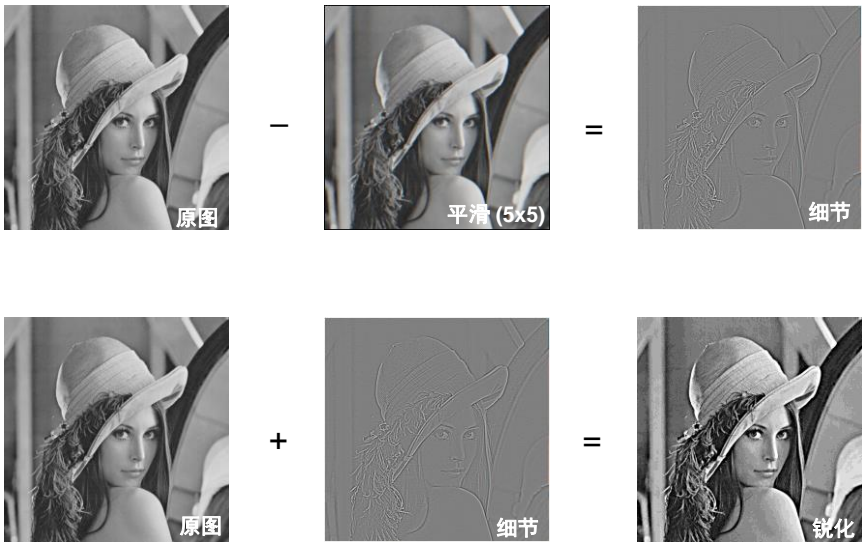
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

?

卷积示例



锐化



锐化

$$\begin{aligned}
 & \text{原图} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{原图} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \text{原图} * \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \text{原图} * \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \text{锐化}
 \end{aligned}$$

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

38

小结

卷积是图像处理中的一个基础而又重要的图像操作，它可以实现：

- 平移
- 平滑
- 锐化
- ...

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

39

补充1：卷积与图像去噪

- 图像去噪与卷积
- 高斯卷积核
- 图像噪声与中值滤波器

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

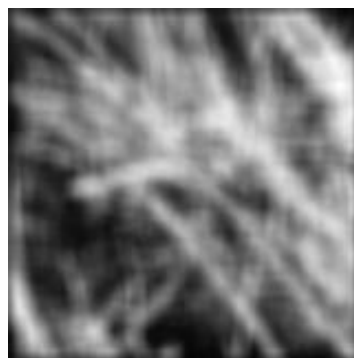
40

平均卷积核存在的问题

- 解决方法：根据邻域像素与中心的远近程度分配权重



1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9



卷积后的图像产生了一些水平和竖直方向的条状

振铃!

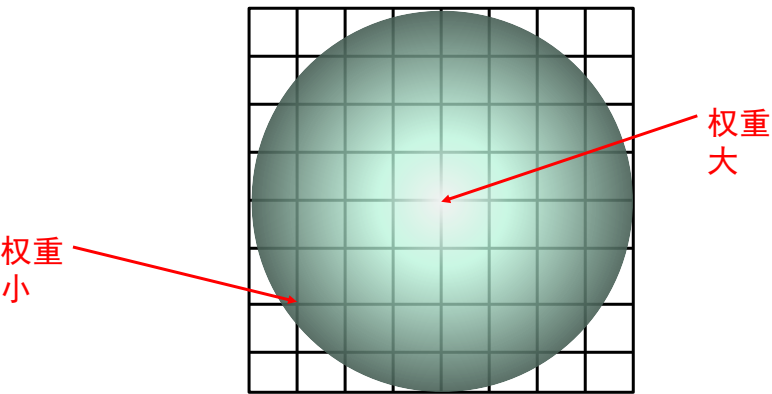
2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

41

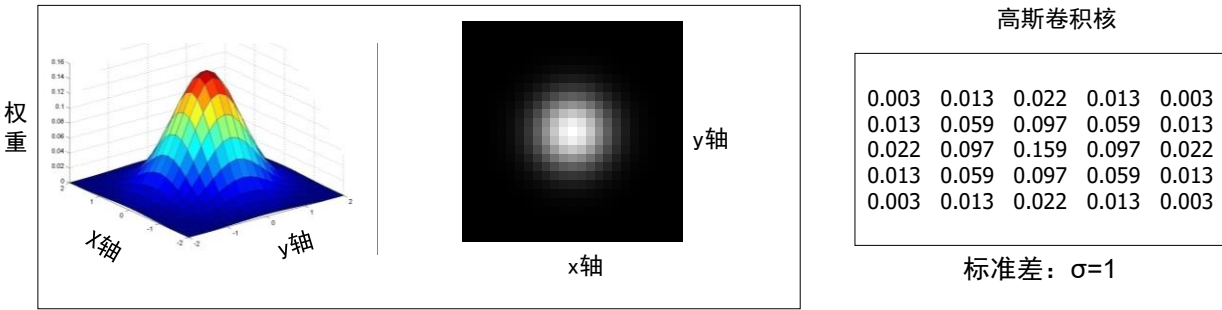
平均卷积核存在的问题

- 解决方法：根据邻域像素与中心的远近程度分配权重



高斯卷积核

$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$



高斯卷积核权重可视化

高斯卷积核

生成步骤：

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

44

高斯卷积核

生成步骤：

1. 确定卷积核的尺寸, 比如 5×5

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

45

高斯卷积核

生成步骤：

1. 确定卷积核的尺寸, 比如 5×5
2. 设置高斯函数的标准差, 比如 $\sigma=1$

$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

高斯卷积核

生成步骤：

1. 确定卷积核的尺寸, 比如 5×5
2. 设置高斯函数的标准差, 比如 $\sigma=1$

$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

3. 计算卷积核各个位置权重值

高斯卷积核

生成步骤：

- 1. 确定卷积核的尺寸, 比如 5×5
- 2. 设置高斯函数的标准差, 比如 $\sigma=1$

$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

一个 5×5 的高斯卷积核

0.003	0.013	0.022	0.013	0.003
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.022	0.097	0.159	0.097	0.022
0.013	0.059	0.097	0.059	0.013
0.003	0.013	0.022	0.013	0.003

