雅可比行列式在积分坐标变换中的应用

邹泽民，刘志伟

（梧州师范高等专科学校　数学系，广西　贺州　542800）

[摘　要]系统论述雅可比行列式在函数积分学的坐标变换中的重要应用，并且通过典型范例阐述其应用技巧。

[关键词]雅可比行列式;积分学;坐标变换;应用

[中图分类号]O172　[文献标识码]A　[文章编号]1008－8377(2005)03－0079－05

n 阶雅可比行列式在函数积分学的坐标变换中有着极其重要的应用，在积分计算中起到关键作用，因此通过典型范例掌握其应用技巧对解决 n 重积分的计算问题是十分必要的。

1、元函数组的雅比行列式

设由 n 个从 $A \in R^n$ 到 R^n 的映射（或变换）构成的 n 元函数组，即

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \Lambda, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \Lambda, x_n) \\ \cdots\cdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \Lambda, x_n) \end{cases} \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (1)$$

表为 n 元函数组 $(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$

若它们对每个自变量 x_j 都存在偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(i = 1,2,\cdots n, j = 1,2,\Lambda, n)$

则 n 阶行列式

$$J_n = \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (2)$$

称为 n 元函数组(1)在点 $A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的 n 阶雅可比行列式，也简称为函数行列式。

2、n 阶雅可比行列式的应用

n 阶雅可比行列式 J_n，当 $n = 1,2,3$ 时，它分别在定积分、二重积分和三重积分的坐标变换中均有广泛的应用。

2.1 一阶雅可比行列式在定积分的换元积分法中的应用

(1) 若一元坐标变换 $x = \varphi(t)$ 可导，则一阶雅可比行列式 $J_2 = \frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ 即 $dx = \varphi'(t)dt$ 且有

[收稿日期]2005－08－03

[作者简介]邹泽民(1945－)，男，广西贺州市人，梧州师专数学系教授。

$\int_f^b(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\cdot|J1|dt$ 其中 $J_1 = \varphi'(t)$

(2) 若一元坐标变换 $y = \varphi(t)$ 可导则一阶雅可比行列式 $J_1 = \frac{dy}{dt} = \varphi'(t)$ 即 $dy = \varphi'(t)dt$ 且有 $\int_c^d f(y)dy = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f[\Psi(t)]\cdot|J1|dt$ 其中 $J_1 = \varphi'(t)$

2.2 二阶雅可比行列式在二重积分的换元积分法中的应用

(1) 极坐标变换 设极坐标变换 $x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta$ 则二阶雅可比行列式 $J_2 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho$ 即 $dxdy = J_2 d\rho d\theta = \rho d\rho d\theta$ 且有

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D'_{\rho\theta}} f[\rho cos\theta, \rho sin\theta]\,|J_2|\,d\rho d\theta \quad 其中\ J_2 = \rho$$

(2) 椭圆极坐标变换 设椭圆极坐标变换为

$x = a\rho cos\theta, y = b\rho sin\theta$ 则二阶雅可比行列式为 $J_2 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = ab\rho$

即 $dxdy = J_2 d\rho d\theta = ab\rho d\rho d\theta$ 且有 $\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D'_{\rho\theta}} f[a\rho cos\theta, b\rho sin\theta]\,|J_2|\,d\rho d\theta$ 其中 $J_2 = ab\rho$

(3) 一般函数组变换 设函数组变换为

$x = x(u,v), y = y(u,v)$ 存在偏导数，则二阶雅可比行列式为

$$J_2 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ 即 $dxdy = J_2 dudv$ 且有

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D'_{uv}} f[x(u,v), y(u,v)]\,|J_2|\,dudv \quad 其中\ J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}$$

2.3 三阶雅可比行列式在三重积分的换元积分法中的应用

(1) 柱面坐标变换 设柱面坐标变换公式为

$x = \rho cos\theta, y = \rho sin\theta, Z = Z$ 则三阶雅可比行列式为

$J_3 = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \rho$ 即 $dxdydz = \rho d\rho d\theta dz$ 且有

