

21 世纪全国高职高专电子电工类规划教材

电 路 基 础

黄盛兰 主 编

智海素 张翠明 冯海廷 副主编

宋 菲 霍丽娟 田清华 刘树生 参 编



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书共有 8 章, 内容分别为电路的基本概念、电路的等效、电阻电路的分析方法、正弦交流电路、三相正弦交流电路、一阶暂态电路的分析、耦合电感电路和二端口网络。书后附有自测与练习的答案。

本书在编写过程中, 将实验实训内容、联系实际的典型例题与基本理论融为一体, 突出知识的应用性。概念力求做到叙述准确、清楚, 编入较多联系实际的例题, 注重正文、例题、思考与分析及自测与练习题之间的密切配合, 并在每章结尾处列出该章的内容小结, 方便学生学习和选用。

本书可作为高职高专院校计算机、自动控制类及相关专业的教材, 也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

电路基础/黄盛兰主编. —北京: 北京大学出版社, 2006.8

(21 世纪全国高职高专电子电工类规划教材)

ISBN 7-301-10776-5

I. 电… II. 黄… III. 电路分析—高等学校: 技术学校—教材 IV. TM133

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 058632 号

书 名: 电路基础

著作责任者: 黄盛兰 主编

责任编辑: 温丹丹 董超

标准书号: ISBN 7-301-10776-5/TM · 0009

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62765126 出版部 62754962

网 址: <http://www.pup.cn>

电子信箱: xxjs@pup.pku.edu.cn

印 刷 者:

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787 毫米×980 毫米 16 开本 13 印张 279 千字

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 21.00 元

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-62752024; 电子信箱: fd@pup.pku.edu.cn

前 言

本教材以工程实践中所用到的电路基本知识、基本技能为主，本着服务于学生技能培养，以应用为目的的原则编写。供高职高专院校计算机、自动控制类专业教学使用。

本教材包含了电路分析最基本的内容，涉及电阻电路、正弦稳态电路、一阶动态电路、耦合电感电路和二端口网络。在编写过程中，力求突出以下特点：

（1）打破理论教学与实践教学的隔离，将实验实训内容、联系实际的典型例题与基本理论融为一体；

（2）电路规律偏重于由实验规律来说明，如设计基尔霍夫定律实验内容，由实验结论给出电路的基本规律；

（3）精选教材内容，强调概念，注重应用，降低理论难度，删去了公式推导和理论论证；

（4）简化了相量部分的计算，对学生计算程度的掌握以满足实际需要为原则；

（5）每节后有思考与分析，每章结尾处附有小结，每章后的自测与练习有三种题型，内容丰富，由浅入深，对学生自学有较强的指导性。

参考学时范围为 50~70 学时，建议能在实验实训室上的内容将讲授与实践一并进行，同时可根据专业教学需要适当删减内容。

参加本教材编写工作的有：石家庄职业技术学院智海素（第 1、6 章）、霍利娟（第 2 章）、宋菲（第 3 章）、冯海廷（第 4、5 章）、张翠明（第 7、8 章）。田清华绘制了全书的电路图，同时编写了第 1 章的习题，刘树生编写了第 7 章的习题，并对第 7、8 章内容提出了宝贵的修改意见。全书由黄盛兰主编，负责统稿。

本书编写过程中，得到了北京大学出版社温丹丹编辑的热情帮助，在此表示感谢。

限于编者的水平，错误和不当之处在所难免，请使用本书的师生和广大读者提出宝贵意见。

编 者

2006 年 4 月

第 1 章 电路的基本概念和基本定律

本章主要讲述电压、电流、电功率等电路的基本概念和电路的基本定律——基尔霍夫定律，该章内容是贯穿全书的基础，要求学生能根据基尔霍夫定律，运用设定参考方向的方法列写电压、电流方程；掌握电位的计算方法；能按照电路原理图熟练地进行电路实物连接；能够使用万用表测量电阻、直流电压和直流电流。

1.1 电路和电路模型

1.1.1 电路

电路是各种电路元件和设备按一定方式连接起来实现某种功能的整体，通俗地讲，电路就是提供电流流通的路径。电路按其功能分为两类，第一类，进行能量的产生、传输、分配与转换。典型的例子有电力电路，把机械能或热能等转化为电能，以满足人们生产及生活需要。第二类电路实现信号的传递、处理及控制。这方面的典型例子有电话电路，进行声音信号的传递与处理。尽管实际电路种类繁多，但任何电路总有三个基本组成部分：电源、负载和中间环节。

以图 1-1 (a) 所示的手电筒电路为例说明三个组成部分及其作用。在图 (a) 中，电池为提供电能的装置，也称为**电源**，其作用是将干电池的化学能转换为电能；灯泡是用电装置，称为**负载**，它将电源供给的电能转换为光能和热能；除去电源和负载之后电路的其余部分，如开关、导线，通称为**中间环节**，其作用为进行电能的传输与控制。

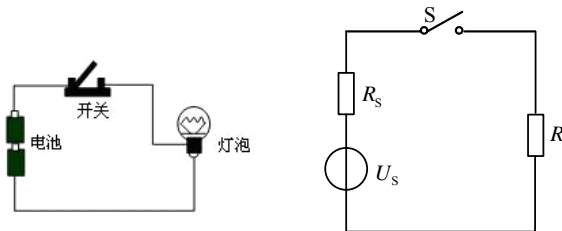


图1-1 手电筒电路模型

1.1.2 电路模型

实际电路中的电阻器、电容器、电感器、灯泡、晶体管、变压器等各种电气、电子器件统称为电路元件，这些电路元件几何尺寸有大有小，结构繁简不一。在电路理论分析中，通常把工程实际中的各种电路元件用有限的几个理想化的电路元件来表示，比如，灯泡、电炉在电路中主要用来消耗电能，可以理想化为电阻元件；用内电阻和理想电压源串联的组合来代替实际的电池等。常用的理想电路元件有电阻元件、电感元件、电容元件、理想电压源和理想电流源等。由理想电路元件构成的电路称为电路模型。

今后本书讨论的电路均为实际电路的电路模型。虽然电路模型与实际电路的性能不完全一致，但在一定条件下，在工程允许的近似范围内，实际电路的分析完全可以用电路模型来代替，从而简化了分析与计算。

【思考与分析】

什么是电路模型？常用的理想电路元件有哪些？

1.2 电路的主要物理量

电路分析是在已知电路结构和元件参数的情况下，求解电路元件的电压、电流和电功率，有时还涉及到能量、磁通等物理量。在具体求解电路之前，先介绍电路的主要物理量，并重点引入电压、电流参考方向的概念。

1.2.1 电流

电荷的定向移动形成电流。电流的大小用电流强度来度量，其数值等于单位时间内通过导体某一横截面的电荷量。设在 dt 时间内通过导体某一横截面的电荷量为 dq ，则通过该截面的电流强度为

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (1-1)$$

一般情况下，电流强度是时间的函数，会随时间的变化而变化，如正弦交流电流，电流随时间按正弦规律变化；如果电流强度不随时间而变，即 $i = \frac{dq}{dt} = \text{常数}$ ，则这种电流称为恒定（稳恒）电流，也称为直流电流。在直流电路中，电流强度可表示为

$$I = \frac{Q}{t} \quad (1-2)$$

电流强度的单位为安培（A），电流数值较小时，常用毫安（mA）或微安（ μA ）为单位。

$$1\text{ A}=10^3\text{ mA}, 1\text{ mA}=10^3\text{ }\mu\text{A}$$

工程上电流强度常简称电流,而电路理论中,电流一词又表示一种物理现象,这样“电流”一词便具有双重含义,有时表示电流的大小,有时表示电荷的定向移动这种现象,要注意区分。

习惯上,规定正电荷移动的方向或负电荷移动的反方向为电流的方向,也叫电流的实际方向。对于简单的电路,人们很容易判断出电流的实际方向,如图 1-2 所示,流过电阻 R_2 、 R_5 的电流方向很容易确定,其方向自上而下。但图 1-3 中流过电阻 R_6 的电流方向就不易进行直观判定了。另外,交流电路中的电流方向是变化的,在图中无法标出其任一时刻实际的方向。为此,在分析与求解电路时引入电流参考方向的概念。

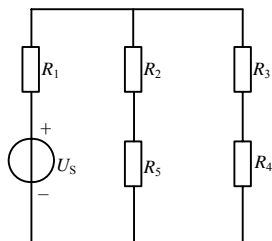


图1-2 电路

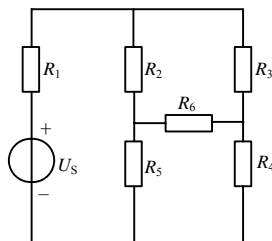


图1-3 电路

电流的参考方向,也称正方向,是为了求解电流而人为引入的方向。电流的参考方向可以任意选定,在电路中一般用箭头表示。既然任意选定参考方向,那么参考方向与实际方向之间的关系如何呢?当电流的参考方向与实际方向一致时,电流为正值 ($I>0$);当电流的参考方向与实际方向相反时,电流为负值 ($I<0$)。由此可见,在选定的参考方向下,根据电流的正负,就可以确定电流的实际方向。如图 1-4 (a) 和图 1-4 (b) 所示。

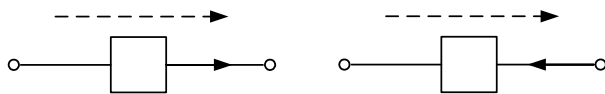


图1-4 电流实际方向与参考方向之间的关系

分析电路时,首先假定电流的参考方向,并据此进行分析和计算,最后根据电流的正负值确定电流的实际方向。注意,参考方向一经确定,在求解电路的整个过程中就不能再更改。若不加说明,本书电路图上的电流方向都是指参考方向。

1.2.2 电压

电路中 a 、 b 两点间的电压 u_{ab} 在数值上等于把单位正电荷从 a 点移到 b 点电场力所做

的功。电场力所做的功计为 w ，则电压为

$$u_{ab} = \frac{dw}{dq} \quad (1-3)$$

若是直流电路，则

$$U_{ab} = \frac{W}{Q} \quad (1-4)$$

在国际单位制中，电压的单位是伏特（V），计量小电压时，则以毫伏（mV）或微伏（ μV ）为单位；计量高电压时，则以千伏（kV）为单位。它们之间的关系为

$$1\text{ kV}=10^3\text{ V}, 1\text{ V}=10^3\text{ mV}, 1\text{ mV}=10^3\text{ }\mu\text{V}$$

在电子电路和电器设备的调试和检修中，经常要测量各点的电位。在电路中，选定某点电位为零，选定的零电位点也叫零电位参考点（以下简称参考点），则电路中其余各点的电位在数值上等于电场力将单位正电荷从所求点移到参考点所做的功。电位与电压没有实质性区别，电路中任意一点的电位，就是该点与参考点的之间的电压。而电路中任意两点之间的电压等于这两点之间的电位差。因此，电位的测量实质就是电压的测量，是测量该点与参考点之间的电压。为了区分电压与电位，本书电压用双下标表示，电位用单下标表示。如， a 、 b 两点间电压计为电压 U_{ab} ， a 点的电位计为 U_a ， b 点的电位计为 U_b ，且有

$$U_{ab} = U_a - U_b \quad (1-5)$$

习惯上，电压的实际方向规定为从高电位点指向低电位点，即电位降的方向。但在分析电路时，类似电流的参考方向，也需要选取电压的参考方向。电压的参考方向可以用箭头、双下标或极性“+”、“-”表示，本书采用极性表示，如图 1-5 所示。

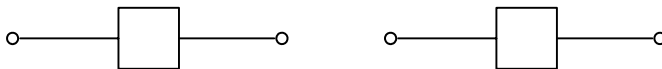


图1-5 电压实际方向与参考方向之间的关系

当电压的参考方向与实际方向一致时，电压为正；相反时，电压为负，如图 1-5 所示。

1.2.3 电功率

介绍电功率之前首先介绍电能的概念。 a 、 b 两点间的电压为 u_{ab} ，在时间 dt 内电荷 dq 受电场力的作用从 a 点移到 b 点，电场力所做的功为

$$dw = u_{ab} dq \quad (1-6)$$

单位时间的电能叫电功率，则

$$p = \frac{dw}{dt} = u_{ab} \frac{dq}{dt} = u_{ab} i \quad (1-7)$$

由能量守恒可知，在电路中，负载消耗的功率是由电源提供的，即负载消耗的功率和电源产生的功率总是相等的，这就是电路的功率平衡原理。

在国际单位制中，功的单位是焦耳（J），功率的单位是瓦特（W）。比瓦特小的单位有毫瓦（mW），比瓦特大的单位有千瓦（kW）。

$$1\text{kW}=10^3\text{W}, 1\text{W}=10^3\text{mW}$$

在电路分析中，不仅要计算功率的大小，还需要搞清楚功率的性质，即电路元件产生或消耗功率情况。在给出功率判断方法之前，还要先了解关联一致（关联参考方向）的概念。

对任一电路元件，其电流、电压的参考方向原则上可以任意选定，但为了分析方便起见，经常按照一致性的原则选取元件上的电压和电流的参考方向，即电流的参考方向由元件电压参考正极性流向负极性。这样选择的电压和电流的参考方向称为关联一致（关联参考方向）。

如图 1-6 所示，图（a）为关联参考方向，电流参考方向为经过电阻元件由电压参考正极性指向负极性；图（b）为非关联参考方向，电流参考方向为经过电阻元件由负极性指向正极性。若只给出元件电压（或电流）的参考方向，则元件电流（或电压）参考方向通常按照关联一致的原则选取。

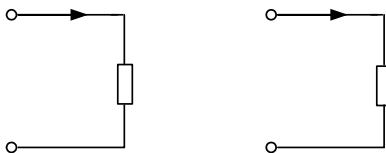


图1-6 关联一致和非关联一致

在电场力的作用下，正电荷从实际高电位端移到低电位端，电场力做正功，元件消耗（吸收）电功率；克服电场力，正电荷从实际低电位端移到高电位端电场力做负功，元件产生（发出）电功率。据此可以给出元件消耗或产生功率的“正负”判定法：（1）首先判断元件的电压、电流是否关联一致；（2）若关联一致， $p=ui$ ；若非关联一致， $p=-ui$ ；（3）代入数值进行计算，根据结果（不论关联一致还是非关联一致）， $p>0$ 时元件消耗（吸收）功率， $p<0$ 时元件产生（发出）功率。

例 1-1 求图 1-7 中各元件的功率。

解 在图 1-7（a）中，电压、电流参考方向关联一致，故

$$P=UI=3\times 2=6\text{ W} \quad (P>0, \text{ 所以元件吸收功率})$$

在图 1-7（b）中，电压、电流参考方向非关联一致，故

$$P=-UI=-3\times 2=-6\text{ W} \quad (P<0, \text{ 所以元件产生功率})$$

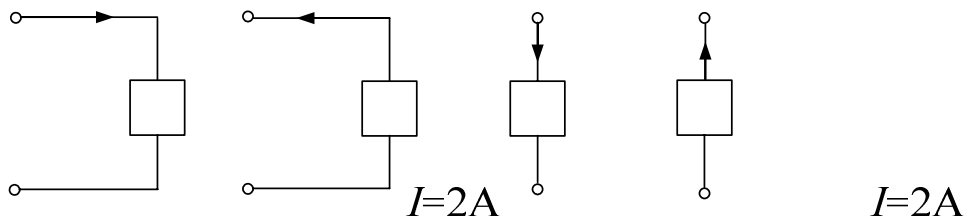


图1-7 例1-1图

在图 1-7 (c) 中，电压、电流参考方向关联一致，故

$$P = UI = (-4) \times 2 = -8 \text{ W} \quad (P < 0, \text{ 所以元件产生功率})$$

在图 1-7 (d) 中，电压、电流参考方向非关联一致，故

$$P = -UI = -5 \times (-2) = 10 \text{ W} \quad (P > 0, \text{ 所以元件吸收功率})$$

例 1-2 如图 1-8 所示电路中，已知 $I = 2 \text{ A}$ ，元件 A 吸收功率 8 W ，元件 B 产生功率 6 W ，求元件 A、B 两端的电压 U_1 、 U_2 。

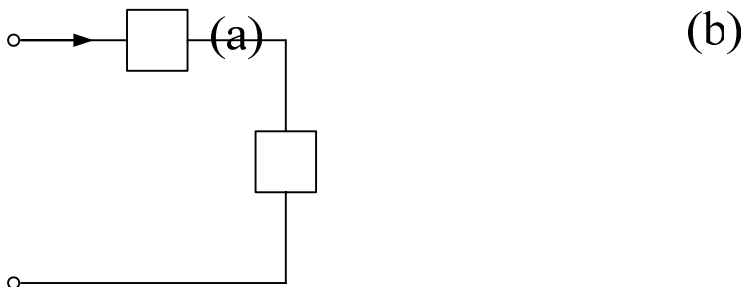


图1-8 例1-2图

解 元件 A 的电压、电流关联一致，且吸收功率 8 W ，故

$$P = U_1 I = 2U_1 = 8 \text{ W}$$

$$U_1 = 4 \text{ V}$$

元件 B 的电压、电流非关联一致，且产生功率 6 W ，故

$$P = -U_2 I = -2U_2 = -6 \text{ W}$$

$$U_2 = 3 \text{ V}$$

【思考与分析】

1. 为什么要对电路中的电流或电压选取参考方向？同一元件上电流（或电压）参考方

向不同的情况下, 电流(或电压)数值有什么关系?

2. 电源在电路中一定产生功率吗?

3. 在图 1-9 所示电路中, 对元件 A 而言, 参考方向是关联的还是非关联的? 对元件 B 而言, 参考方向是关联的还是非关联的? 分别写出元件 A 、 B 的功率表达式。

4. 试求图 1-10 中各元件的未知电压、电流或功率。

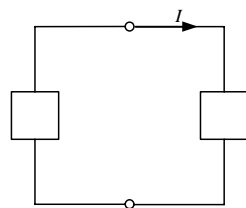


图1-9 思考与分析题3图

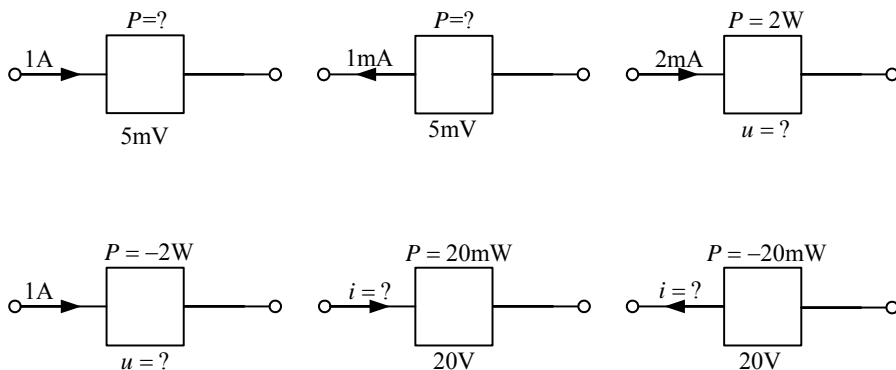


图1-10 思考与分析题4图

1.3 电阻元件

灯泡、电阻炉、电烙铁和实验室常用的普通电阻器和滑动变阻器, 这些器件主要特点是消耗电能, 在电路分析时一般可将其抽象为只具有消耗电能性质的元件——电阻元件。图 1-11 (a)、(b) 为电阻元件的符号, 其中 (a) 图为电压电流关联一致, (b) 图为电压电流非关联一致的情况。

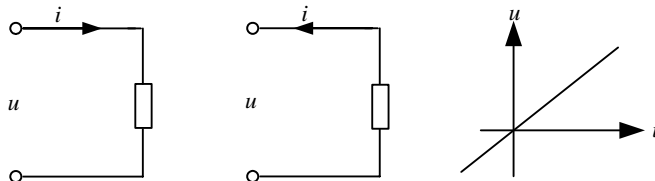


图1-11 电阻元件的符号与伏安特性

在图 1-11 (a) 中, 电阻元件上电压、电流关联一致, 则

$$u = Ri \quad (1-8)$$

在图 1-11 (b) 中, 电阻元件上电压、电流非关联一致, 则

$$u = -Ri \quad (1-9)$$

式 (1-8)、(1-9) 为电阻元件电压与电流之间的关系表达式, 这也是电阻元件在电路中所遵循的元件约束。通常把元件的电压和电流之间的关系式称为伏安关系。显然, 电阻元件的端电压与流过的电流成正比, 比例系数 R 称为**电阻**, R 是表示电阻元件特性的参数。列写电阻元件的伏安关系时, 一定要注意判断电压、电流参考方向是否关联一致, 从而写出正确的表达式。

电阻的单位为欧姆 (Ω), 简称欧, 较大阻值的电阻可用千欧 ($k\Omega$) 或兆欧 ($M\Omega$) 表示。

$$1k\Omega = 10^3 \Omega \quad 1M\Omega = 10^3 k\Omega$$

在电路分析中, 有时也用电导表示电阻元件的性质, R 的倒数叫**电导**, 即 $G = \frac{1}{R}$ 。难得得到电导的伏安关系为

$$i = Gu \quad (u、i \text{ 关联一致}) \quad (1-10)$$

$$i = -Gu \quad (u、i \text{ 非关联一致}) \quad (1-11)$$

电导的单位为西门子, 简称西, 用 S 表示。

u 、 i 之间的关系曲线如图 1-11 (c) 所示, 该曲线称为电阻元件的**伏安特性曲线**, 简称**伏安特性**, 伏安特性过原点直线的电阻叫作**线性电阻**。除线性电阻之外, 还有非线性电阻, 如二极管等。本书重点介绍线性电阻。

不论在图 1-11 (a) 还是 (b) 中, 电阻元件的功率总可以表示为

$$P = Ri^2 = \frac{u^2}{R} \quad (1-12)$$

显然, $P \geq 0$, 所以在电路中电阻总是消耗电功率, 为耗能元件。

在时间 t 内电阻元件消耗的电能计为 W , 则

$$W = Pt \quad (1-13)$$

消耗的电能转化为热能, 并散发到周围, 电阻炉就是通过电阻消耗电能, 从而获得热能的装置。

对于一个实际电阻器, 使用时均不能超过所标明的功率, 否则会烧坏。各种电器设备在工作时都有一定的使用限额, 这种限额称为额定值。额定值通常标在设备的铭牌上, 或写在说明书中, 通常在电压、电流和功率三个量中只标出两个, 并用带下标的字母 “ N ” 来表示。如灯泡的额定电压 $U_N = 220V$ 、功率 $P_N = 100W$, 这是告诉使用者, 该灯泡在 $220V$ 下才能正常工作, 这时消耗的功率为 $100W$ 。通过计算还可求得额定电流为 $0.455A$ 。

例 1-3 一个标有 “ $150\Omega/5W$ ” 的电阻元件, 其额定电压为多少? 额定电流为多少?

解 由 $P = \frac{U^2}{R}$ 得

$$U = \sqrt{PR} = \sqrt{5 \times 150} = 27.4 \text{ V}$$

由 $P = I^2 R$ 得

$$I = \sqrt{P/R} = \sqrt{5/150} = 0.18 \text{ A}$$

例 1-4 一个标有“220 V/100 W”的白炽灯,求正常发光时通过灯丝的电流是多少?灯丝的额定电阻是多少?若将其接到110 V 电源上,其实际消耗的功率为多少?

解 由 $P = UI$, 得

$$I = \sqrt{P/U} = \sqrt{100/220} = 0.454 \text{ A}$$

由 $P = \frac{U^2}{R}$, 得

$$R = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484 \Omega$$

若接到110 V 的电源上,实际消耗功率为

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{484} = 25 \text{ W}$$

当工作电压为额定电压的一半时,实际消耗的功率为额定功率的四分之一,白炽灯不能正常发光。可见,只有负载在额定电压下工作,才能达到额定功率。若灯泡接到 380 V 的电压上,灯丝将会被立刻烧断。

【思考与分析】

1. 在分析电路时,若计算出某电阻两端的电压小于零,则该电阻是吸收功率还是产生功率?如计算出电流小于零,情况又如何呢?
2. 一个炭膜电阻,其阻值为 200Ω ,额定功率为 0.125 W,使用时该电阻能承受的最大电压为多少?
3. 用公式 $U = \pm RI$ 进行计算时,如何选择公式中的正、负号?

1.4 基尔霍夫定律

分析电路要掌握两类约束,一类是电路元件所服从的约束,叫**元件约束**;一类是电路结构所服从的约束,叫**结构约束**,它们是求解电路的基础。描述结构约束的是基尔霍夫定律,它包括基尔霍夫电压定律和基尔霍夫电流定律。介绍基尔霍夫定律之前首先介绍有关电路的几个术语。

1.4.1 基本术语

(1) 支路：具有两个端子的元件称为二端元件，将一个或一个以上的二端元件依次串接没有分岔，构成电路的一个分支，每一个分支都称为一条支路。支路上流经的是同一个电流。图 1-12 中， adb 、 acb 、 ab 为三条支路。其中 acb 、 adb 支路含有电源，称为有源支路， ab 支路无电源称为无源支路。

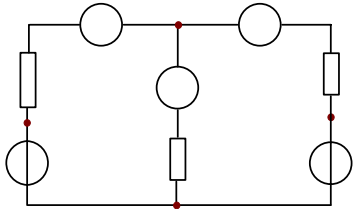


图1-12 基尔霍夫定律实验图

(2) 节点：三条或三条以上支路的连接点称为节点。图 1-12 中有 a 、 b 两个节点。

(3) 回路：由支路组成的任一闭合路径称作回路。图 1-12 中有 $abca$ 、 $adba$ 、 $adbca$ ，共 3 个回路。

(4) 网孔：是对平面电路而言提出的一个名词术语，若回路内部不含支路则称为网孔。图 1-12 中有 $abca$ 和 $adba$ 两个网孔。

【实训室活动】

目的：研究基尔霍夫电流定律和电压定律；掌握用万用表测量电阻、直流电压、电流的方法；学会使用直流稳压电源。

设备与器材：电流表、万用表、直流稳压电源等。

操作步骤：

(1) 按照电路图 1-12 连接电路。测出节点 a 处各支路电流，将测量结果计入表 1-1 中，注意观察各电流方向，判断各电流是流入节点还是流出节点；

表 1-1 支路电流的测量数据

电流	I_1	I_2	I_3	$I_2 + I_3$
数值 (mA)				

(2) 在图 1-12 中任选两个网孔，用万用表测出各电压，将测量结果计入表 1-2 中；

表 1-2 元件电压的测量数据

电压数据测量							计算网孔电压之和	
电压	U_{ab}	U_{bc}	U_{ca}	U_{ad}	U_{db}	U_{ba}	网孔 1	网孔 2
数值 (V)								

(3) 分析数据，总结规律。

1.4.2 基尔霍夫定律

根据测得的数值, 考虑误差因素, 由表 1-1 可知: 流入节点 a 的电流等于流出节点 a 的电流之和; 由表 1-2 可知, 沿一定绕向, 网孔 1 (网孔 2) 各元件电压的代数和为零。将上述结论推广, 得到基尔霍夫定律, 表述如下。

基尔霍夫电流定律 (KCL): 在任意时刻, 流经任一节点的所有支路电流代数和为零, 其数学表达式为

$$\sum i_k = 0 \quad (1-14)$$

基尔霍夫电压定律 (KVL): 在任意时刻, 沿任一回路所有支路电压的代数和为零。

$$\sum u_k = 0 \quad (1-15)$$

列写 KCL 方程时, 各支路电流的正负根据参考方向而定。若约定流入节点的支路电流为正, 则流出节点的电流为负; 反之, 若规定流出节点的电流为正, 则流入为负。

列写 KVL 方程时, 元件端电压的正负根据电压的参考极性而定。在电路图上标出各元件端电压的参考极性和回路的绕行方向, 当支路电压的参考方向与回路绕向一致时, 电压取正号, 相反时电压取负号。

KCL 规定了电路中任一节点处各支路电流必须服从的约束关系, KVL 规定了电路中任一回路内各支路电压必须服从的约束关系, 这两种约束关系仅取决于电路的连接方式, 而与元件的性质无关, 故基尔霍夫定律称为结构约束。

例 1-5 如图 1-13 所示, 已知 a 为电路中的一节点, 电流 $i_1 = 3\text{ A}$, $i_2 = -4\text{ A}$, $i_3 = 2\text{ A}$, 求 i_4 。

解 设参考方向流入节点的电流为正, 流出节点的电流为负, 根据 KCL 有

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 &= 0 \\ i_4 &= -i_1 - i_2 - i_3 \\ &= -3 - (-4) - 2 = -1\text{ A} \end{aligned}$$

例 1-6 如图 1-14 所示, 各支路电流参考方向如图所示, 求电路中 i_1 , i_2 , i_3 之间的关系。若电流 $i_1 = 3\text{ A}$, $i_2 = -4\text{ A}$, 求 i_3 。

解 图 1-14 中各电流参考方向, 设流入为正, 节点 a 、 b 、 c 的 KCL 方程分别为

$$\begin{aligned} i_1 - i_4 - i_6 &= 0 \\ i_2 + i_4 - i_5 &= 0 \\ i_3 + i_5 + i_6 &= 0 \end{aligned}$$

将以上三式相加得

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ i_3 &= -(i_1 + i_2) = -(3 - 4) = 1\text{ A} \end{aligned} \quad (1-16)$$

式 (1-16) 表明, 对电路中任意封闭面, 例 $acba$ 封闭面, 可以将其视为广义节点, 基

尔霍夫电流定律对广义节点仍成立。

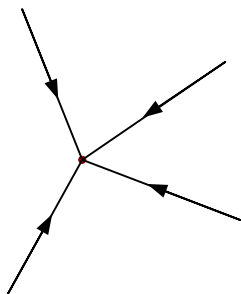


图1-13 例1-5图

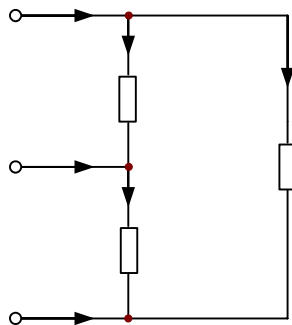


图1-14 例1-6图

例 1-7 如图 1-15 所示为电路中的某一回路，已知 $u_{ab} = 4\text{ V}$ ， $u_{bc} = -3\text{ V}$ ， $u_{cd} = 6\text{ V}$ ，求 u_{cd} 。

解 选回路 $abcda$ 的绕行方向为顺时针，各支路电压参考方向与回路绕向一致时取正号，反之取负号，由 KVL 得

$$u_{ab} + u_{bc} + u_{cd} - u_{ad} = 0$$

$$u_{ad} = u_{ab} + u_{bc} + u_{cd} = 4 - 3 + 6 = 7\text{ V}$$

例 1-8 电路如图 1-16 所示，求电压 U_{ab} 。

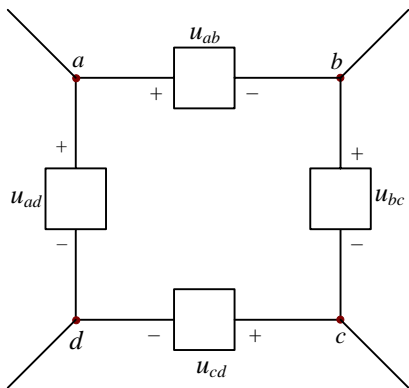


图1-15 例1-7图

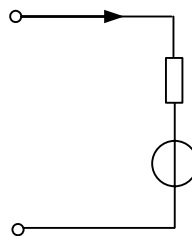


图1-16 例1-8图

解 KVL 不仅使用于实际回路，还可适用于假想回路。图 1-16 中，由电压 U_{ab} 与支路元件构成假想回路，回路绕向为顺时针，列 KVL 方程得

$$IR + U_S - U_{ab} = 0$$

$$U_{ab} = IR + U_S$$

例 1-8 为利用 KVL 求电路中任意两点间电压的常用方法，要注意总结并熟练掌握。

【思考与分析】

1. 图 1-17 所示电路中，开关打开时，求电流 I 。
2. 电路如图 1-18 所示，已知节点 a 的 KCL 方程为 $i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0$ ，试在图中标出 i_1 、 i_2 、 i_3 电流的参考方向。

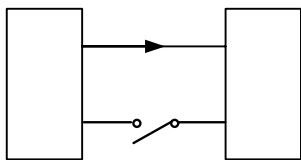


图1-17 思考与分析题1图

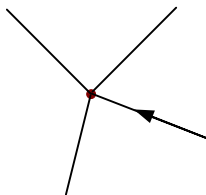
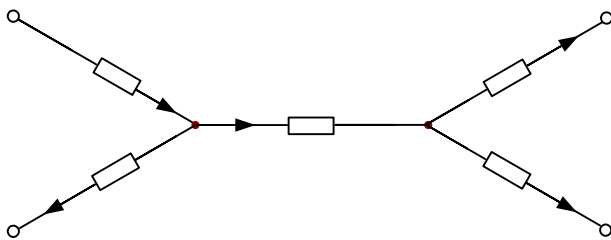
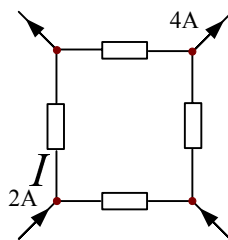


图1-18 思考与分析题2图

3. 求图示 1-19 (a)、(b) 电路中的未知电流。
4. 电路如图 1-19 (a) 所示，求 u_{af} 、 u_{eb} 。



A



B

图1-19 思考与分析题3图

1.5 电路中电位的计算 S

在电子电路和电器设备的调试和检修中，经常要测量各点的电位。在电路中，选定的零电位点叫零电位参考点（以下简称参考点），用“ \perp ”表示，则电路中其余各点的电位就等于该点与参考点之间的电压。在图 1-20 中，选 d 点为零电位参考点，则

$$U_a = U_{ad} = U_a - U_d$$

$$U_b = U_{bd} = U_b - U_d$$

$$U_c = U_{cd} = U_c - U_d$$

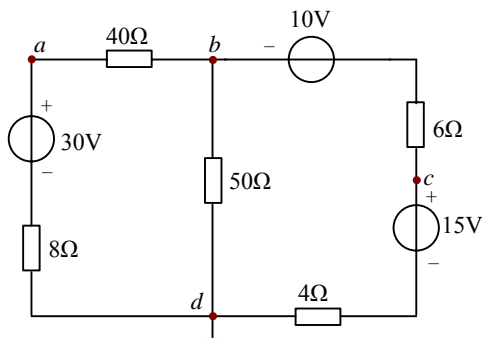


图1-20 电路中电位的求法

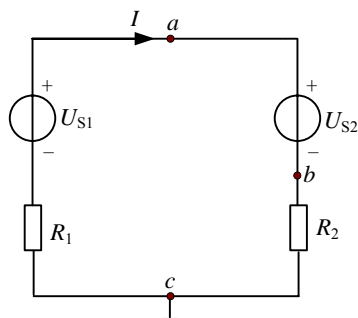


图1-21 例1-7图

例 1-9 电路如图 1-21 所示, $U_{S1}=8\text{V}$, $U_{S2}=12\text{V}$, $R_1=4\Omega$, $R_2=6\Omega$, 求 a 、 b 点的电位。

解 电流参考方向如图所示, 回路绕向为顺时针, KVL 方程为

$$\begin{aligned} -U_{S1} + U_{S2} + IR_2 + IR_1 &= 0 \\ I &= \frac{U_{S1} - U_{S2}}{R_1 + R_2} = \frac{8 - 12}{4 + 6} = -0.4\text{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_a &= U_{ac} = U_{S2} + IR_2 \\ &= 12 - 0.4 \times 6 = 9.6\text{V} \\ U_b &= U_{bc} = IR_2 \\ &= -0.4 \times 6 = -2.4\text{V} \end{aligned}$$

选 b 点为零电位参考点, 则

$$\begin{aligned} U_a &= U_{ab} = U_{S2} = 12\text{V} \\ U_c &= U_{cb} = -IR_2 \\ &= -(-0.4) \times 6 = 2.4\text{V} \end{aligned}$$

以上两种情况下, 电路中任意两点间的电压均为

$$\begin{aligned} U_{ab} &= U_a - U_b = 12\text{V} \\ U_{ac} &= U_a - U_c = 9.6\text{V} \\ U_{bc} &= U_b - U_c = -2.4\text{V} \end{aligned}$$

可见, 参考点不同, 电路中各点的电位随之改变, 但是任意两点间的电压值是不变的。所以各点电位的高低是相对的, 而两点间的电压值是绝对的。

在图 1-22 (a) 所示电路中, 各电压源有公共端, 并选公共端 b 为参考点, 利用电位概念, 可简化为电子电路中常用的习惯画法, 如图 1-22 (b) 所示。

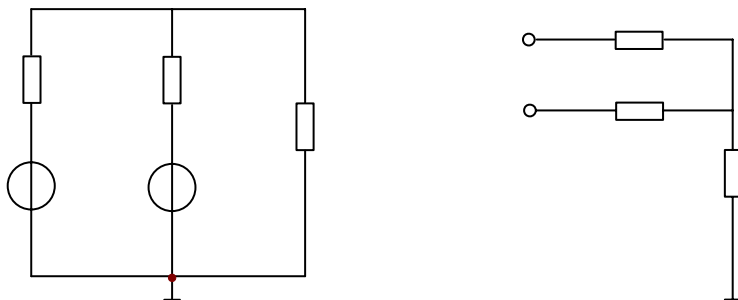


图1-22 电子电路的习惯画法

电子电路中常用的习惯画法, 省略了电源图形符号及接地端与零电位参考点之间的连接导线, 并标出非接地端相对于参考点的电位, 在形式上看好像没有形成回路, 但实质上仍构成回路。