- 3. 计算卷积核各个位置权重值

标准差： $\sigma=1$

- 4. 对权重值进行归一化

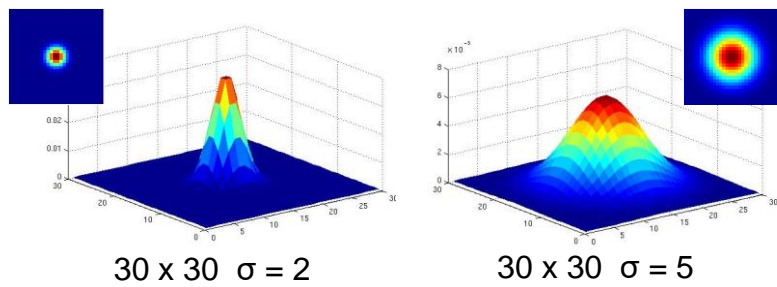
高斯卷积核

如何设置下述参数：

- 1. 卷积核的尺寸
- 2. 高斯函数的标准差

方差变化

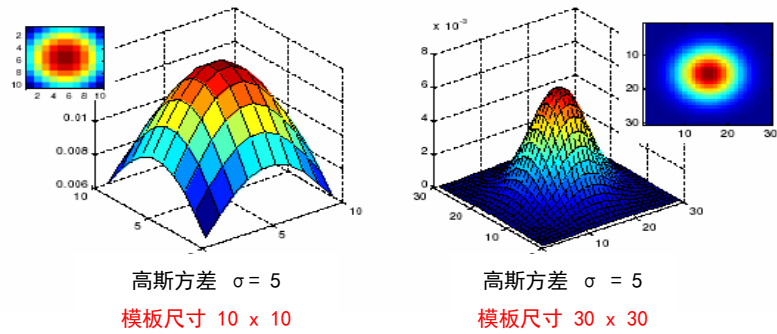
$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$



方差越大，平滑效果明显

窗宽变化

$$G_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$



模板尺寸越大，平滑效果越强

卷积核参数

- 大方差或者大尺寸卷积核平滑能力强；
- 小方差或者小尺寸卷积核平滑能力弱；
- 经验法则: 将卷积核的半窗宽度设置为 3σ ，最终卷积模板尺寸为 $2 \times 3\sigma + 1$ 。

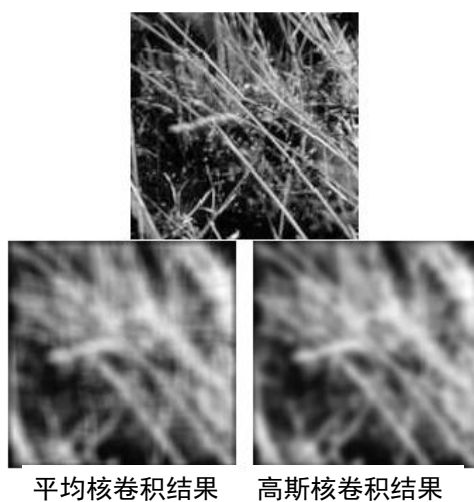
例子：标准差设置成1， 卷积模板宽度= $2 \times 3 \times 1 + 1 = 7$

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

52

高斯卷积核 vs. 平均卷积核



2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

53

高斯卷积核

- 去除图像中的“高频”成分（低通滤波器）
- 两个高斯卷积核卷积后得到的还是高斯卷积核
 - 使用多次小方差卷积核连续卷积，可以得到与大方差卷积核相同的结果
 - 使用标准差为 σ 的高斯核进行两次卷积与使用标准差 $\sigma\sqrt{2}$ 的高斯核进行一次卷积相同
- 可分离
 - 可分解为两个一维高斯的乘积

可分离性示例

高斯卷积核与图像卷积

1	2	1
2	4	2
1	2	1

*

2	3	3
3	5	5
4	4	6

=

65

$= 2 + 6 + 3 + 6 + 20 + 10 + 4 + 8 + 6$

= 65

分解为两个一维的高斯卷积核

1	2	1
2	4	2
1	2	1

=

1
2
1

x

1	2	1
---	---	---

一维卷积核卷积

1	2	1
---	---	---

*

2	3	3
3	5	5
4	4	6

=

	11	
	18	
	18	

一维卷积核卷积

1
2
1

*

	11	
	18	
	18	

=

	65	

卷积操作运算量

1. 用尺寸为 $m \times m$ 的卷积核卷积一个尺寸为 $n \times n$ 的图像，其计算复杂度是多少？

答： $O(n^2 m^2)$

2. 如果核可分离呢？

答： $O(n^2 m)$

小结

在这一节中，我们学习了一种新的卷积核，高斯卷积核，它能够有效地抑制噪声、实现图像平滑。同时，我们也介绍了高斯卷积核的堆叠以及分解，它们都可以用于减少卷积计算的复杂度。

补充1：卷积与图像去噪

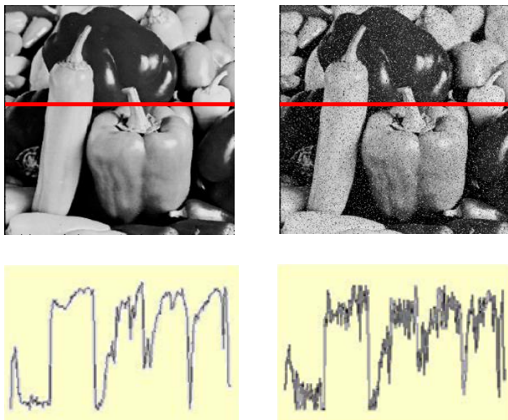
- 图像去噪与卷积
- 高斯卷积核
- 图像噪声与中值滤波器

噪声



原图

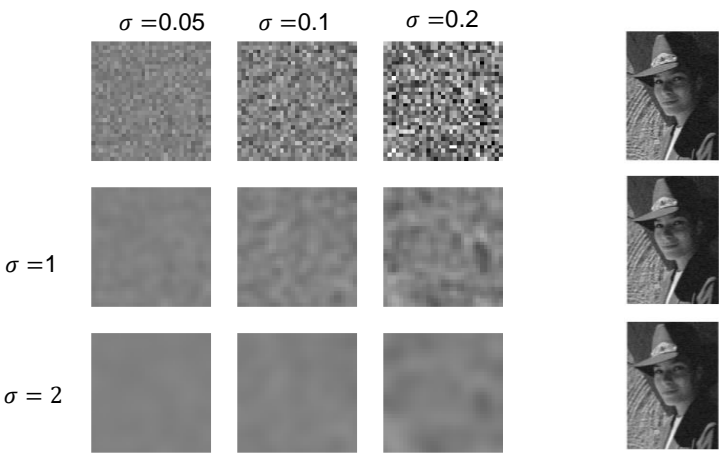
高斯噪声



理想图像 随机噪声 噪声分布 通常 $\mu = 0, \sigma$ 很小。

$\hat{f}(x,y) = f(x,y) + \eta(x,y)$ $\eta(x,y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