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{D'_{\rho\theta z\theta\varphi}} f[\rho cos\theta, \rho sin\theta, z]\,|J_3|\,d\rho d\theta dz,$$

其中 $J_3 = \rho$

(2) 球面坐标变换 设球面坐标变换公式为

$x = rcos\theta sin\varphi, y = rsin\theta sin\varphi, Z = rcos\varphi$ 则三阶雅可比行列式为

$J_3 = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2 sin\varphi$ 即 $dxdydz = J_3 drd\theta d\varphi = r^2 sin\varphi drd\theta d\varphi$ 且有

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'_{r\theta\varphi}} f[rcos\theta sin\varphi, rsin\theta sin\varphi, rcos\varphi]\,|J_3|\,drd\theta d\varphi \quad 其中\ J_3 = r^2 sin\varphi$$

(3) 椭球面坐标变换 设椭球面坐标变换公式为

$x = arcos\theta sin\varphi, y = brsin\theta sin\varphi, Z = crcos\varphi$ 则三阶雅可比行列式为

$J_3 = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = abcr^2 sin\varphi$ 即 $dxdydz = J_3 drd\theta d\varphi = abcr^2 sin\varphi drd\theta d\varphi$ 且有

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega_{r\theta\varphi}} f[arcos\theta sin\varphi, brsin\theta sin\varphi, crcos\varphi] \mid J_3 \mid drd\theta d\varphi$$ 其中 $J_3 = abcr^2 sin\varphi$

(4) 一般函数组变换 设函数组变换公式为

$x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$,则三阶雅可比行列式为

$$J_3 = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,r,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$,即 $dxdydz = J_3 dudvdw$ 且有

$$\iiint_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega_{uvw}} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \mid J_3 \mid dudvdw$$

其中 $J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$

3、典型范例分析

在进行二(三)重积分的计算时一般应关注和掌握如下的一些运算技巧即首先针对积分区域的边界的各类特殊情况,然后选取适当的坐标变换,运用相应的雅可比行列式,最后将原积分转化为对新坐标进行累次积分的简易计算。例如二重积分中若积分区域的边界出现'$x^2 + y^2$'时,可选用极坐标变换法;若积分区域的边界出现'$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$'时,可选用椭圆极坐标变换法;三重积分中若积分区体的表面出现'$x^2 + y^2 + z^2$'时,可选用球面坐标变换法;若积分区体的表面出现'$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$'时,可选用椭球面坐标变换法等等。下面选择几个典型范例进行分析。

例1 选取适当的变换,求下列二重积分

(1)$\iint_D (x-y)^2 sin^2(x+y)dxdy$,其中 D 是平行四边形闭区域,它的四个顶点是$(\pi,0)$,$(2\pi,\pi)$,$(\pi,2\pi)$和$(0,\pi)$。

(2)$\iint_D x^2y^2dxdy$. 其中 D 是由两条双曲线 $xy = 1$ 和 $xy = 2$,直线 $y = x$ 和 $y = 4x$ 所围成在第 I 象限内的闭区域。

(3)$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}dxdy$. 其中 D 是由 x 轴、y 轴和直线 $x + y = 1$ 所围成的闭区域。

(4)$\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2})dxdy$. 其中 $D = \left\{(x,y) \mid 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 4\right\}$

分析:(1) 由于积分区域 D 是由直线 $x + y = 3\pi$, $x + y = \pi$, $x - y = -\pi$ 和 $x - y = \pi$ 所围成,同时考虑被积函数含有'$x - y$'和'$x + y$',故取坐标变换为 $u = x - y, v = x + y$。

(2) 由于积分区域 D 的边界和被积函数中均含有'xy'和'$\frac{y}{x}$',故选取的坐标变换为 $u = xy, v = \frac{y}{x}$。