例 1-10 电路如图 1-23 (a) 所示, 求电路中 a 点的点位。

解 由图 1-23 (a) 电路, 可知

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{12 - (-24)}{48 + 24} = 0.5 \text{ A} \\
 U_a - (-24) &= 24I \\
 U_a &= 24I - 24 \\
 &= 24 \times 0.5 - 24 = -12 \text{ V}
 \end{aligned}$$

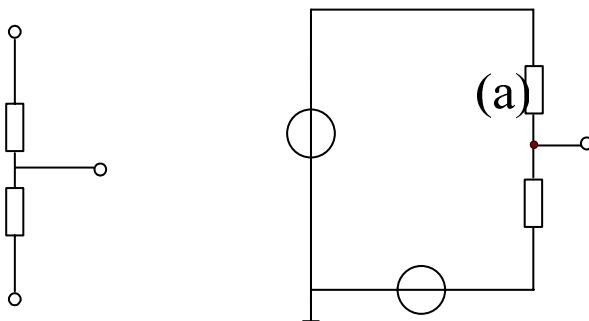


图1-23 例1-8电路图

图 1-23 (a) 电路所对应的普通画法如图 1-23 (b) 所示, 也可由图 1-23 (b) 来进行求解。

1.6 本章小结

1. 电路的基本功能是进行电能的传输、转换和信号的传递、处理。电路分析的对象是电路模型, 电路模型由理想电路元件组成。

2. 电路的主要物理量包括电流、电压、电位及功率。电流和电压参考方向的概念很重要, 一定要熟练掌握。规定了电流、电压的参考方向, 则此两个物理量为代数量, 可能大于零或小于零, 如果大于零, 说明参考方向与实际方向相同; 小于零, 说明参考方向与实际方向相反。一个电路中, 参考方向一经选定, 解题过程中就不能更改。参考方向原则上可以任意选定, 但对于一个元件, 其上电压、电流经常按照关联一致的原则来选定。

3. 计算元件电功率的方法。

(1) 关联参考方向, $p = ui$; 非关联参考方向, $p = -ui$ 。

(2) 代入数值进行计算, 不论关联一致还是关联不一致, 只要 $p > 0$, 元件就消耗(吸收)功率; $p < 0$, 元件就产生(发出)功率。

4. 线性电阻元件的伏安关系, 在关联参考方向下, $u = Ri$; 非关联参考方向下, $u = -Ri$, 这是电阻元件所满足的元件约束关系。在列写电阻元件的伏安关系时, 一定要注意判断电压与电流的参考方向是否关联一致。

5. 基尔霍夫定律包括基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律, 具体表示为

$$\text{KCL: } \sum i_k = 0; \quad \text{KVL: } \sum u_k = 0$$

基尔霍夫定律与元件性质无关, 仅取决于电路的结构, 所以又称为结构约束, 与前面所讲的元件约束一起, 统称为两类约束。它们是求解电路的基础。

6. 电位是所求点与参考点之间的电压, 即求电路中某点的电位就是求该点到参考点之间的电压。电位是相对的, 数值与参考点的选择有关; 电压是绝对的, 电路中任意两点间的电压是确定的。

1.7 自测与练习

1-1 如图 1-24 所示电路中, (a) 图中元件电流实际流向_____ ; (b) 图中元件电流实际流向_____。



图1-24 自测与练习1-1图

1-2 如图 1-25 (a)、(b) 所示电路中为同一元件在不同参考方向下测得的电压值，若图 (a) 中， a 端参考极性为 “+”，则图 (b) 中， a 端参考极性为_____。

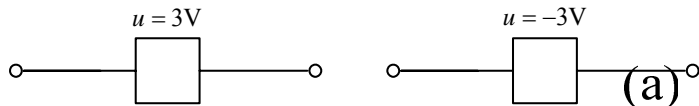


图1-25 自测与练习1-2图

1-3 如图 1-26 中，已知电源 $U_s = 6\text{ V}$ ，电路中电流 $I = 2\text{ A}$ ，则电源产生的功率为_____，吸收的功率为_____，电阻消耗的功率为_____。

1-4 电路如图 1-27 所示，则电阻元件的伏安关系：(a) 图为_____，(b) 图为_____。

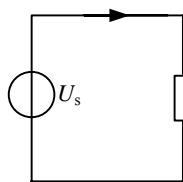


图1-26 自测与练习1-3图

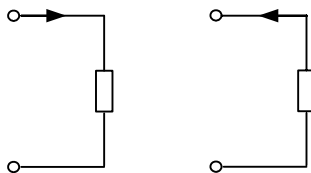


图1-27 自测与练习1-4图

1-5 如图 1-28 所示电路中，已知电流 $i_1 = 4.5\text{ A}$ ，则电流 i_2 等于_____。

1-6 一只灯泡的额定功率为 25 W ，额定电压为 220 V ，(a) 灯泡的额定电流为_____，电阻为_____。

1-7 电路如图 1-29 所示，则电压 $U_{ab} =$ _____ V 。

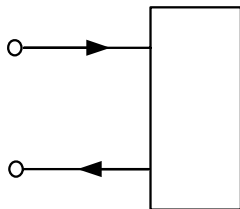


图1-28 自测与练习1-5图

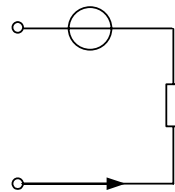


图1-29 自测与练习1-6图

1-8 如图 1-30 所示电路中的电流 I 是 ()。

(a) -0.2 A (b) -0.8 A (c) 0.2 A (d) 0.8 A

1-9 如图 1-31 所示电路中, U 是 ()。

(a) 30 V (b) 14 V (c) 10 V (d) 6 V

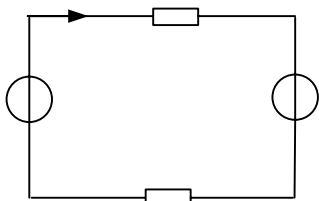


图1-30 自测与练习1-8图

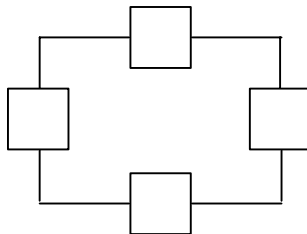


图1-31 自测与练习1-9图

1-10 一个 “ $2\text{ W}/80\text{ k}\Omega$ ” 的电阻, 最大允许通过的电流 ()。

(a) 160 kA (b) 40 A (c) 5 mA (d) 25 mA

1-11 如图 1-32 所示电路中, 图 (a) 中元件吸收功率 36 W , 图 (b) 中元件产生功率 48 W , 试求流过各元件电流的大小和实际流向。

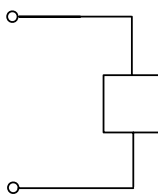
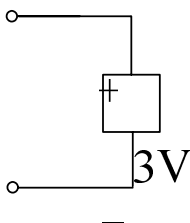


图1-32 自测与练习1-11图

1-12 如图 1-33 所示电路中, 已知电流 $I = 4\text{ A}$, 求 A 、 B 、 C 三个元件吸收的功率。

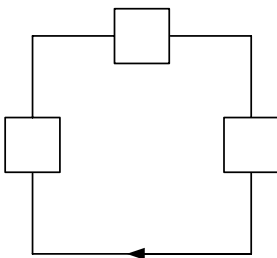
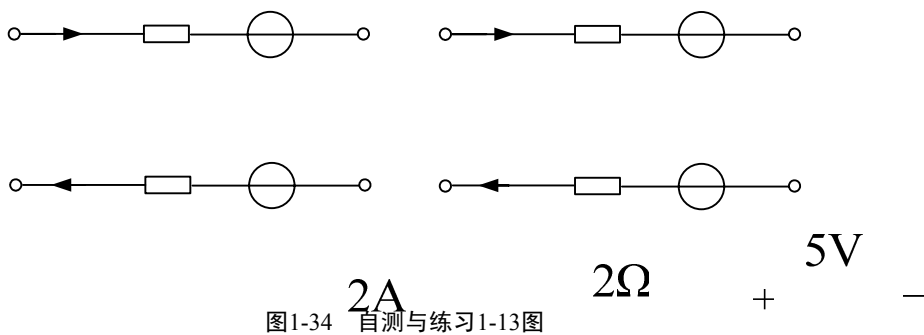
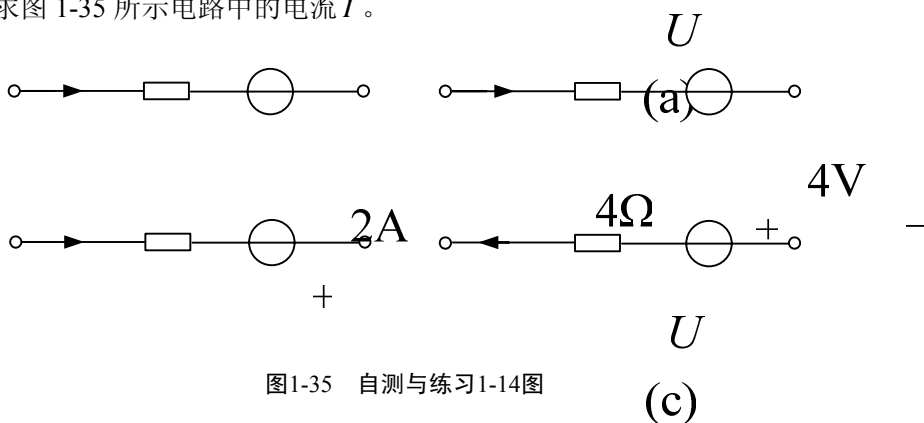


图1-33 自测与练习1-12图

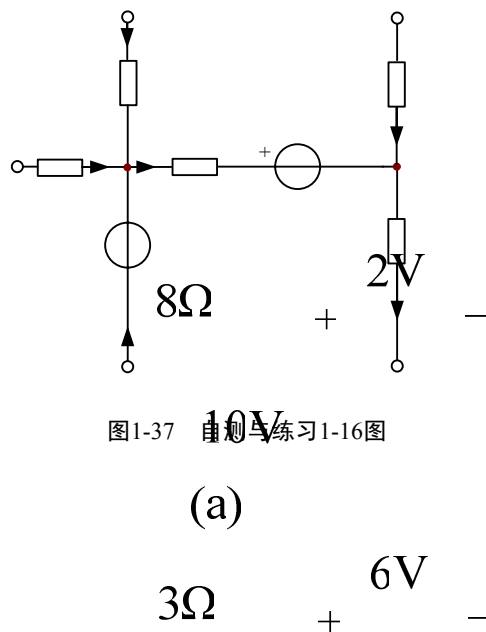
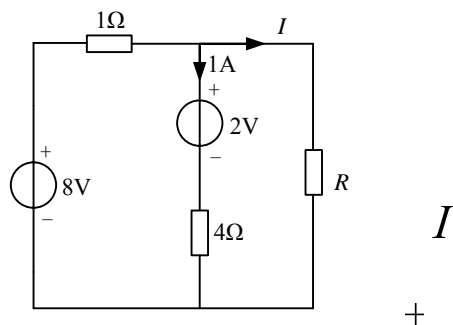
1-13 求图 1-34 中含源支路的电压。



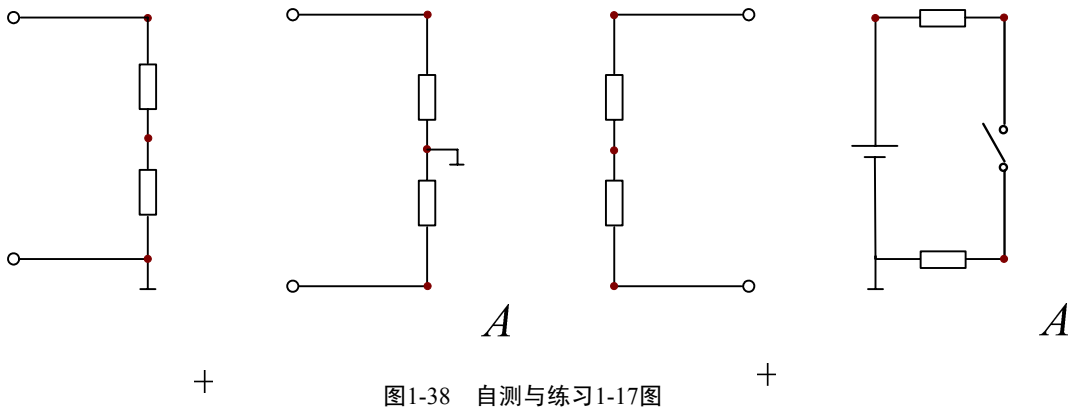
1-14 求图 1-35 所示电路中的电流 I 。



1-15 求图 1-36 电路中的电流 I 及电阻 R 。



- 1-16 求图 1-37 所示电路中的电流 I_1 、 I_2 。
- 1-17 分别求图 1-38 所示电路中 A、B、C 三点的电位。



- 1-18 电路如图 1-39 所示，求开关 S 打开或关闭时 a 点的点位。

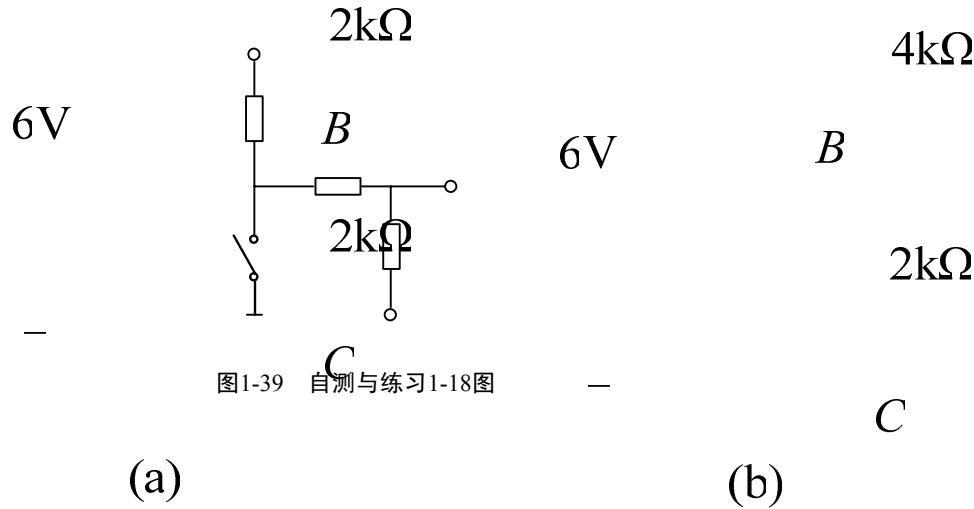


图1-39 自测与练习1-18图

第2章 等效电路

“等效”概念在电路分析中经常用到，等效变换法是电路分析的一个基本方法。本章首先阐述电路等效的概念，然后具体讨论电阻的等效变换及电源的等效变换。通过学习清楚等效的具体含义，掌握电阻和电源的等效变换方法。下面首先由实训室活动给出等效的概念。

【实训室活动】

目的：理解等效的概念，了解等效对外电路的影响。

设备与器材：直流稳压电源两台，两个 $100\ \Omega$ 电阻、一个 $50\ \Omega$ 电阻，直流电压表、直流电流表各一个，电流测试棒一个。

操作步骤：

(1) 按如图 2-1 (a) 所示连好电路，其中 $R_L=150\ \Omega$ ，将电源 U_{S1} 调至 25V ，电源 U_{S2} 调至 15V ；

(2) 用电压表测出电阻 R_L 两端的电压 U ，用电流表测出流过电阻 R_L 的电流 I ，将测量结果填入表 1 中；

(3) 保持负载 R_L 不变，只改变虚线框内的电路部分，按图 2-1 (b) 连好电路，将电源 U_S 调至 20V ；

(4) 用电压表测出负载 R_L 两端的电压 U ，用电流表测出流过负载 R_L 的电流 I ，并将结果填入表 2-1 中。

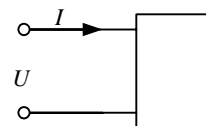


图2-1 两端网络

表 2-1 电流、电压数据测量

电路图	U (V)	I (mA)
(a) 图		
(b) 图		

(5) 对于相同的负载外电路（去掉外电路三字，换为负载） R_L ，比较两次测量的电流、电压并总结规律。

图 2-1 中，两个虚线框内的电路与负载相接时只有两个接线端钮，在电路分析中，把具有两个接线端钮的网络称为二端网络，由于二端网络构成一个单口，所以也叫单口网络。在图 2-1 (a) 或 (b) 中虚线框内的部分及其引出的两个端钮就是一个二端网络。由测量数据发现：负载 R_L 不论与图 (a) 中的二端网络相接，还是与图 (b) 中的二端网络相接，

两种情况下, 负载 R_L 两端的电压及流过其电流分别完全相同, 因此对负载 R_L 来说, 图 (a) 与图 (b) 中的二端网络完全等效, 这就是等效的含义。

推广到一般情况, 所谓等效是指对相同的外电路, 若两个二端网络的端钮电压电流关系相同, 则这样的两个网络互称为等效网络。在图 2-1 中, 外电路为负载所在的支路。显然, “等效” 是指 “对外等效”。

2.1 电阻的等效变换

2.1.1 电阻串联等效变换

若干个电阻依次首尾连接, 称为电阻的串联。串联时各电阻流过同一电流, 如图 2-2 (a) 所示, 设各电阻上电压、电流参考方向相关联, 由欧姆定律和基尔霍夫电压定律可得

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I \\ &= (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I = R I \end{aligned}$$

其中

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k \quad (2-1)$$

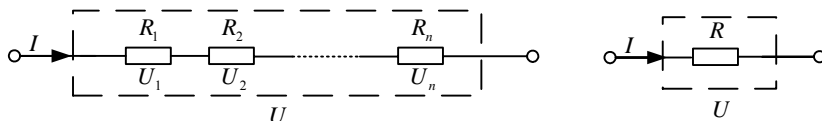


图2-2 电阻的串联等效电路

即图 2-2 (a) 电路可以用阻值为 R 的一个电阻代替, 如图 2-2 (b) 所示。图 2-2 (b) 电路为图 2-2 (a) 的等效电路, 式 (2-1) 为串联等效电阻的计算公式。

在电阻串联电路中, 若各部分电压参考方向如图 2-2 (a) 所示, 则端口总电压与各电阻两端电压之间满足分压公式:

$$U_k = R_k I = \frac{R_k}{R} U \quad (2-2)$$

即电阻串联时, 分压与电阻值成正比, 电阻值越大所分电压越大。

2.1.2 电阻并联等效变换

将若干个电阻连接在两个公共点之间,使每个电阻承受相同的电压,这样的连接方式称为电阻的并联,如图 2-3 (a) 所示。

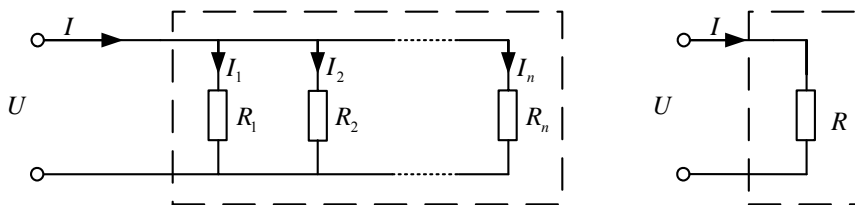


图2-3 电阻的并联等效电路

并联电阻也可以用一个等效电阻代替,由基尔霍夫电流定律和欧姆定律同样可求得等效电阻为

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad (2-3)$$

式中, R_k 为第 k 个电阻的阻值, $k=1, 2, 3, \dots, n$ 。

若用电导表示上式中各电阻,则式 (2-3) 可写为

$$G = \sum_{k=1}^n G_k \quad (2-4)$$

其中, $G=1/R$, $G_k=1/R_k$, $k=1, 2, 3, \dots, n$ 。

式 (2-3) 和 (2-4) 表明: n 个电阻 (电导) 相并联, 其等效电阻的倒数 (等效电导) 等于各并联电阻的倒数 (各并联电导) 之和。

在电阻并联电路中,若各部分电流参考方向如图 2-3 (a) 所示,则端口总电流与各支路电流之间满足分流公式

$$i_k = \frac{R}{R_k} i \quad (2-5)$$

其中, $k=1, 2, 3, \dots, n$ 。

$$i_k = \frac{G_k}{G} i \quad (2-6)$$

式 (2-5) 表明: 电阻并联分流与电阻成反比,即电阻值越大分得的电流越小。式 (2-6) 表明: 电导并联分流与电导值成正比关系。

在电路分析中,经常遇到两个电阻并联的情况,由式 (2-3) 可得两个电阻并联的等效电阻为

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (2-7)$$

其对应的分流公式为

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad (2-8)$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (2-9)$$

若两个电阻串联，由式 (2-2) 可得两个电阻串联的分压公式为

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad (2-10)$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \quad (2-11)$$

例 2-1 求如图 2-4 所示电路的等效电阻 R_{ab} 。

解 先判断电阻的串并联关系。两个 2Ω 电阻串联后与 4Ω 电阻并联，然后再与 1Ω 电阻串联，最后与 3Ω 电阻并联。

所以网络的等效电阻

$$R_{ab} = \{[(2+2)//4]+1\} // 3 = 1.5\Omega$$

用“+”号表示串联关系，用“//”表示并联关系，用小括号（）、中括号[]及大括号{}表示串并联的先后次序。

例 2-2 如图 2-5 (a) 所示为一电桥电路，若已知

$$I_5 = 0\text{ A}, R_1 = 4\Omega, R_2 = 2\Omega, R_3 = 2\Omega, R_4 = 1\Omega, R_5 = 5\Omega$$

求 ab 两端的等效电阻 R_{ab} 。

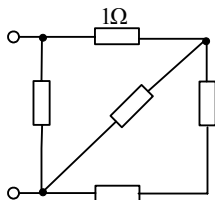


图2-4 例2-1图

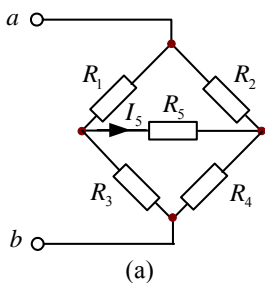
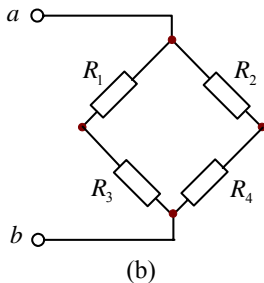


图2-5 例2-2图



解 因为 $I_5 = 0\text{ A}$ ，即 R_5 所在支路无电流通过，电桥平衡，这时电路可等效为图 2-5 (b) 所示电路，在图 2-5 (b) 电路中可求得

$$R_{ab} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{(4+2)(2+1)}{4+2+2+1} = 2 \Omega$$

2.1.3 电阻 Y、 Δ 连接等效变换

在分析电路时，常常会遇到一些较为复杂的电路，如在图 2-5 (a) 的电桥电路中，若 $I_5 \neq 0$ ，电桥不平衡，则五个电阻的串并联关系不能确定，这时只用串并联简化的方法求端口 ab 的等效电阻是不可能的，那么如何解决这类问题呢？

之所以出现上述现象是因为电路中有电阻的星形 (Y 形) 连接和三角形 (Δ 形) 连接。星形连接是指三个电阻的一端接在同一点上，另一端分别接在不同的三个端钮上的连接方式，如图 2-6 (a) 所示；三角形连接是指三个电阻分别接在三个端钮的每两个之间的连接方式，如图 2-6 (b) 所示。为了求出等效电阻，常将星形连接与三角形连接进行等效变换，即用星形连接的三个电阻等效代替原电路中三角形连接的三个电阻，或用三角形连接的三个电阻等效代替原电路中星形连接的三个电阻。通过等效变换后的电路可以判断串并联关系，从而求出等效电阻。

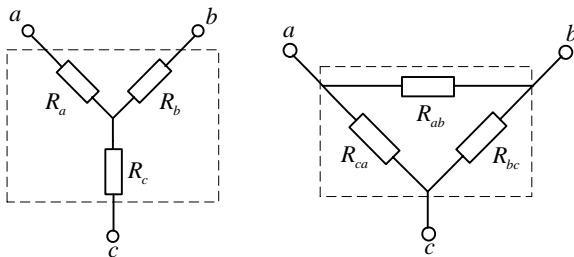


图2-6 星形连接与三角形连接

如果图 2-6 (a) 的星形网络与图 2-6 (b) 的三角形网络等效，那么电阻 R_a 、 R_b 、 R_c 和电阻 R_{ab} 、 R_{bc} 、 R_{ca} 之间满足什么关系呢？

一种简单的推导方法是将两电路在一个对应端子悬空的同等条件下，分别求出剩余两端子间的电阻，并使两种情况下求得的电阻相等。

悬空 a 端子时，可得

$$R_b + R_c = \frac{R_{bc}(R_{ab} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (2-12)$$

悬空 b 端子时，可得

$$R_a + R_c = \frac{R_{ca}(R_{ab} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (2-13)$$

悬空 c 端子时，可得

$$R_a + R_b = \frac{R_{ab}(R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \quad (2-14)$$

联立式 (2-12)、(2-13)、(2-14) 可解得

$$\begin{cases} R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \\ R_b = \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \\ R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \end{cases} \quad (2-15)$$

或解得

$$\begin{cases} R_{ab} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c} \\ R_{bc} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a} \\ R_{ca} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_b} \end{cases} \quad (2-16)$$

式 (2-15) 为三角形连接等效为星形连接的公式, 可归纳为等效的三个星接电阻分别等于原角接时夹边电阻乘积除以三电阻之和; 式 (2-16) 为星形连接等效为三角形连接的公式, 可归纳为等效的三个角接电阻分别等于原星接时两两电阻乘积之和除以对边的电阻。

从式 (2-15) 和 (2-16) 不难看出, 当三角形连接的三个电阻相等, 即 $R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R_{\Delta}$ 时, 等效变换成星形连接的三个电阻也必然相等, 即 $R_a = R_b = R_c = R_Y = \frac{1}{3} R_{\Delta}$; 当星形连接的三个电阻相等满足 $R_a = R_b = R_c = R_Y$ 时, 等效变换成三角形的三个电阻也必然相等, 即 $R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R_{\Delta'} = 3R_Y$ 。

例 2-3 求如图 2-7 (a) 所示电路的等效电阻。

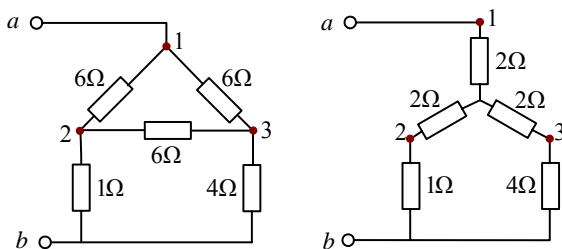


图2-7 例2-3题图

解 将3个 6Ω 电阻的三角形连接等效变换成星形连接, 由于三个角接电阻相等, 等效为星接电阻时每个电阻为角接电阻的 $1/3$, 如图2-7(b)所示。

在图2-7(b)中可求得等效电阻为

$$R_{ab} = [(2+1) \parallel (2+4)] + 2 = \frac{(2+1) \times (2+4)}{(2+1) + (2+4)} + 2 = 4\Omega$$

【思考与分析】

1. 电桥电路平衡的条件是什么?
2. 试推导Y- Δ 等效变换的公式。

2.2 电源的等效变换

2.2.1 电源元件

实际中有各种各样的电源, 如干电池、蓄电池及电子线路中的信号源等。根据电源本身的特点和分析电路的需要, 电源常分为两种, 能独立向外提供电能的电源称为独立电源, 它包括电压源和电流源; 不能独立向外提供电能的电源称为非独立电源, 又称受控源。本节主要介绍独立电源。

1. 电压源

根据输出特性的不同, 电压源分为理想电压源和实际电压源两种。若电源两端输出电压总量保持定值或为一定的时间函数, 而流经它的电流则由外部电路决定, 则这种电源称为理想电压源, 又称恒压源。其图形符号如图2-8(a)所示, 以直流理想电压源为例, 其伏安特性如图(b)所示。

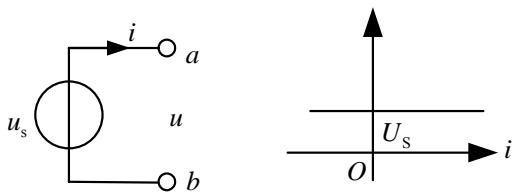


图2-8 理想电压源符号及伏安特性

理想电压源在实际中是不存在的, 因为实际电源内部总存在一定的内阻, 当电流流过

内阻时会有压降，电流越大，内阻上的压降就越大，致使实际电源两端的电压也就越低，内阻起到分压作用，所以实际电压源用理想电压源串联一内阻表示，这就是电压源模型，其图形符号如图 2-9 (a) 所示，直流电压源模型的伏安特性如图 2-9 (b) 所示。

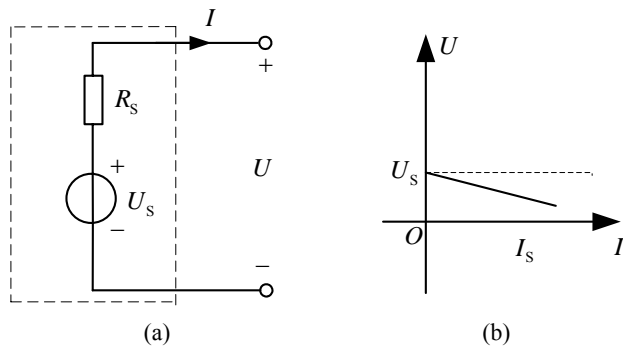


图2-9 电压源模型及伏安特性

2. 电流源

根据输出特性的不同，电流源分为理想电流源和实际电流源两种。若电流源输出电流总能保持定值或一定的时间函数，而它两端电压则由外部电路决定，则这种电源称为理想电流源，又称恒流源，其图形符号如图 2-10 (a) 所示，以直流理想电流源为例，其伏安特性如图 2-10 (b) 所示。

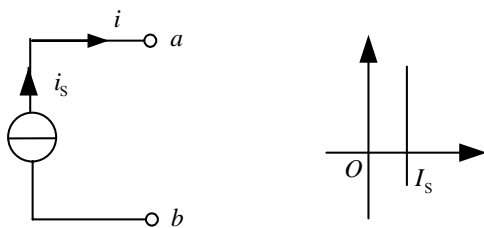


图2-10 电流源模型及伏安特性

同样，理想电流源实际中也是不存在的，因为实际电源内部总存在一定的内阻，当电流流过内阻时，有一部分电流将从内部分流掉，内阻越小，分流越大，内阻起到分流作用，所以实际的电流源用理想电流源并联一内阻表示，这就是电流源模型。其图形符号如图 2-11 (a) 所示，直流电流源模型的外特性如图 2-11 (b) 所示。

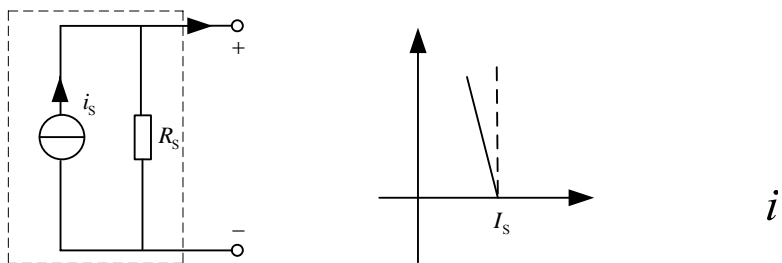


图2-11 实际电流源模型及伏安特性

2.2.2 理想电源串、并联的等效化简

11

1. 理想电压源串联

根据电路等效的概念, 如图 2-12 (a) 中 n 个理想电压源串联向外供电时, 可以用图 2-12 (b) 所示的一个理想电压源等效代替, 根据 KVL 得

$$U_S = U_{S1} + U_{S2} + \cdots + U_{Sn} = \sum_{i=1}^n U_{Si} \quad (2-17)$$

注意: 式 (2-17) 中, U_{Si} 的参考方向与 U_S 的参考方向一致时取“+”号, 相反时取“-”号。

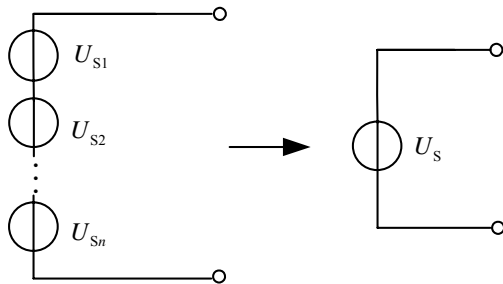


图2-12 理想电压源串联及等效电路

2. 理想电流源并联

同理, 如图 2-13 (a) 所示为 n 个理想电流源的并联, 可以用图 2-13 (b) 中的一个理想电流源来等效代替, 根据 KCL 得

$$I_S = I_{S1} + I_{S2} + \cdots + I_{Sn} = \sum_{i=1}^n I_{Si}$$

注意：式中 I_{Si} 与 I_S 的参考方向一致时， I_{Si} 在式中取“+”号，相反时取“-”号。

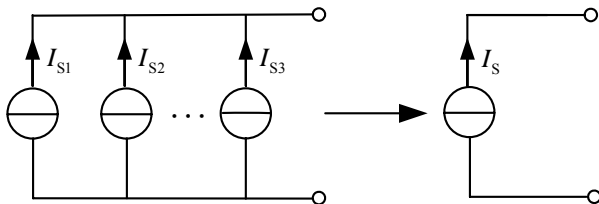


图2-13 理想电流源并联及等效电路

例 2-4 电路如图 2-14 (a)、(c) 所示，求：(1) 图 2-14 (a) 中的电流 I ；(2) 图 2-14 (c) 中的电压 U 。

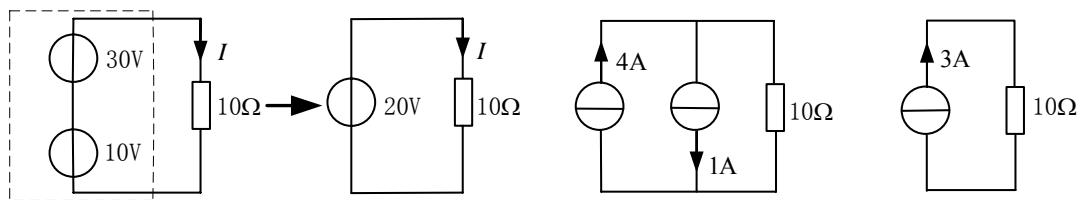


图2-14 例2-4图

解 (1) 将图 2-14 (a) 点划线框部分等效为一个理想电压源，如图 2-14 (b) 所示。由图 2-14 (b)，得

$$I = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$

(2) 将图 2-14 (c) 中的两个并联的理想电流源等效为一个理想电流源，如图 2-14 (d) 所示。由图 2-14 (d)，得

$$U = 3 \times 10 = 30 \text{ V}$$

2.2.3 电源模型的等效互换

对于一定的负载来说，只要电压源模型和电流源模型的端电压和端电流相同，则电压源模型或电流源模型对负载的作用就是等效的，可以互换，见图 2-15。

+

+

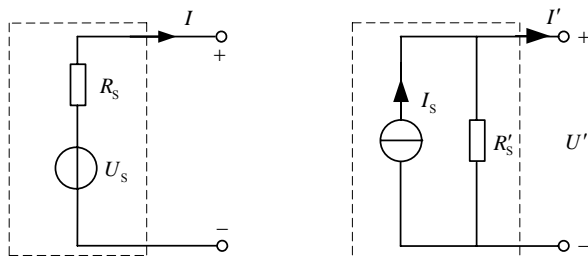


图2-15 电压源模型与电流源模型的等效互换

在图 2-15 (a) 中, 有

$$U = U_s - IR_s, \quad I = \frac{U_s}{R_s} - \frac{U}{R_s}$$

在图 2-15 (b) 中, 有

$$I' = I_s - \frac{U'}{R'_s}, \quad U = I_s R'_s - I' R'_s$$

若图 2-15 (a) 与图 2-15 (b) 对外电路等效, 则有

$$U' = U, \quad I' = I$$

所以

$$U_s - IR_s = I_s R'_s - I' R'_s \quad (2-18)$$

$$\frac{U_s}{R_s} - \frac{U}{R_s} = I_s - \frac{U'}{R'_s} \quad (2-19)$$

要使式 (2-18) 和 (2-19) 成立, 只需使 $R_s = R'_s$, 且有

$$I_s = \frac{U_s}{R_s} \text{ 或 } U_s = I_s R_s$$

即: (1) 当把电压源模型等效变换为电流源模型时, 电流源的电流 $I_s = U_s / R_s$, 内阻 $R'_s = R_s$;

(2) 当把电流源模型等效变换为电压源模型时, 电压源的电压 $U_s = I_s R'_s$, 内阻 $R_s = R'_s$ 。

等效互换时还要注意:

(1) 电源模型互换是电路等效变换的一种方法, 这种等效是对外部电路等效, 即对电源以外的电路等效, 对电源内部电路是不等效的;