减少高斯噪声



噪声



原图



椒盐噪声



脉冲噪声



高斯噪声

- **椒盐噪声**：黑色像素和白色像素随机出现
- **脉冲噪声**：白色像素随机出现
- **高斯噪声**：噪声强度变化服从高斯分布（正态分布）

椒盐噪声

3x3



5x5

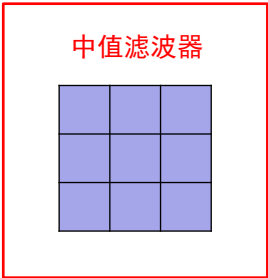


7x7



高斯卷积核去噪结果

中值滤波



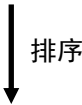
图像

26	23	27	18	21
29	10	15	20	30
31	23	90	27	32
19	33	31	30	27
28	29	27	25	31

中值滤波

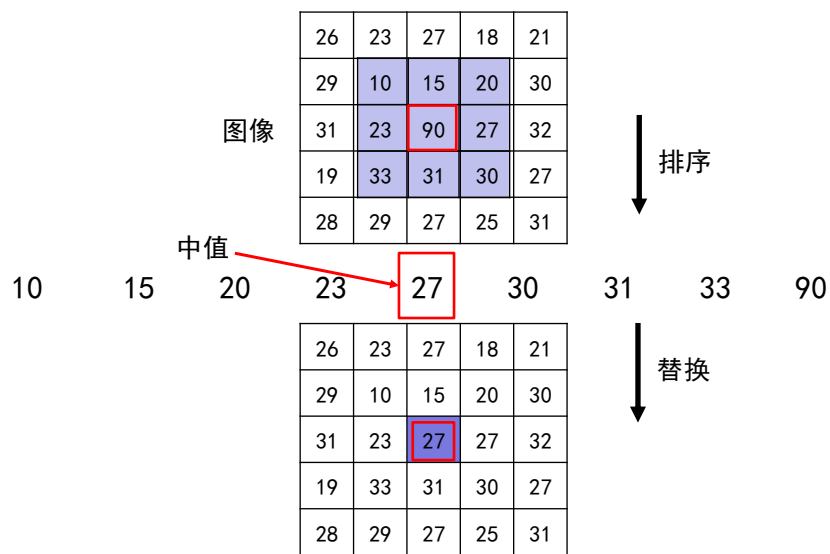
图像

26	23	27	18	21
29	10	15	20	30
31	23	90	27	32
19	33	31	30	27
28	29	27	25	31

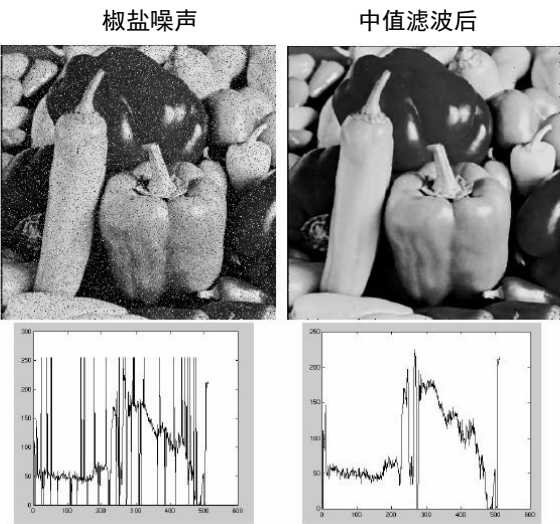


10 15 20 23 27 30 31 33 90

中值滤波



中值滤波



小结

在这一节中我们认识了三种类型的噪声，椒盐噪声、脉冲噪声及高斯噪声。对于前两者建议使用中值滤波器，对于高斯噪声可以使用高斯卷积核来进行去噪。

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

68

卷积与图像去噪

- 图像去噪与卷积
- 高斯卷积核
- 图像噪声与中值滤波器（完）

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

69

补充材料2：卷积与边缘提取

鲁 鹏

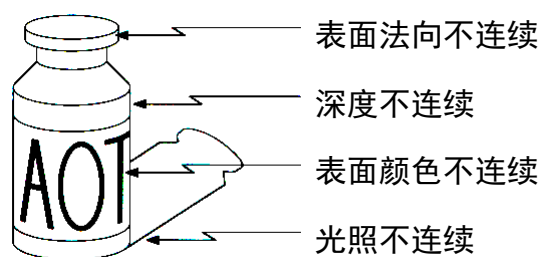
北京邮电大学 计算机学院 智能科学与技术中心

边缘提取

- **边缘**: 图像中亮度明显而急剧变化的点
- **为什么要研究边缘?**
 - 编码图像中的语义与形状信息
 - 相对于像素表示, 边缘表示显然更加紧凑



边缘的种类



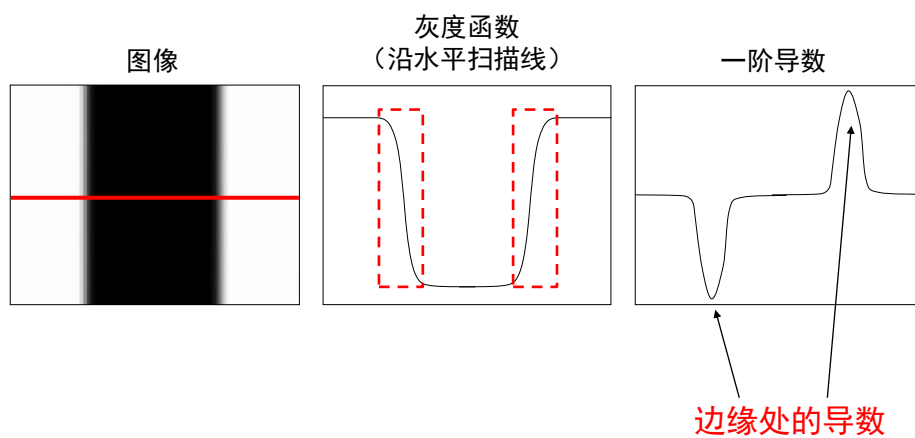
2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

72

边缘检测

图像中亮度明显而急剧变化的地方



2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

73

图像求导

2D函数 $f(x, y)$ 的偏导为:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon, y) - f(x, y)}{\varepsilon}$$

图像求导公式:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx \frac{f(x + 1, y) - f(x, y)}{1}$$

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

-1

1

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

-1

1

图像求导



图像偏导



Source: K. Grauman

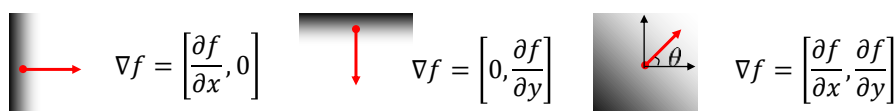
2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

76

图像梯度

图像梯度: $\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right]$ 梯度指向灰度变换最快的方向



梯度方向:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right) \quad \text{梯度方向与边缘方向的关系?}$$

梯度的模:

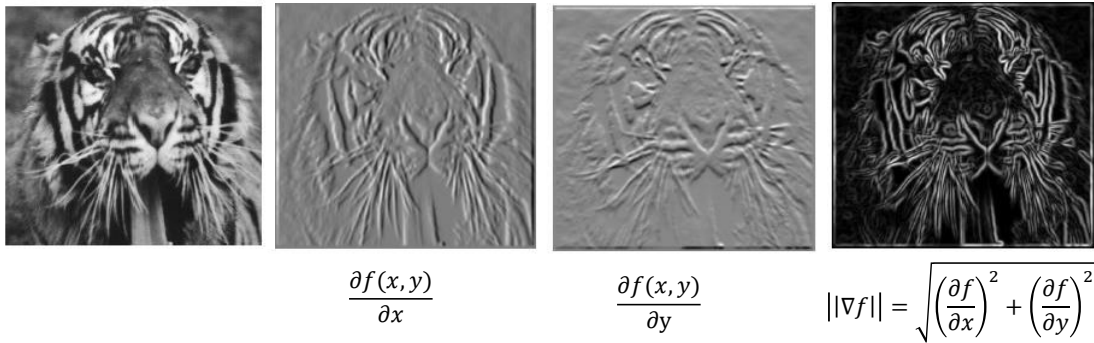
$$||\nabla f|| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$$

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

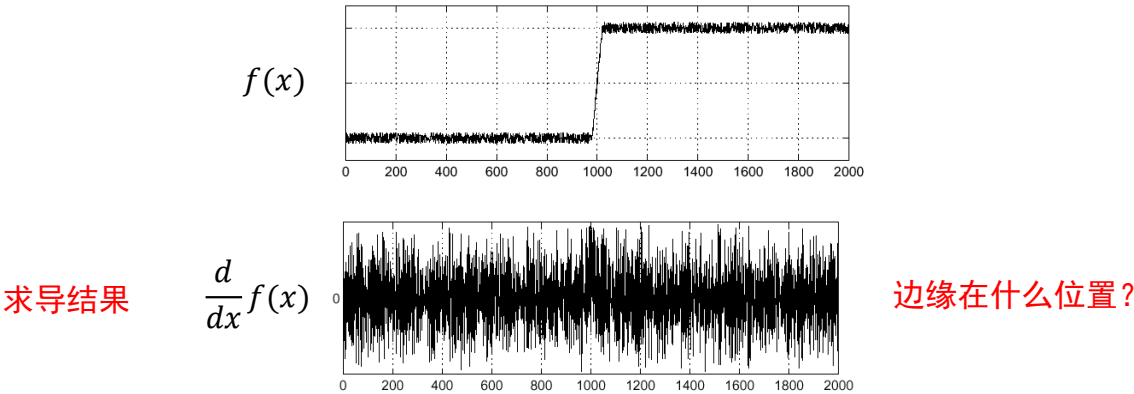
77

Gradient Magnitude

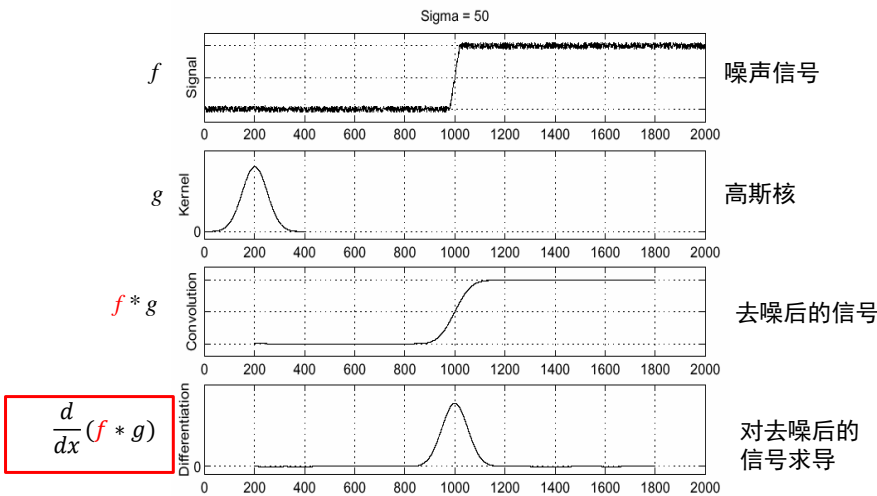


噪声的影响

噪声图像的某一行或列的灰度值随位置变换的情况



解决方法：先平滑



2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

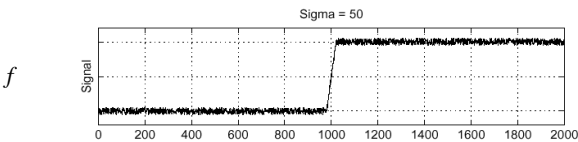
80

高斯一阶偏导

- 微分是卷积，而卷积具有结合性：

$$\frac{d}{dx}(f * g) = f * \frac{d}{dx}g$$

节省了一次图像卷积操作！

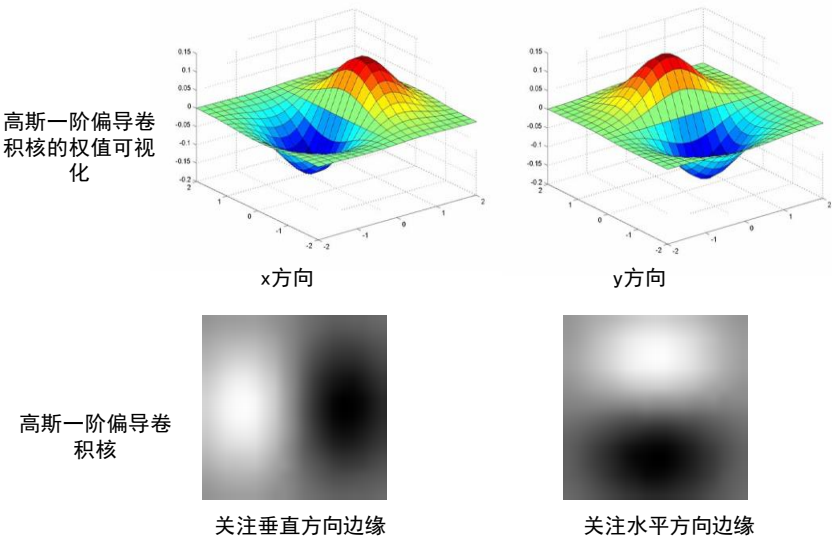


2020/4/21

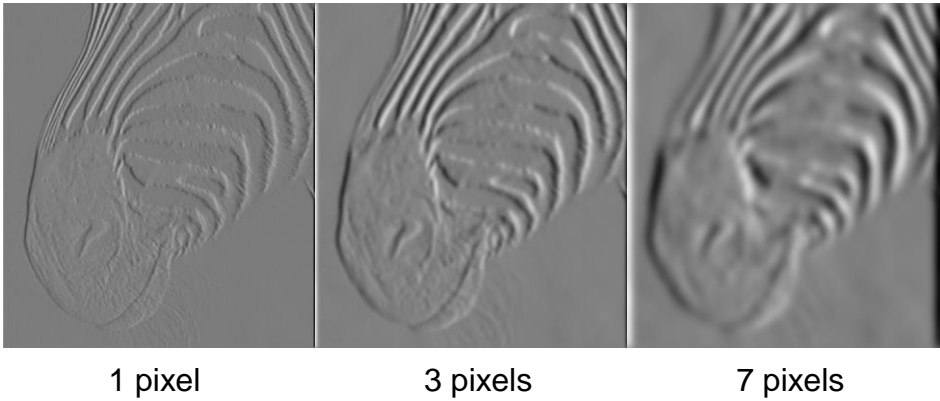
北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