(3) 由于积分区域 D 的边界出现'$x + y$'和被积函数出现'$\frac{y}{x+y}$',故选取坐标变换为 $u = x + y, v = \frac{y}{x+y}$。

(4) 由于积分区域 D 的边界和被积函数均含有'$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$',故选取坐标变换为椭圆极坐标公式为 $x =$

$a\rho cos\theta, y = b\rho sin\theta$。

解:(1) 令 $u = x - y, v = x + y$,则 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{v-u}{2}$ 有 D'_{uv} :$-\pi \le u \le \pi, \pi \le v \le 2\pi$ 且 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$

故 $= \iint_D (x-y)^2 sin^2(x+y) dxdy = \iint_{D'_{uv}} u^2 sin^2 v \cdot \frac{1}{2} dudv$

$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} u^2 du \int_{\pi}^{3\pi} sin^2 v dv = \frac{\pi^3}{3}(\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi) = \frac{\pi^4}{3}$

(2) 令 $u = xy, v = \frac{y}{x}$ 则 $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$ 有 D'_{uv} ,$1 \le u \le 2, 1 \le v \le 4$ 且 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{1}{v} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}(-\sqrt{\frac{u}{v^2}}) \\ \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$

故 $\iint_D x^2 y^2 dxdy = \iint_{D'_{uv}} u^2 \cdot \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2}\int^2 u^2 du \int^4 \frac{1}{v} dv = \frac{7}{3} ln2$

(3) 令 $u = x + y, v = \frac{y}{x+y}$ 则 $x = u - uv, y = uv$ 有

D'_{uv} :$0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$ 且 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$

故 $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}} dxdy = \iint_{D'_{uv}} e^v \cdot ududv = \int_0^1 e^v dv \int_0^1 udu = \frac{1}{2}(e-1)$

(4) 令 $x = a\rho cos\theta, y = b\rho sin\theta$　则 $D'_{\rho\theta}$:$0 \le \theta \le 2\pi, 1 \le \rho \le 2$ 有 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = db\rho$ 故

$\iint_D (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) dxdy = \iint_{D'_{\rho\theta}} \rho^3 \cdot ab\rho d\rho d\theta = ab\int_0^{2\pi} d\theta \int^2 \rho^3 d\rho = \frac{15}{2}\pi ab$

例 2　求由下列曲线所围成的闭区域 D 的面积 A

(1) D 是由曲线 $xy = 4, xy = 8, xy^3 = 5, xy^3 = 15$ 所围成的第 I 象限部分的闭区域.

(2) D 是由曲线 $y = x^3, y = 4x^3, x = y^3, x = 4y^3$ 所围成的第 I 象限部分的闭区域.

解:(1) 由于积分区域 D 含有"xy"和"xy^3",故选取坐标变换为 $u = xy, v = xy^3$ 且 $x \ge 0, y \ge 0$,$\therefore x = \sqrt{\frac{u^3}{v}}, \sqrt{\frac{v}{u}}$ 有 D'_{uv} :$4 \le u \le 8, 5 \le v \le 15$,且 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u^3}{v^3}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$

故 $A = \iint_D dxdy = \iint_{D'_{uv}} \frac{1}{2v} dudv = \int_4^8 du \int_5^{15} \frac{1}{2v} dv = 2ln3$

(2) 由于积分区域 D 边界含有"$\frac{x^3}{y}$"和"$\frac{y^3}{x}$",故选取坐标变换为 $u = \frac{x^3}{y}, v = \frac{y^3}{x}$ 则 D'_{uv} :$\frac{1}{4} \le u \le 1, \frac{1}{4} \le v \le 1$　有 $x = u^{\frac{3}{8}} v^{\frac{1}{8}}, y = u^{\frac{1}{8}} v^{\frac{3}{8}}$ 且