(2) 电压源模型与电流源模型之间可以等效互换; 理想电压源与理想电流源之间不能互换;

(3) 等效变换时不但要满足数值关系, 同时还要满足电流源与电压源参考方向之间的关系, 即电流源电流参考方向与电压源电压参考方向相反;

(4) 电源模型等效互换的方法可以推广运用, 如果理想电压源与外接电阻串联, 可把外接电阻看作内阻, 并可等效为为电流源模型; 如果理想电流源与外接电阻并联, 可把外接电阻看作内阻, 并可等效为电压源模型。

例 2-5 电路如图 2-16 (a) 所示, 利用电源等效互换化简电路, 并计算电流 I 。

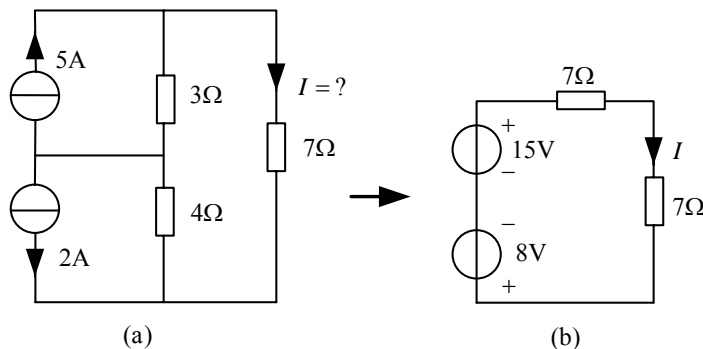


图2-16 例2-5图

解 图中 5 A 电流源和 3 Ω 电阻及 2 A 电流源和 4 Ω 电阻构成两个电流源模型, 两个电流源模型等效为电压源模型, 等效电路如图 2-16 (b) 所示 (注意电压源的极性)。

由图 2-16 (b) 可得

$$I = \frac{15 - 8}{7 + 7} = 0.5 \text{ A}$$

例 2-6 把图 2-17 (a) 所示电路等效为电压源模型。

解 图 2-17 (a) 所示电路的等效化简过程如下图所示。

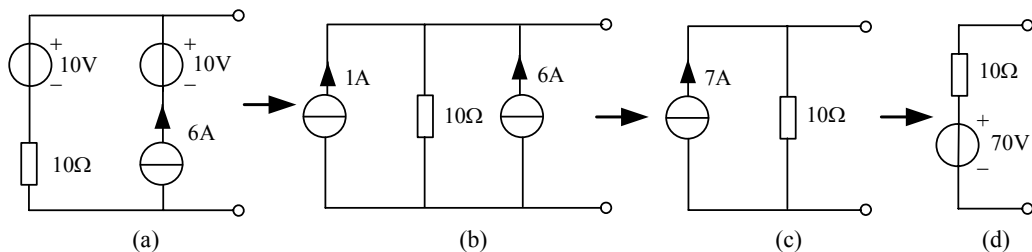


图2-17 例2-6图

【思考与分析】

1. 两种实际电源模型等效变换的条件是什么? 如何确定 U_s 和 I_s 的方向?
2. 电路如图 2-18 (a)、(b) 所示, 在考虑 a 、 b 端口以外的电路时, 与理想电流源串

联的电阻和电压源，能否去掉？与理想电压源并联的电阻和电流源，又能否去掉？

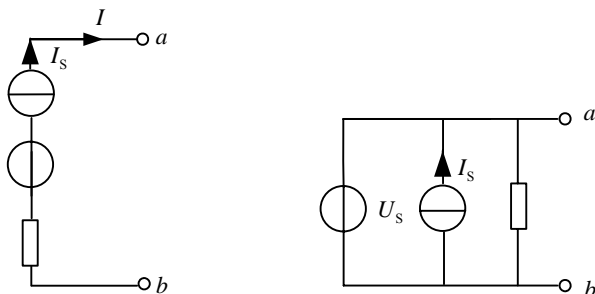


图2-18 思考与分析题1图

+

3. 化简图 2-19 (a)、(b) 所示的电路。

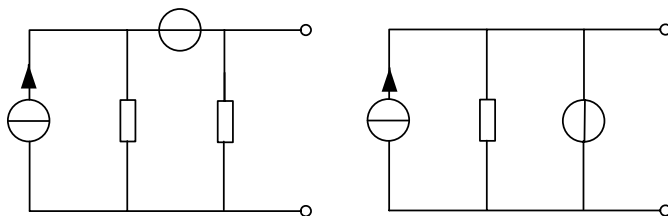


图2-19 思考与分析题3图

—

(a)

2.3 受控源及含受控源电路的等效

2.3.1 受控源

为了描述某些电子器件的实际性能，在电路分析中，经常用到受控源。所谓受控源，即输出电压或电流受电路中其他支路电压或电流控制的电源。受控源分为受控支路和控制支路两部分，共有四个端钮。受控支路的性能如同一个电源，其输出的电压或电流受控于控制支路的控制量。根据控制量和输出量的不同，受控源分为四类，即电压控制电压源（VCVS）、电压控制电流源（VCCS）、电流控制电压源（CCVS）和电流源控制电流源（CCCS）。

(CCCS)。受控源的电路符号如图 2-20 所示。

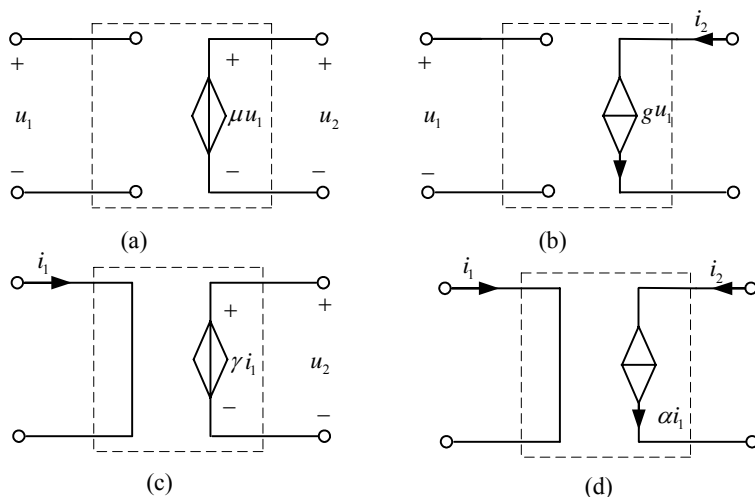


图2-20 受控源电路符号

四种受控源输出量和控制量的关系分别为：

(a) VCVS:

$$u_2 = \mu u_1 \quad (2-20)$$

(b) VCCS:

$$i_2 = g u_1 \quad (2-21)$$

(c) CCVS:

$$u_2 = \gamma i_1 \quad (2-22)$$

(d) CCCS:

$$i_2 = \alpha i_1 \quad (2-23)$$

式 (2-20) ~ (2-23) 中, u_1 、 i_1 为受控源的控制量, u_2 、 i_2 为受控源的受控量。 μ 、 g 、 γ 和 α 为控制系数, 由式 (2-21) 和式 (2-22) 可知, g 和 γ 的单位分别为西门子 and 欧姆, 故 g 称为转移电导, γ 称为转移电阻; 而 μ 和 α 无量纲, 分别称为电压放大系数和电流放大系数。当控制系数为常量时, 受控源为线性受控源, 输出量唯一地取决于控制量。本书仅限于讨论线性受控源。

与 2.2 节介绍的电源相比较可以发现, 独立源与受控源在电路中的作用有着本质的区别。受控源不能独立地输出电压和电流, 是用来表征电子器件中所发生的物理现象的一种模型, 反映了电路中某处的电压或电流控制另一处电压或电流的关系, 它并不是实际意义上的电源。而独立源是电路中产生响应的“源泉”。为了区分开独立源与受控源, 独立源图

形符号用圆圈表示,受控源用菱形表示。

在分析电子电路时,晶体三极管常用电流控制电流源模型来表示,其集电极电流受基极电流控制,基极电流是控制量,集电极电流是受控量,集电极电流所在的端子就是受控源的受控端。

2.3.2 含受控源电路的等效化简

在实际电路中,受控源的电路符号并不像图 2-20 那样画出,通常分开来画,标清楚控制量、受控量及受控源图形符号即可。如图 2-20 所示为理想受控源,当理想受控电压源和一个电阻串联时,可视为受控电压源模型;当理想受控电流源与一个电阻并联时,可视为受控电流源模型。受控电压源模型与受控电流源模型之间等效互换完全等同于电压源模型与电流源模型之间的等效互换。

下面直接给出两个结论。

(1) 若一个二端网络仅含受控源和电阻元件,则该二端网络对外电路可等效为一个电阻,见图 2-21。

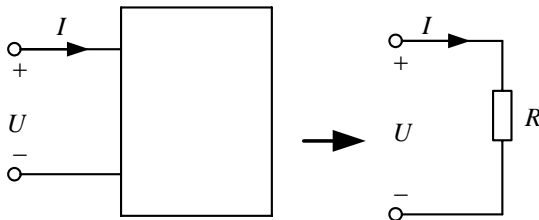


图2-21 受控源、电阻网络及其等效电路

(2) 若一个二端网络含有独立源、受控源和电阻元件,则该二端网络对外电路可等效为一个电压源模型或电流源模型,如图 2-22 所示。

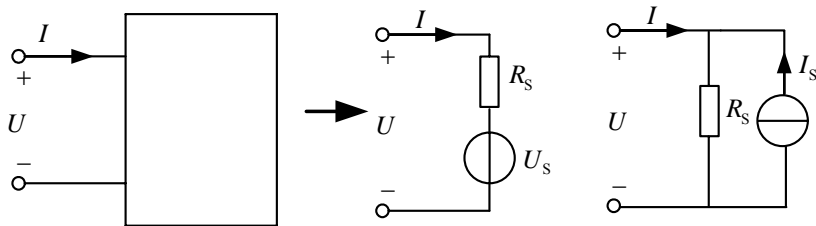


图2-22 含独立源、受控源、电阻的网络及其等效电路

例 2-7 对图 2-23 所示电路,求 ab 端开路电压 U_{oc} 。

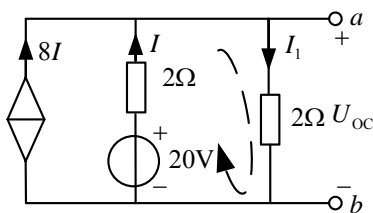


图2-23 例2-7图

解 设电流 I_1 参考方向如图所示, 由 KCL 得

$$I_1 = 8I + I = 9I \quad (2-24)$$

对回路 I, 由 KVL 列方程得

$$2I + 2I_1 - 20 = 0 \quad (2-25)$$

联立方程 (2-24)、式 (2-25), 求解得

$$I = 1 \text{ A}, \quad I_1 = 9 \text{ A}$$

所以

$$U_{oc} = 2I_1 = 2 \times 9 = 18 \text{ V}$$

例 2-8 对图 2-24 (a) 所示电路, 求: 输入电阻 R_i 。

解 当一个二端网络的内部不包含独立电源而只含有电阻 (可含有受控源) 时, 其端口的等效电阻称为该二端网络的输入电阻, 记为 R_i 。

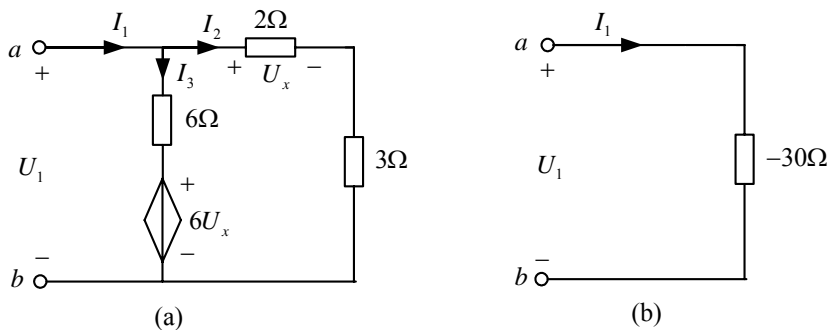


图2-24 例2-8图

设各电流、电压参考方向如图 2-24 (a) 所示。电流

$$I_2 = \frac{U_1}{2+3} = \frac{1}{5}U_1$$

而

$$U_x = 2I_2 = \frac{2}{5}U_1$$

$$I_3 = \frac{U - 6U_x}{6} = \frac{U - 6 \times \frac{2}{5}U}{6} = -\frac{7}{30}U_1$$

所以

$$I_1 = I_2 + I_3 = \frac{1}{5}U_1 - \frac{7}{30}U_1 = -\frac{1}{30}U_1$$

即

$$U_1 = -30I_1$$

显然, 输入电阻 R_i 为

$$R_i = \frac{U_1}{I_1} = -30 \Omega$$

例 2-9 输入电阻是通过找到电路端钮电压与端钮电流的伏安关系 $U = RI$, 根据等效的概念, 确定出输入电阻 R_i , 等效电路如图 2-24 (b) 所示, 这种求解输入电阻的方法也称为伏安关系法。这里要注意: 由于受控源的作用, 含有受控源的二端电路的输入 (或输出) 电阻的值可以是正值, 可以是负值, 当然亦可以为零。

例 2-9 求图 2-25 所示电路的最简等效电路。

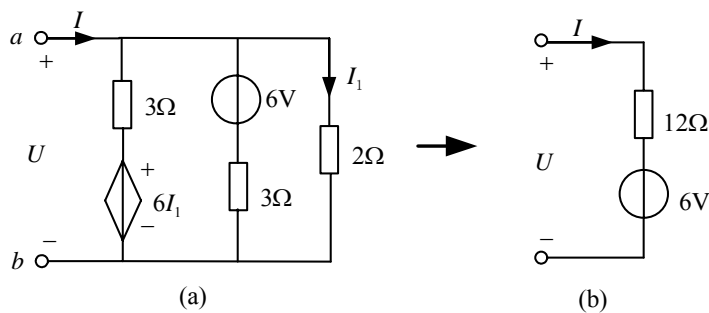


图2-25 例2-9图

解 根据 KCL 和支路伏安关系, 有

$$I = \frac{U - 6I_1}{3} + \frac{U - 6}{3} + \frac{U}{2} \quad (2-26)$$

由于式 (2-26) 中除 I 、 U 外, 还有一新的未知量 I_1 , 因此需找到 I_1 与 I 或 U 的关系, 由图 2-25 可知

$$U = 2I_1 \quad (2-27)$$

联立方程式 (2-26)、式 (2-27) 求解得

$$U = 6 + 12I \quad (2-28)$$

式 (2-27) 也常称为附加方程。根据式 (2-28), 可将图 2-25 (a) 等效化简为图 2-25 (b), 显然它们端钮的伏安关系相同, 也就是说它们对外电路相互等效。

【思考与分析】

求图 2-26 (a)、(b) 所示电路的最简等效电路。

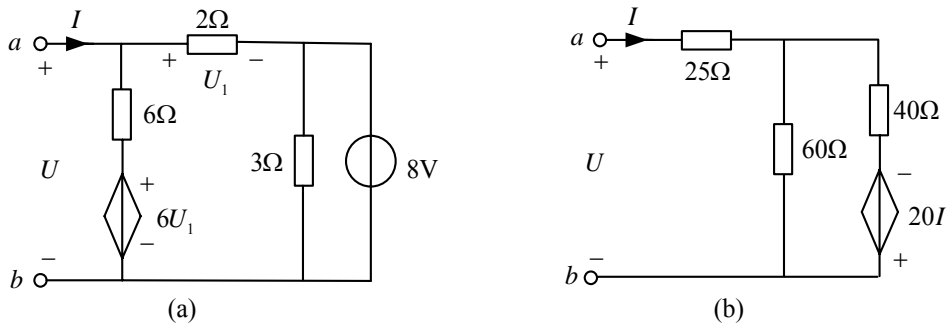


图2-26 思考与分析题1图

2.4 本章小结

1. 等效变换法是分析电路的一种常用方法。电路等效变换的条件是互相代换的两部分电路具有相同的伏安特性。

2. 电阻的串、并联等效化简

(1) 多个电阻串联, 其等效电阻等于各串联电阻之和。

$$R = \sum_{k=1}^n R_k$$

电阻串联分压公式 $u_k = R_k i = \frac{R_k}{R_{eq}} u$, $k=1, 2, \dots, n$ 。电阻串联分压与电阻值成正比, 即电阻值越大所分电压越大。

(2) 多个电阻 (电导) 相并联, 其等效电阻的倒数 (即等效电导) 等于各并联电阻的倒数 (即各并联电导) 之和。

$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad G = \sum_{k=1}^n G_k$$

电阻（电导）并联分流公式： $i_k = \frac{R_{eq}}{R_k} i$ ，或 $i_k = \frac{G_k}{G} i$ ， $k=1, 2, \dots, n$ 。电阻并联分流与电阻成反比，即电阻值越大分得的电流越小，电导并联分流与电导值成正比关系。

(3) 电阻 Δ 、Y连接等效变换（见图2-6）。

Δ 形电路等效为Y形电路的公式

$$\begin{cases} R_a = \frac{R_{ab} R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \\ R_b = \frac{R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \\ R_c = \frac{R_{ca} R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \end{cases}$$

Y形电路等效为 Δ 形电路的公式

$$\begin{cases} R_{ab} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_c} \\ R_{bc} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_a} \\ R_{ca} = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}{R_b} \end{cases}$$

3. 电源的等效变换

(1) 理想电压源：不管外部电路如何，其两端电压总量保持定值或为一定的时间函数的电源。其电压数值由自身决定，与外部电路无关，其输出电流由外电路决定。

n 个理想电压源串联可以等效为一个理想电压源，其值等于各串联理想电压源电压的代数和。即

$$U_s = \sum_{i=1}^n U_{Si}$$

(2) 理想电流源：不管外部电路如何，其输出电流总能保持定值或一定的时间函数的电源。其两端电压由外部电路决定。

n 个电流源并联可以等效为一个理想电流源，其值等于相并联的理想电流源的代数和：

$$I_s = \sum_{i=1}^n I_{Si}$$

(3) 实际电压源模型与实际电流源模型可等效互换，参数之间的关系为：内阻保持不变， $U_s = R_s I_s$ 或 $I_s = U_s / R_s$ 。

4. 受控源及含受控源电路的等效

- (1) 受控源是输出电压或电流受电路中其他支路的电压或电流控制的一种电源模型。
- (2) 任何由受控源和电阻元件构成的二端网络可以等效为一个电阻；由独立源、受控源和电阻元件构成的二端网络一般可以等效为实际电压源模型（或实际电流源模型）。
- (3) 分析受控源电路时，通常把受控源看为独立源，但受控源电路的分析有许多特殊之处，在后面的章节中将会涉及。

2.5 自测与练习

- 2-1 两个二端网络等效的条件是_____。
- 2-2 电压源在电路中_____（一定或不一定）提供功率，要根据电压源的端电压和实际流过电压源的电流方向来决定。
- 2-3 受控源包括四种类型，分别是_____、_____、_____和_____。
- 2-4 如图 2-27 所示电路，从 a 、 b 两端看进去的等效电阻为_____。
- 2-5 如图 2-28 所示电路中的受控源是（ ）。
- (a) VCVS (b) VCCS (c) CCCS (d) CCVS
- 2-6 如图 2-29 所示电路中的电流 I 是（ ）。
- (a) -0.2 A (b) -0.8 A (c) 0.2 A (d) 0.8 A
- 2-7 理想电压源和理想电流源间（ ）。
- (a) 有等效变换关系
- (b) 没有等效变换关系
- (c) 在一定条件下有等效变换关系
- (d) 以上说法都不正确

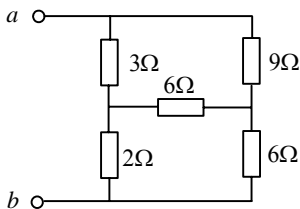


图2-27 自测与练习2-4图

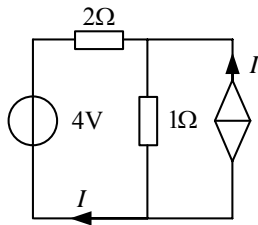


图2-28 自测与练习2-5图

- 2-8 在图 2-30 所示电路中，电压 U 等于（ ）。
- (a) 5 V (b) 8 V (c) 6 V (d) 7 V

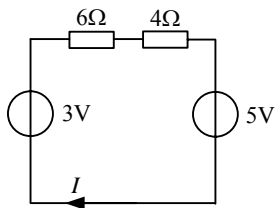


图2-29 自测与练习2-6图

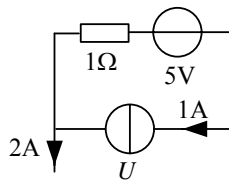


图2-30 自测与练习2-8图

2-9 如图 2-31 所示电路中, 求: (1) 图 (a) 中 5 A 电流源产生功率 P_{S1} ; (2) 图 (b) 中 10 V 电压源产生的功率 P_{S2} 。

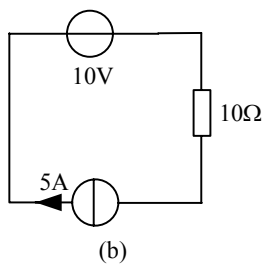
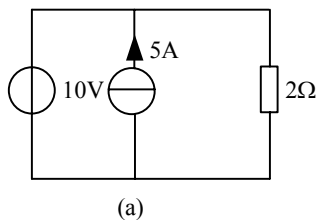


图2-31 自测与练习2-9图

2-10 求图 2-32 所示电路中 ab 端的等效电阻 R_{ab} 。

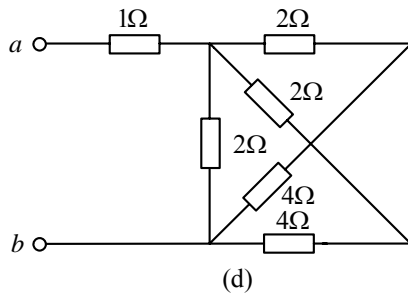
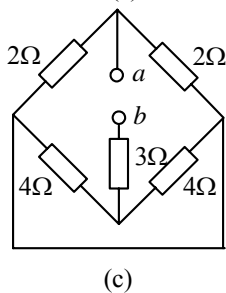
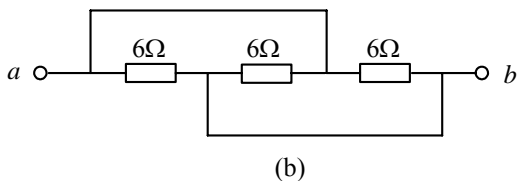
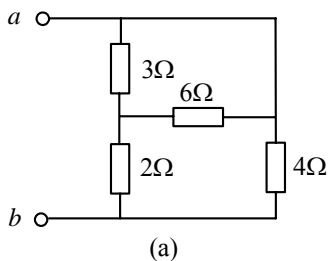


图2-32 自测与练习2-10图

2-11 在如图 2-33 所示电路中, 求电压 U 、 I 各为多少? 其中图 (a) 为开路。

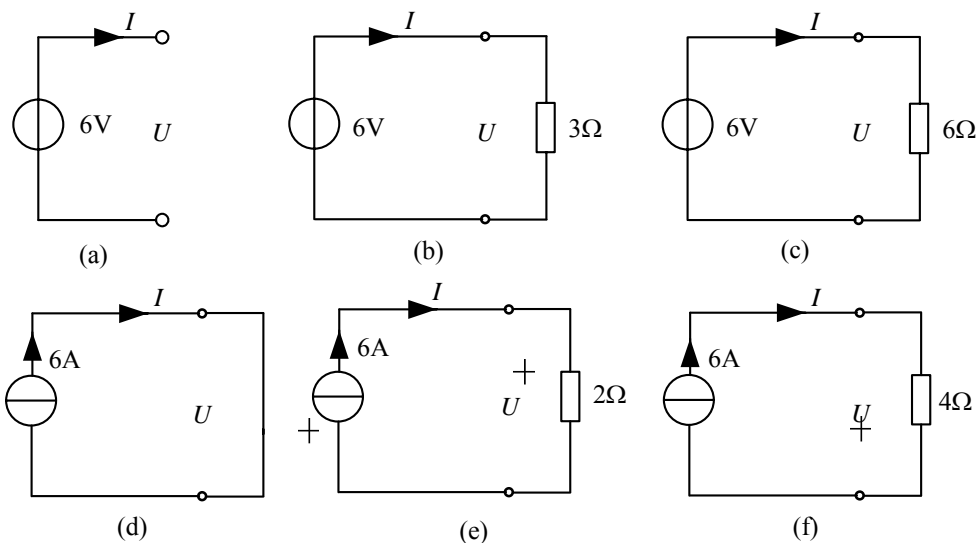


图2-33 自测与练习2-11图

2-12 将图 2-34 所示各电路化为最简的等效电压源模型或等效电流源模型。

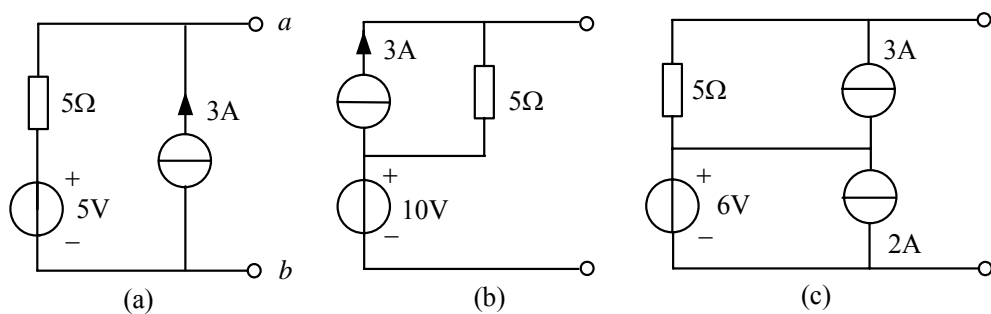


图2-34 自测与练习2-12图

2-13 电路如图 2-35 所示, 图 (a) 中, 若电流 $I=0$, 求电阻 R ; 图 (b) 中若电压 $U=4\text{ V}$, 求电阻 R 。

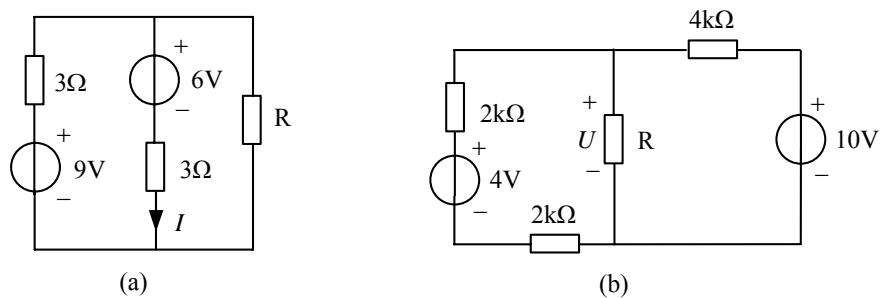


图2-35 自测与练习2-13图

2-14 电路如图 2-36 所示，分别求图 (a)、(b) 电路中的电流 I 。

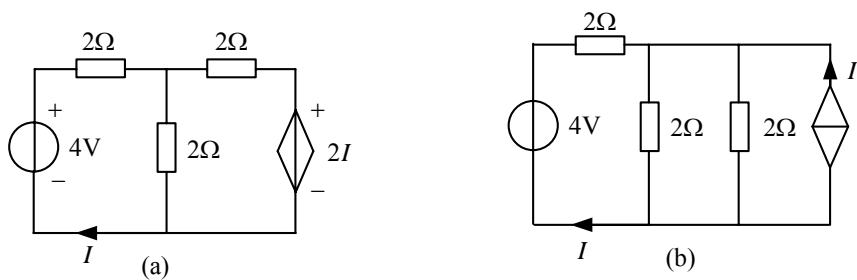


图2-36 自测与练习2-14图

第3章 电阻电路的一般分析方法

在第2章，介绍了网络等效的概念和网络等效变换的基本方法——利用电阻的等效变换、电源的等效变换以及实际电源两种模型的等效变换，将电路简化为最简形式，再求出待求的电压和电流。这种方法对分析简单电路是行之有效的，对于复杂电路，当要求网络各处的电压、电流时，等效变换法使用起来很不方便，即使只求网络某一处的电压、电流时，仅依靠等效变换法一步步简化电路也是相当费事的。在实际应用中，人们大量用到仅含电阻和电源（包括独立源和受控源）的电路，称为电阻电路。本章介绍电阻电路的几种常用分析方法，包括支路电流法、节点电位法、叠加定理、戴维南定理、诺顿定理和最大功率传输定理。本章要求学生会用支路电流法、节点电位法、叠加定理、戴维南定理、诺顿定理和最大功率传输定理分析较复杂的电路。

3.1 支路电流法

对任何复杂电路而言，若求出各条支路的电流、电压和功率，则说明电路已解出。实际上，只要求出各条支路的电流，就可以很容易地求出各条支路的电压和功率。因此，求解各条支路电流往往是解题的关键。支路电流法正是求解各条支路电流最直接的方法。

3.1.1 KCL、KVL 独立方程数

问题的提出：在求解电路时，根据基尔霍夫电流定律和电压定律结合元件的伏安关系（即两类约束）总能列出所需的方程组，从而解出所需的未知量。那么，在根据基尔霍夫电流定律和电压定律列方程时，究竟可以列出多少个独立的方程？

以图 3-1 所示电路为例来说明。该电路共有 2 个节点，3 个回路。对每一个节点，可列写出 KCL 方程，分别为

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

将以上两个方程相加，得到一个 $0=0$ 的恒等式，说明以上 2 个方程彼此不独立（线性相关），其中任意一个方程可由另一个导出。因此，两个方程中只有 1 个是独立的。可以证

明, 对于具有 n 个节点的电路, 在任意 $(n-1)$ 个节点上可以得出 $(n-1)$ 个独立的 KCL 方程, 即 KCL 独立方程数为 $(n-1)$ 个。相应的 $(n-1)$ 个节点称为独立节点。

对每一个回路, 可列写出 KVL 方程, 分别为

$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_3 R_3 - U_{s1} = 0 \\ I_2 R_2 - U_{s2} - I_3 R_3 = 0 \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 - U_{s2} - U_{s1} = 0 \end{cases} \quad (3-2)$$

可注意到, 上述 3 个方程并非彼此独立, 其中任意一个方程可由另外两个相加、减得到。因此, 3 个方程中只有 2 个是独立的。可以证明, 对于具有 n 个节点、 b 条支路的电路, 其 KVL 独立方程数为 $b-(n-1)$ 个。相应的 $b-(n-1)$ 个回路称为独立回路。对于具有 m 个网孔的平面电路, KVL 独立方程数应为 m 个。

课堂练习: 试判断图 3-2 所示电路能列写出多少个 KCL 独立方程和 KVL 独立方程?

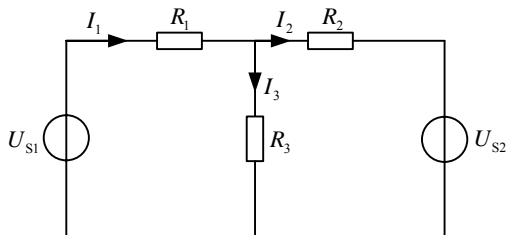


图3-1 KCL、KVL独立方程数

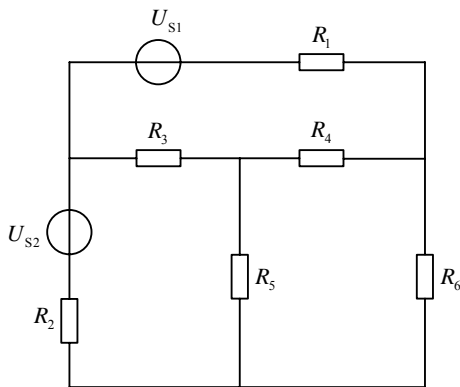


图3-2 课堂练习

3.1.2 支路电流法

支路电流法是以各条支路电流作为电路的未知量, 根据基尔霍夫电流定律, 列出各独立节点的 KCL 方程, 根据元件的伏安关系和基尔霍夫电压定律, 列出各独立回路的 KVL 方程, 然后联立方程组解出各未知电流, 进而再求出其他物理量的方法。下面以图 3-3 电路为例说明支路电流法。

本例共有 5 条支路, 选 5 条支路的支路电流作为未知量, 并假设各支路电流的参考方向。本例有 3 个节点, 独立节点数为 2, 因此独立的 KCL 方程为 2 个; 有 3 个网孔, 独立的 KVL 方程有 3 个。

任选节点①、②作为独立节点, 根据 KCL, 可得

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -I_2 - I_4 - I_5 = \text{①} \end{cases} \quad (3-3)$$

选择网孔作为独立回路，并选定回路的绕行方向，根据 KVL，可得

$$\begin{cases} 5I_1 + 5I_3 - 15 = 0 \\ 10I_2 + 5I_3 - 10I_4 = 0 \\ 10I_4 - 15I_5 - 65 = 0 \end{cases} \quad (3-4)$$

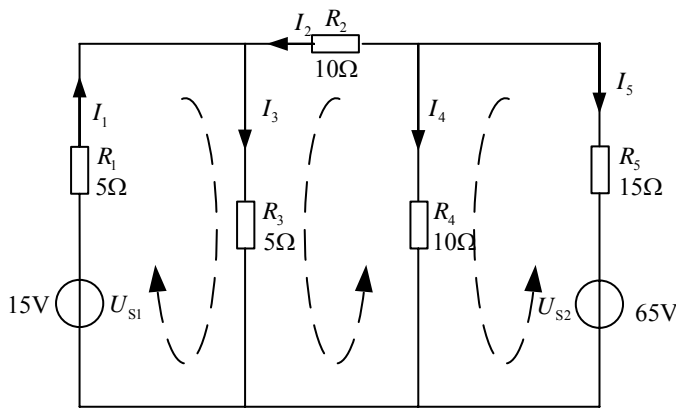


图3-3 支路电流法

联立式 (3-3) 和式 (3-4)，可解得

$$I_1 = 1 \text{ A}, \quad I_2 = 1 \text{ A}, \quad I_3 = 2 \text{ A}, \quad I_4 = 2 \text{ A}, \quad I_5 = -3 \text{ A}$$

以上分析求解电路的方法即为支路电流法。

应用支路电流法求解电路的步骤可归纳如下：

- (1) 设定各支路电流的参考方向；
- (2) 任选 $(n-1)$ 个独立节点，列出其 KCL 方程；
- (3) 选定 $b-(n-1)$ 个独立回路（通常选网孔），并指定回路的绕行方向，列出其 KVL 方程；
- (4) 联立上述 b 个方程，求出 b 条支路的支路电流；
- (5) 根据需要，由支路电流和各元件的伏安关系，再求出其他物理量。

例 3-1 用支路电流法求如图 3-4 所示电路的各支路电流。

解 该电路有 3 条支路，各支路电流的参考方向已给定，其中独立电流源所在支路的支路电流为已知，因此未知的支路电流只有 2 个，为 I_1 、 I_2 。

对节点①，其 KCL 独立方程为 $I_1 - I_2 + 2 = 0$ 。

对左网孔，选定顺时针方向绕行，其 KVL 独立方程为 $6I_1 + 3I_2 - 12 = 0$ 。

联立方程组，解得 $I_1 = 0.67 \text{ A}$ ， $I_2 = 2.67 \text{ A}$ 。

例 3-2 用支路电流法求如图 3-5 所示电路的各支路电流。

解 该电路 $b=3$ ， $n=2$ ， $m=2$ ，应用支路电流法要列出 $n-1=1$ 个 KCL 独立方程，列出 $m=2$ 个 KVL 独立方程。图中已标出各条支路电流的参考方向，并设两个网孔的绕行方向如图 3-5 所示。电路中含有受控源，在列写方程时，可先将受控源当作独立源处理，然后将受控源的控制量 U 用方程变量支路电流表示，列出补充方程。

对节点①，其 KCL 独立方程为

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$

对网孔 I、II，其 KVL 独立方程为

$$6I_1 + 4I_2 - 10 = 0$$

$$4I_2 + I_3 - 10U = 0$$

控制量 U 与支路电流 I_2 的关系为 $U = 4I_2$ （补充方程）

联立求解，可得 $I_1 = 1.7 \text{ A}$ ， $I_2 = -0.05 \text{ A}$ ， $I_3 = -1.75 \text{ A}$ ， $U = -0.2 \text{ V}$ 。

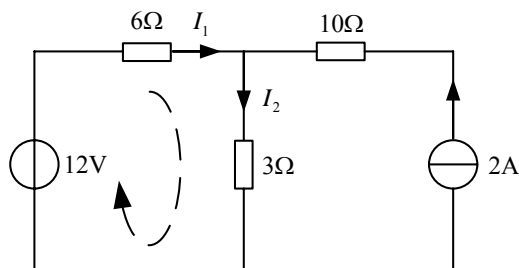


图3-4 例3-1图

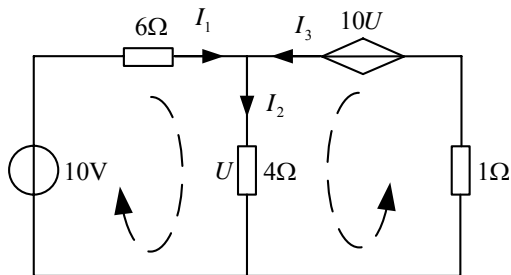


图3-5 例3-2图

用支路电流法求解电路的优点是直接，即方程变量（支路电流）就是需要求解的结果。但由于需列出的独立方程数等于电路的支路数，对支路较多的复杂电路而言，存在方程数目多、计算量大的缺点。因此，设法减少独立方程数，就成为其他网络方程法的出发点。