81

高斯一阶偏导卷积核



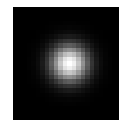
高斯一阶偏导卷积核的方差变化



方差由小变大 →

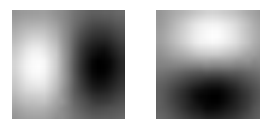
高斯核 vs. 高斯一阶偏导核

- 高斯核
 - 消除高频成分（低通滤波器）
 - 卷积核中的权值不可为负数
 - 权值总和为1（恒定区域不受卷积影响）



高斯核

- 高斯一阶偏导核
 - 高斯的导数
 - 卷积核中的权值可以为负
 - 权值总和是0（恒定区域无响应）
 - 高对比度点的响应值大



高斯一阶偏导核

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

84

边缘检测目标

目标



原图



边缘图

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

85

Canny边缘检测器

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

86

Canny边缘检测器



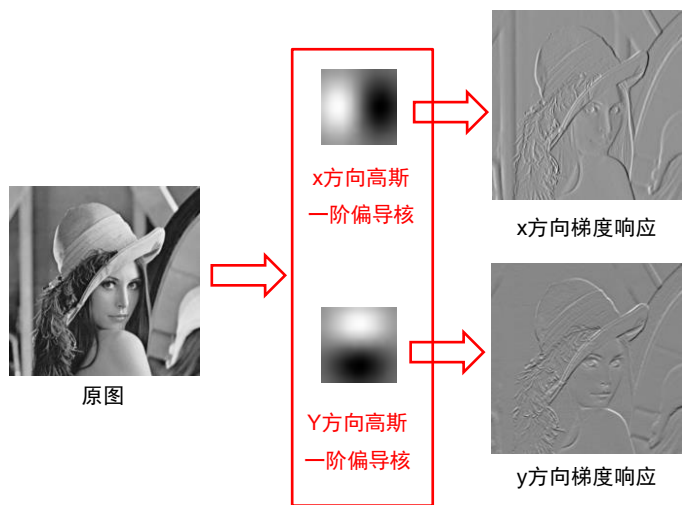
原图

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

87

Canny边缘检测器

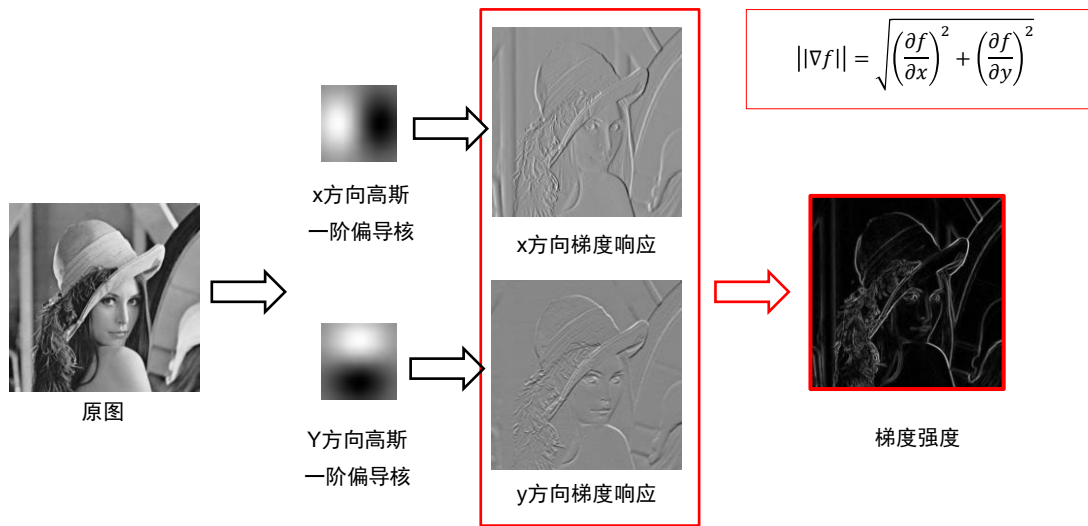


2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

88

Canny边缘检测器

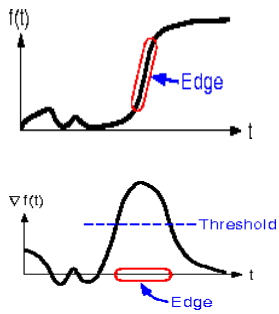


2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

89

非极大值抑制



如何得到更为准确的边缘？

梯度强度

2020/4/21

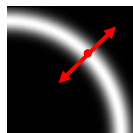
北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

90

非极大值抑制



梯度强度



2020/4/21

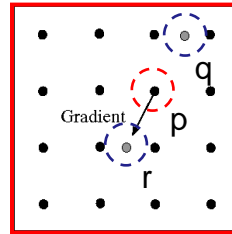
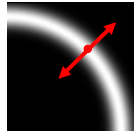
北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

91

非极大值抑制



梯度强度



2020/4/21

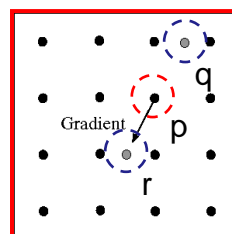
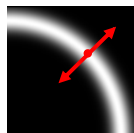
北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

92

非极大值抑制



梯度强度



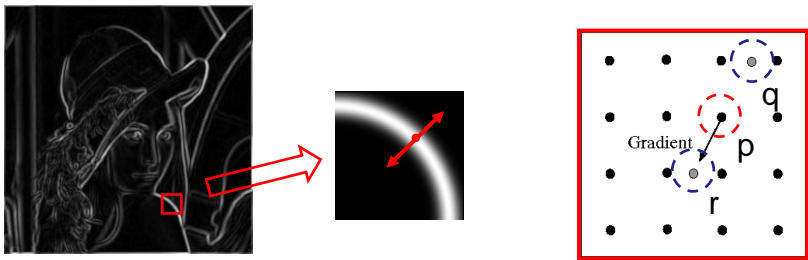
如果 (p 点的梯度强度 $>$ q 点的梯度强度 & p 点的梯度强度 $>$ r 点的梯度强度)
 p 点保留;