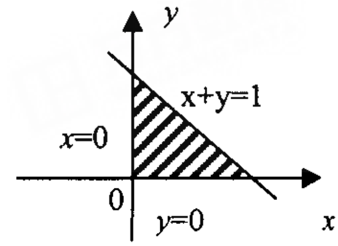
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{8}u^{-\frac{5}{8}}v^{\frac{1}{8}} & \frac{1}{8}u^{\frac{3}{8}}v^{-\frac{7}{8}} \\ \frac{1}{8}u^{-\frac{7}{8}}v^{\frac{3}{8}} & \frac{3}{8}u^{\frac{1}{8}}v^{-\frac{5}{8}} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}$$

故 $A = \iint_D dxdy = \iint_{D_{uv}} \frac{1}{8} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} dudv = \frac{1}{8}\int_{\frac{1}{4}}^{1} u^{-\frac{1}{2}} du \int_{\frac{1}{4}}^{1} v^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{1}{8}$

例 3 求证下列等式

(1) $\iint_D cos(\frac{x-y}{x+y})dxdy = \frac{1}{2} sin 1$　**其中** D **是由直线** $x+y=1, x=0, y=0$ **所围成的闭区域**

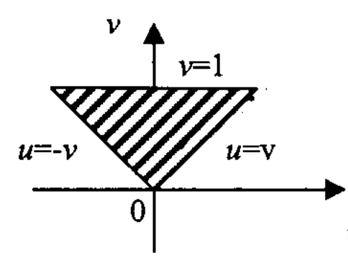
(2) $\iint_D f(ax+by+c)dxdy = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du$　**其中** D **是由圆曲线** $x^2+y^2=1$ **所围成的闭区域**



(1) D_{xy}

证明：(1) **由于积分区域** D **边界和被积函数含有"** $x+y$ **"和"** $x-y$ **"形式故选取坐标变换为** $u=x-y, v=x+y$ **则** $x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{v-u}{2}$

有 D'_{uv}：$0 \le v \le 1, -v \le u \le v$ **(如图) 且** $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$



(2) D'_{uv}

故 $\iint_D cos(\frac{x-y}{x+y})dxdy = \iint_{D'_{uv}} cos\frac{u}{v}\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 dv \int_{-v}^{v} cos\frac{u}{v}du = \frac{1}{2}\int_0^1 v(8 - \frac{u}{v}|_{-v}^{v}dv = \int_0^1 vsin1dv = \frac{1}{2}sin1.$

(2) **由于比较等式两边，选取坐标变换为** $x = \frac{au-bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \frac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}}$ **则有** $f(ax+by+c) = f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)$ **且**

$$J = \frac{\partial(x,y}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix} = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$$

当 $x^2+y^2=1$ **时有**

$$x^2+y^2 = (\frac{au-bv}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = \frac{(a^2+b^2)(u^2+v^2)}{a^2+b^2} = u^2+v^2 = 1$$

即 D'_{uv}：$-1 \le u \le 1, -\sqrt{1-u^2} \le v \le \sqrt{1-u^2}$

故 $\iint_D f(ax+by+c)dxdy = \iint_{D'_{uv}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dudv = \int_{-1}^{1}du\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)dv = \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\cdot 2\cdot\sqrt{1-u^2}du = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du$

例 4 求三重积分 $\iiint_\Omega (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz$ **其中** Ω **是由椭球面** $1 \le \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 4$ **所围成的闭体**

解：由于积分区体 Ω **和被积函数均含有"** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ **"故选取坐标变换为** $x = arcos\theta sin\varphi, y = brsin\theta sin\varphi, z = rcos\varphi$ **则** $\Omega'_{r\theta\varphi}$：$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi, 1 \le r \le 2$ **且有** $J = abcr^2 sin\varphi$

故 $\iiint_\Omega (\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})dxdydz = \iiint_{\Omega'_{r\theta\varphi}} r^2\cdot abcr^2 sin\varphi drd\theta d\varphi = abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}sin\varphi\int_0^2 r^4 dr = 2\pi abc(-cos\theta)|_0^{\pi}\frac{r^5}{5}|_1^2 = 4\pi abc\cdot\frac{1}{5}(32-1) = \frac{124}{5}abc\pi$ (下转第 103 页)