【思考与分析】

用支路电流法列出如图 3-2 所示电路的方程。

3.2 节点电位法

对于较复杂的电路，为减少独立方程数目，简化电路的分析计算，常采用节点电位法。

3.2.1 节点电位与节点电位法

1. 节点电位

在电路中任意选择某一节点作为参考节点，其余 $(n-1)$ 个独立节点与此参考节点之间的电压称为节点电位。节点电位的参考极性是以参考节点为负，其余独立节点为正。例如在图 3-6 电路中，共有 3 个节点，选节点③作为参考节点（零电位点），用接地符号表示，独立节点①和②的节点电位分别为 U_1 和 U_2 。任一支路电压是其两端节点电位之差，因此只要求出各独立节点的电位，就可求得全部支路电压，从而进一步解出各支路电流。图 3-6 所示电路的各支路电压、电流可表示为

$$\begin{aligned}
 &U_{13} = U_1, \quad U_{23} = U_2, \quad U_{21} = U_2 - U_1 \\
 &\begin{cases} I_1 = \frac{U_{13}}{R_1} = \frac{U_1}{R_1}, \\ I_2 = \frac{U_{21}}{R_2} = \frac{U_2 - U_1}{R_2} \\ I_3 = -\frac{U_{23} - U_{s3}}{R_3} = -\frac{U_2 - U_{s3}}{R_3} \\ I_4 = \frac{U_{23}}{R_4} = \frac{U_2}{R_4} \end{cases} \quad (3-5)
 \end{aligned}$$

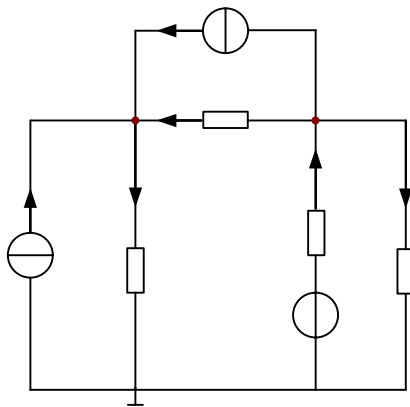


图3-6 节点电位与节点电位法

2. 节点电位法

节点电位法是以电路中各独立节点的电位作为未知量，对独立节点应用 KCL，列出

电流方程, 再利用 KVL 和 VCR 方程, 将各支路电流用节点电位表示, 然后联立方程组解出各独立节点电位, 进而再求出各支路电流的方法。下面以图 3-6 电路为例说明节点电位法。

对独立节点①、②, 应用 KCL, 可得

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_{S1} + I_{S2} = 0 \\ -I_2 + I_3 - I_4 - I_{S2} = 0 \end{cases} \quad (3-6)$$

将式 (3-5) 代入式 (3-6), 经整理可得

$$\begin{cases} (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})U_1 - \frac{1}{R_2}U_2 = I_{S1} + I_{S2} \\ -\frac{1}{R_2}U_1 + (\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4})U_2 = \frac{U_{S3}}{R_3} - I_{S2} \end{cases} \quad (3-7)$$

式 (3-7) 实质为对各个独立节点列出的以节点电位作为未知量的 KCL 方程, 称为节点方程。

分析式 (3-7), 可知:

(1) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ 为与节点①相连的所有支路上电导的总和, 称为节点①的自电导 (恒为正), 用 G_{11} 表示;

(2) $\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$ 为与节点②相连的所有支路上电导的总和, 称为节点②的自电导 (恒为正), 用 G_{22} 表示;

(3) $-\frac{1}{R_2}$ 为节点①、②之间的公共支路上电导的总和, 称为节点①与②的互电导 (恒为负), 用 G_{12} 、 G_{21} 表示 ($G_{12} = G_{21}$);

(4) $I_{S1} + I_{S2}$ 为流入节点①的电流源电流的代数和 (流入为正, 流出为负), 用 I_{S11} 表示;

(5) $\frac{U_{S3}}{R_3} - I_{S2}$ 为将实际电源的电压源模型等效变换为电流源模型后流入节点②的电流源电流的代数和 (流入为正, 流出为负), 用 I_{S22} 表示。

由上例可总结出, 具有两个独立节点的电路, 节点方程的一般形式为

$$\begin{cases} G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = I_{S11} \\ G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = I_{S22} \end{cases} \quad (3-8)$$

式 (3-8) 可以推广到具有 $(n-1)$ 个独立节点的电路。

掌握了以上列写节点方程的规律, 就可以直接根据电路列出节点方程。

应用节点电位法求解电路的步骤可归纳如下。

(1) 任选电路中某一节点为参考节点, 用接地符号表示。标出各独立节点的电位, 其参考方向由独立节点指向参考节点。

(2) 若电路中存在电压源与电阻串联的支路, 则将其等效变换为电流源与电阻的并联。

(3) 按一般公式, 列出 $(n-1)$ 个独立节点的节点方程。注意自电导恒为正, 互电导恒为负; 流入节点的电流源电流取 “+”, 反之取 “-”。

(4) 联立求解节点方程, 求出各节点电位。

(5) 选定支路电压和支路电流的参考方向, 由节点电位计算各支路电压和支路电流。

例 3-3 用节点电位法求如图 3-7 所示电路的各支路电流。

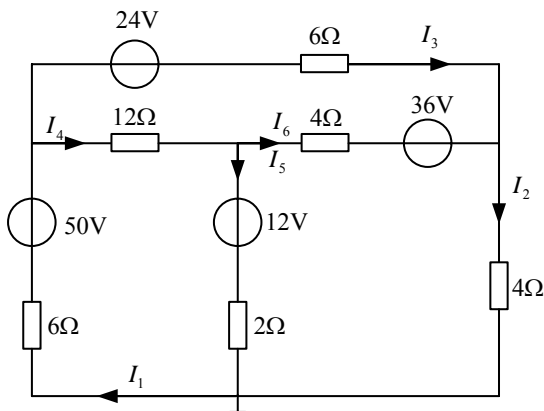


图3-7 例3-3图

解 该电路共有 4 个节点, 选节点④为参考节点。设独立节点①、②、③的节点电位分别为 U_1 、 U_2 和 U_3 。

3 个独立节点的节点方程为

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)U_1 - \frac{1}{12}U_2 - \frac{1}{6}U_3 &= \frac{50}{6} + \frac{24}{6} \\ -\frac{1}{12}U_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right)U_2 - \frac{1}{4}U_3 &= \frac{12}{2} + \frac{36}{4} \\ -\frac{1}{6}U_1 - \frac{1}{4}U_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)U_3 &= -\frac{24}{6} - \frac{36}{4} \end{aligned}$$

整理可得

$$5U_1 - U_2 - 2U_3 = 148$$

$$\begin{aligned}-U_1 + 10U_2 - 3U_3 &= 180 \\ -2U_1 - 3U_2 + 8U_3 &= -156\end{aligned}$$

解得各节点电位为

$$U_1 = 32 \text{ V}, \quad U_2 = 20 \text{ V}, \quad U_3 = -4 \text{ V}$$

求得各支路电流为

$$I_1 = 3 \text{ A}, \quad I_2 = -1 \text{ A}, \quad I_3 = 2 \text{ A}, \quad I_4 = 1 \text{ A}, \quad I_5 = 4 \text{ A}, \quad I_6 = -3 \text{ A}$$

例 3-4 试用节点电位法求如图 3-8 所示电路中的电流 I_x 。

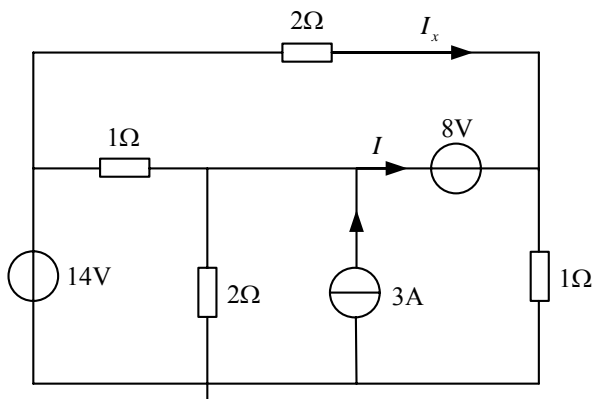


图3-8 例3-4图

解 该电路共有 4 个节点，注意到电路中有两个无伴电压源（无电阻与之串联），用节点电位法分析含有无伴电压源的电路时，为减少方程数，常选无伴电压源的一端为参考节点，现选 14 V 电压源的负极端（即节点④）为参考节点，则独立节点①的电位为已知，无需对其列节点方程。8 V 电压源连接独立节点②和③，该支路的电流并不知道，因此在列写节点方程时必须增设该支路的电流 I 为未知量，参考方向如图。设独立节点①、②、③的节点电位分别为 U_1 、 U_2 和 U_3 。

则

$$U_1 = 14 \text{ V}$$

节点②、③的节点方程为

$$\begin{aligned}-U_1 + (1 + 0.5)U_2 &= 3 - I \\ -0.5U_1 + (1 + 0.5)U_3 &= I\end{aligned}$$

补充②、③节点之间的电压关系 $U_2 - U_3 = 8$

解得

$$U_2 = 12 \text{ V}, \quad U_3 = 4 \text{ V}, \quad I = -1 \text{ A}$$

$$I_x = \frac{U_1 - U_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$$

例 3-5 试用节点电位法求如图 3-9 所示电路中的电流 I_x 。

②

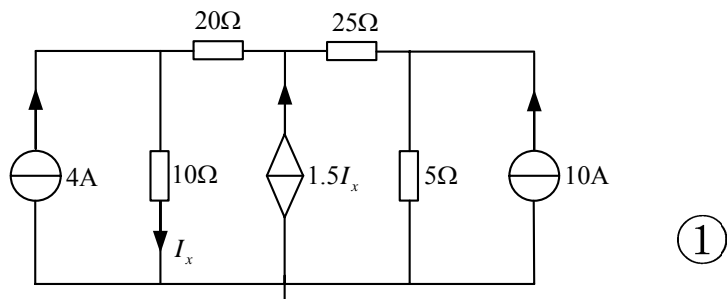


图3-9 例3-5图

解 选节点④为参考节点, 设独立节点①、②、③的节点电位分别为 U_1 、 U_2 和 U_3 。电路中含有一个受控源, 对于含受控源的电路, 在列写节点方程时, 可以先将受控源当作独立源处理, 然后再找到受控源的控制量与节点电位的关系, 并将此关系代入节点方程。

3 个独立节点的节点方程为

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right)U_1 - \frac{1}{20}U_2 &= 4 \\ -\frac{1}{20}U_1 + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{25}\right)U_2 - \frac{1}{25}U_3 &= 1.5I_x \\ -\frac{1}{25}U_2 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{25}\right)U_3 &= 10 \end{aligned}$$

用节点电位表示控制量 I_x : $I_x = \frac{U_1}{10}$, 将其代入节点方程。

解得 $U_1 = 166.67 \text{ V}$, $U_2 = 420 \text{ V}$, $U_3 = 111.67 \text{ V}$, $I_x = 16.67 \text{ A}$ 。

3.2.2 弥尔曼定理

在实际电路中, 经常会遇到虽有多条支路, 但只有两个节点的电路, 如图 3-10 所示电路就属此类。对于此类电路, 用节点电位法进行分析求解最为简便。

选定节点②为参考节点, 则独立节点①的节点方程为

$$(G_1 + G_2 + G_3 + G_4)U_1 = G_1U_{s1} - G_2U_{s2} + G_3U_{s3} + I_{s4}$$

即
$$U_1 = \frac{G_1U_{s1} - G_2U_{s2} + G_3U_{s3} + I_{s4}}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

将其表示成一般形式, 可写成

$$U_1 = \frac{\sum I_{si}}{\sum G_i}$$

其中分子各项应是代数和，其正、负规定同前。上式称为弥尔曼定理，它实质上是具有两个节点电路的节点方程。

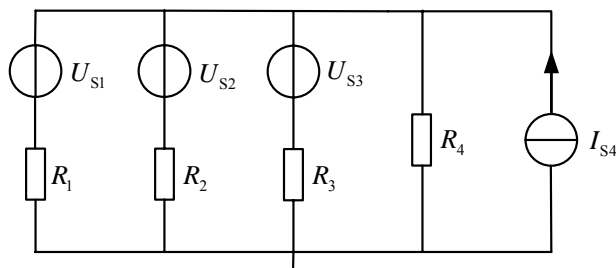


图3-10 弥尔曼定理

【思考与分析】

用节点电位法列出如图 3-4 所示电路的节点方程。

前两节，以电路的两类约束为基本依据得出了支路电流法和节点电位法，它们是电路分析的最基本方法，通用性强，是求解全电路（即求解电路中所有支路电压、电流）的有效方法。以下几节讨论几个电路定理，以进一步理解电路的性质，这些定理不仅对后继课程的学习十分有用，而且也为人们求解电路提供了新的分析方法，在很多情况下，只需求解电路中的某一条支路电压、电流，这些新方法要比一般的分析方法更简便。

3.3 叠加定理

【实训室活动】

目的：练习电路接线，进一步熟悉万用表、直流稳压电源等设备的使用；使学生自行发现规律、总结结论，提高研究能力，加深对叠加定理的理解。

设备与器材：万用表、直流稳压电源、模拟电路实验箱、二极管（2CZ）1 只、电阻器若干。

操作步骤：

（1）测量电阻器阻值，并做好标记；检测导线的通、断；

（2）按图 3-11 连接电路。其中 $R_1 = 100\ \Omega$ ， $R_2 = 100\ \Omega$ ， $R_3 = 150\ \Omega$ ， $U_{S1} = 12\ \text{V}$ ， $U_{S2} = 5\ \text{V}$ ；

(3) 测量图 3-11 中元件的电压和支路电流，将测量数据记录于表 3-1 中；

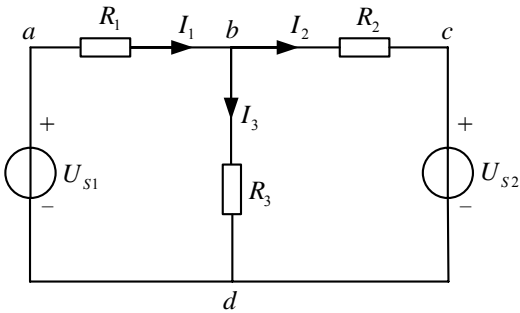


图3-11 叠加定理

(4) 将电源 U_{S2} 去掉，并用导线连接 c 、 d 两点，测量此时电路中元件的电压和支路电流，将测量数据记录于表 3-1 中；

(5) 将电源 U_{S1} 去掉，并用导线连接 a 、 d 两点，测量此时电路中元件的电压和支路电流，将测量数据记录于表 3-1 中；

(6) 在图 3-11 电路中接入 1 只二极管，令其与电阻 R_2 串联且正极（阳极）接 b 点。按表 3-2 的要求测量此时电路中元件的电压和支路电流，将测量数据记录于表 3-2 中；

(7) 分析数据，总结规律。

表 3-1 未接入二极管时的测量数据记录表

项目	U_{S1} (V)	U_{S2} (V)	U_{bd} (V)	I_1 (mA)	I_3 (mA)
两个电源共同作用					
U_{S1} 单独作用时		0			
U_{S2} 单独作用时	0				

表 3-2 接入二极管后的测量数据记录表

项目	U_{S1} (V)	U_{S2} (V)	U_{bd} (V)	I_1 (mA)	I_3 (mA)
两个电源共同作用					
U_{S1} 单独作用时		0			
U_{S2} 单独作用时	0				

观察表 3-1 和表 3-2 中的测量数据，不难发现，对于只由电源和线性电阻构成的测试电路（见图 3-11），两个电源共同作用时的电压、电流都等于电源 U_{S1} 单独作用时和电源 U_{S2} 单独作用时所得到的电压、电流的代数和。但是，当在电路中接入一个非线性器件，例如给电阻器 R_2 串联一只二极管时，上述结论不成立。其实，把观察到的现象用科学、严谨的语言表述出来，得到的就是电路理论中最基本的定理——叠加定理。

叠加定理是线性电路的一个基本定理。由线性元件及独立电源组成的电路为线性电路。独立电源是非线性二端元件（其伏安特性曲线不是过原点的直线），但它们是电路的输入，对电路起着激励的作用。在电路分析中，为方便起见，通常将信号源或电源输出的电压或电流称为激励，由激励而在电路中产生的电压和电流称为响应。尽管电源是非线性的，但只要电路的其他部分是由线性元件组成，响应与激励之间将存在着线性关系。

叠加定理可表述为：在线性电路中，当有两个或两个以上独立电源作用时，任一支路中的电压或电流等于电路中各个独立源分别单独作用时，在该支路产生的电压或电流的代数和。

当某个独立源单独作用时，其他独立源应置零。所谓将独立源置零，就是令它们的参数等于零值，即将不作用的电压源短路，电流源开路。

叠加定理的公式为：

$$U = U' + U'' + U''' + \cdots \quad (3-9)$$

$$I = I' + I'' + I''' + \cdots \quad (3-10)$$

式(3-9)和式(3-10)中的 U 、 I 为电路中所有独立源共同作用时，在某支路产生的电压、电流，称为总响应； U' 、 I' ， U'' 、 I'' ， \cdots 为各个独立源分别单独作用时，在该支路产生的电压、电流，称为分响应。

例 3-6 用叠加定理求图 3-12 (a) 所示电路中的电流 I 。

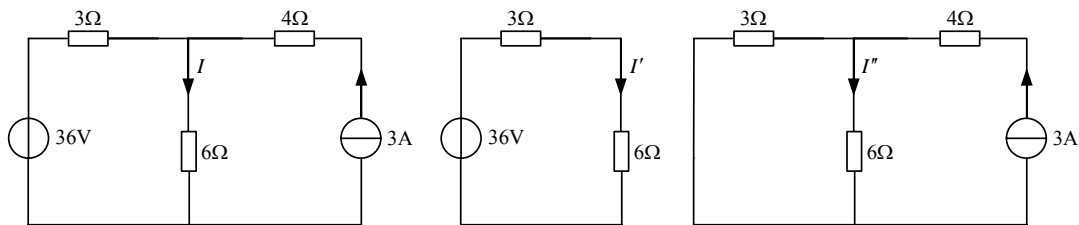


图3-12 例3-6图

解 (1) 当电压源单独作用时，电路如图 3-12 (b) 所示，有

$$I' = \frac{36}{3+6} = 4 \text{ A}$$

(2) 当电流源单独作用时，电路如图 3-12 (c) 所示，由分流公式，得

$$I'' = 3 \times \frac{3}{3+6} = 1 \text{ A}$$

故总响应为

$$I = I' + I'' = 5 \text{ A}$$

例 3-7 试用叠加定理求图 3-13 (a) 所示电路中的电流 I_x 。

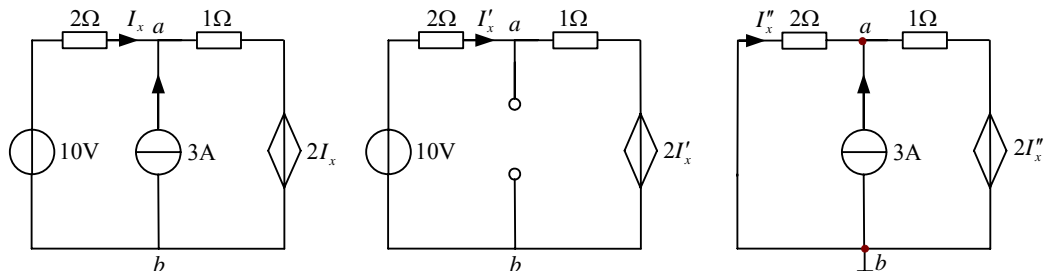


图3-13 例3-7图

解 对含受控源的电路运用叠加定理时，必须注意：受控源的电压或电流不是电路的输入，不能单独作用，受控源和电阻一样，应始终保留在各分电路中。

(1) 当电压源单独作用时，电路如图 3-13 (b) 所示，注意此时受控源的电压为 $2I'_x$ 。

根据 KVL，有 $-10 + 3I'_x + 2I'_x = 0$

解得

$$I'_x = 2\text{A}$$

(2) 当电流源单独作用时，电路如图 3-13 (c) 所示，注意此时受控源的电压为 $2I''_x$ 。

选择节点 b 为参考点，根据弥尔曼定理，有

$$U_a = \frac{2I''_x + 3}{\frac{1}{1} + 1} = \frac{4}{3}I''_x + 2$$

又由欧姆定律

$$U_a = -2I''_x$$

解得

$$I''_x = -0.6\text{A}$$

故总响应为

$$I_x = I'_x + I''_x = 1.4\text{ (A)}$$

应用叠加定理时需注意以下几个问题。

(1) 叠加定理只适用于线性电路，不适用于非线性电路。

(2) 当某个独立源单独作用时，其他独立源都应置零。受控源应作为一般元件保留在各分电路中，不能做零值处理，其值应随每一个独立源单独作用时控制量的变化而变化。

(3) 各分响应的参考方向可以取为与总响应相同或不同。叠加时，若分响应与总响应的参考方向相同，则分响应的符号取“+”；反之，分响应的符号应取“-”。

(4) 原电路中某一元件的功率不等于各独立源单独作用时，在该元件上所产生的功率的叠加。例如图 3-11 电路中， R_3 消耗的功率为

$$P = I_3^2 R_3 = (I'_3 + I''_3)^2 R_3 \neq (I'_3)^2 R_3 + (I''_3)^2 R_3$$

(5) 运用叠加定理时也可以把独立源分组求解, 每个分电路中的独立源个数可能不止一个, 选择何种方式分组取决于对电路计算是否简便。

【思考与分析】

图 3-12 (a) 所示电路, 当电压源的电压减小为 18V, 同时电流源的电流增大为 5A 时, 电流 I 变为多少?

3.4 等效电源定理

在分析计算一个复杂的线性电路时, 有时只需计算某一支路的电流或电压, 如果用前面介绍的支路电流法、节点电位法等一般分析方法来求解, 必然要引出其他一些不必要的电流或电压来, 从而增大计算量; 如果用叠加定理来求解, 在电源较多的情况下, 求解响应的次数增多, 运用起来也不是很方便。实际上, 可以把这条要分析的支路单独抽出来, 则电路的其余部分为一个线性有源二端网络 (含有电源并具有两个端钮的网络, 又称为有源单口网络)。不论此有源二端网络的复杂程度如何, 它对所要计算的这条支路而言, 仅起到一个电源的作用。因此, 这个有源二端网络一定可以化简为一个等效电源, 并且经过等效变换后, 待求支路中的电流和电压不会改变。若求出了这个等效电源, 待求支路中的电流或电压就可以很方便地求出了。如何求这个等效电源, 这就是等效电源定理的内容。

等效电源定理有两个: 戴维南定理和诺顿定理。

3.4.1 戴维南定理

【实训室活动】

目的: 熟练掌握万用表、直流稳压电源等设备的使用; 培养学生独立思考的能力, 使学生通过本次活动自己总结结论, 得出定理内容, 加深对戴维南定理的理解。

设备与器材: 万用表、直流稳压电源、模拟电路实验箱、电阻器若干。

操作步骤:

(1) 测量电阻器阻值, 并做好标记; 检测导线的通、断;

(2) 按图 3-14 连接电路, 其中 $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 150 \Omega$, $U_{S1} = 12 \text{ V}$, $U_{S2} = 5 \text{ V}$;

(3) 测量图 3-14 电路中 R_L 分别为 100Ω 、 200Ω 、 470Ω 、 $1 \text{ k}\Omega$ 时, 负载 R_L 两端的电压 U , 将测量数据记录于表 3-3 中;

(4) 断开负载 R_L , 测量此时线性有源二端网络 N 端口的开路电压 U_{OC} , 如图 3-15 所

示, $U_{OC} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$;

(5) 将图 3-15 中的电源 U_{S1} 、 U_{S2} 去掉并用导线代替, 如图 3-16 所示, 测量此无源二端网络的等效电阻 R_o , $R_o = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$;

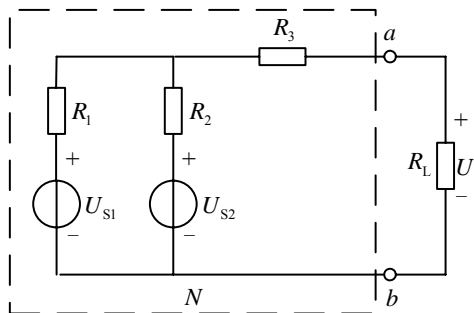


图3-14 戴维南定理实验电路

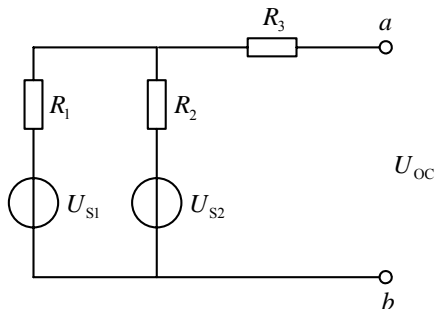


图3-15 测量 U_{OC} 电路

(6) 按图 3-17 连接电路, 并测量 R_L 分别为 100Ω 、 200Ω 、 470Ω 、 $1 \text{ k}\Omega$ 时, 负载 R_L 两端的电压 U , 将测量数据记录于表 3-3 中;

表 3-3 测量图 3-14 和图 3-17 电路中的电压 U

$R_L (\Omega)$	100	200	470	1 000
测量电压 U				
由图 3-14 电路测量的电压 U (V)				
由图 3-17 电路测量的电压 U (V)				

(7) 分析测量数据, 总结结论;

(8) 用学过的等效变换法对图 3-14 电路中的线性有源二端网络 N 进行等效变换, 并将得到的最简电路与图 3-17 电路中的网络 N' 进行比较, 验证结论的正确性。

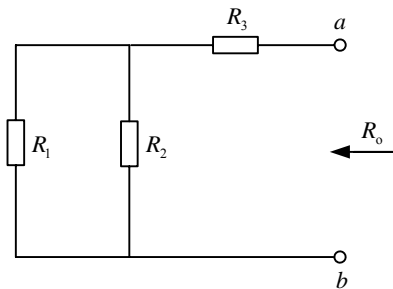


图3-16 测量 R_o 电路

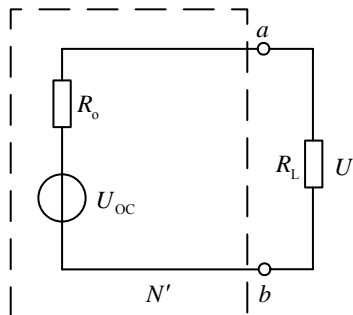


图3-17 等效电路

观察表 3-3 中的测量数据,可以发现,对于相同的负载 R_L 来说,将其接到网络 N 的端口和接到网络 N' 的端口,负载上得到的电压和电流相等。也就是说,网络 N 与网络 N' 端口的伏安关系相同。根据“等效”的定义,网络 N 与网络 N' 对外电路来说是等效的。通过测量知,网络 N' 中电压源的电压就等于网络 N 端口的开路电压 U_{oc} , 串联电阻 R_o 等于将网络 N 中所有独立源都置零后,所得无源网络的等效电阻。此外,用所学的等效变换法对网络 N 进行等效变换,得到的最简网络与网络 N' 相同,这就进一步证明了上述结论是正确的。其实,把通过本次实训活动得出的上述结论用科学、严谨的语言表述出来,就是电路理论中一个非常重要的定理——戴维南定理。

戴维南定理可表述为:任何一个线性有源二端网络 N , 对外电路而言,都可以等效为一个电压源和一个电阻的串联组合。其中电压源的电压等于线性有源二端网络 N 端口的开路电压 U_{oc} , 串联电阻的阻值等于将有源二端网络 N 中所有独立源都置零之后,所得无源网络 N_0 的等效电阻 R_o 。

戴维南定理可用图 3-18 描述如下。

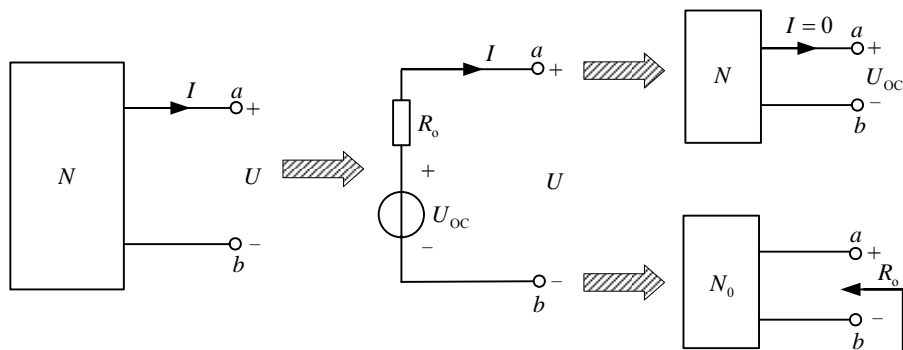


图3-18 戴维南定理

图中 U_{oc} 称为开路电压, R_o 称为戴维南等效电阻。电压源 U_{oc} 和电阻 R_o 的串联组合,称为戴维南等效电路。

应用戴维南定理,可将复杂的线性有源二端网络用简单的戴维南等效电路代替,使分析外电路中某电流、电压的工作状态变得简单明了。

应用戴维南定理求解某支路电流(或电压)的步骤及注意事项。

1. 步骤

(1) 将待求支路从电路中断开。

(2) 设定余下的线性有源二端网络端口开路电压 U_{oc} 的参考方向,并求出 U_{oc} 。

(3) 将线性有源二端网络中所有的独立源都置零(电压源置零用短路代替,电流源置零用开路代替),求出得到的无源网络的等效电阻 R_o 。

(4) 画出原线性有源二端网络的戴维南等效电路,并将其与待求支路连接,组成简单

的单回路电路，求出未知量。

可将以上步骤归纳为“断”、“算”、“接”三个字。

2. 注意事项

(1) 戴维南定理只适用于将线性有源二端网络进行等效，不适用于非线性网络。

(2) 戴维南等效电路中电压源电压 U_{oc} 的参考方向与数值，要与线性有源二端网络端口开路电压的参考方向与数值保持一致。

(3) 戴维南等效电路中电阻 R_o 是指将原有源二端网络内的所有独立源都置零后，从其端口看入的等效电阻，受控源不能置零，应保留在无源网络中。

(4) 戴维南等效电路只对外电路等效，对内电路不等效。

例 3-8 试用戴维南定理求图 3-19 (a) 电路中的电流 I 。

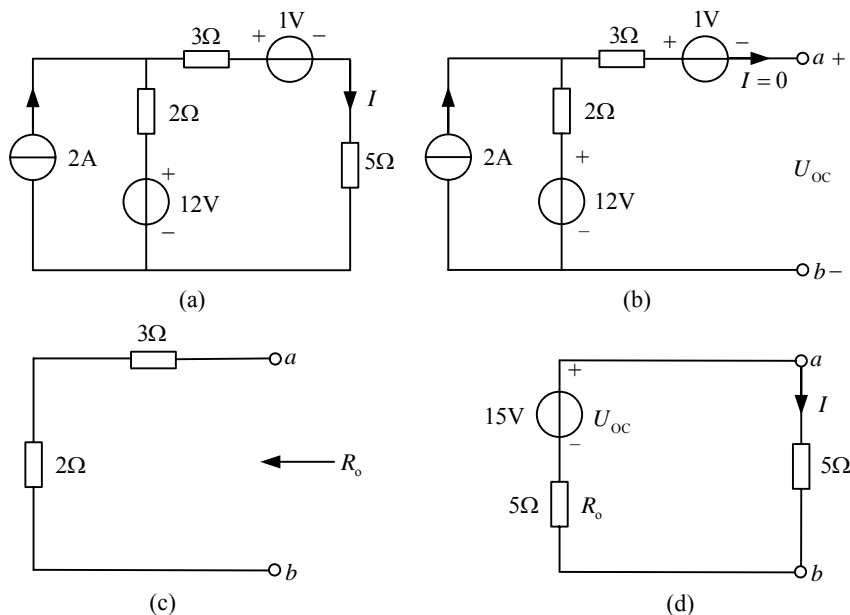


图3-19 例3-8图

解 按戴维南定理求解某支路电流（或电压）的步骤求解。

(1) 将 5Ω 电阻从电路中断开。

(2) 设线性有源二端网络端口开路电压 U_{oc} 的参考方向如图 3-19 (b) 所示，求 U_{oc} ：注意此时有源二端网络端口的电流 $I = 0$ ，则

$$U_{oc} = -1 + 2 \times 2 + 12 = 15 \text{ V}$$

(3) 求 R_o ：将原有源二端网络中所有的独立源都置零，得到如图 3-19 (c) 所示的无源网络，则

$$R_o = 3 + 2 = 5 \Omega$$

(4) 原电路的戴维南等效电路如图 3-19 (d) 所示, 求电流 I :

$$I = \frac{15}{5+5} = 1.5 \text{ A}$$

例 3-9 电路如图 3-20 (a) 所示, 求电压 U 。

解 与支路电流法、节点电位法、叠加定理相比较, 对本例而言, 用戴维南定理求解思路简单且计算量较小。

(1) 将 10Ω 电阻和 20V 电压源串联支路作为待求支路从电路中断开。

(2) 设线性有源二端网络端口开路电压 U_{oc} 的参考方向如图 3-20 (b) 所示, 求 U_{oc} : 选节点 c 为参考节点, 根据弥尔曼定理, 节点 a 的电位为

$$U_a = \frac{\frac{15}{20} + \frac{5}{20} + 2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}} = \frac{3}{0.1} = 30 \text{ V}$$

根据 KVL, 得 $U_{oc} = U_{bc} = U_a - U_{ab} = 30 + 2 \times 10 = 50 \text{ V}$

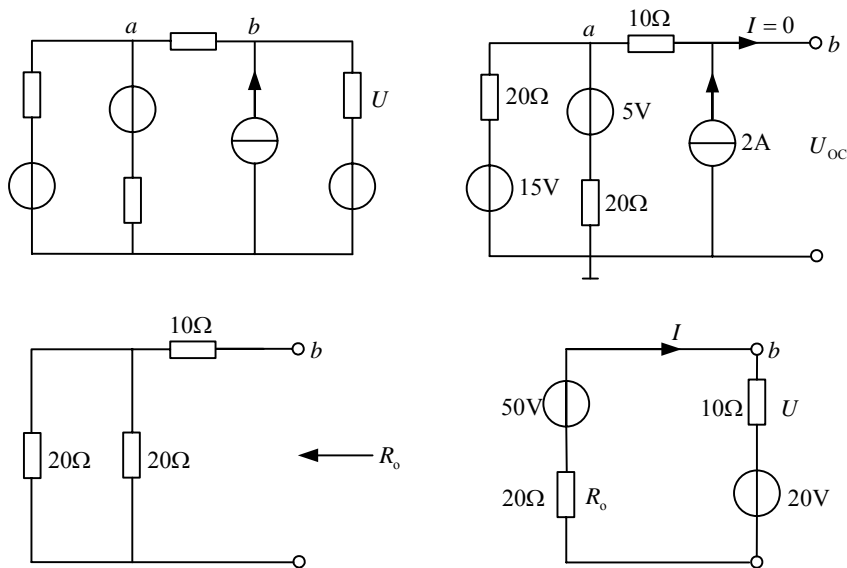


图3-20 例3-9图

(3) 求 R_o : 将原有源二端网络中所有的独立源都置零, 得到如图 3-20 (c) 所示的无源网络, 则

$$R_o = 20 // 20 + 10 = 20 \Omega + 10\Omega$$

+

+

20Ω

5V

10Ω

(4) 原电路的戴维南等效电路如图 3-20 (d) 所示, 求电压 U :

根据 KVL, 有 $(10+20)I+20-50=0$

解得 $I=1\text{ A}$

则 $U=10I=10\text{ V}$

显然, 用戴维南定理求解电路的关键是如何正确地求出 U_{oc} 和 R_0 。

1. 求 U_{oc} 的方法: 前面讲过的任何方法, 如等效变换法、支路电流法、节点电位法、叠加定理等都可以选用, 至于选择何种方法简便, 需视具体电路形式而定。

2. 求 R_0 的方法: 若线性有源二端网络 N 中无受控源, 可采用化简法; 若线性有源二端网络 N 中含有受控源, 可采用开路—短路法或外加电源法。

(1) 化简法。将有源二端网络 N 中所有的独立源都置零后, 得到的无源网络 N_0 为一纯电阻网络, 利用电阻的串、并联和 $Y-\Delta$ 等效变换等方法即可求出 R_0 。

(2) 开路—短路法。即在求得有源二端网络 N 端口的开路电压 U_{oc} 后, 再将网络 N 的端口短路, 如图 3-21 所示, 并取短路电流 I_{sc} 的参考方向与 U_{oc} 一致, 求出 I_{sc} , 则戴维南等效电阻为 $R_0 = \frac{U_{\text{oc}}}{I_{\text{sc}}}$ 。