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

93

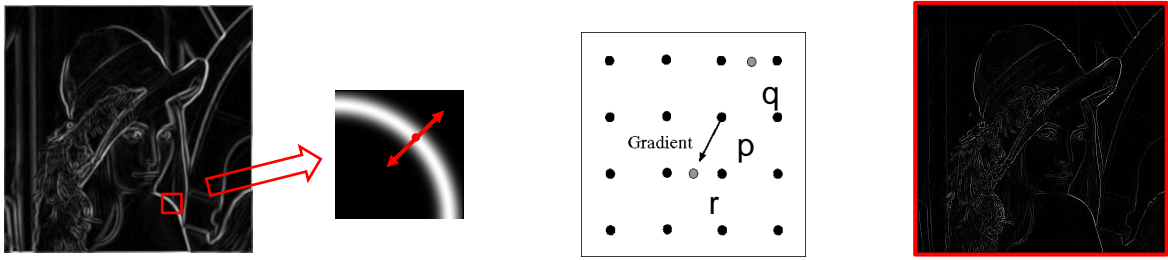
非极大值抑制



梯度强度

如果 (p 点的梯度强度 $>$ q 点的梯度强度 && p 点的梯度强度 $>$ r 点的梯度强度)
 p 点保留;
否则:
 删除 p 点;

非极大值抑制



梯度强度

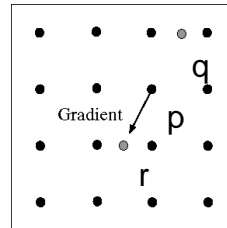
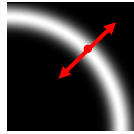
非最大化抑制后

如果 (p 点的梯度强度 $>$ q 点的梯度强度 && p 点的梯度强度 $>$ r 点的梯度强度)
 p 点保留;
否则:
 删除 p 点;

非极大值抑制



梯度强度



非最大化抑制后

如果 (p 点的梯度强度 $> q$ 点的梯度强度 && p 点的梯度强度 $> r$ 点的梯度强度)
 p 点保留;
否则:
 删除 p 点;

提示: q 点、 r 点坐标通常不是整数, 其对应的强度需要插值获得!!!

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

96

Canny边缘检测器



非最大化抑制结果

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

97

Canny边缘检测器



非最大化抑制结果

门限过滤

Canny边缘检测器



非最大化抑制结果

门限过滤



门限过高

Canny边缘检测器



非最大化抑制结果

门限过滤



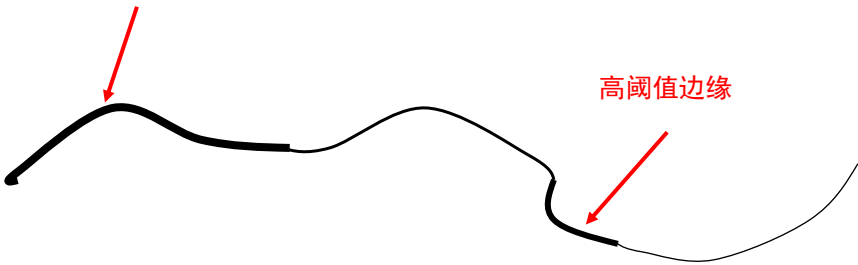
门限过高



门限过低

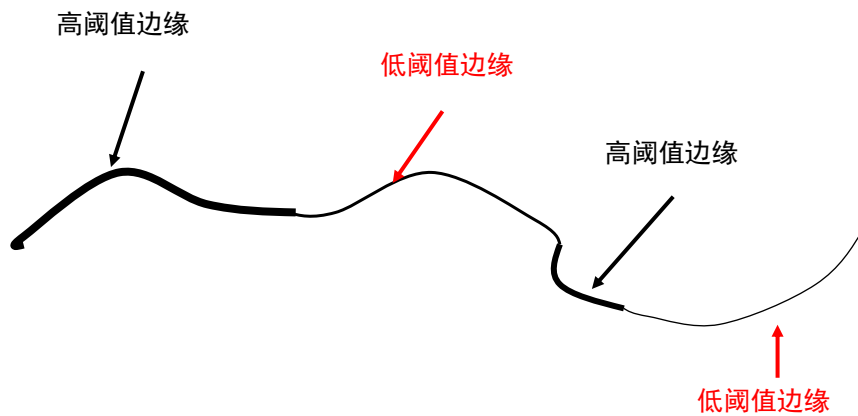
双阈值

高阈值边缘



高阈值边缘

双阈值



2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

102

Canny边缘检测器

1. 用高斯一阶偏导核卷积图像
2. 计算每个点的梯度幅值和方向
3. 非极大值抑制：
 - 将宽的“边缘”细化至单个像素宽度
4. 连接与阈值（滞后）：
 - 定义两个阈值：低和高
 - 使用高阈值开始边缘曲线，使用低阈值继续边缘曲线

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

103

补充材料3：纹理表示

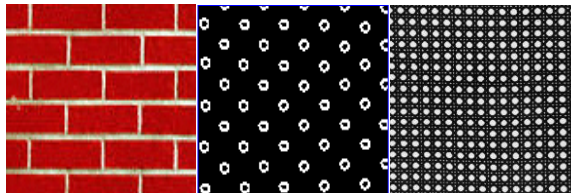
鲁 鹏

北京邮电大学 计算机学院 智能科学与技术中心



纹理

规则纹理



随机纹理



2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

106

基于卷积核组的纹理表示方法

思路：

- 利用卷积核组提取图像中的纹理基；利用基元的统计信息来

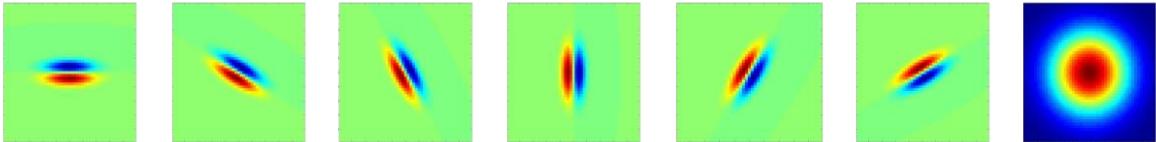
表示图像中的纹理

2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

107

卷积核组

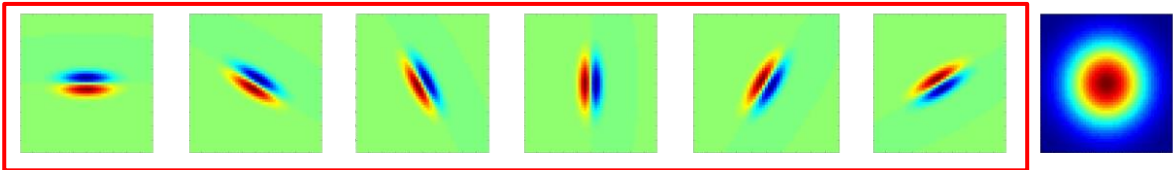


2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

108

卷积核组

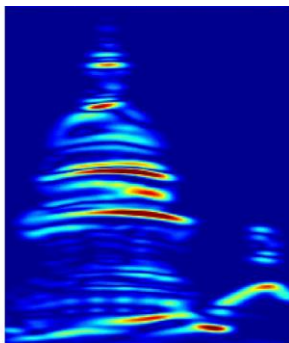
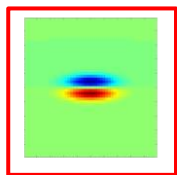