[1]何立民.单片机高级教程[M].北京:北京航空航天大学出版社，2000.
[2] 赵曙光.可编程逻辑器件原理、开发与应用[M].西安:西安电子科技大学出版社，2000.
[3]潘松.EDA技术实用教程[M]. 北京:科学技术出版社,2002.
[4]侯伯君.现代数字系统设计[M]. 西安:西安电子科大出版社,2004.
[5]王金明.数字系统设计与Verilog HDL[M]. 北京:电子工业出版社,2002.
[6]林敏.VHDL数字系统设计与高层次综合[M]. 北京:电子工业出版社,2002.
[7]许家玉. 基于DSP+FPGA的遗传算法硬件实现[J]. 微计算机信息.2005,1.
[8] Nicolaas J. Vriend. An illustration of the essential difference between in dividual and social learning，and its consequences for computational analyses[J]. Journal of Economic Dynamics & Control. 2000,24.

(上接第83页) 例5 证明:若函数 $f(ax+by+c)$ 连续 则

$$\iiint_{v} f(ax+by+c)\,dxdydz = \iiint_{v'} f(ku)\,dudvdw$$

其中 $v: x^2+y^2+z^2 \le 1$; $v': u^2+v^2+w^2 \le 1$

证明:由于等式条件要求可知，积分区体 V 经坐标变换后变为 V' 即有 $u^2+v^2+w^2 = x^2+y^2+z^2$ 成立,故此坐标变换应选取为正交变换。具体地先令 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 设 $u=\frac{1}{k}(ax+bx+cz)=\frac{a}{k}x+\frac{b}{k}y+\frac{c}{k}z=l_1x+m_1y+n_1z$,即 u 轴的方向余弦为 $\vec{u}^0=(\frac{a}{k},\frac{b}{k},\frac{c}{k})=(l_1,m_1,n_1)$ 若以 u 轴为主轴,任选 v 轴和 w 轴,使 u 轴、v 轴和 w 轴构成三维直角坐标系。即有存在可逆线性变换

$$\begin{cases} u = l_1x+m_1y+n_1z \\ v = l_2x+m_2y+n_2z \\ w = l_3x+m_3y+n_3z \end{cases} \quad 即 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

为正交变换(I),其中正交矩阵为 $P = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}$ 且 $P^{-1}=P^T$ 有 $|P|=|P^T|=\pm 1$

而(I)存在逆变换为 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = P^T\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ (II)

使 $x^2+y^2+z^2 = (x,y,z)E\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (u,v,w)(P^TEP)\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = (u,v,w)E\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = u^2+v^2+w^2$

且 $|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \|P^T\| = 1$ 即正交变换(Ⅱ)使 $V: x^2+y^2+z^2 \le 1$

且 $V': u^2+v^2+w^2 \le 1$ 且 $f(ax+by+cz)$ 连续

且有 $f(ax+by+cz) = f[k(\frac{a}{k}x+\frac{b}{k}y+\frac{c}{k}z)] = f(ku)$

故 $\iiint_{V} f(ax+by+c)\,dxdydz = \iiint_{V'} f(ku)\,dudvdw$

[参考文献]

[1]刘玉琏,傅沛仁[M].数学分析讲义(第三版)下册[M].高等教育出版社.
[2]同济大学应用数学系[M].高等数学(第五版)下册[M].高等教育出版社.

雅可比行列式在积分坐标变换中的应用

作者： 邹泽民， 刘志伟， Zhou Zemin， Liu Zhiwei
作者单位： 梧州师范高等专科学校,数学系,广西,贺州,542800
刊名： 广西梧州师范高等专科学校学报
英文刊名： JOURNAL OF WUZHOU TEACHERS COLLEGE OF GUANGXI
年，卷(期)： 2005，21(3)

参考文献(2条)

1. 刘玉琏 傅沛仁

2. 同济大学应用数学系 高等数学