(3) 外加电源法。将有源二端网络 N 中所有的独立源都置零, 保留受控源, 得到一无源网络 N_0 , 然后在无源网络 N_0 的端口外加一个电压为 U 的电压源, 如图 3-22 所示, 由于该电压源的作用在网络 N_0 的端口上产生的电流为 I , 则戴维南等效电阻为 $R_0 = \frac{U}{I}$ 。需注意: 端钮上的 U 和 I 为非关联参考方向。

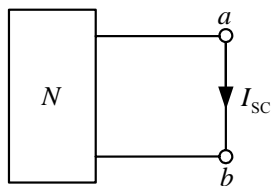


图3-21 求短路电流电路

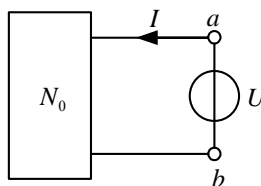


图3-22 外加电源法求 R_0

例 3-10 求图 3-23 (a) 所示电路的戴维南等效电路。

解 (1) 求 U_{oc} : 将受控电流源与电阻的并联等效变换成受控电压源与电阻的串联, 如图 3-23 (b) 所示。

因为

$$I_1 = 0$$

则

$$U_{\text{oc}} = -4U_{\text{oc}} + \frac{2}{2+1} \times 6$$

$$5U_{\text{oc}} = 4$$

所以

$$U_{oc} = \frac{4}{5} \text{ V}$$

(2) 求 R_o : (方法一) 采用开路—短路法。将图 3-23(b) 的 a 、 b 端钮短路, 此时 $U_{oc} = 0$, 故受控电压源的电压 $4U_{oc} = 0$, 则受控电压源可用短路代替, 得到如图 3-23(d) 所示电路。设短路电流为 I_{sc} , 由图可知

$$I_{sc} = \frac{6}{1+2//2} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{1+1} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ A}$$

所以

$$R_o = \frac{U_{oc}}{I_{sc}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{15} \Omega$$

(方法二) 采用外加电源法。将图 3-23(b) 中的 6 V 电压源短路, 保留受控源, 并在 a 、 b 端钮间外加一电压为 U 的电压源, 设电流为 I , 如图 3-23(c) 所示。

根据 KVL, 有

$$-4U + (2+1//2)I - U = 0$$

整理, 得

$$U = \frac{8}{15} I$$

所以

$$R_o = \frac{U}{I} = \frac{8}{15} \Omega$$

(3) 画出戴维南等效电路, 如图 3-23(e) 所示。

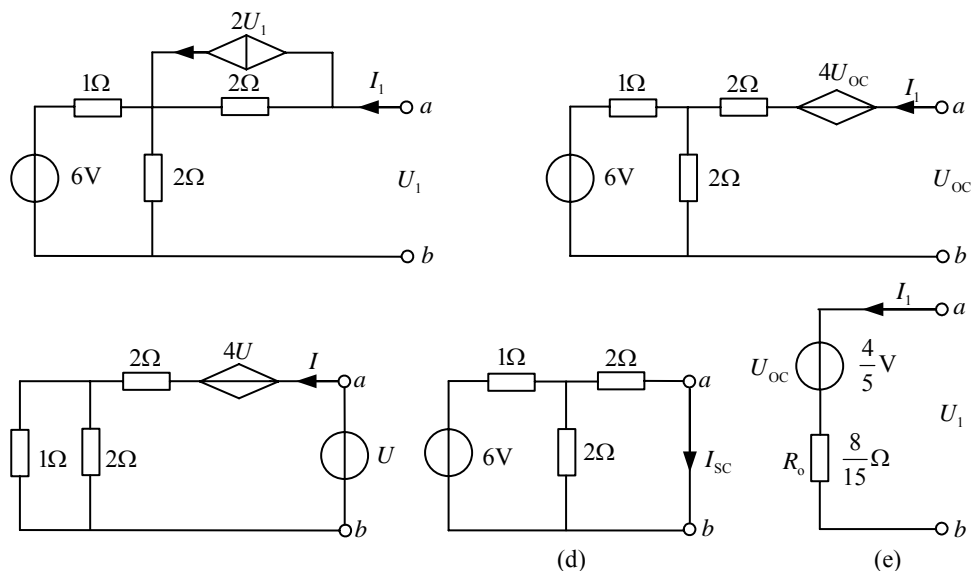


图3-23 例3-10图

3.4.2 诺顿定理

诺顿定理可表述为：任何一个线性有源二端网络 N ，对外电路而言，都可以等效为一个电流源和一个电阻的并联组合。其中电流源的电流等于线性有源二端网络 N 端口的短路电流 I_{sc} ，并联电阻的阻值等于将有源二端网络 N 中所有独立源都置零之后，所得无源网络 N_0 的等效电阻 R_0 。这一电流源 I_{sc} 和电阻 R_0 的并联组合，称为诺顿等效电路。

诺顿定理可用图 3-24 描述如下：

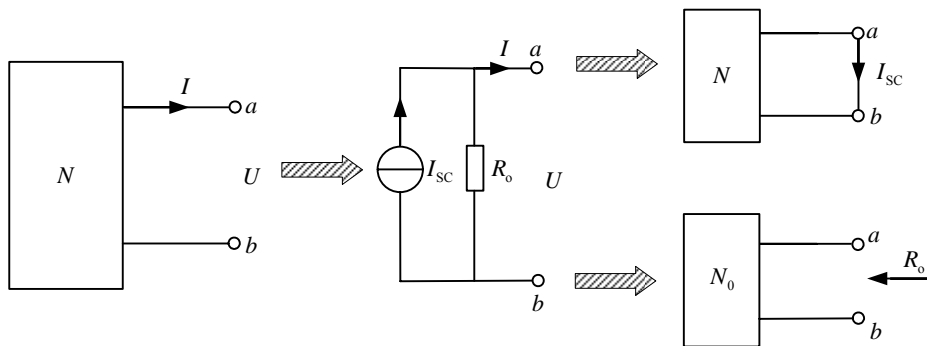


图3-24 诺顿定理

根据实际电源两种模型的等效变换，由线性有源二端网络的戴维南等效电路可以很方便地求得该网络的诺顿等效电路。

例 3-11 试用诺顿定理再求图 3-19 (a) 电路中的电流 I 。

解 (1) 将 5Ω 电阻从电路中断开，并将线性有源二端网络端口短路。

(2) 设短路电流 I_{sc} 的参考方向如图 3-25 (a) 所示，求 I_{sc} 。

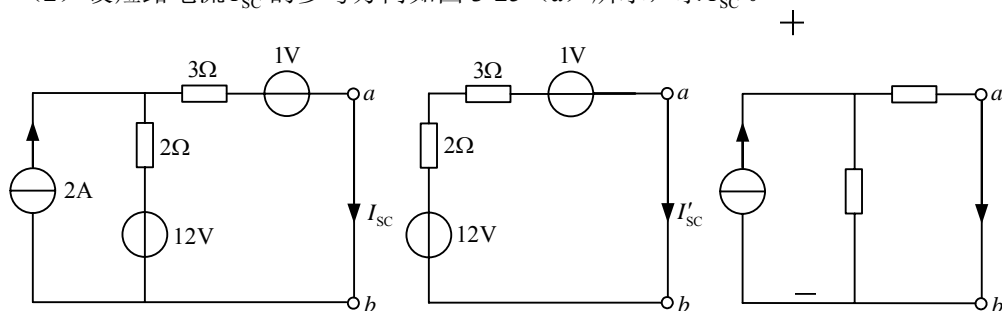


图3-25 例3-11求短路电流 I_{sc} 图

将 $12V$ 和 $1V$ 电压源看作一组，将 $2A$ 电流源看作一组。根据叠加定理，

① 当两个电压源单独作用时，电路如图 3-25 (b) 所示，由 KVL 得分响应为

$$I'_{\text{sc}} = \frac{12-1}{3+2} = \frac{11}{5} \text{ A}$$

② 当电流源单独作用时, 电路如图 3-25 (c) 所示, 由分流公式得分响应为

$$I''_{\text{sc}} = \frac{2}{2+3} \times 2 = \frac{4}{5} \text{ A}$$

则总响应为

$$I_{\text{sc}} = I'_{\text{sc}} + I''_{\text{sc}} = \frac{11}{5} + \frac{4}{5} = 3 \text{ A}$$

(3) 求 R_0 : 将图 3-19 (b) 中所有的独立源都置零, 得到如图 3-19 (c) 所示的无源网络, 则

$$R_0 = 3 + 2 = 5 \Omega$$

(4) 原电路的诺顿等效电路如图 3-26 所示, 求电流 I :
由分流公式, 得

$$I = 3 \times \frac{1}{2} = 1.5 \text{ A}$$

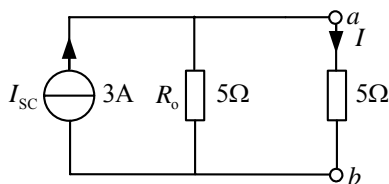


图3-26 例3-11诺顿等效电路

此结果与例 3-8 用戴维南定理求解的结果相同。

【思考与分析】

已知一个线性有源二端网络如图 3-27 所示, 试求出其戴维南等效电路。

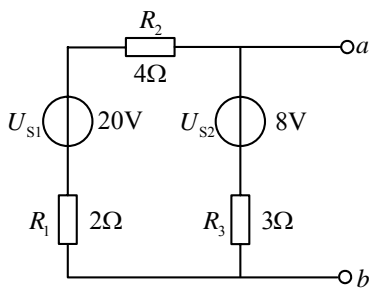


图3-27 思考与分析题1图

3.5 最大功率传输定理

本节介绍戴维南定理的一个重要应用。在测量、电子和信息工程的电子设备设计中，常常遇到负载如何从电路获得最大功率的问题。在给定了有源二端网络的情况下，负载不同，有源二端网络传递给负载的功率也不同。负载为何值时，能得到最大功率？获得的最大功率又为多大？这类问题可以抽象地用图 3-28 所示的电路模型来分析。

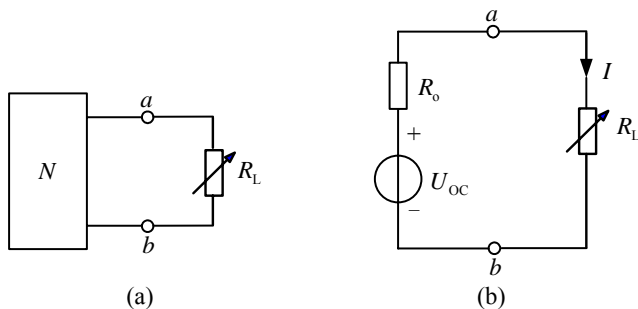


图3-28 最大功率传输定理

图 3-28 (a) 中，网络 N 表示一给定的线性有源二端网络，它供给负载能量。对负载 R_L 而言，网络 N 可用戴维南等效电路来代替，如图 3-28 (b) 所示，则负载 R_L 获得（吸收）的功率可表示为

$$P_L = I^2 R_L = \frac{U_{OC}^2 R_L}{(R_o + R_L)^2} \quad (3-11)$$

式 (3-11) 中 U_{OC} 、 R_o 一定， R_L 可变。

根据数学中求极值的方法可知，欲求 P_L 的最大值，应使 $\frac{dP_L}{dR_L} = 0$ ，即

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{U_{OC}^2 (R_o + R_L)^2 - 2U_{OC}^2 R_L (R_o + R_L)}{(R_o + R_L)^4} = 0$$

从而有

$$(R_o + R_L)^2 - 2R_L (R_o + R_L) = 0$$

由此可求得 P_L 为极大值或极小值的条件是

$$R_L = R_o \quad (3-12)$$

由于

$$\left. \frac{d^2 P_L}{dR_L^2} = -\frac{U_{OC}^2}{8R_o^3} \right|_{R_o > 0} < 0$$

由此可知, 当 $R_o > 0$ 且 $R_L = R_o$ 时, 负载 R_L 可从有源二端网络获得最大功率。

最大功率传输定理可表述为: 线性有源二端网络 N 传输给负载 R_L 最大功率的条件是: 负载 R_L 应与有源二端网络 N 的戴维南 (诺顿) 等效电阻 R_o 相等。满足 $R_L = R_o$ 条件时, 称为最大功率匹配, 此时负载 R_L 获得的最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_o}$$

若用诺顿等效电路, 则可表示为

$$P_{\max} = \frac{1}{4} R_o I_{SC}^2$$

需要注意的是: 当满足最大功率匹配条件 ($R_L = R_o > 0$) 时, 有源二端网络的输出电阻 R_o 吸收的功率与负载 R_L 吸收的功率相等, 对电压源 U_{OC} 而言, 功率传输效率只有 $\eta = 50\%$ 。对有源二端网络 N 中的独立源而言, 效率可能更低。在电子技术中, 由于信号比较微弱, 通常是力求使负载获得最大的信号功率, 而传输效率并不是最主要的问题, 因此往往要求电路处于匹配的工作状态。但在电力系统中, 要求尽可能提高效率, 以便更充分地利用能源, 因此应尽量避免匹配。

例 3-12 电路如图 3-29 (a) 所示。试求: (1) R_L 为何值时获得最大功率; (2) R_L 获得的最大功率; (3) 360 V 电压源的功率传输效率。

解 (1) 断开负载 R_L , 求线性有源二端网络 N_1 的戴维南等效电路:

$$U_{OC} = \frac{150}{150 + 30} \times 360 = 300 \text{ V}$$

$$R_o = 30 // 150 = \frac{30 \times 150}{30 + 150} = 25 \Omega$$

如图 3-29 (b) 所示, 因此当 $R_L = R_o = 25 \Omega$ 时, R_L 可获得最大功率。

(2) R_L 获得的最大功率为:

$$P_{\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_o} = \frac{300^2}{4 \times 25} = 900 \text{ W}$$

(3) 当 $R_L = 25 \Omega$ 时, 由戴维南等效电路得其两端电压为

$$\frac{25}{25 + 25} \times 300 = 150 \text{ V}$$

由图 3-29 (a) 可知, 流过 360 V 电压源的电流为

$$I = \frac{360 - 150}{30} = 7 \text{ A}$$

则 360 V 电压源产生的功率为

$$P = 360 \times 7 = 2\,520\text{ W}$$

因此, 360 V 电压源的功率传输效率为

$$\eta = \frac{900}{2\,520} \times 100\% = 35.71\%$$

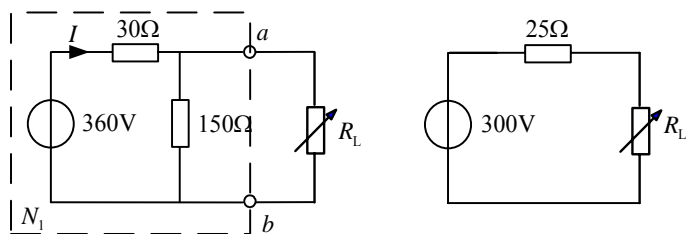


图3-29 例3-12图

【思考与分析】

有一个 $100\,\Omega$ 的负载要想一个内阻为 $50\,\Omega$ 的电源获取最大功率, 采取再用一个 $100\,\Omega$ 的电阻与该负载并联的办法是否可以?

+

3.6 本章小结

1. 支路电流法是以电路中各条支路的电流作为未知量, 直接应用 KCL 和 KVL 列方程组, 解出各未知电流的方法。对于具有 n 个节点、 b 条支路的电路, 其 KCL 独立方程数为 $(n-1)$ 个, KVL 独立方程数为 $b-(n-1)$ 个。支路电流法是电路分析中最基本的方法, 适用于平面与非平面电路。

2. 节点电位法适用于平面与非平面电路, 其方法是:

(a)

(1) 以电路中各独立节点的电位为未知量, 列出节点方程 (实质为 KCL 方程);

(2) 求解节点方程得到节点电位, 再利用 KVL 和 VCR 方程求出各支路电压、电流。

分析和计算少节点、多支路的电路时, 适合用此方法。

3. 叠加定理只适用于分析求解线性电路。在线性电路中, 当有多个独立源共同作用时, 任一支路中的电压或电流等于电路中各个独立源分别单独作用时, 在该支路产生的电压或电流的代数和。当某个独立源单独作用时, 其他独立源应置零, 即将不作用的电压源短路, 电流源开路。

4. 等效电源定理包括两个：戴维南定理和诺顿定理。

戴维南定理指出：任何一个线性有源二端网络 N ，对外电路而言，都可以等效为一个电压源和一个电阻的串联组合。其中电压源的电压等于线性有源二端网络 N 端口的开路电压 U_{OC} ，串联电阻的阻值等于将有源二端网络 N 中所有独立源都置零之后，所得无源网络 N_0 的等效电阻 R_0 。这一电压源 U_{OC} 和电阻 R_0 的串联组合，称为戴维南等效电路。

诺顿定理指出：任何一个线性有源二端网络 N ，对外电路而言，都可以等效为一个电流源和一个电阻的并联组合。其中电流源的电流等于线性有源二端网络 N 端口的短路电流 I_{SC} ，并联电阻的阻值等于将有源二端网络 N 中所有独立源都置零之后，所得无源网络 N_0 的等效电阻 R_0 。这一电流源 I_{SC} 和电阻 R_0 的并联组合，称为诺顿等效电路。

戴维南定理和诺顿定理只适用于将线性有源二端网络进行等效，不适用于非线性网络。应用戴维南定理和诺顿定理，可将任何复杂的线性有源二端网络用简单的戴维南—诺顿等效电路代替，使分析计算外电路中的某电流、电压变得简便。

5. 最大功率传输定理指出：线性有源二端网络 N 传输给负载 R_L 最大功率的条件是：负载 R_L 应与有源二端网络 N 的戴维南（诺顿）等效电阻 R_0 相等。满足 $R_L = R_0$ 条件时，称为最大功率匹配，此时负载 R_L 获得的最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{OC}^2}{4R_0} = \frac{1}{4} R_0 I_{SC}^2$$

3.7 自测与练习

3-1 如图 3-30 所示电路，电压源 U_{S1} 提供的功率为_____，电压源 U_{S2} 提供的功率为_____。

3-2 如图 3-31 所示电路，电压源单独作用时电流 $I =$ _____ A，电流源单独作用时电流 $I =$ _____ A，两个电源共同作用时电流 $I =$ _____ A。当电压源的电压增加 3 V，同时电流源的电流增加 6 A 时，电流 $I =$ _____ A。

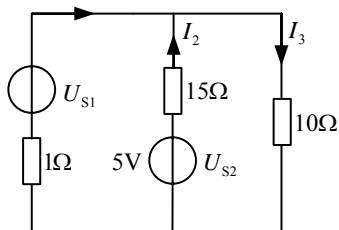


图3-30 自测与练习3-1图

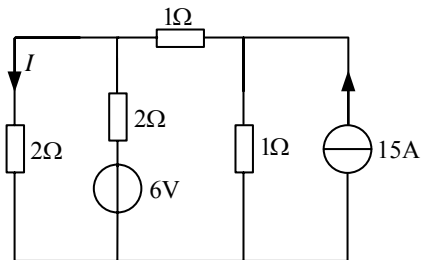


图3-31 自测与练习3-2图

3-3 线性有源二端网络,可等效为一个_____和_____串联的简单电路,也可等效为一个_____和_____并联的简单电路。

3-4 戴维南等效电路中电压源的电压 U_{oc} 等于有源二端网络端口处的_____ (短路、开路) 电压。

3-5 线性有源二端网络外接负载 R_L , 当负载 R_L 满足_____条件时, 负载获得的功率最大为_____。

3-6 已知某线性有源二端网络的开路电压为 20 V , 当它外接电压为 50 V 的电压源(参考方向与开路电压方向一致)时, 输入电流为 5 A 。由此可知该有源二端网络的诺顿等效电路的参数 $I_{sc} = \underline{\hspace{2cm}}\text{ A}$, $R_o = \underline{\hspace{2cm}}\Omega$ 。它对外可提供的最大功率 $P_{\max} = \underline{\hspace{2cm}}\text{ W}$ 。

3-7 在图 3-32 所示电路中, 已知 $R_1 = 1\text{ k}\Omega$, $R_2 = 2\text{ k}\Omega$, $R_3 = 3\text{ k}\Omega$, $R_4 = 6\text{ k}\Omega$, $I_4 = 2\text{ mA}$, 各电源值均不知道。当 U_{S1} 增加 10 V 时, 通过 R_4 的电流 I_4 变为 ()。

(a) 0.83 mA

(b) 2.83 mA

(c) 2.5 mA

(d) 5 mA

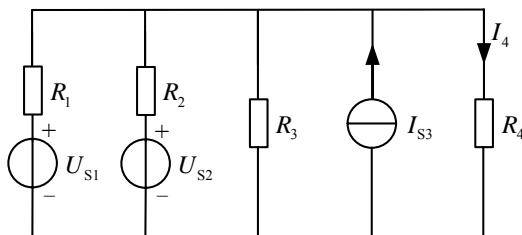


图3-32 自测与练习3-7图

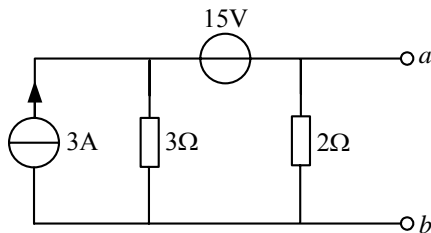


图3-33 自测与练习3-8图

3-8 线性有源二端网络如图 3-33 所示, 其戴维南等效参数 U_{oc} 等于 (), R_o 等于 ()。

(a) 15 V , 2Ω

(b) 5.4 V , 1.2Ω

(c) 9.6 V , 1.2Ω

(d) 9.6 V , 1.5Ω

3-9 图 3-34 所示电路, 负载电阻 R_L 为 () 时可获得最大功率, 该最大功率 P_{\max} 为 ()。

(a) 2Ω , 32 W

(b) 2Ω , 16 W

(c) 4Ω , 32 W

(d) 4Ω , 16 W

3-10 如图 3-35 所示电路, 试分别用支路电流法和节点电位法求电压 U 。

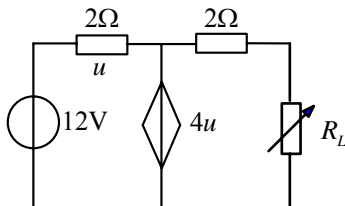


图3-34 自测与练习3-9图

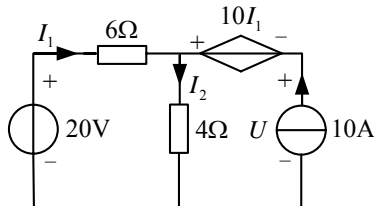


图3-35 自测与练习3-10图

3-11 如图 3-36 所示电路, 试用节点电位法求电压 U_1 、 U_2 。

3-12 求图 3-37 所示电路中 R_L 吸收的功率。

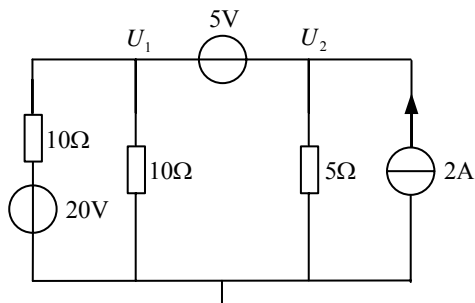


图3-36 自测与练习3-11图

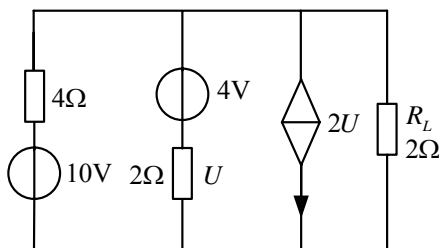


图3-37 自测与练习3-12图

3-13 如图 3-38 所示电路, 用叠加定理求电流 I 。

3-14 如图 3-39 所示电路, 已知电阻均为 1Ω , $U_s = 52V$, 求各支路电流。

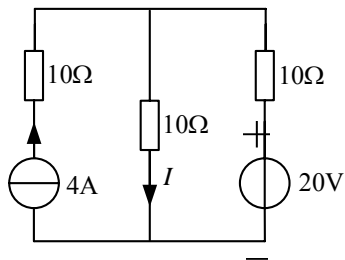


图3-38 自测与练习3-13图

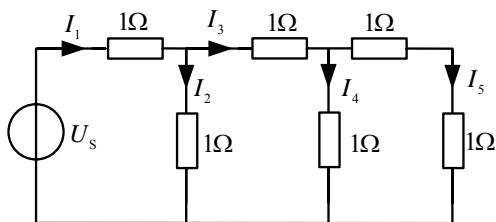


图3-39 自测与练习3-14图

3-15 如图 3-40 所示电路, 试分别用戴维南定理和诺顿定理求电压 U_0 。

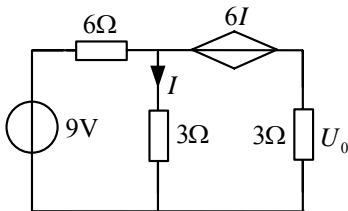


图3-40 自测与练习3-15图

第4章 正弦交流电路

前面已介绍了直流电路，直流电路中电压和电流的大小和方向都不随时间变化，但实际生产中广泛应用的是一种大小和方向随时间成周期性变化的电压或电流，叫作交流电。

为了形象地说明交流电，把它沿时间坐标展开，即横轴代表时间，纵轴代表交流电电压或电流的大小，如图4-1所示。其中图(a)所示交流电，其大小和方向随时间按“锯齿”形变化，称锯齿形交流电；图(b)所示交流电，其大小和方向随时间按“矩形”变化，称矩形交流电；图(c)所示交流电，其大小和方向随时间按正弦函数变化，称正弦交流电。

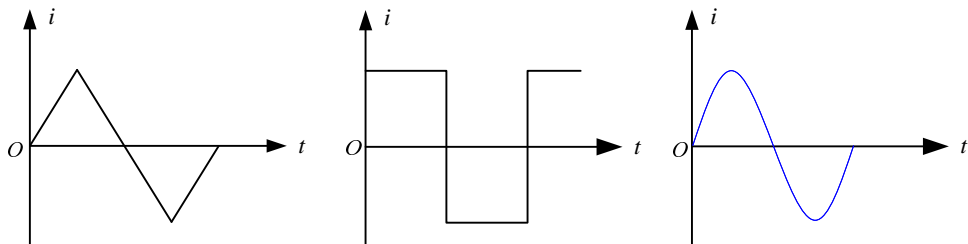


图4-1 交流电

在生产和生活的各个领域，人们所用的电主要是正弦交流电，因为正弦交流电容易产生、传输和使用。本章主要介绍正弦交流电的基本概念及表达，正弦交流电路中基本元件的特征，一般正弦交流电路的分析，正弦交流电路的功率、功率因数等。

4.1 正弦交流电的基本概念

正弦交流电的变化规律与数学中的正弦函数相同，所以，可以用正弦函数式来表示正弦交流电。如图4-1(c)所示，它的正弦函数表达式为

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (4-1)$$

式中， i 表示正弦电流的瞬时大小，称瞬时值。 I_m 表示正弦电流振幅，称最大值。 ω 表示正弦电流的角频率，称电角频率。 ψ 表示正弦电流的初始相角。其中 I_m 、 ω 和 ψ 是区别不同正弦电流的主要依据，称为正弦电流的三要素。

4.1.1 大小的表示

正弦交流电的大小可以用瞬时值、最大值和有效值来表示。

正弦交流电在变化过程中，任一时刻的实际值叫作瞬时值。瞬时值是时间的函数，不同时刻其值不同，所以用小写字母表示，如用字母 e 、 u 、 i 分别表示正弦交流电动势、电压和电流的瞬时值。

正弦交流电在变化过程中所出现的最大瞬时值叫作最大值。对于稳定的正弦交流电来说，最大值是不变的，用大写字母加下脚标 m 表示，如用字母 E_m 、 U_m 、 I_m 分别表示正弦交流电动势、电压和电流的最大值，如图 4-2 所示。

用瞬时值或最大值表示的正弦交流电在测量和使用上不方便，为了能够表示正弦交流电的做功效果，又引入有效值来表示正弦交流电的大小。

如果一个正弦交流电的做功能力相当于一直流电，则把直流电的数值（如 U 、 I ）称作该交流电数值（如 u 、 i ）的有效值。对于稳定的正弦交流电来说，有效值是不变的，所以用大写字母表示，如用字母 E 、 U 、 I 分别表示正弦交流电动势、电压和电流的有效值。一般情况下，提到的交流电的数值都是有效值。

一个周期内直流电通过电阻 R 所产生的热量为

$$Q = I^2 RT$$

交流电通过同样的电阻所产生的热量为

$$Q = \int_0^T i^2 R dt$$

从有效值的定义可以得出

$$I^2 RT = \int_0^T Ri^2 dt$$

由上式可得

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

上述有效值定义式适用于任何波形的周期性电学量。对于正弦交流电流，则有

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi) dt} \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 I_m \end{aligned} \quad (4-2)$$

可见，正弦交流电的最大值是有效值的 $\sqrt{2}$ 倍。

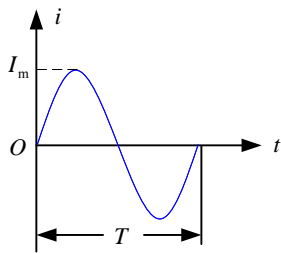


图4-2 正弦交流电

4.1.2 变化快慢的表示

正弦交流电随时间作周期性变化，其变化的快慢可以用周期、频率和电角频率三个量分别表示。

所谓周期是指正弦交流电完成一次变化所用的时间，用字母 T 表示，单位为秒（s），如图 4-2 所示。周期越大，变化一周所用时间越长，正弦交流电变化的越慢；反之周期越小，变化一周所用时间越短，正弦交流电变化得越快。

所谓频率是指单位时间内正弦交流电交变的次数，用字母 f 表示，单位为赫兹（Hz），常用的单位还有千赫（kHz）、兆赫（MHz）。1 千赫=10³ 赫兹，1 兆赫=10⁶ 赫兹。频率越大，变化一周所用时间越短，正弦交流电变化得越快；反之频率越小，变化一周所用时间越长，正弦交流电变化得越慢。周期与频率互为倒数关系，即

$$T = \frac{1}{f} \quad (4-3)$$

我国和世界上大多数国家，电力用电的标准频率都是 50 Hz，其周期为 0.02 s。少数国家的电力用电标准频率是 60 Hz。

所谓电角频率是指交流电在每秒钟内所变化的角度，用字母 ω 表示，单位弧度/秒（rad·s⁻¹）。正弦交流电每一周期内经历的电角度为 2π 弧度，因而电角频率 ω 为

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (4-4)$$

例如频率 $f = 50$ Hz 的交流电，其电角频率为

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

由式（4-4）看出 ω 和 f 只差 2π 倍，所以也可以用 ω 表示正弦交流电变化的快慢。

由于时间 t 和电角度 ωt 存在对应关系，所以在坐标系中也可以用电角度作横轴，将给某些研究带来很大的方便。

4.1.3 相位及相位关系

从式（4-1）可以看出，正弦交流电在随时间变化的过程中，不同的时刻，对应不同的角度，从而得到不同的瞬时值，所以 $(\omega t + \psi)$ 反映了正弦量的变化进程，称 $(\omega t + \psi)$ 为正弦量的相位。

相位是一个随时间变化的量，把 $t = 0$ 时刻的相位叫作初相位，即为 ψ 。习惯上初相位的绝对值不超过 π ，即 $|\psi| \leq \pi$ 。

两个同频率正弦交流电的相位之差称为相位差。因为频率相等，所以也等于它们的初相位之差。例如：

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \psi_1) \\ u &= U_m \sin(\omega t + \psi_2) \end{aligned}$$

的相位差为

$$\varphi = (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = \psi_1 - \psi_2 \quad (4-5)$$

两个同频率正弦交流电，如果一个比另一个先达到正的最大值（或零），那么在相位上就说前者“超前”于后者，或者说后者“滞后”于前者。

下面分别加以讨论：

- (1) $\varphi = \psi_1 - \psi_2 > 0$ 且 $|\varphi| \leq \pi$ ，如图 4-3 (a) 所示，则 i 超前于 u ；
- (2) $\varphi = \psi_2 - \psi_1 < 0$ 且 $|\varphi| \leq \pi$ ，如图 4-3 (a) 所示，则 u 滞后于 i ；
- (3) $\varphi = \psi_1 - \psi_2 = 0$ ，如图 4-3 (b) 所示，则称两个正弦交流电同相；
- (4) $\varphi = \psi_1 - \psi_2 = \pm\pi$ ，如图 4-3 (c) 所示，则称两个正弦交流电反相。

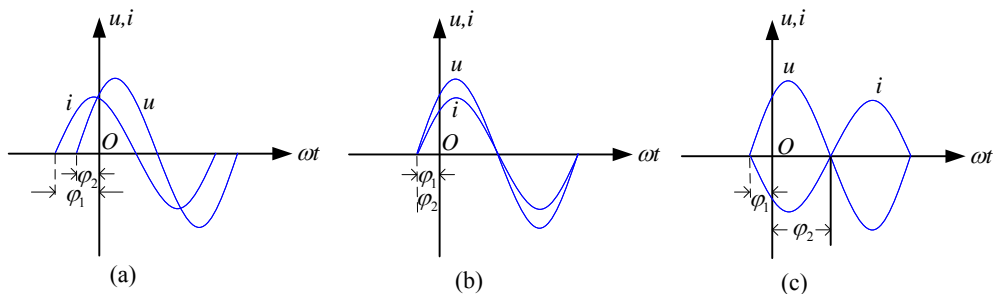


图4-3 同频率正弦交流电的相位关系

例 4-1 现有一正弦交流电，其有效值为 220 V，频率为 50 Hz，在 $t=0$ 时瞬时值为 269 V，写出其解析式。

解 由已知得

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$U_m = \sqrt{2}U = 220\sqrt{2} = 311 \text{ V}$$

又，在 $t=0$ 时， $u = 269 \text{ V}$ ，

所以 $269 = 311 \sin \psi$ ， $\sin \psi = 0.866$ ，

得 $\psi = 60^\circ$ 或 $\psi = 120^\circ$

所以其解析式为 $u = 311 \sin(314t + 60^\circ) \text{ V}$ 或 $u = 311 \sin(314t + 120^\circ) \text{ V}$ 。

例 4-2 已知两个正弦交流电 $i_1 = 0.1\sqrt{2} \sin(314t + 75^\circ) \text{ A}$ ， $i_2 = 0.2\sqrt{2} \sin(314t - 55^\circ) \text{ A}$ ，求它们的相位差，并指出两者的相位关系。

解 相位差 $\varphi_{12} = 75^\circ - (-55^\circ) = 130^\circ$ ，

由于 $\varphi_{12} = 130^\circ < 180^\circ$ ，

所以 i_1 超前 i_2 130° 。

例 4-3 有一电台的频率为 84.1 MHz，试求其周期和电角频率。

解：因为周期 $T = \frac{1}{f}$ ，电角频率 $\omega = 2\pi f$ ，

$$\text{所以 } T = \frac{1}{84.1 \times 10^6} = 1.19 \times 10^{-8} \approx 0.01 \mu\text{s}$$

$$\omega = 2\pi \times 84.1 \times 10^6 \approx 5.28 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

【思考与分析】

1. 有一直流耐压值为 220 V 的交、直流通用电容器，能否把它接在 220 V 的交流电源上？
2. 已知 $u_1 = 311\sin(314t + 60^\circ)$ V 和 $u_2 = 311\sin(628t + 120^\circ)$ V，能否说 u_2 超前 i_1 60° ？
3. 一白炽灯额定电压为交流 220 V，当接在直流 220 V 中时其亮度是否相同？
4. 有人说，交流电的最大值都等于有效值的 $\sqrt{2}$ 倍。这样说对吗？为什么？

4.2 正弦交流电的相量表示法

前面已经介绍了两种表示正弦交流电的方法：正弦函数形式和波形图。但这两种方法在分析和计算交流电路时不方便，为此，下面将介绍正弦交流电的相量表示法。

由于相量法要涉及到复数，所以先扼要复习一下复数的相关知识。

4.2.1 复数及四则运算

复数由实部和虚部组成，常用 $A = a + ib$ 表示，其中 i 为虚数单位。在电路分析中，为了与电流相区别，虚数单位用 j 表示，即 $j^2 = -1$ 。

复数有下列四种表示形式。

(1) 复数的代数形式

$$A = a + jb \quad (4-6)$$

(2) 复数的三角形式

$$A = r(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (4-7)$$

(3) 复数的指数形式

$$A = re^{j\theta} \quad (4-8)$$

(4) 复数的极坐标形式

$$A = r \angle \theta \quad (4-9)$$

其中, a 表示实部, b 表示虚部, r 表示复数的模, θ 表示复数的辐角, 它们之间的关系为

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (4-10)$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{a} \quad (4-11)$$

$$a = r \cos \theta \quad (4-12)$$

$$b = r \sin \theta \quad (4-13)$$

在复数平面中用矢量表示为如图 4-4 所示。

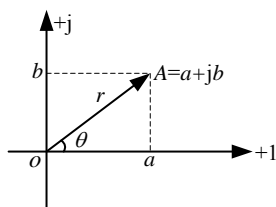


图 4-4 复数平面

复数的四则运算法则为:

(1) 两个复数相加减, 实部和虚部分别相加减;