2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

109

卷积核组

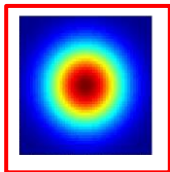
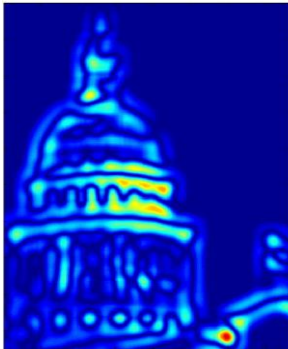
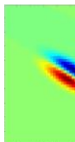
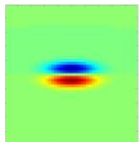


2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

110

卷积核组



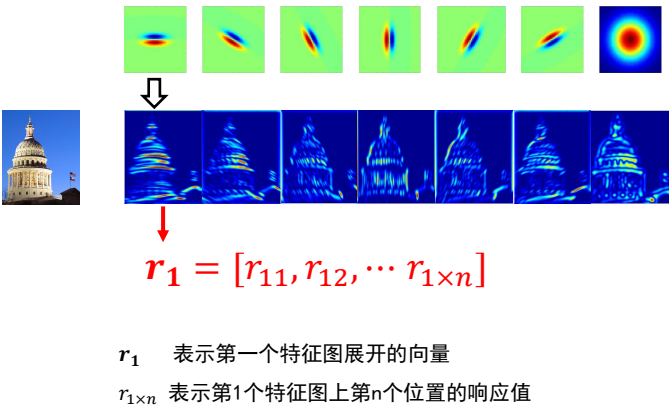
2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

111

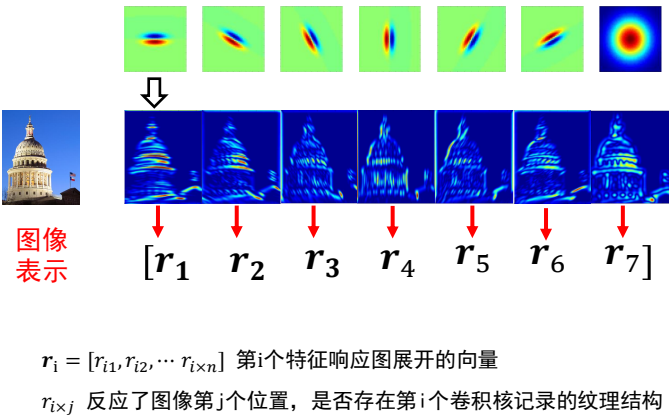
基于卷积核组的图像表示

- 1. 设计卷积核组;
- 2. 利用卷积核组对图像进行卷积操作获得对应的特征响应图组;
- 3. 利用特征响应图的某种统计信息来表示图像中的纹理。



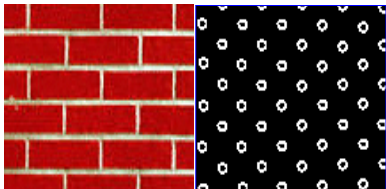
基于卷积核组的图像表示

- 1. 设计卷积核组;
- 2. 利用卷积核组对图像进行卷积操作获得对应的特征响应图组;
- 3. 利用特征响应图的某种统计信息来表示图像中的纹理。



纹理分类任务

➤ 忽略基元位置



规则纹理



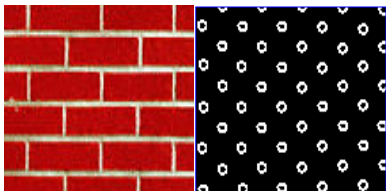
随机纹理

纹理分类任务

➤ 忽略基元位置

➤ 关注出现了哪种基元对应的

纹理以及基元出现的频率



规则纹理



随机纹理

基于卷积核组的图像表示

- 1. 设计卷积核组；
- 2. 利用卷积核组对图像进行卷积操作获得对应的特征响应图组；
- 3. 利用特征响应图的某种统计信息来表示图像中的纹理。



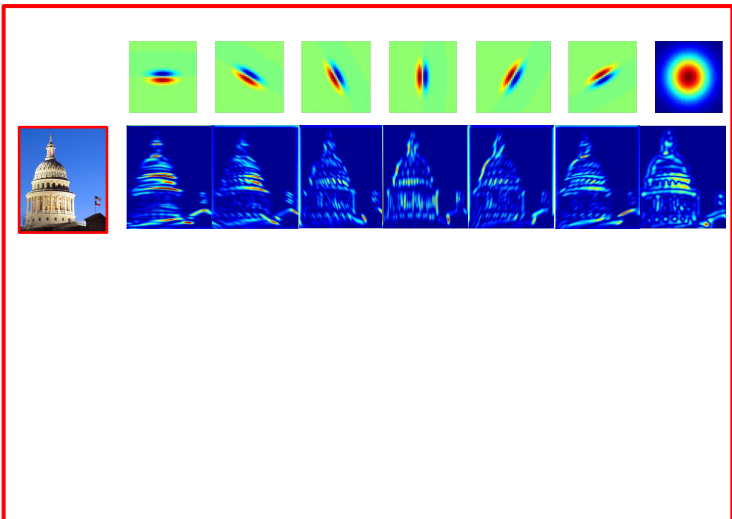
2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

116

基于卷积核组的图像表示

- 1. 设计卷积核组；
- 2. 利用卷积核组对图像进行卷积操作获得对应的特征响应图组；
- 3. 利用特征响应图的某种统计信息来表示图像中的纹理。



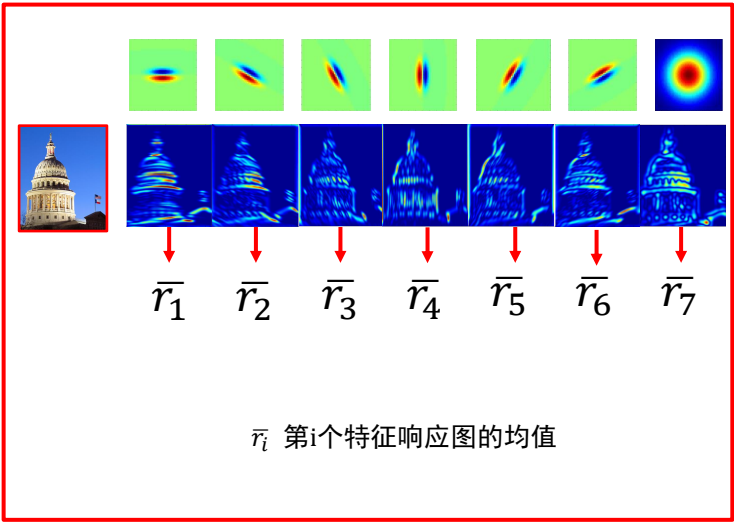
2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