例如:

$$A_1 = a_1 + jb_1$$

$$A_2 = a_2 + jb_2$$

则

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

(2) 两个复数相乘除, 模相乘除, 辐角相加减。

例如:

$$A_1 = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$A_2 = r_2 e^{j\theta_2}$$

则

$$A_1 \cdot A_2 = r_1 \cdot r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

4.2.2 相量表示法

正弦交流电的三要素是决定不同正弦交流电的依据, 所以只要能表示出三要素, 就能

用来表示正弦交流电。

引入相量表示法的目的是为了计算，而两个同频率的正弦交流电相加或相减，其频率不变，差异仅在最大值和初相位，所以，在计算中，可以不考虑 ωt ，只取 $\omega t = 0$ 时刻来计算，在最后结果中再把 ωt 加上，因此，用复数形式可以表示正弦交流电。

所谓相量，是一个代表某一个正弦量的复数，它的模与正弦量的最大值（或有效值）相等，辐角与正弦量的初相位相等，称为最大值相量（或有效值相量），用最大值（或有效值）字母上加一点表示。例如正弦交流电动势、电压和电流的最大值相量形式为 \dot{E}_m 、 \dot{U}_m 、 \dot{I}_m ，正弦交流电动势、电压和电流的有效值相量形式为 \dot{E} 、 \dot{U} 、 \dot{I} 。选用最大值相量形式还是有效值相量形式需要根据不同情况来定。

例如，对于正弦交流电

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

其相量形式为

$$\dot{I}_m = I_m \cos \psi + j I_m \sin \psi$$

或

$$\dot{I} = I \cos \psi + j I \sin \psi$$

相量在复平面上的图形称为相量图，如图 4-5 (a)、(b) 所示。在只关心同一复平面内几个相量的相互位置关系时，也可以把复平面去掉，如图 4-5 (c) 所示。

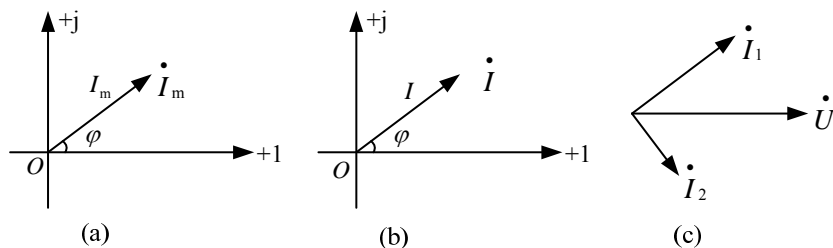


图4-5 相量图

例 4-4 已知复数 $A = 8 + j6$ ，试写出其三角表达式和指数表达式。

解 由于这个复数的实部和虚部都为正数，所以该复数矢量在第一象限，则

$$r = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{6}{8} = 36.8^\circ$$

所以其三角表达式为

$$A = 10(\cos 36.8^\circ + j \sin 36.8^\circ)$$

指数表达式为

$$A = 10e^{j36.8^\circ}$$

例 4-5 试求出下列两个正弦交流电的和，并用相量图表示。

$$u_1 = 3\sqrt{2} \sin(314t + 20^\circ) \text{ V}$$

$$u_2 = 5\sqrt{2} \sin(314t - 70^\circ) \text{ V}$$

解：用相量形式表示两个交流电为

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= 3(\cos 20^\circ + \text{j} \sin 20^\circ) \\ &= 2.819 + \text{j}1.026 \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= 5 \cos(-70^\circ) + \text{j}5 \sin(-70^\circ) \\ &= 1.710 - \text{j}4.698 \text{ V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 + \dot{U}_2 &= 2.819 + \text{j}1.026 + 1.710 - \text{j}4.698 \\ &= 4.529 - \text{j}3.672 \\ &= 5.83 \angle (-39.03^\circ) \text{ V}\end{aligned}$$

所以两个正弦交流电的和为

$$u = 5.83\sqrt{2} \sin(314t - 39.03^\circ) \text{ V}$$

相量图如图 4-6 所示。

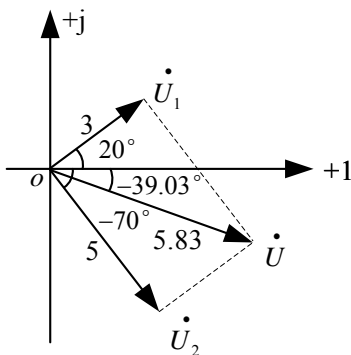


图 4-6 例 4-5 图

【思考与分析】

1. 已知两个正弦交流电的频率 $f_1 = 100 \text{ Hz}$ 、 $f_2 = 5 \text{ kHz}$ ，求它们的周期和角频率。
2. 一正弦交流电的初相位为 30° ，已知在 $t = 0$ 时刻电流为 5 A ，求其最大值。
3. 不同频率的正弦交流电能否表示在同一相量图中？为什么？
4. 下列等式表达的含义是否相同？为什么？

$$(1) I_m = 5 \text{ A} \quad (2) I = 5 \text{ A} \quad (3) \dot{I} = 5 \text{ A} \quad (4) i_t = 5 \text{ A}$$

4.3 单一参数正弦交流电路的分析

在稳定的直流电路中，电容器和电感线圈不产生相应的作用，所以只有电阻元件。但在交流电路中不但要考虑电阻元件，还要考虑电感线圈和电容器。

对于一个实际的元件，常同时存在电阻、电感和电容三个参数的作用，但它们在电路中的作用往往有主有次。为了简化分析，一般只考虑主要参数的作用，这个元件就变成只有一个参数的理想元件。

下面就来讨论分别由电阻、电感或电容三种单一参数所组成的电路。

4.3.1 纯电阻电路

在只有电阻丝、白炽灯或电烙铁等作用的电路中，电阻起主要作用，可以当作纯电阻电路，如图 4-7 所示。

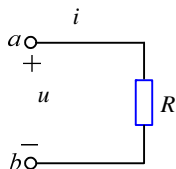


图4-7 纯电阻电路

若在电阻两端所加正弦交流电压为

$$u = U_m \sin \omega t \quad (4-14)$$

参考方向如图 4-7 所示。在此电压作用下电路中产生的电流用 i 表示，参考方向与电压的参考方向关联一致。虽然电压和电流都在随时间作周期性往复变化，但就每一瞬时来说，它们之间的关系仍服从欧姆定律，即

$$i = \frac{u}{R} \quad (4-15)$$

将式 (4-14) 代入，得

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m \sin \omega t}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t \quad (4-16)$$

有效值的关系式为

$$I = \frac{U}{R} \quad (4-17)$$

用有效值相量形式表示电压和电流关系有

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U e^{j0^\circ} \\ \dot{I} &= I e^{j0^\circ} \end{aligned}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j0^\circ}}{Ie^{j0^\circ}} = \frac{U}{I} e^{j(0^\circ - 0^\circ)} = \frac{U}{I} = R$$

即

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R \quad (4-18)$$

此式称为相量形式的欧姆定律，它不但能表示电压和电流有效值的大小关系，而且还能表示相位关系，对分析和计算电路非常重要。

从以上可以看出：

- (1) 电阻元件的电压和电流的瞬时值、有效值、相量形式的关系都服从欧姆定律形式；
- (2) 电阻元件的电压和电流同频同相，用波形图和相量图表示为如图 4-8 所示。

正弦交流电路中，任意瞬时，电阻元件上的电压瞬时值与电流瞬时值的乘积称为该元件的瞬时功率，用小写字母 p 表示，即

$$p = ui \quad (4-19)$$

在电压和电流的关联参考方向下，将式 (4-14) 和式 (4-16) 代入式 (4-19)，得

$$\begin{aligned} p = ui &= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = 2UI \sin^2 \omega t \\ &= UI(1 - \cos 2\omega t) \end{aligned} \quad (4-20)$$

根据式 (4-19)，在图 4-8 (a) 中可以画出瞬时功率的波形图，如图 4-9 所示。

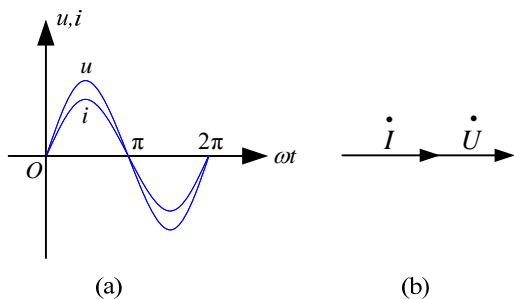


图4-8 电压和电流的关系

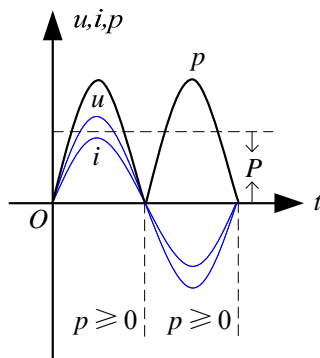


图4-9 纯电阻电路的瞬时功率

从图 4-9 可以看出，瞬时功率的频率是电压、电流频率的两倍，并且

$$p \geq 0$$

即电阻永远处于吸收电能状态，是耗能元件。

瞬时功率在一个周期内的平均值称为平均功率。对于稳定的正弦交流电，平均功率不

变, 所以用大写字母 P 表示, 如图 4-9 所示, 即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI(1 - \cos^2 2\omega t) dt = UI$$

即

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (4-21)$$

单位为瓦特 (W), 常用的单位还有千瓦 (kW), 1 千瓦=1 000 瓦。

平均功率是电路中实际消耗的功率, 所以又叫有功功率。通常在用电器铭牌上标注的功率都是指此功率。

4.3.2 纯电感电路

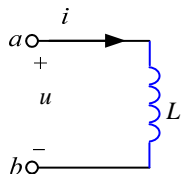


图 4-10 纯电感电路

在只有线圈的电路中, 电感起主要作用, 可以当作纯电感电路, 如图 4-10 所示。

设此线圈为 N 匝, 在外加电压 u 时产生电流 i , 该电流通过线圈产生的磁通为 ϕ , 则总磁通为 $N\phi$ 。在线圈中没有铁磁性材料时, 电流 i 与总磁通 $N\phi$ 成正比, 即

$$i \propto N\phi$$

等式为

$$Li = N\phi \quad (4-22)$$

其中 L 为自感系数 (或电感), 是电感元件的参数, 单位是亨利 (H)。

根据法拉第电磁感应定律可知

$$e_L = -N \frac{d\phi}{dt} \quad (4-23)$$

在规定参考方向下, 由 KVL 得

$$u = -e_L = N \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

即

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (4-24)$$

设电流为

$$i = I_m \sin \omega t \quad (4-25)$$

代入式 (4-24), 得

$$\begin{aligned} u &= L \frac{d}{dt} (I_m \sin \omega t) \\ &= I_m \omega L \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

$$= U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (4-26)$$

有效值关系式为

$$U = I\omega L = IX_L$$

其中

$$X_L = \omega L \quad (4-27)$$

称为感抗，单位为欧姆（ Ω ）。

用有效值相量形式表示电压和电流关系有

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U e^{j\frac{\pi}{2}} \\ \dot{I} &= I e^{j0^\circ} \\ \frac{\dot{U}}{\dot{I}} &= \frac{U e^{j\frac{\pi}{2}}}{I e^{j0^\circ}} = \frac{U}{I} e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L \end{aligned}$$

即

$$\dot{U} = jX_L \dot{I} \quad (4-28)$$

此式称为相量形式的欧姆定律，它不但能表示电压和电流有效值的大小关系，还能表示相位关系，对分析和计算电路非常重要。

从以上可以看出：

（1）电感元件的电压和电流的瞬时值之间不服从欧姆定律形式，有效值、相量形式的关系服从欧姆定律形式。

（2）电感元件的电压和电流同频，在相位上，电压超前电流 $\pi/2$ ，用波形图和相量图表示为如图 4-11 所示。

正弦交流电路中，任意瞬时，电感元件上的电压瞬时值与电流瞬时值的乘积称为该元件的瞬时功率，用小写字母 p 表示，即

$$p = ui \quad (4-29)$$

将式（4-25）和式（4-26）代入式（4-29），得

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \cdot I_m \sin \omega t = UI \sin 2\omega t$$

根据式（4-29），在图 4-11（a）中可以画出瞬时功率的波形图，如图 4-12 所示。

从图 4-12 可以看出，瞬时功率的频率是电压、电流频率的两倍，并且在一个周期内吸收的电能与放出的电能相等，即

$$P_{\text{吸}} = P_{\text{放}}$$

所以电感不消耗电能，是储能元件。

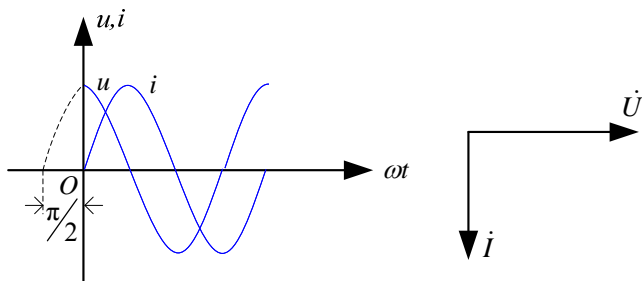


图4-11 电压和电流的关系

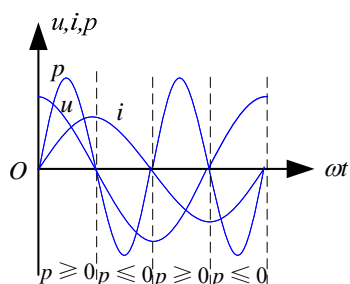


图4-12 纯电感电路的瞬时功率

电感电路中没有电能的损耗，所以瞬时功率在一个周期内的平均值为零，即

$$P = 0 \quad (4-30)$$

这一点也可以从图 4-12 中显示出来。由电感的平均功率也可以计算出来，即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0$$

虽然在电感电路中没有电能损耗，但是能够储存电能，为了衡量电感元件与外间交换能量的规模，引入无功功率，用 Q 表示，在数值上等于瞬时功率的最大值，即

$$Q = UI \quad (4-31)$$

单位是乏（var）。

4.3.3 纯电容电路

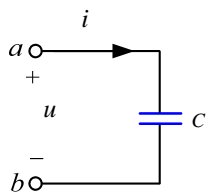


图 4-13 纯电容电路

在只有电容的电路中，电容起主要作用，可以当作纯电容电路，如图 4-13 所示。

当在电容器两端加上电压 u 时，两个极板上要积累电荷 q ，且两者成正比，即 $q \propto u$ 。用等式表示为

$$q = Cu \quad (4-32)$$

式中， C 是表征电容器聚集电荷能力的参数，称为电容，单位法拉（F），常用的单位还有微法（ μF ）和皮法（ pF ），换算关系为

$$1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F} \quad 1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$$

根据电流的定义式可知

$$i = \frac{dq}{dt}$$

把式（4-32）代入，得

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (4-33)$$

设电压为

$$u = U_m \sin \omega t \quad (4-34)$$

代入上式, 得

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du}{dt} = C \frac{dU_m \sin \omega t}{dt} = C \omega U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ &= I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (4-35)$$

有效值关系为

$$U = \frac{I}{\omega C} = I X_C \quad (4-36)$$

其中

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (4-37)$$

称为容抗, 单位欧姆 (Ω)。

用有效值相量形式表示电压和电流关系有:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U e^{j0^\circ} \\ \dot{I} &= I e^{j\frac{\pi}{2}} \\ \frac{\dot{U}}{\dot{I}} &= \frac{U e^{j0^\circ}}{I e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{U}{I} e^{j(0^\circ - \frac{\pi}{2})} = -j X_C \end{aligned}$$

即

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = -j X_C \quad (4-38)$$

此式称为相量形式的欧姆定律, 不但能表示电压和电流有效值的大小关系, 还能表示相位关系, 对分析和计算电路非常重要。

从以上可以看出:

(1) 电容元件的电压和电流的瞬时值之间不服从欧姆定律形式, 有效值、相量形式的关系都服从欧姆定律形式;

(2) 电容元件的电压和电流同频, 在相位上, 电流超前电压 $\pi/2$, 用波形图和相量图表示为如图 4-14 所示。

正弦交流电路中, 任意瞬时, 电容元件上的电压瞬时值与电流瞬时值的乘积称为该元件的瞬时功率, 用小写字母 p 表示, 即

$$p = ui \quad (4-39)$$

将式 (4-34) 和式 (4-35) 代入式 (4-39) 得

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = UI \sin 2\omega t$$

根据式（4-39），在图 4-14 中可以画出瞬时功率的波形图，如图 4-15 所示。

从图 4-15 可以看出，瞬时功率的频率是电压、电流频率的两倍，并且在一个周期内吸收的电能与放出的电能相等，即

$$P_{吸} = P_{放}$$

所以同电感一样，电容也不消耗电能，是储能元件。

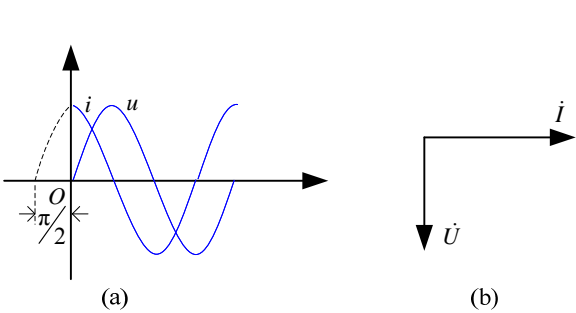


图 4-14 电压和电流的关系

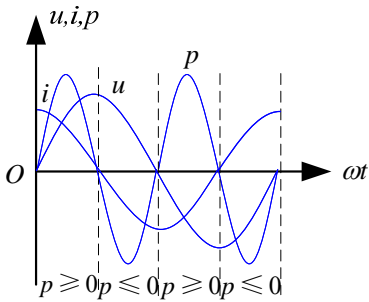


图 4-15 纯电容电路的瞬时功率

电容电路中没有电能的损耗，所以瞬时功率在一个周期内的平均值为零，即

$$P = 0$$

这一点也可以从图 4-15 中显示出来。由电容的平均功率也可以计算出来，即

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0 \tag{4-40}$$


虽然在电容电路中没有电能损耗，但是能够储存电能，为了衡量电容元件与外间交换能量的规模，引入无功功率，用 Q 表示，在数值上等于瞬时功率的最大值，即

$$Q = UI \tag{4-41}$$

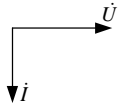
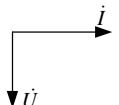
单位是乏（var）。

根据以上讨论，可把三个单一参数的基本性质列表比较，如表 4-1 所示。

表 4-1 单一参数交流电路的基本性质

电路 元 件	电压和电流的关系					功率关系		
	瞬时值 关系	有效值 关系	相位关系	相量形式欧 姆定律	相量图	瞬时 功率	平均 功率	无功 功率
R	$u = Ri$	$U = RI$	电压与电 流同相	$\dot{U} = R\dot{I}$		$p = ui$	$P = UI$	0

(续表)

电路元件	电压和电流的关系					功率关系		
	瞬时值关系	有效值关系	相位关系	相量形式欧姆定律	相量图	瞬时功率	平均功率	无功功率
L	$u = L \frac{di}{dt}$	$U = X_L I$	电压超前电流 90°	$\dot{U} = jX_L \dot{I}$		$p = ui$	0	$Q = UI$
C	$i = C \frac{du}{dt}$	$U = X_C I$	电压滞后电流 90°	$\dot{U} = -jX_C \dot{I}$		$p = ui$	0	$Q = UI$

例 4-6 在 $R = 5 \Omega$ 的电阻两端, 加正弦交流电压 $u = 311\sin(314t - 60^\circ) \text{ V}$, 试写出流过该电阻的电流瞬时值表达式, 并求出电压、电流的有效值和有功功率。

解 根据纯电阻电路的特性知, 电流的瞬时值为

$$i = \frac{u}{R} = \frac{311}{5} \sin(314t - 60^\circ) = 62.2 \sin(314t - 60^\circ) \text{ A}$$

电压有效值为 $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220 \text{ V}$

电流有效值为 $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{62.2}{\sqrt{2}} = 44 \text{ A}$

电阻消耗的有功功率为 $P = UI = 220 \times 44 = 9.68 \text{ kW}$

例 4-7 已知一个电感 $L = 2 \text{ H}$, 接在 $u = 220\sqrt{2} \sin(314t - 60^\circ) \text{ V}$ 的电源上, 试求感抗 X_L 、通过的电流 i 、有功功率 P 和无功功率 Q 。

解 根据纯电感电路的特性知

$$X_L = \omega L = 314 \times 2 = 628 \Omega$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_L}{jX_L} = \frac{220e^{-j60^\circ}}{j628} = 0.35e^{-j150^\circ} \text{ A}$$

则 $i = 0.35\sqrt{2} \sin(314t - 150^\circ) \text{ A}$

由于电感不消耗有功功率, 所以 $P = 0$

无功功率为 $Q = UI = 220 \times 0.35 = 77 \text{ var}$

例 4-8 有一电容 $C = 10 \mu\text{F}$ 的电容器, 当流过电流 $i = 0.1\sqrt{2} \sin(100t + 60^\circ) \text{ A}$ 时, 试求所加的电压 u 、容抗 X_C 、有功功率和无功功率。

解 根据纯电容电路的特性知

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \times 10 \times 10^{-6}} = 1\,000\ \Omega$$

$$\dot{U} = -jX_C \dot{I} = 1\,000 \times 0.1 e^{-j90^\circ} e^{j60^\circ} = 100 e^{-j30^\circ}\ \text{V}$$

所以

$$u = 100\sqrt{2} \sin(100t - 30^\circ)\ \text{V}$$

由于电容不消耗有功功率, 所以 $P = 0$

无功功率为

$$Q = UI = 100 \times 0.1 = 10\ \text{var}$$

【思考与分析】

1. 电感为 10 mH 的线圈在不计电阻和电容的情况下, 接在 220 V、50 Hz 的交流电源上, 求电感的感抗和电流。

2. 若将上题的电感换成 100 μF 的电容, 结果如何?

3. 在图 4-16 所示电路中, 当交流电压有效值不变时, 如果提高频率, 则三个元件上的电流将如何变化?

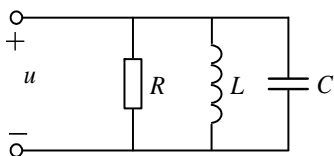


图4-16 思考和分析题3图

4. 在交流电路中, 电感和电容不消耗电能, 但为什么在实际电路中的电感线圈和电容器要发热? 请说明理由。

4.4 多参数正弦交流电路的分析

4.3 节讨论了单一参数的交流电路。但是任何一个实际的电路往往是由多个参数组成, 所以研究多参数交流电路更具有实际意义。

4.4.1 复阻抗的概念

在电阻、电感和电容相量形式的欧姆定律中, R 、 jX_L 和 $-jX_C$ 在其中的作用是改变电流的大小和相位, 所以作为各元件的一个复数形式的参数称为复阻抗, 用 Z 表示, 即

$$Z_R = R \quad (4-42)$$

$$Z_L = jX_L \quad (4-43)$$

$$Z_C = -jX_C \quad (4-44)$$

单位为欧姆 (Ω)。

如图 4-17 所示电路, 其复阻抗为

$$\begin{aligned} Z &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= R + j(X_L - X_C) \end{aligned} \quad (4-45)$$

上述可知, 复阻抗是一个复数, 这个复数的模称为阻抗, 用 $|Z|$ 表示。从式 (4-45) 可以看出

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (4-46)$$

从相量形式的欧姆定律还可以得出, 电压和电流的相位差等于该电路复阻抗的辐角, 电压和电流有效值的比值等于该电路的阻抗, 这将为今后的计算带来很大的方便。

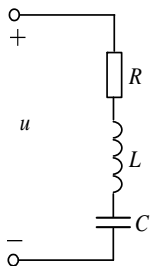


图4-17 串联交流电路

4.4.2 交流电路的相量分析法

通过对交流电的分析可以看出, 所有在直流电路中的定理、公式、定律, 都可以用于分析正弦交流电路。不过要对其中各量的形式作相应的变化, 即要把直流电路中的电压、电流分别换成交流电路中的电压相量和电流相量, 把电阻换成交流电路中的复阻抗。给我们分析和计算交流电路带来很大方便。

例 4-9 日光灯的镇流器相当于电感, 灯管相当于电阻, 在正常工作中处于串联状态, 已知 $R = 300 \Omega$ 、 $L = 1.66 \text{ H}$, 当所加电压为 $u = 220\sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ) \text{ V}$ 时, 求电流 i 和电阻、电感上的电压 u_R 、 u_L , 并用相量图表示。

解 由已知得

$$Z_R = 300 \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j314 \times 1.66 = j521.24 \Omega$$

由于串联, 所以

$$\begin{aligned} Z &= Z_R + Z_L = 300 + j521.24 \\ &= 601e^{j60^\circ} \Omega \end{aligned}$$

则

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220e^{j60^\circ}}{601e^{j60^\circ}} = 0.37 \text{ A}$$

$$\dot{U}_R = Z_R \dot{I} = 300 \times 0.37 = 111 \text{ V}$$

$$\dot{U}_L = Z_L \dot{I} = j521.24 \times 0.37 = j192.86 \Omega$$

所以

$$\begin{aligned} i &= 0.37\sqrt{2} \sin 314t \text{ A} \\ u_R &= 111\sqrt{2} \sin 314t \text{ V} \\ u_L &= 192.86\sqrt{2} \sin(314t + 90^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

相量图如图 4-18 所示。

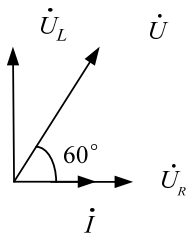


图 4-18 例 4-9 图

例 4-10 由电阻 $R=8\ \Omega$ 、电感 $L=0.1\text{ H}$ 和电容 $C=127\ \mu\text{F}$ 组成串联电路，当电源电压 $u=220\sqrt{2} \sin 314t\text{ V}$ 时，求电流 i 、 u_R 、 u_L 、 u_C ，并作出相量图。

解 各元件的复阻抗为

$$\begin{aligned} Z_R &= 8\ \Omega \\ Z_L &= jX_L = j\omega L = j314 \times 0.1 = j31.4\ \Omega \\ Z_C &= -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{314 \times 127 \times 10^{-6}} = -j25\ \Omega \end{aligned}$$

由于是串联，所以

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = 8 + j(31.4 - 25) = 8 + j6.4 = 10.3e^{j38.7^\circ}\ \Omega$$

则

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220e^{j0^\circ}}{10.3e^{j38.7^\circ}} = 21.4e^{-j38.7^\circ}\text{ A}$$

$$\dot{U}_R = \dot{i} X_R = 21.4 \times 8e^{-j38.7^\circ} = 171.2e^{-j38.7^\circ}\text{ V}$$

$$\dot{U}_L = \dot{i} Z_L = 21.4 \times 31.4e^{-j38.7^\circ} e^{j90^\circ} = 672e^{j51.3^\circ}\text{ V}$$

$$\dot{U}_C = \dot{i} Z_C = 21.4 \times 25e^{-j38.7^\circ} e^{-j90^\circ} = 535e^{-j128.7^\circ}\text{ V}$$

所以

$$i = 21.4\sqrt{2} \sin(314t - 38.7^\circ)\text{ A}$$

$$u_R = 171.2\sqrt{2} \sin(314t - 38.7^\circ)\text{ V}$$

$$u_L = 672\sqrt{2} \sin(314t + 51.3^\circ)\text{ V}$$

$$u_C = 535\sqrt{2} \sin(314t - 128.7^\circ)\text{ V}$$

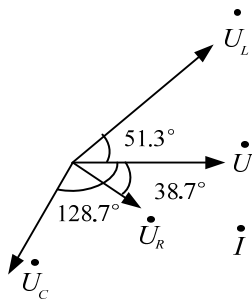


图 4-19 例 4-10 图

从以上例题可以看出,在同时含有电感和电容的交流电路中,当复阻抗的辐角等于零时,电路相当于“纯电阻”电路,其总电压和总电流同相,这种现象称为谐振,它在无线电和电工技术中得到广泛的应用。

4.4.3 正弦交流电路的功率

如图 4-20 所示,用一个无源二端网络 N_0 代替正弦交流电路。

设所加电压为

$$u = U_m \sin \omega t$$

电路中的电流为

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

式中, φ 为电压和电流的相位差。其瞬时功率为

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t + \varphi) \\ &= 2UI \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (4-47)$$

根据平均功率定义可知

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$$

将式 (4-47) 代入, 得

$$P = UI \cos \varphi \quad (4-48)$$

由此可见,交流电路的功率不仅与电压和电流的有效值有关,还与电压和电流的相位差有关。通常把 $\cos \varphi$ 称为功率因数, φ 称为功率因数角。 $\cos \varphi$ 的大小由电路的参数、结构和频率决定。

由于电路中有储能元件,所以与电源之间有能量交换,这种能量交换仍用无功功率表示。

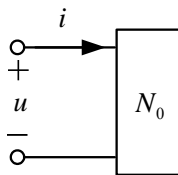


图4-20 无源二端网络

根据电感和电容的特性可以得出

$$Q = UI \sin \varphi \quad (4-49)$$

其中, φ 为电压和电流的相位差。

式(4-48)和式(4-49)同样适用于单一参数的交流电路。

U 和 I 的乘积不代表交流电路实际消耗的功率, 也不代表交流电路的无功功率, 但它表示电源可能提供的或负载可能得到的最大功率, 称之为视在功率, 用字母 S 表示, 即

$$S = UI \quad (4-50)$$

单位用伏安(VA)表示。

一般交流电源设备都有安全运行的额定电压和额定电流, 两值的乘积称为额定视在功率, 即

$$S_N = U_N I_N \quad (4-51)$$

用来表示电源设备允许提供的最大有功功率, 也称为额定容量或容量。

上述有功功率、无功功率和视在功率三者之间具有以下关系:

$$\begin{aligned} P &= UI \cos \varphi = S \cos \varphi \\ Q &= UI \sin \varphi = S \sin \varphi \\ S^2 &= P^2 + Q^2 \end{aligned} \quad (4-52)$$

例 4-11 在电感和电阻串联电路中, 已知 $R = 10 \, \Omega$, $X_L = 19.6 \, \Omega$, 接于电压为 $U = 220 \, \text{V}$ 的交流电源上, 求该电路的有功功率、无功功率和视在功率。

解 该电路的阻抗为

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{10^2 + 19.6^2} = 22 \, \Omega$$

则

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{220}{22} = 10 \, \text{A}$$

电压和电流的相位差为

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X_L}{R} = \tan^{-1} \frac{19.6}{10} = 63^\circ$$

有功功率

$$P = UI \cos \varphi = 220 \times 10 \times 0.455 = 1 \, \text{kW}$$

无功功率

$$Q = UI \sin \varphi = 220 \times 10 \times 0.89 = 1.96 \, \text{kvar}$$

视在功率

$$S = UI = 220 \times 10 = 2.2 \, \text{kVA}$$

如果改用下列公式计算

$$P = I^2 R = 10^2 \times 10 = 1 \, \text{kW}$$

$$Q = I^2 X_L = 10^2 \times 19.6 = 1.96 \text{ kvar}$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{1000^2 + 1960^2} = 2.2 \text{ kVA}$$

与上面结果相同,所以,在交流电路中,电路的总有功功率等于电路中各电阻消耗的有功功率之和,由于电感和电容的储、放电能过程是相反的,所以总无功功率等于电路中各电感和电容的无功功率之差。

【思考与分析】

1. 由可变电阻和可变电容组成的电路,在所加电压不变的情况下,分别改变电阻和电容的值,问电路的有功功率和无功功率将如何变化?
2. 在 RLC 串联电路中,已知阻抗为 10Ω ,电阻为 6Ω ,感抗为 20Ω ,试问容抗的大小有几种可能?其值各为多少?
3. 一纯电感电路的电流有效值为 1 A ,现在给电感并入一个电容,总电路的电流不变,试问该电容的容抗为多少?
4. 在 RLC 串联电路中,在什么条件下其总阻抗最小?

4.5 功率因数的提高

4.5.1 提高功率因数的意义

在实际的交流电路中,一般负载多为电感性负载,通常它们的功率因数都比较低。例如交流电动机在额定负载时,功率因数约在 $0.8\sim 0.85$,轻载时为 $0.4\sim 0.5$,空载时仅为 $0.2\sim 0.3$,不装电容器的日光灯功率因数为 $0.45\sim 0.60$ 。功率因数低,将对供电系统产生不良影响,主要表现在以下两个方面。

(1) 功率因数越低,电源设备的容量越得不到充分利用。电源设备的容量是依据其额定电压和额定电流设计的。例如一台 800 kVA 的变压器,若负载的功率因数为 0.9 ,变压器可输出 720 kW 的有功功率;若负载的功率因数变为 0.5 ,则变压器只能输出 400 kW 的有功功率。因此负载的功率因数低时,电源设备的容量就得不到充分利用。

(2) 功率因数越低,输电线路上的功率损耗和压降增加。由有功功率公式得出

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}$$

若用电设备在一定电压与一定功率之下运行,当功率因数低时,线路上的电流就大,线路电阻与设备绕组中的功率损耗就增加,同时线路上的电压降也会增大,造成负载上的电压降低,影响负载的正常工作。

由以上分析可知,提高用户的功率因数是十分必要的。

4.5.2 提高功率因数的方法

一般来说,造成功率因数低的原因有两个方面:一是负载的选用和使用不当。例如在生产中大量使用电动机,在低负荷状态下工作等;二是在线路中大量使用感性负载,使电压和电流的相位差增加,造成功率因数降低。如因第一个原因造成的功率因数低,为了提高功率因数,要注意改进电动机的运行条件,合理选择电动机的容量,或采用同步电动机等措施。下面主要讨论如何提高由于第二个原因造成的功率因数低。

要提高功率因数,需要另加元件,但要满足两个条件:一是不影响负载的正常工作;二是所加元件不能有功率损耗。所以,通常采用的方法是在感性负载两端并联电容器。这种电容器称为补偿电容器。下面举例加以说明。

如图 4-21 (a) 所示电路, R_L 和 L 表示感性负载, C 是补偿电容,其中相关的相量关系如图 4-21 (b) 所示。未接电容之前,负载电流为 \dot{I}_L , 滞后电压 φ_1 角。接入电容后,电容器支路的电流为 \dot{I}_C , 超前电压 $\pi/2$, 而此时负载的电流与未接电容之前相同。线路总电流 \dot{I} 为两个电流的合成,与电压的相位差为 φ_2 , 由图可知 $\varphi_1 > \varphi_2$, 所以提高了功率因数。

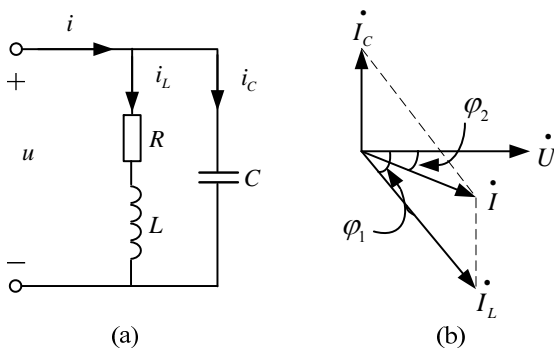


图 4-21 提高功率因数

下面研究为使功率因数由 $\cos \varphi_1$ 提高到 $\cos \varphi_2$, 应并联接入多大的电容器。

并联电容前有

$$I_1 = \frac{P}{U \cos \varphi_1}$$

并联电容后有

$$I_2 = \frac{P}{U \cos \varphi_2}$$

由图 4-21 (b) 可得

$$\begin{aligned} I_C &= I_1 \sin \varphi_1 - I_2 \sin \varphi_2 \\ &= \frac{P \sin \varphi_1}{U \cos \varphi_1} - \frac{P \sin \varphi_2}{U \cos \varphi_2} = \frac{P}{U} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \end{aligned}$$

又知

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \omega C U$$

代入并整理得

$$C = \frac{P}{U^2 \omega} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \quad (4-53)$$

从上式可以看出, 随着电容增加, 功率因数提高。当功率因数提高到最大时, 如果再增加电容, 功率因数反而会降低。

用电容来提高功率因数, 一般补偿到 0.9 左右, 如果补偿到 1, 所需电容量大, 反而不经济。

例 4-12 某电源 $S_N = 20 \text{ kVA}$, $U_N = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, 求该电源的额定电流。该电源能提供功率因数为 0.5, 功率为 40 W 的日光灯多少盏? 此时线路的电流是多少? 若将功率因数提高到 0.9, 应并多大电容? 此时线路的电流又是多少?