117

基于卷积核组的图像表示

- 1. 设计卷积核组;
- 2. 利用卷积核组对图像进行卷积操作获得对应的特征响应图组;
- 3. 利用特征响应图的某种统计信息来表示图像中的纹理。



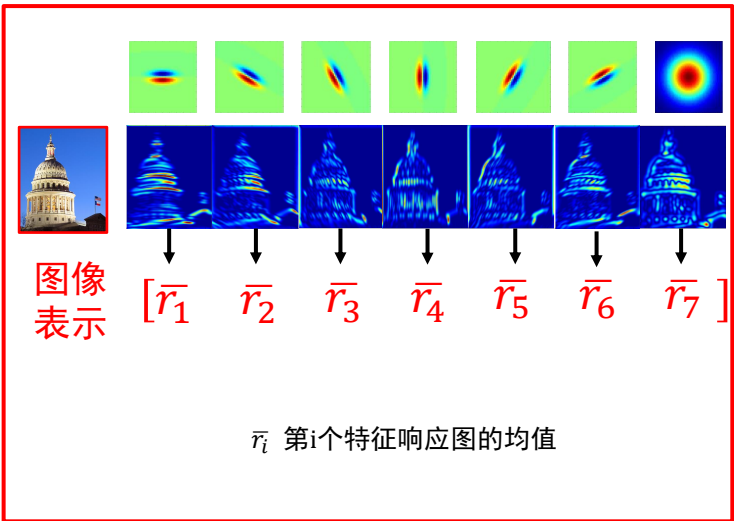
2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

118

基于卷积核组的图像表示

- 1. 设计卷积核组;
- 2. 利用卷积核组对图像进行卷积操作获得对应的特征响应图组;
- 3. 利用特征响应图的某种统计信息来表示图像中的纹理。

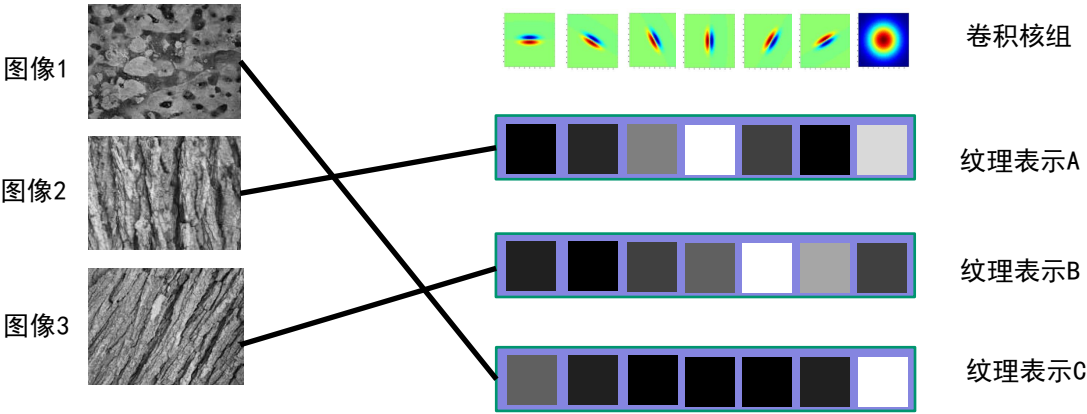


2020/4/21

北京邮电大学计算机学院 鲁鹏

119

小游戏

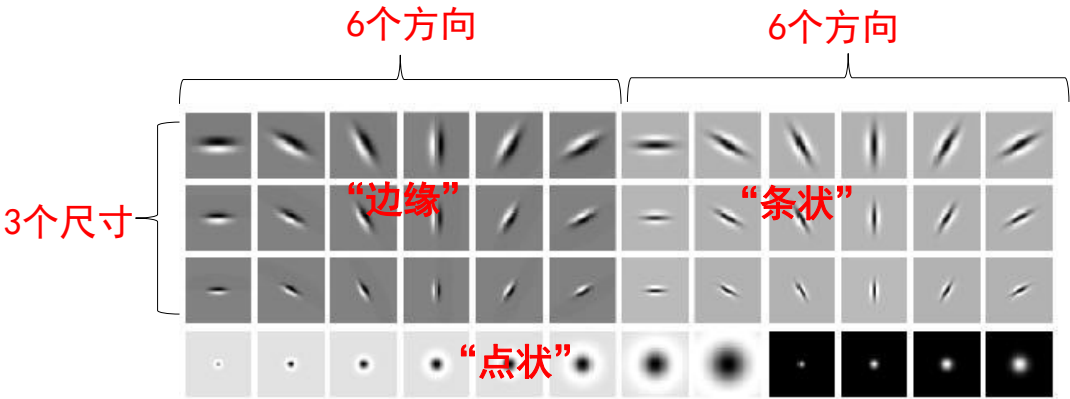


卷积核组设计

设计重点:

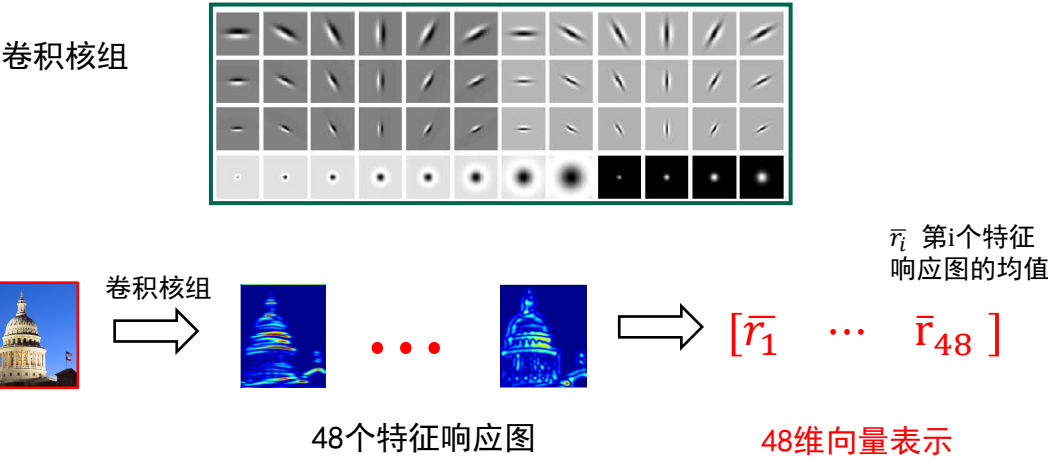
- 卷积核类型（边缘、条形以及点状）
- 卷积核尺度（3-6个尺度）
- 卷积核方向（6个角度）

实际的例子



卷积核组

实际的例子



总结

1. 设计卷积核组；
2. 利用卷积核组对图像进行卷积操作获得对应的特征响应图组；
3. 利用特征响应图的某种统计信息来表示图像中的纹理。