解 根据视在功率的公式得

$$I_N = \frac{S_N}{U_N} = \frac{20\,000}{220} = 91 \text{ A}$$

设能接 n 盏日光灯, 则

$$\begin{aligned} n \times P &= S_N \cos \varphi_1 \\ n &= \frac{S_N \cos \varphi_1}{P} = \frac{20\,000 \times 0.5}{40} = 250 \text{ 盏} \end{aligned}$$

此时电流为

$$I_1 = 91 \text{ A}$$

当并入电容后,

$$\begin{aligned} C &= \frac{P}{2\pi f U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2) \\ &= \frac{40 \times 250}{2\pi \times 50 \times 220^2} (1.731 - 0.483) = 820 \text{ } \mu\text{F} \end{aligned}$$

此时电流为

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi_2} = \frac{40 \times 250}{220 \times 0.9} = 50.5 \text{ A}$$

【思考与分析】

1. 在感性负载的两端并上补偿电容后，线路上的总电流、总功率以及负载的电流有没有变化？为什么？
2. 在感性负载的两端并上电容后可以提高功率因数，是否并联的电容越大，功率因数提高的越高？
3. 为了提高功率因数，在感性负载的两端并上电容，但发现总电路的电流没有变化，问补偿电容值是过大还是过小？

4.6 日光灯电路的连接和功率因数的提高

【实训室活动】

目的：掌握日光灯的工作原理及接线方法；研究提高功率因数的意义和方法；学会使用交流电压表、电流表和功率表。

设备与器材：日光灯综合适配器板、电容器板、电流测试插孔板、交流电流表、交流电压表、功率表等。

日光灯电路原理如下所述。

(1) 日光灯工作原理如图 4-22 (a) 所示，接通电源后，启辉器内双金属片与定片间的气隙被击穿，连续发生辉光放电，使双金属片受热伸张而与定片接触，接通灯管的灯丝，灯丝被预热而发射电子，很快双金属片又冷却与定片分开，镇流器线圈因灯丝电路的突然断电而感应出很高的感应电动势，它和电源电压串联加到灯管两端，使管内气体电离而产生弧光放电导致发光，这时启辉器在电路中的作用相当于一个自动开关。

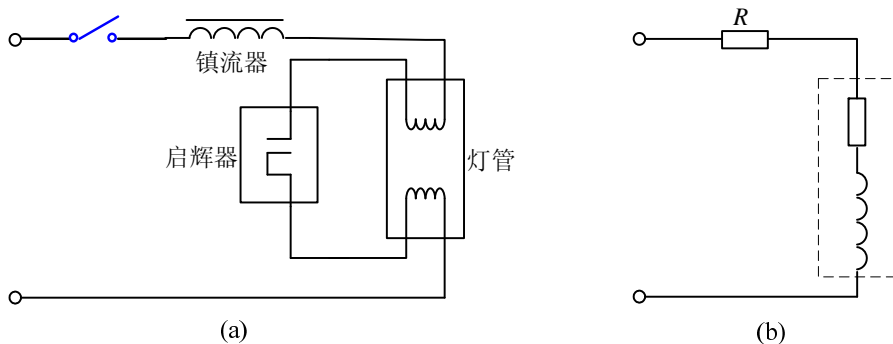


图4-22 日光灯原理图

闭合 K_2 , 使电容分别为 $1\ \mu\text{F}$ 、 $4.7\ \mu\text{F}$ 、 $8\ \mu\text{F}$ 时, 分别测量相应的值, 并记入表格 (每次改变电容时, 必须断开 K_2 以防发生短路)。

(交流电压表选 $300\ \text{V}$, 交流电流表选 $1\ \text{A}$, 功率表选 $150\ \text{W}$)

注意事项:

- (1) 电压较高, 注意安全, 禁止带电操作;
- (2) 正确并联电容防止电源短路;
- (3) 正确使用仪表及仪表量程, 防止烧坏仪表;
- (4) 认真观察仪表, 正确读取数据。

实训报告:

- (1) 干净整齐、条理清楚, 正确分析测量数据并据此进行计算;
- (2) 正确画出 \dot{I} 、 \dot{I}_C 、 \dot{I}_Z 、 \dot{U} 、 \dot{U}_R 、 \dot{U}_L 的相量图;
- (3) 进行归纳总结, 得出实验结论。

4.7 本章小结

1. 大小和方向随时间成正弦规律变化的交流电称为正弦交流电。表示交流电变化快慢的量有周期 (T)、频率 (f) 和电角频率 (ω), 表示交流电大小的量有瞬时值 (i 、 u 、 e) 最大值 (I_m 、 U_m 、 E_m) 和有效值 (I 、 U 、 E), 表示交流电相位的量有初相位 (ψ)、相位差、超前和滞后, 其中最大值、电角频率和初相位为决定正弦交流电的三要素。

2. 正弦交流电可以用正弦函数、波形图和相量三种方法表示。其中, 前两种表示方法能够将三要素全面表示出来, 但不便计算, 相量表示法是用复数和相量图的形式来分析和计算交流电路, 正弦交流电用相量表示后, 直流电路的分析方法便可全面应用到正弦交流电路中。

3. 单一参数的交流电路是理想化的电路, R 是耗能元件, L 、 C 是储能元件, 实际电路可由这些元件组合而成。三个单一参数交流电路的电压、电流关系及功率关系如表 4-3-1 所示。

4. 复阻抗是分析交流电路的一个重要的量, 对于电阻、电感和电容都有其复阻抗。在引入复阻抗后, 所有在直流电路中的定理、公式、定律, 都可以用于分析正弦交流电路。不过, 要对其中各量的形式作相应的变化, 即要把直流电路中的电压、电流分别换成电压相量和电流相量, 把电阻换成复阻抗。这样将会为分析和计算交流电路带来很大方便。

5. 交流电路的有功功率、无功功率和视在功率分别为

$$P = UI \cos \varphi$$

$$Q = UI \sin \varphi$$

$$S = UI$$

6. 由于电路中应用了感性元件, 造成功率因数降低, 为了提高功率因数, 需要给电路并联补偿电容。当把功率因数从 $\cos \varphi_1$ 提高到 $\cos \varphi_2$ 时, 需加电容值为

$$C = \frac{P}{U^2 \omega} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2)$$

4.8 自测与练习

4-1 在交流电 $i = 5\sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ)$ A 中, 其电流有效值为_____, 周期为_____, 频率为_____, 初相位为_____。

4-2 日常用电每秒种出现_____次零值, _____次最大值?

4-3 已知一正弦交流电压的最大值为 311 V, 频率为 50 Hz, 初相位为 $-\frac{\pi}{3}$, 其正弦函数表达式为_____。

4-4 已知由电阻和电容组成的串联电路, 其中 $R = 8 \Omega$, $C = 167 \mu\text{F}$, 所加电压为 $u = 220\sqrt{2} \sin(1000t + 30^\circ)$ V, 则电流 $i =$ _____, 功率 $P =$ _____, $Q =$ _____, $S =$ _____。

4-5 已知三个正弦电流参考方向均流入同一节点, 下列表达式正确的是 ()。

(a) $i_1 + i_2 + i_3 = 0$

(b) $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

(c) $I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} = 0$

(d) $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0$

4-6 指出下列表达式正确的是 ()。

(a) $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) = Ie^{j\psi}$

(b) $u = Ue^{j\psi}$

(c) $\dot{I}_m = I\sqrt{2}e^{j\psi}$

(d) $\dot{I} = I\sqrt{2}e^{j\psi}$

4-7 在 RLC 串联电路中, 下列表达式正确的是 ()。

(a) $u = u_R + u_L + u_C$

(b) $U = U_R + U_L + U_C$

(c) $Z = jR + jX_L - jX_C$

(d) $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$

4-8 对于纯电阻电路, 下列表达式正确的是 ()。

(a) $R = \frac{u}{i}$

(b) $I = \frac{U_m}{R}$

(c) $\dot{I}_m = \frac{\dot{U}}{R}$

(d) $P = I^2 R$

4-9 对于电感电路, 下列表达式正确的是 ()。

$$(a) i = \frac{u}{X_L} \quad (b) I = \frac{U}{\omega L} \quad (c) \dot{U}_L = L \frac{di}{dt}$$

$$(d) P = I^2 X_L \quad (e) Q = I^2 X_L$$

4-10 对于电容电路, 下列表达式正确的是 ()。

$$(a) u_c = i_c X_C \quad (b) U = I X_C \quad (c) u = C \frac{di}{dt}$$

$$(d) P = I^2 X_C \quad (e) Q = I^2 X_C$$

4-11 写出图 4-24 中波形图所表示的电压和电流瞬时值表达式, 并指出它们的相位关系。

4-12 两个正弦电流 i_1 、 i_2 的最大值分别为 2.5 A 和 1.5 A, 已知 i_2 的初相位为 30° , i_1 较 i_2 超前 40° , 试分别写出两个正弦电流的相量表达式。

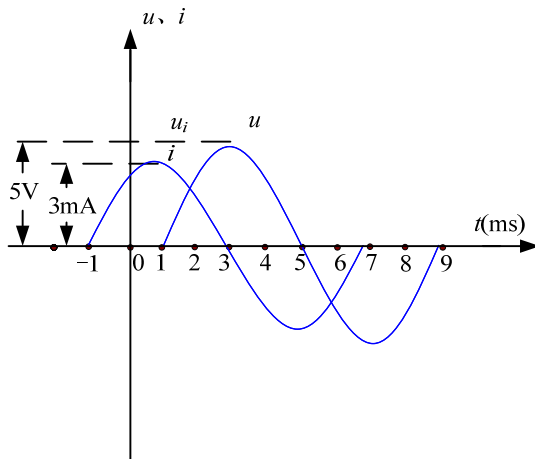


图4-24 自测与练习4-11图

4-13 写出下列各正弦量对应的相量形式。

$$(1) i_1 = 0.1\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) \text{ A}$$

$$(2) i_2 = 2\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$$

$$(3) u_1 = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) \text{ V}$$

$$(4) u_2 = 380\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$$

4-14 当电角频率为 ω 时, 写出下列各相量形式对应的正弦量。

$$(1) \dot{I} = 10(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) \text{ A}$$

$$(2) \dot{I} = 12e^{-j30^\circ} \text{ A}$$

$$(3) \dot{U} = (8 + j6) \text{ A}$$

$$(4) \dot{U} = 220 \angle -25^\circ \text{ A}$$

4-15 在如图 4-25 所示的交流电路中, 已知 A_1 和 A_2 两块电流表的读数都为 5 A, 求

电路中电流表 A 的读数。

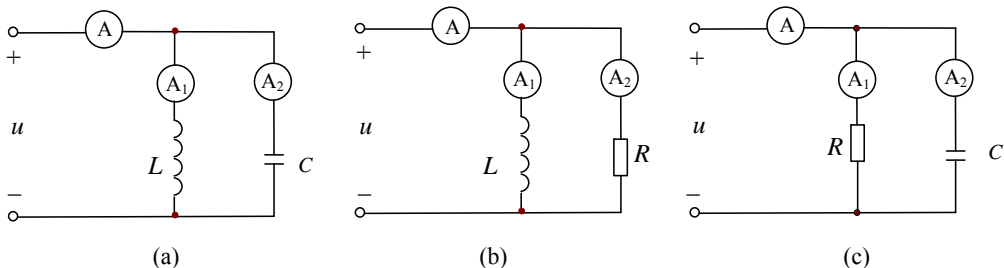


图4-25 自测与练习4-15图

4-16 在如图 4-26 所示的交流电路中，已知 V_1 和 V_2 两块电压表的读数为 12 V，求电路中电压表 V 的读数。

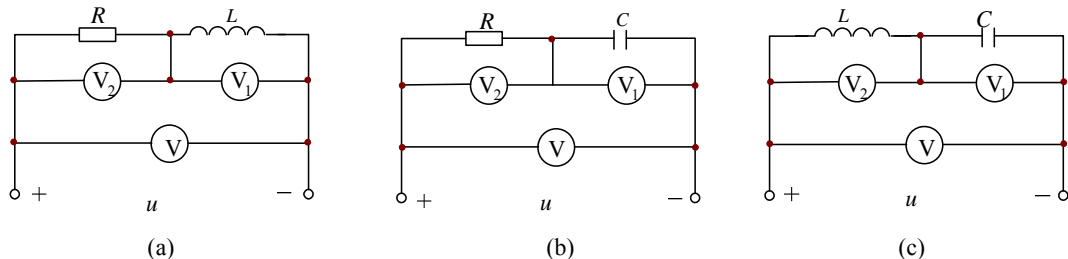


图4-26 自测与练习4-16图

4-17 在电感和电阻的串联电路中，已知 $R=6\ \Omega$ ， $\omega L=8\ \Omega$ ，当总电路电压为 $u=10\sin(\omega t-180^\circ)\text{ V}$ 时，求电感元件上的电压。

4-18 日光灯电源的电压为 220 V，灯管相当于 $300\ \Omega$ 的电阻，镇流器相当于感抗为 $400\ \Omega$ 的电感，试求灯管两端的电压和工作电流。

4-19 RLC 串联电路中，已知 $R=6\ \Omega$ ， $X_L=25\ \Omega$ ， $X_C=17\ \Omega$ ，其中电流 $i=2\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)\text{ A}$ ，求总电压 u 、功率因数 $\cos\varphi$ 、有功功率 P 、无功功率 Q 和视在功率 S 。

4-20 试计算题 4-18 日光灯电路的功率因数、平均功率、无功功率和视在功率。

4-21 电风扇的调速原理是与其串联分压电感，当电感改变时，分压值也改变，以达到调速的目的。已知电源电压 220 V，家用电风扇的复阻抗为 $Z=(190+j260)\ \Omega$ ，现要求电风扇的端电压降至 180 V，试求要加多大电感？

4-22 有一个二端网络，若加电压为 $u=10\sqrt{2}\sin(314t+30^\circ)\text{ V}$ ，则电流为 $i=5\sqrt{2}\sin(314t-30^\circ)\text{ A}$ ，求此二端网络的复阻抗和功率。

第 5 章 三相正弦交流电路

上章学过的交流电路是由一个单独绕组的电源与负载组成的电路，所以称为单相交流电路。由三个绕组的交流发电机或变压器按对称方式连接，提供交流电能的电源称为三相交流电源。三相交流电源与三相负载组成的电路称为三相电路。

目前世界上广泛使用三相交流电。单相交流电路的分析方法适用于三相交流电路，但由于三相电路中的电流、电压也有自身的特点，因此三相电路分析有其特殊之处。本章主要介绍三相电源、三相负载与电源的连接、三相负载的连接、三相电路的功率及测量等。

5.1 三相电源

5.1.1 对称三相电压的产生

产生三相交流电的设备主要是三相交流发电机，如图 5-1 所示为它的原理图。

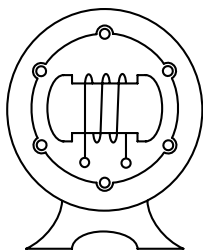


图5-1 三相交流发电机示意图

三相交流发电机主要有定子和转子两部分组成，在定子中对称地放置三个相同的绕组，即： Ax 、 By 和 Cz ，其中 A 、 B 、 C 三端为绕组的始端， x 、 y 、 z 三端为末端。在转子中绕有线圈，当通入直流电后，形成磁场。转子在原动机的拖动下作匀速旋转，形成旋转磁场，定子绕组切割磁场，在三个绕组中产生了三个感应电动势。由于三个绕组相同，且空间位置相差 120° ，所以若按顺时针方向旋转，则三个绕组中产生的感应电动势为：

$$\begin{cases} e_A = E_m \sin \omega t \\ e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ) \\ e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ) \end{cases} \quad (5-1)$$

即三个感应电动势最大值相同，频率相等，相位互差 120° ，这样的正弦量称为对称正弦量，所以三相发电机输出对称的三个感应电动势。

5.1.2 三相电源的星形连接

三相电源并不是分别从每相直接引出两根线，再和负载相连，而是把它们按一定方式连接后，再向负载供电。通常有两种连接方式，即星形连接和三角形连接，这里只介绍最常用的星形连接。

把三相电源的末端 x 、 y 、 z 连接在一起，称为电源的中点，用 N 表示。由端点 A 、 B 、 C 和中点 N 引出四根导线与外电路连接，就构成电源的星形连接，简称 Y 连接，如图 5-2 所示。因为这里用四根导线提供三相电能给外电路，所以又称为三相四线制连接，其中从电源三个始端引出的三根导线称为端线或相线，俗称火线，分别表示为 A 火线、 B 火线和 C 火线，通常用红、黄、绿色的导线作火线；从中点引出的导线称为中线，俗称零线，表示为 N 线，通常用花线或黑导线作零线。

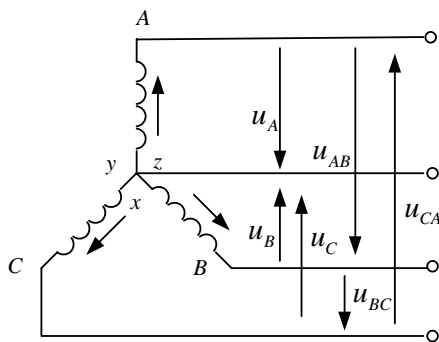


图 5-2 星形连接

负载从三根火线和一根零线上可以取得两种电压，从火线和零线上取得的电压称为相电压，常用 u_p 表示；从火线和火线上取得的电压称为线电压，常用 u_l 表示，下面分别加以讨论。

1. 相电压

负载从三相电源可以取得三个相电压，分别用 u_A 、 u_B 和 u_C 表示，从图 5-2 可知相电压和感应电动势相等，即

$$u_A = e_A \quad u_B = e_B \quad u_C = e_C \quad (5-2)$$

所以

$$\begin{cases} u_A = U_m \sin \omega t \\ u_B = U_m \sin(\omega t - 120^\circ) \\ u_C = U_m \sin(\omega t + 120^\circ) \end{cases} \quad (5-3)$$

其波形如图 5-3 所示。三相电压的相量表示为

$$\begin{cases} \dot{U}_A = Ue^{j0^\circ} \\ \dot{U}_B = Ue^{-j120^\circ} \\ \dot{U}_C = Ue^{j120^\circ} \end{cases} \quad (5-4)$$

相量图如图 5-4 所示。

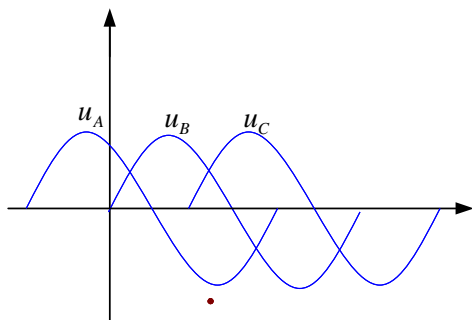


图5-3 相电压波形图

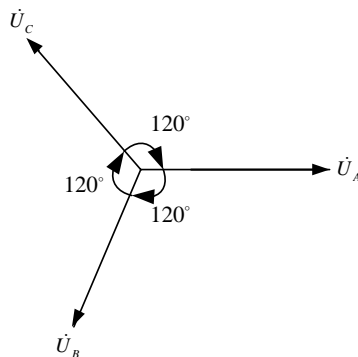


图5-4 相电压相量图

相电压常用 \dot{U}_p 表示。

三相电压达到最大值的先后次序称为相序。把由 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 的相序称为顺相序，反之称为逆相序。了解这一概念，对电源如何连接以及异步电动机的学习都很有用。

2. 线电压

负载从三相电源可以取得三个线电压，分别用 u_{AB} 、 u_{BC} 、 u_{CA} 表示。从图 5-2 可知

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B \\ \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C \\ \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A \end{cases} \quad (5-5)$$

借助图 5-4 的相量图可以求得线电压和相电压的关系，如图 5-5 所示。

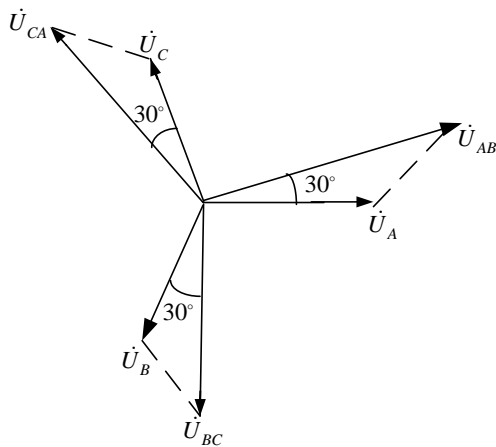


图5-5 线电压和相电压的关系

从图 5-5 可知，在相位上线电压超前对应的相电压 30° ，在大小上线电压的有效值是相电压有效值的 $\sqrt{3}$ 倍，可表示为

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = \sqrt{3} \dot{U}_A \angle 30^\circ \\ \dot{U}_{BC} = \sqrt{3} \dot{U}_B \angle 30^\circ \\ \dot{U}_{CA} = \sqrt{3} \dot{U}_C \angle 30^\circ \end{cases} \quad (5-6)$$

显然，在忽略电源内阻时，三个相电压对称，三个线电压也对称，我国低压配电系统中，规定相电压为 220 V，线电压为 380 V。

【思考与分析】

1. 在星形连接的三相电源中，如果一相的首尾接反，是否还会产生三相对称电压？
2. 在对称星形连接的三相电源中，已知顺相序为 $A \rightarrow B \rightarrow C$ ，并且相电压 $u_B = 220\sqrt{2} \sin 314t$ V，试写出另两个相电压和三个线电压的表达式。

5.2 三相电源与负载的连接

星形连接的三相交流电源为用户提供 380 V 和 220 V 两种数值的电压，而实际的用电负载有单相、三相之分，因此如何正确、合理而又安全地把负载接于电源上是一个值得重

视的问题。

负载和三相电源之间的连接,应该从两个方面考虑:一是要求三相电源加于负载上的电压等于负载的额定电压,只有这样才能保证负载的正常工作;二是对大量单相负载应尽量均衡地分接到电源的三个相上,力求使三相上所承受的负载阻抗大小相等,性质相同,以便合理地利用三相电源。下面主要讨论单相负载和三相负载如何正确地接入三相电源。

5.2.1 单相负载的连接

如电灯、电风扇等家用电器及单相电动机、接触器线圈等常用工业电器,它们工作时都是用一根火线和一根零线与电源连接,所以都属单相负载。对于单相负载的连接,分以下两种情况。

1. 少量单相负载的连接

一个单相负载或几个功率不大的单相负载与三相电源连接时,如果接于一相或两相上也不会对电源造成多大影响,所以只需考虑加于负载上的电压等于负载的额定电压。例如,当负载的额定电压为 220 V 时,应将负载的一端接于三根火线中的任一根上,另一端接在零线上,以取得三相电源的相电压。当负载的额定电压为 380 V 时,应将负载的两端接于三根火线中的任两根上,以取得三相电源的线电压,如图 5-6 所示。

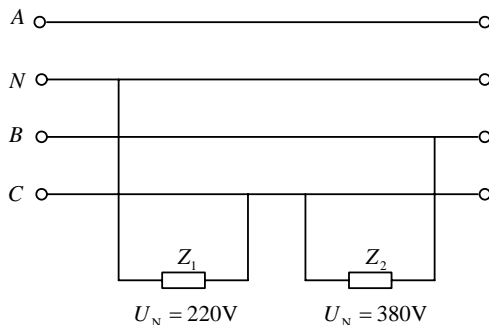


图5-6 少量单相负载的连接

2. 大量单相负载的连接

如果有大量的单相负载需要接到三相电源上,不应把它们集中并接在三相电源的一相上,否则将造成负载的不对称。首先应尽可能地把它们按照阻抗的大小和性质均衡地分成三组,把每一份接于电源的一相上。

在把每一份与电源连接的时候,若负载的额定电压为 220 V,应把每一份接于一根火线和零线之间,形成负载的星形连接,如图 5-7 (a) 所示,这时每一份负载承受的是电源

的相电压。若负载的额定电压为 380 V，应把每一份接于两两火线之间，形成负载的三角形连接，如图 5-7 (b) 所示，这时每一份负载承受的是电源的线电压。

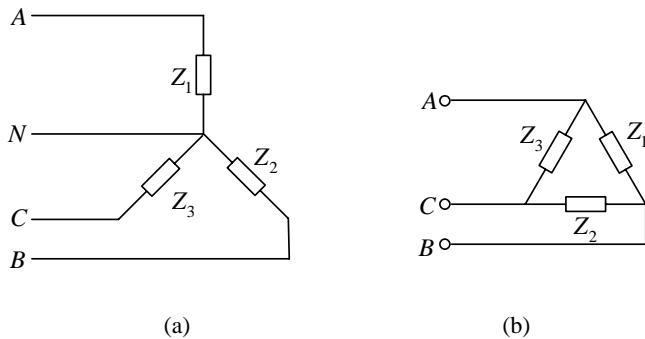


图5-7 大量单相负载的连接

从以上可以看出，负载有星形和三角形两种连接方式。负载接成星形还是三角形要根据三相电源电压和负载的额定电压而定。

5.2.2 三相负载的连接

三相负载有两种情况，一种是上面讲述的由三组单相负载按星形或三角形方式连接而构成的负载；另一种如三相电动机、三相电炉等，它们本身就是一个三相负载。当然这种三相负载内部也是有三组单相负载按星形或三角形方式连接而成的。下文将会讨论在这两种情况下三相电路的计算。

【思考与分析】

1. “对于三相负载的对称问题，不但要考虑理论对称，还要考虑实际应用的对称。”这句话应如何理解？
2. 有人说：“一幢大楼内所有单相用电器都是并联接在一起的。”这句话对吗？为什么？

5.3 负载的星形连接

负载的星形连接如图 5-8 (a) 所示，每一相负载的复阻抗分别用 Z_a 、 Z_b 、 Z_c 表示。下面来研究这种电路。

研究的方法主要是计算电路中各物理量，三条火线上的电流称为线电流，分别用 \dot{I}_A 、

\dot{I}_B 和 \dot{I}_C 表示, 中线上的电流称为中线电流, 用 \dot{I}_N 表示, 每个负载两端的电压称为负载相电压, 分别用 \dot{U}_a 、 \dot{U}_b 、 \dot{U}_c 表示, 经过每个负载的电流称为负载的相电流, 分别用 \dot{I}_a 、 \dot{I}_b 、 \dot{I}_c 表示, 参考方向如图 5-8 (a) 所示。下面来求解这些量。

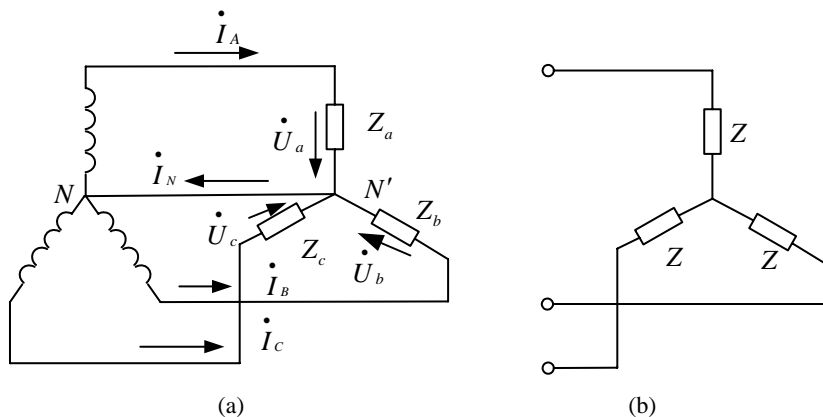


图 5-8 负载的星形连接

在略去连接导线电阻后, 每个负载相电压就等于电源的相电压, 即

$$\begin{cases} \dot{U}_a = \dot{U}_A \\ \dot{U}_b = \dot{U}_B \\ \dot{U}_c = \dot{U}_C \end{cases} \quad (5-7)$$

由式 (5-7) 可知, 三个负载的相电压是对称的。

知道了负载相电压后, 就可以根据相量形式的欧姆定律计算出相应的负载相电流, 即

$$\begin{cases} \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{Z_a} = \frac{\dot{U}_A}{Z_a} \\ \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{Z_b} = \frac{\dot{U}_B}{Z_b} \\ \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{Z_c} = \frac{\dot{U}_C}{Z_c} \end{cases} \quad (5-8)$$

从图 5-8 (a) 还可以看出, 在星形连接的电路中流过各相负载的相电流就是流过各火线的线电流, 即

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_a \\ \dot{I}_B = \dot{I}_b \\ \dot{I}_C = \dot{I}_c \end{cases} \quad (5-9)$$

根据 KCL，列出图 5-8 (a) 中负载公共点 N' 的 KCL 方程为

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C \quad (5-10)$$

若三相复阻抗相等，即 $Z_a = Z_b = Z_c$ ，则称为对称三相负载。由式 (5-8) 和式 (5-9) 可知，三个线电流也是对称的，如图 5-9 所示。掌握了对称的特点，将给计算带来很大的方便。

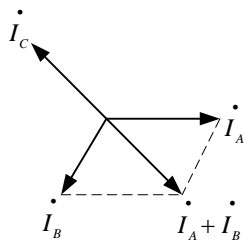


图5-9 对称三相负载的相量图

从图 5-9 还可以看出中线电流为零，即

$$\dot{I}_N = 0 \quad (5-11)$$

所以这时的中线可以去掉，变成三相三线制，连接如图 5-8 (b) 所示。例如三相电动机、三相电炉等三相负载属于这种情况。

若三相复阻抗不相等，即 $Z_a \neq Z_b \neq Z_c$ ，则称为不对称三相负载。从式 (5-8)、式 (5-9) 可以看出三个线电流也不再对称，中线上也就存在电流，这时的中线就不能去掉，否则会使加在每相负载上的电压不再对称，影响用电器的正常工作或烧坏用电器。所以，在不对称负载的三相四线制连接中，中线主要作用是使电源加在各相负载上的电压对称。

在低压配电系统中，都采用三相四线制，在这里中性线是不能随意去掉的。这是因为在低压配电系统中，有大量单相负载存在，使得三相负载总是不对称，如果去掉中线，会使三相负载的相电压也不再对称，有深有低，使得各相负载无法工作，严重时还会烧坏负载。

例 5-1 已知一三相对称负载中，每一相负载的复阻抗为 $Z = (6 + j8) \Omega$ ，额定电压为 220 V，现接于线电压为 380 V 的三相四线制电源上，负载应如何接？求线电流、中线电流，并画出相量图。

解 由已知条件可知，负载应按照星形连接，如图 5-10 (a) 所示。

为了计算方便，需设定初相位，由于本题用到的是相电流，所以设出 \dot{U}_A 为好。

设

$$\dot{U}_A = 220e^{j0^\circ} \text{ V}$$

则有

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z} = \frac{220e^{j0^\circ}}{6 + j8} = 10e^{-j53.1^\circ} \text{ V}$$

由对称条件可知

$$\dot{I}_B = 10e^{j(-53.1^\circ - 120^\circ)} = 10e^{-j173.1^\circ} \text{ A} \quad \dot{I}_C = 10e^{j(-53.1^\circ + 120^\circ)} = 10e^{j66.9^\circ} \text{ A}$$

其相量图如图 5-11 (b) 所示。

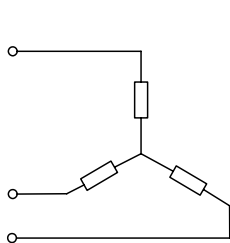


图5-10 例题5-1图

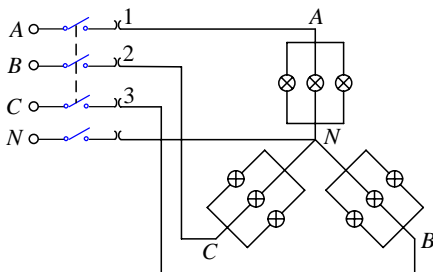
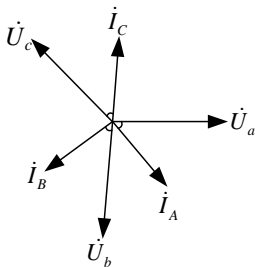


图5-11 星形连接的三相负载

由相量图可以看出，三个线电流是对称的，所以

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$$

【思考与分析】

1. 当负载为星形连接时，在什么条件下可以去掉中线？
2. 有人说，在三相四线制和三相三线制连接中，无论三相负载对称与否，加在每相负载上的电压都等于电源的相电压。这句话对吗？为什么？
3. 在三相四线制供电中，为什么在中线上不能接开关和熔断器？
4. 三相负载的阻抗相等，能否说明三相负载对称？

53.2

Z

5.4 三相交流电路的连接及测量

53.2

53.2

Z

n

7

【实训室活动】

目的：熟悉三相负载星形的接线方法；了解三相对称电路的线电压、相电压，线电流、

相电流的关系；了解三相四线制电路中中线的作用。

设备与器材：交流电压表、交流电流表、白炽灯实验板、熔断器、转换开关、电流测试插孔板等。

操作步骤：

(1) 本实验用三组相同的白炽灯作为三相负载，可将每组的三个灯泡并联，然后按图 5-11 接线；

(2) 将开关闭合，在电路对称情况下，测量有中线（ N 接通）和无中线（ N 断开）时的线电压、相电压、线电流、相电流及中线电压、中线电流的值，并记入表 5-1；

表 5-1 星形连接电路测量数据记录表

负载	中线	U_{AB}	U_{BC}	U_{CA}	U_A	U_B	U_C	I_A	I_B	I_C	$U_{NN'}$	I_N
对称	有											
	无											
不对称	有											
	无											

(3) 使 A 相断开二盏灯， B 相断开一盏灯（即负载不对称）的情况下，分别测量有中线、无中线两种情况下各电流、电压的值，填入下表，并注意观察灯泡亮度的变化。

注意事项：

(1) 电压很高（380 V），严禁带电操作，接好电路后，一定认真检查或请教老师，确认无误后，方可通电，以保证人身和设备安全；

(2) 实验中必须严格遵守“先接线，后通电；先断电，后拆线”的实验操作原则。

实训报告要求：

(1) 认真分析数据；

(2) 总结中线的作用及实际应用中对它的要求。

5.5 负载的三角形连接

负载的三角形连接如图 5-12 所示，每相负载的复阻抗分别用 Z_{ab} 、 Z_{bc} 和 Z_{ca} 表示。下面来研究这种电路。

三条火线上的线电流分别用 \dot{I}_A 、 \dot{I}_B 和 \dot{I}_C 表示，每个负载两端相电压分别用 \dot{U}_{ab} 、 \dot{U}_{bc} 、 \dot{U}_{ca} 表示，经过每个负载的负载相电流分别用 \dot{I}_{ab} 、 \dot{I}_{bc} 、 \dot{I}_{ca} 表示，参考方向如图 5-12 所示。

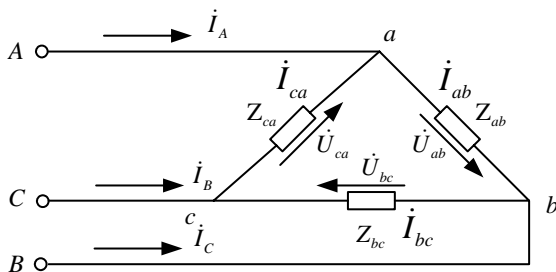


图5-12 负载的三角形连接

如果不考虑导线电阻, 各相负载的相电压与电源的线电压相等, 即

$$\begin{cases} \dot{U}_{ab} = \dot{U}_{AB} \\ \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{BC} \\ \dot{U}_{ca} = \dot{U}_{CA} \end{cases} \quad (5-12)$$

由式 (5-12) 可知, 三个负载的相电压也是对称的。

根据相量形式的欧姆定律可得出

$$\begin{cases} \dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{Z_{ab}} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z_{ab}} \\ \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_{bc}} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_{bc}} \\ \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{Z_{ca}} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_{ca}} \end{cases} \quad (5-13)$$

负载的线电流为

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \\ \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} \\ \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \end{cases} \quad (5-14)$$

相量图如图 5-13 所示。

若三相负载对称, 则有

$$Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z$$

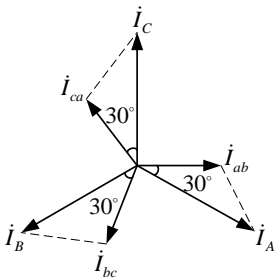


图 5-13 三角形连接的相量图

由图 5-13 可以看出, 三个线电流也是对称的, 在相位上线电流比相应的相电流滞后 30° , 数值上线电流的有效值是相电流有效值的 $\sqrt{3}$ 倍, 用相量形式表示为

$$\begin{cases} \dot{I}_A = \sqrt{3} \dot{I}_{ab} \angle -30^\circ \\ \dot{I}_B = \sqrt{3} \dot{I}_{bc} \angle -30^\circ \\ \dot{I}_C = \sqrt{3} \dot{I}_{ca} \angle -30^\circ \end{cases} \quad (5-15)$$

给计算带来很大方便。

若三相负载不对称, 虽然相电压对称, 但相电流不对称, 线电压也不再对称, 所以不能用计算一相的方法来计算, 只能每相分别按式 (5-13) 和式 (5-14) 求解。

例 5-2 今有一个三角形连接的对称三相负载, 已知每相负载的复阻抗为 $Z = (6 + j8) \Omega$, 所接电源的线电压为 380 V, 试求正常工作时的相电流和线电流。

解 由于负载对称, 所以只计算一相即可。

$$I_{ab} = \frac{U_{ab}}{|Z_{ab}|} = \frac{U_{AB}}{|Z|} = \frac{380}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = 38 \text{ A}$$

即相电流

$$I_p = 38 \text{ A}$$

$$I_A = \sqrt{3} I_{ab} = \sqrt{3} \times 38 = 65.8 \text{ A}$$

即线电流

$$I_l = 65.8 \text{ A}$$

【思考与分析】

1. 把电动机内部的三个线圈接成星形还是三角形连接的理论依据是什么? 由同一电源供电, 试比较两种接线方式的线电流哪个大? 大多少倍?

2. 三角形连接的三相负载中, 线电流是否一定是相电流的 $\sqrt{3}$ 倍?

3. 三角形连接的三相负载中, 如果用电流表测出每相电流相等, 能否说明三相负载对称?

5.6 三相交流电路连接及测量

【实训室活动】

目的：熟悉三相负载作三角形连接的接线方法；了解三相对称电路的线电压、相电压，线电流、相电流的关系。

设备与器材：交流电压表、交流电流表、白炽灯实验板、熔断器、转换开关、电流测试插孔板等。

操作步骤：

(1) 本实验用三组相同的白炽灯作为三相负载，三角形连接时，必须将每组的三个灯泡串联，并按图 5-14 连接电路；

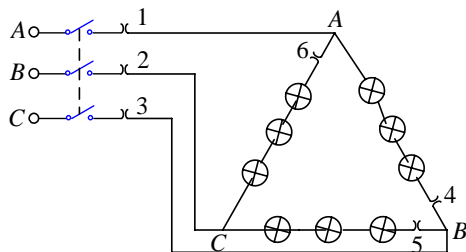


图 5-14 三角形连接的三相负载

(2) 测量负载对称情况下的线电压、相电压、线电流、相电流的值，填入表 5-2；

(3) 负载不对称（A 相短路一盏灯）情况下各电流、电压值。

表 5-2 三角形连接电路测量数据记录表

负载	状态	I_A	I_B	I_C	I_{AB}	I_{BC}	I_{CA}	U_{AB}	U_{BC}	U_{CA}
对称	①									
不对称	②									

注意事项：

(1) 电压很高（380 V），严禁带电操作，接好电路后，一定认真检查或请教老师，确认无误后，方可通电，以保证人身和设备安全；

(2) 实验中必须严格遵守“先接线，后通电；先断电，后拆线”的实验操作原则。

实训报告要求：

(1) 认真分析数据；

(2) 总结三角形连接时，线电流和相电流的关系。

5.7 三相电路的功率

对于星形或三角形连接, 无论对称与否, 它的总有功功率(或无功功率)都应该等于各相有功功率(或无功功率)的总和, 即

$$\begin{aligned} P &= P_A + P_B + P_C \\ &= U_a I_a \cos \varphi_a + U_b I_b \cos \varphi_b + U_c I_c \cos \varphi_c \end{aligned} \quad (5-16)$$

$$\begin{aligned} Q &= Q_A + Q_B + Q_C \\ &= U_a I_a \sin \varphi_a + U_b I_b \sin \varphi_b + U_c I_c \sin \varphi_c \end{aligned} \quad (5-17)$$

但视在功率不等于各相视在功率之和, 而应该为

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (5-18)$$

负载对称时, 每相负载的有功功率(或无功功率)相等, 则

$$P = 3P_A = 3U_a I_a \cos \varphi_a = 3U_p I_p \cos \varphi_p \quad (5-19)$$

$$Q = 3Q_A = 3U_a I_a \sin \varphi_a = 3U_p I_p \sin \varphi_p \quad (5-20)$$

$$S = 3U_p I_p \quad (5-21)$$

式中, U_p 和 I_p 分别为负载相电压和相电流, φ_p 为负载相电压和相电流的相位差。

当对称负载是三角形连接时, 则有:

$$U_{ab} = U_{AB} \quad I_A = \sqrt{3}I_{ab} \quad (5-22)$$

当对称负载是星形连接时, 则有:

$$U_{AB} = \sqrt{3}U_a \quad I_A = I_a \quad (5-23)$$

不论对称负载为哪种连接, 将式(5-22)、(5-23)代入式(5-19)和式(5-20), 可得

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi_p \quad (5-24)$$

$$Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi_p \quad (5-25)$$

式中, U_l 和 I_l 分别为线电压和线电流, φ_p 仍为相电压和相电流的相位差。

将式(5-24)、(5-25)代入式(5-18), 得

$$S = \sqrt{3}U_l I_l \quad (5-26)$$

对于对称负载, 不论是星形连接还是三角形连接, 在已知相电压和相电流时分别用式(5-19)、(5-20)和(5-21)计算有功功率、无功功率和视在功率较为方便; 在已知线电压和线电流时分别用式(5-24)、(5-25)和(5-26)计算有功功率、无功功率和视在功率较为方便。

例 5-3 有一个三相对称负载, 每相的复阻抗为 $Z = (6 + j8) \Omega$, 已知电源的线电压为 380 V, 试求当负载分别接为星形和三角形连接时的功率, 并比较其结果。

解 由已知得

$$|Z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \Omega$$

$$\cos \varphi = \frac{6}{10} = 0.6$$

当负载为星形连接时

相电压

$$U_p = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

相电流

$$I_p = \frac{U_p}{|Z|} = \frac{220}{10} = 22 \text{ A}$$

功率

$$P_Y = 3U_p I_p \cos \varphi = 3 \times 220 \times 22 \times 0.6 = 8.7 \text{ kW}$$

当负载为三角形连接时

相电压

$$U_p = 380 \text{ V}$$

相电流

$$I_p = \frac{U_p}{|Z|} = \frac{380}{10} = 38 \text{ A}$$

功率

$$P_{\Delta} = 3U_p I_p \cos \varphi = 3 \times 380 \times 38 \times 0.6 = 26 \text{ kW}$$

比较结果得

$$\frac{P_{\Delta}}{P_Y} = 3$$

从例 5-3 可以看出, 对于三相负载的不同接法, 其消耗的功率是不一样的, 所以在进行负载的连接时, 应分清是哪一种接法, 如果接反, 负载将不能正常工作, 或者被烧坏。

【思考与分析】

1. 有人说: “三相电路的视在功率也等于每相视在功率之和。”这句话对吗? 为什么?
2. 三相负载的功率因数角, 是否一定等于每相负载复阻抗的辐角? 为什么?

5.8 本章小结

1. 三相交流发电机可以产生三个对称感应电动势, 当电源以星形方式连接时, 可以提供三个相电压和三个线电压, 在不考虑电源内阻时, 三个相电压对称, 三个线电压也对称, 在大小上线电压是相电压的 $\sqrt{3}$ 倍, 在相位上线电压超前相电压 30° 。

2. 三相负载有星形和三角形两种连接方式。当负载为三相四线制连接时, 不论负载对称与否, 加在每相负载两端的电压等于电源相电压。当负载对称时, 中线没有电流, 可去

掉, 变成三相三线制连接。负载为三角形连接时, 加在每相负载上的电压等于电源线电压。当负载对称时, 线电流的大小是相电流的 $\sqrt{3}$ 倍, 相位上线电流滞后相电流 30° 。

3. 当三相负载不对称时, 功率公式为

$$P = P_A + P_B + P_C \quad Q = Q_A + Q_B + Q_C \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

当负载对称时, 功率公式为:

(1) 已知相电压和相电流时

$$P = 3U_p I_p \cos \varphi \quad Q = 3U_p I_p \sin \varphi \quad S = 3U_p I_p$$

(2) 已知线电压和线电流时

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi \quad Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi \quad S = \sqrt{3}U_l I_l$$

其中, φ 为相电压和相电流的相位差。

5.9 自测与练习

5-1 在三相电路中, 将三相负载接成三相三线制的条件是_____, 接成三相四线制的条件是_____。

5-2 已知星形连接的对称三相电源, 当相电压 $\dot{U}_A = 220e^{j30^\circ} \text{ V}$ 时, 则 $\dot{U}_B = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$, $\dot{U}_C = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$, $\dot{U}_{AB} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$, $\dot{U}_{BC} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$, $\dot{U}_{CA} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ V}$ 。

5-3 对称三相负载 Y 形连接, 每相负载 $Z = (30 + j40) \Omega$, 将其接在相电压为 220 V 的三相电源上, 则负载消耗的有功功率 $P = \underline{\hspace{2cm}} \text{ W}$ 、无功功率 $Q = \underline{\hspace{2cm}} \text{ var}$ 、视在功率 $S = \underline{\hspace{2cm}} \text{ VA}$ 。

5-4 下列结论正确的是 ()。

- (a) 当负载为星形连接时, 线电流必等于相电流
- (b) 当负载为星形连接时, 必须有中线
- (c) 当负载为星形连接时, 线电压必为负载相电压的 $\sqrt{3}$ 倍
- (d) 当每相负载的额定电压等于电源的相电压时, 要接成星形连接

5-5 下列结论正确的是 ()。

(a) 当负载为三角形连接时, 无论负载对称与否, 每相负载承受的电压一定等于电源的线电压

(b) 当负载为三角形连接时, 线电流一定等于相电流的 $\sqrt{3}$ 倍

(c) 当负载为三角形连接时, 如果一相断路, 其他两相一定要受影响

(d) 当每相负载的额定电压等于电源的线电压时, 要三相负载接成三角形连接

5-6 有 $220\text{ V}/100\text{ W}$ 的白炽灯 450 只需要接在三相电源上, 已知电源线电压为 380 V , 画出白炽灯接入电源的线路图, 并求白炽灯全亮时的线电流和中线电流

5-7 在三相电路中, 已知星形连接的三相对称负载的复阻抗为 $Z = (6 + \text{j}8)\ \Omega$, 电源的相电压为 220 V 。试求负载相电压、相电流、线电流, 并画出电压和电流的相量图

5-8 在图 5-15 所示的电路中, 已知 R_A 、 R_B 、 R_C 分别表示 10 盏、10 盏、30 盏灯泡, 每盏灯都是 220 V 、 60 W , 试求线电流和中线电流, 并画出相量图

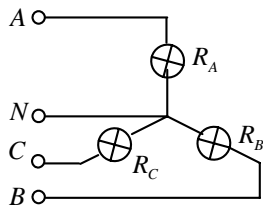


图5-15 自测与练习5-8图

5-9 在电动机降压起动中, 最常用的是 $Y-\Delta$ 降压起动法, 即先将三个定子线圈接成星形连接, 当达到额定转速时再换成三角形连接。试求在转换前后线电流之比。

5-10 三相对称负载每一相由 $R = 6\ \Omega$ 的电阻和 $x_L = 8\ \Omega$ 的电感串联而成, 且额定电压为 380 V 。已知三相电源的相电压为 220 V , 三相负载应如何接? 并计算相电流和线电流。

5-11 在线电压为 380 V 的对称三相电源中接入三角形连接的对称三相负载, 在正常情况下的线电流为 24 A , 试求下列几种情况下各相负载的电流: (1) 正常情况; (2) AB 相负载断路; (3) A 火线断路。

5-12 试求习题 5-10 中三相负载的有功功率、无功功率和视在功率。

5-13 三相对称负载电路中, 已知线电流 $\dot{I}_A = 10\text{e}^{\text{j}15^\circ}\text{ A}$, 线电压 $\dot{U}_{AB} = 380\text{e}^{\text{j}75^\circ}\text{ V}$, 求负载为星形连接和三角形连接时的功率。

第 6 章 一阶电路的暂态分析

前面 5 章讨论了电路在稳定状态下的激励与响应之间的关系。稳定工作状态简称稳态，所谓稳态，是指电路在直流或正弦电源激励下，电路中任一支路的电压或电流在任意时刻都是直流量或是同电源频率相同的正弦量。动态电路的暂态分析，就是对含有动态元件的电路，在给定的独立源激励或在初始储能作用下，求解电路达到稳定状况所经历的过程中响应随时间变化的规律，即研究电路暂态过程的规律。两类约束关系是暂态分析的基础，由于动态元件的伏安关系是微分或积分关系，所以描述动态电路的方程是微分方程。一般来讲，一阶电路仅含有一个动态元件，用一阶微分方程描述，本章重点介绍一阶电路的暂态分析。

6.1 动态元件

6.1.1 电感元件

电感元件具有储存磁场能量的作用，在图 6-1 中，其伏安关系式为，

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (6-1)$$

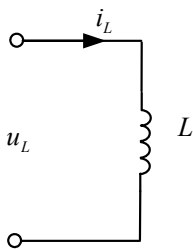


图 6-1 电感元件电路符号

分析式 (6-1) 可得如下结论。

(1) 任何时刻，电感上的电压与该时刻通过电流的变化率呈正比，而与该瞬间电流的值无关。即使电流的值很大，但如果恒定，电压仍为零。反之，电流为零时，电压不一定

为零。只有在电流变动条件下电感两端才有电压，所以电感元件称为动态元件。例如，在直流电路中，电感的电流不发生变化，则电压 $u_L = 0$ ，即直流电路中，电感等效为一短路线，它对直流起短路作用。

(2) 由于电压值 u_L 为一有限值，所以电感电流不能跃变，只能连续变化。

(3) 由式 (6-1)，得到

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt \quad (6-2)$$

由式 (6-2) 可以看出：某一瞬间的电流反映该时刻以前的所有电压，因此电感有记忆电压的作用。

1. 电感元件的串联

如图 6-2 所示是两个电感相串联的电路，根据 KVL，有

$$u_L(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad u_1(t) = L_1 \frac{di_L(t)}{dt} \quad u_2(t) = L_2 \frac{di_L(t)}{dt}$$

所以

$$u_L(t) = L_1 \frac{di_L(t)}{dt} + L_2 \frac{di_L(t)}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di_L(t)}{dt}$$

即

$$u_L(t) = (L_1 + L_2) \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (6-3)$$

式 (6-3) 中

$$L = L_1 + L_2$$

由以上分析可知：图 6-2 (a) 可等效为图 6-2 (b)，等效电感 L 为 L_1 与 L_2 之和。

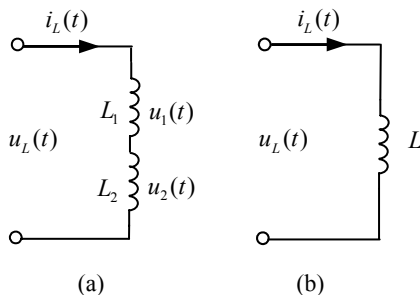


图 6-2 电感元件的串联及等效电路

由式 (6-3)，可得

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_L(t)$$

则, 电路图 6-1 (a) 中, L_1 、 L_2 上的电压 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 与总电压 $u(t)$ 的关系为

$$\begin{cases} u_1(t) = L_1 \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{L_1}{L} u_L(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} u_L(t) \\ u_2(t) = L_2 \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{L_2}{L} u_L(t) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} u_L(t) \end{cases} \quad (6-4)$$

显然, 电感串联公式与电阻串联公式类似, 串联电感对交流电压的分压公式与串联电阻的分压公式类似。

若有 n 个电感相串联, 则其等效电感 L 为各电感之和

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \quad (6-5)$$

2. 电感元件的并联

如图 6-3 (a) 所示为两个电感元件并联的电路, 根据 KCL, 有

$$i_L(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

其中

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t u_L dt, \quad i_2(t) = \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^t u_L dt$$

则

$$i_L(t) = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt \quad (6-6)$$

在式 (6-6) 中

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

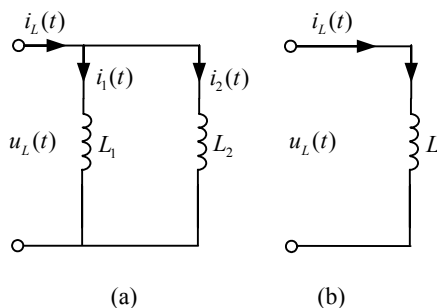


图 6-3 电感元件的并联及等效电路

由以上分析可知, 图 6-3 (a) 电路可等效为图 6-3 (b), 等效电感 L 的倒数等于并联电感 L_1 的倒数与 L_2 的倒数之和。

由式 (6-6) 可知

$$Li_L(t) = \int_{-\infty}^t u_L dt$$

则, 电路图 6-2 (a) 中, L_1 、 L_2 上的电流 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 与总电流 $i_L(t)$ 的关系为

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{L}{L_1} i_L(t) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_L(t) \\ i_2(t) = \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{L}{L_2} i_L(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_L(t) \end{cases} \quad (6-7)$$

式 (6-7) 为两个并联电感元件的分流公式, 与两个电阻并联分流公式类似。

若有 n 个电感并联, 则其等效电感为

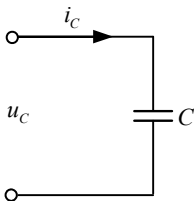
$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \quad (6-8)$$

显然, 电感并联与电阻并联公式的形式类似。

6.1.2 电容元件

电容元件具有储存电场能量的作用, 在图 6-4 中, 其伏安关系式为

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (6-9)$$



分析式 (6-9) 可得如下结论。

(1) 任何时刻, 电容上的电流与该时刻电压的变化率呈正比, 而与该瞬间电压的值无关。即使电压的值很大, 但如果恒定, 电流仍为零。反之, 电压为零时, 电流不一定为零。由于在电压变动条件下才有电流, 所以电容元件称为动态元件。例如, 在直流电路中, 电容两端的电压不发生变化, 则电流 $i_C = 0$, 电容等效为开路, 故电容具有隔断直流的作用。

(2) 由于电容电流 i_C 为一有限值, 所以电容电压不能跃变, 只能连续变化。

(3) 由式 (6-9), 得到

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt \quad (6-10)$$

式(6-10)说明,某一瞬间电容的电压与该时刻以前的所有电流有关,因此电容有记忆电流的作用。

1. 电容元件的串联

如图6-5(a)所示是两个电容相串联的电路,根据KVL有

$$u_C(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

根据式(6-10)有

$$u_1(t) = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_C dt, \quad u_2(t) = \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_C dt$$

则

$$u(t) = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int_{-\infty}^t i_C dt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt$$

式中

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

所以,图6-5(a)电路可等效为图6-5(b),即两个电容串联,其等效电容的倒数等于两个电容各自倒数之和。

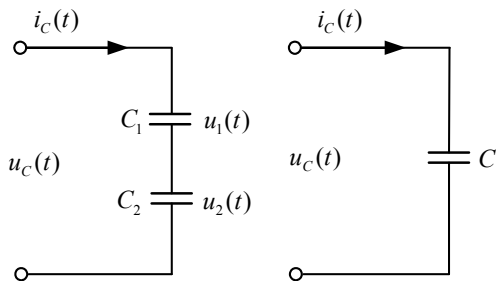


图 6-5 两个电容元件的串联及等效电路

如图6-5(a)所示电路中,两个电容上的电压与总电压的关系分别为

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_C dt = \frac{C}{C_1} u_C(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u_C(t) \\ u_2(t) = \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_C dt = \frac{C}{C_2} u_C(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_C(t) \end{cases} \quad (6-11)$$

若有 n 个电容串联,则其等效电容为

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad (6-12)$$

可见, 电容的串联公式与电阻的并联公式类似, 其分压公式与电阻并联的分流公式类似。

2. 电容元件的并联

如图 6-6 所示是两个电容相并联的电路, 根据 KCL 有

$$i_c(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

根据式 (6-9) 有

$$i_1(t) = C_1 \frac{du_c(t)}{dt}, \quad i_2(t) = C_2 \frac{du_c(t)}{dt}$$

所以

$$i_c(t) = (C_1 + C_2) \frac{du_c(t)}{dt} = C \frac{du_c(t)}{dt}$$

式中

$$C = C_1 + C_2$$

即, 两个电容并联, 其等效电容等于两个电容之和。

两个电容上的电流 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 与总电流 $i_c(t)$ 的关系为

$$\begin{cases} i_1(t) = C_1 \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{C_1}{C} i_c(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i_c(t) \\ i_2(t) = C_2 \frac{du_c(t)}{dt} = \frac{C_2}{C} i_c(t) = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i_c(t) \end{cases} \quad (6-13)$$

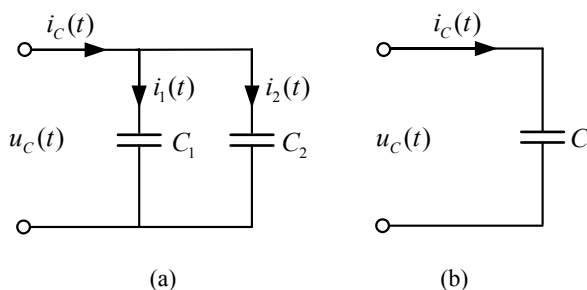


图 6-6 两个电容元件的并联及等效电路

电容元件的并联公式与电阻串联的公式类似, 电容元件并联的分流公式与电阻串联分压公式形式类似。

若有 n 个电容并联, 则其等效电容为

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \quad (6-14)$$

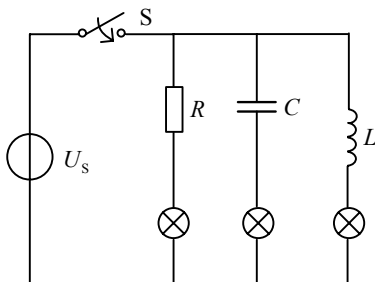
注意,上面所说的分压、分流公式,是指对交流或变化的电流和电压而言的,对于直流电,只有电容的分压公式成立,其他公式不能使用。因为在直流电路中,电感相当于短路线,不存在所谓的分压、分流公式,电容相当于开路,不存在分流的问题。

【思考与分析】

1. 电感、电容的串、并联等效公式与电阻的串并联等效公式在形式上有怎样的对应关系?
2. 为什么电感元件上的电流不能发生跃变? 电容元件的电压不能发生跃变?

6.2 过渡过程与换路定律

演示电路如图 6-7 所示。观察开关 S 闭合时三个灯泡亮度的变化情况。



观察结论:

- (1) 当开关 S 闭合时,电阻支路的灯泡立即发亮,且亮度始终不变,说明电阻支路在开关闭合后立即进入稳定的亮度状态;
- (2) 电感支路的灯泡在开关闭合瞬间不亮,然后逐渐变亮,最后亮度不再变化;
- (3) 电容支路的灯泡在开关闭合瞬间很亮,然后逐渐变暗直到熄灭。

6.2.1 过渡过程及换路的概念

由上述观察现象可知,电阻支路灯泡立即达到稳定状态,电感、电容支路的灯泡在开关闭合后到最后稳定状态,期间要经历一个过程。一般来说,电路从一种稳定状态变化到另一种稳定状态的中间过程叫作电路的过渡过程。又因为实际电路中的过渡过程是暂时的,

故过渡过程也叫暂态过程，简称暂态。

含有动态元件（电容、电感）的电路，叫动态电路。在动态电路中，元件参数、电源数值的突然变化，电路的接通、断开或接线的改变，都称为换路。动态电路在换路时通常都要产生暂态过程。原因是由于动态元件为储能元件，其能量的存储或释放都必须要经过一个过程，而不能跃变。例如，电感的储能公式为 $\omega_L = \frac{1}{2} Li_L^2$ ，电容的储能公式为 $\omega_C = \frac{1}{2} Cu_C^2$ ，

若能量能够突变，则 $\frac{d\omega}{dt} \rightarrow \infty$ ，这意味着能量的变化率为无穷大，显然是不可能的。

暂态过程的研究具有重要的实际意义，暂态过程广泛应用于电子技术和自动化控制技术中。一方面可以充分利用电路的一些暂态特性应用于工程实际中；另一方面，又可以采取一些措施防止暂态特性带来的破坏性后果。

6.2.2 换路定律

通常把换路的瞬间定在 $t=0$ ，则 $t=0_-$ 为换路前终了瞬间，这时的电流、电压分别记为 $i(0_-)$ 和 $u(0_-)$ ； $t=0_+$ 为换路后的初始瞬间，这时的电流、电压分别记为 $i(0_+)$ 和 $u(0_+)$ ， $i(0_+)$ 和 $u(0_+)$ 也叫初始值。

由于动态元件 L 、 C 是储能元件，储能必然对应一个吸收与释放的过程，显然这些过程需要时间，不能跃变，由此可知与能量相关的电感电流不能跃变，电容上的电压不能跃变。据此得到一个重要的基本定律：在电路发生换路后一瞬间，电感元件上通过的电流 i_L 和电容元件上的电压 u_C ，都应保持换路前一瞬间的原有值不变。这就是换路定律，用公式表示为

$$\begin{cases} i_L(0_+) = i_L(0_-) \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) \end{cases} \quad (6-15)$$

根据换路定律，只有电容电压和电感电流在换路瞬间不能突变，其他各量均不受换路定律的约束。根据换路定律求换路瞬时初始值的计算步骤具体如下：

- (1) 做出换路前 $t=0_-$ 时的等效电路，求出 $t=0_-$ 时的电感电流 $i_L(0_-)$ 和电容电压 $u_C(0_-)$ 。通常， $t=0_-$ 时的电路呈稳态，此时电感元件等效为短路线，电容元件等效为开路；
- (2) 根据换路定律确定换路后瞬间 $t=0_+$ 时电感电流 $i_L(0_+)$ 和电容电压 $u_C(0_+)$ ；
- (3) 做出 $t=0_+$ 时的等效电路，根据两类约束关系求 $t=0_+$ 时各支路电流和各元件上的电压。画等效电路时，用电流值为 $i_L(0_+)$ 的电流源代替换路前的电感元件，用电压值为 $u_C(0_+)$ 的电压源代替换路前的电容元件。

例 6-1 电路如图 6-8 (a) 所示，设开关 S 合上前电路已经进入稳态。已知 $U_s = 6 \text{ V}$ ， $R = 2 \Omega$ ， $L = 2 \text{ H}$ ， $C = 2 \mu\text{F}$ ，求开关 S 合上后瞬间 ($t=0_+$) 各支路的电流。

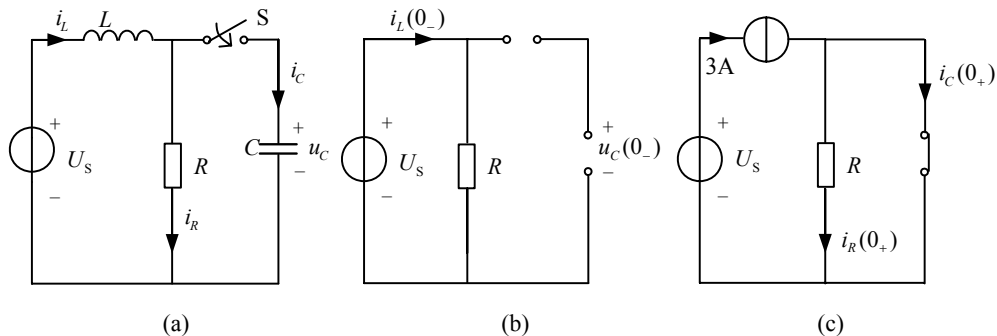


图 6-8 例 6-1 图

解 设各支路电流的参考方向如图 6-8 所示。

(1) $t=0_-$ 时的等效电路如图 6-8 (b) 所示, 此时电感相当于短路线, 电容相当于开路。

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R} = \frac{6}{2} = 3 \text{ A}$$

$$u_C(0_-) = 0$$

(2) 根据换路定律, 可得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 3 \text{ A}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

(3) $t=0_+$ 时等效电路如图 6-8 (c) 所示, 此时电感 L 相当于一个 3 A 电流源, 电容 C 相当于电压值为零的电压源, 即相当于短路线, 则

$$i_L(0_+) = i_C(0_+) = 3 \text{ A}$$

$$i_R(0_+) = 0$$

例 6-2 电路如图 6-9 所示, 设开关 S 断开前电路处于稳态, $t=0$ 瞬间 S 断开, 已知 $U_s = 16 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ 。求初始值 $u_C(0_+)$, $i_1(0_+)$, $i_3(0_+)$ 。

解 (1) $t=0_-$ 时的等效电路如图 6-9 (b) 所示, 此时电容相当于开路。

$$i_1(0_-) = i_3(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_3} = \frac{16}{10 + 30} = 0.4 \text{ A}$$

$$u_C(0_-) = i_3(0_-) R_3 = 0.4 \times 30 = 12 \text{ V}$$

(2) 根据换路定律, 可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 12 \text{ V}$$

(3) $t=0_+$ 时的等效电路如图 6-9 (c) 所示, 此时电容 C 相当于电压值为 12 的电压源。

$$i_3(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{R_2 + R_3} = \frac{12}{5 + 30} = 0.34 \text{ A}$$

$$i_1(0_+) = 0$$

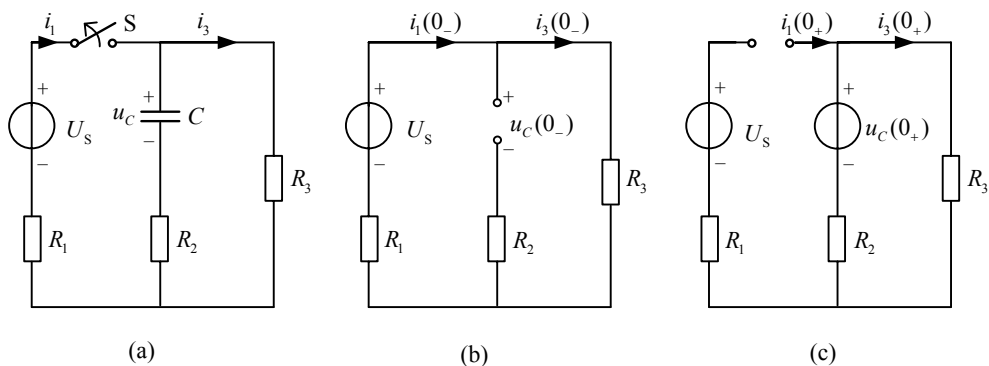


图 6-9 例 6-2 图

在熟练掌握初始值的计算方法后,可以适当简化计算步骤,比如 $t=0_-$ 时的等效电路可以不必画出,直接在原电路中求解换路前瞬间电流 $i_L(0_-)$ 或电压值 $u_L(0_-)$ 即可。

例 6-3 电路如图 6-10 所示, $t < 0$ 时电路已处于稳态,在 $t=0$ 时,开关 S 由“1”扳向“2”,求初始值 $i_C(0_+)$, $i_2(0_+)$ 。

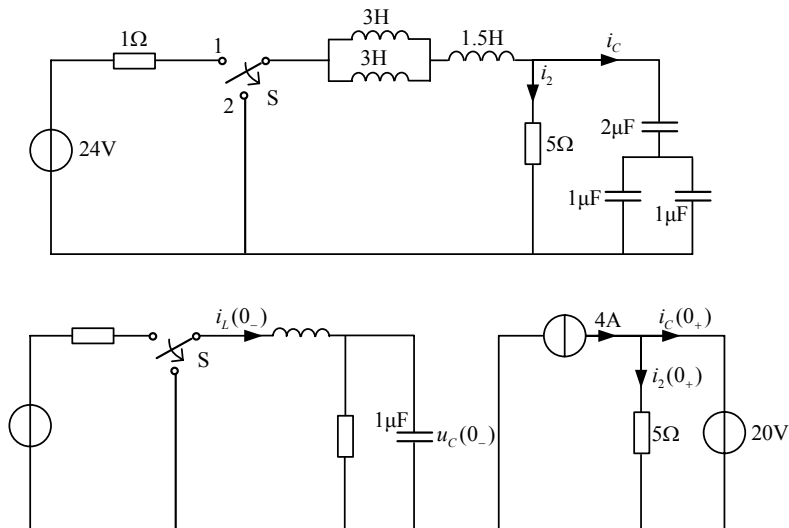


图 6-10 例 6-3 图

解 由电感、电容的串并联公式,求电路中的总电感 L 和总电容 C , 原电路的等效电路如图 6-10 (b) 所示。

$$L = (3//3) + 1.5 = 3 \text{ H}$$

$$C = (1+1)//2 = 1 \mu\text{F}$$

求 $t=0_-$ 时的电感电流 $i_L(0_-)$ 和电容电压 $u_C(0_-)$ ，在图 6-10 (b) 中，把电容视为开路，电感视为短路。

$$i_L(0_-) = \frac{24}{1+5} = 4 \text{ A}$$

$$u_C(0_-) = i_L(0_-) \times 5 = 4 \times 5 = 20 \text{ V}$$

根据换路定律，可得

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 20 \text{ V}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 4 \text{ A}$$

$t=0_+$ 时的等效电路如图 6-8 (c) 所示，此时电容 C 相当于电压值为 20 V 的电压源，电感相当于 4 A 的电流源。则

$$i_2(0_+) = \frac{20}{5} = 4 \text{ A} \quad i_C(0_+) = 4 - 4 = 0$$

【思考与分析】

1. 含储能元件的电路换路后为什么会发生过渡过程？什么是换路定律？写出其数学表达式。

2. 为了求换路后各电压电流的初始值，是否必须先求出所有电压、电流在换路前终了瞬间 $t=0_-$ 时的值？为什么？应该求出哪些值？

6.3 一阶电路的零输入响应

对于电阻电路，没有独立源作用，电路中就没有响应；而对于动态电路，若电路中不含有独立激励源（电压源 $U_s=0$ ，电流源 $I_s=0$ ），但动态元件中有一定的能量存储，即 $u_C(0_+)$ 不为零或 $i_L(0_+)$ 不为零，则电路中仍会有响应。把仅由储能元件的初始储能作为激励引起的响应称为动态电路的零输入响应。仅含一个动态元件的电路为一阶动态电路，下面分别讨论 RL 一阶电路及 RC 一阶电路的零输入响应。

6.3.1 RL 电路的零输入响应

电路如图 6-11 (a) 所示。 $t < 0$ 时，电路处于稳定状态，直流电压源作用于电路，电感电流 $i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_s} = I_0$ ； $t=0$ 时，开关 S 断开，此时电压源不再作用于电感，但电感储

有一定的磁场能, 电感与电阻 R 组成回路, 电路进入过渡过程, 如图 6-11 (b) 所示。下面分析 $t \geq 0$ 时该电路的零输入响应。

在图 6-11 (b) 中, 根据 KVL, 得

$$u_L + Ri_L = 0 \quad (6-16)$$

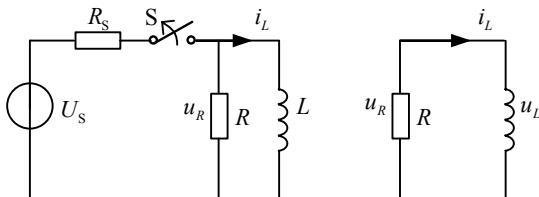


图 6-11 RL 电路的零输入响应

由于 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, 代入式 (6-16), 得

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \quad (6-17)$$

式 (6-17) 为常系数的一阶线性齐次微分方程。由高等数学知识知不难求其解为

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (6-18)$$

其中 A 为待定的积分常数, 将 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$ 代入式 (6-18), 得

$$A = I_0 \quad +$$

最后得到满足初始值的一阶线性常微分方程的解为

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (6-19)$$

令 $\tau = \frac{L}{R}$, 式 (6-19) 可表示为

(a)

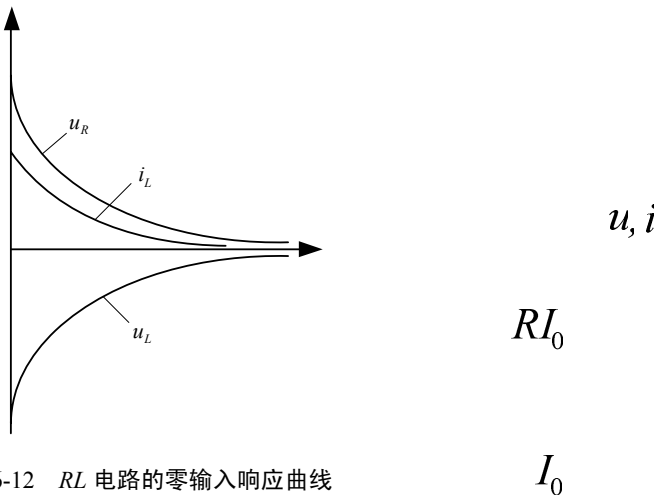
$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-20)$$

根据电阻、电感元件的约束关系, 可得电阻和电感上的电压分别为

$$u_R(t) = RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-21)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-22)$$

式 (6-20) ~ (6-22) 的波形如图 6-12 所示。

图 6-12 RL 电路的零输入响应曲线

由图 6-12 可见, 电感电流、电压及电阻电压均按照指数规律衰减, 并且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 三个量均趋于零, 此时电感存储的磁场能量全部被电阻消耗, 这就是 RL 电路的零输入响应。电感电流、电压及电阻电压随时间衰减的快慢取决于 τ 。 τ 具有时间的量纲, 故称其为时间常数。 τ 越大, 衰减就越慢, τ 越小, 衰减就越快。理论上 $t \rightarrow \infty$ 时, 电感的电流趋于零, 但实际一般经过 $3\tau \sim 5\tau$ 之后, 磁场的电流已经很小了, 接近于零, 在工程上一般可认为此时电路进入稳态。

6.3.2 RC 电路的零输入响应

电路如图 6-13 (a) 所示。 $t < 0$ 时, 电路处于稳定状态, 直流电压源作用于电路, $u_C(0_-) = U_S$; 在 $t = 0$ 时, 开关 S 由“1”合向“2”, 但电容已储存有电场能, 电容与电阻构成回路, 电路进入过渡过程, 如图 6-13 (b) 所示。下面分析 $t \geq 0$ 时该电路的零输入响应。

在图 6-13 (b) 中, 根据 KVL, 得

$$u_C + i_C R = 0 \quad (6-23)$$

其中, $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, 代入式 (6-23), 得

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = 0 \quad (6-24)$$

式 (6-24) 为一阶线性常微分方程, 不难求得通解为

$$u_C(t) = A e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (6-25)$$

其中 A 为待定的积分常数, 将 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_S$ 代入式 (6-25), 得

$$A = U_S$$

最后得到满足初始值的一阶线性常微分齐次方程的通解为

$$u_C(t) = U_S e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (6-26)$$

令 $\tau = RC$ ，式 (6-26) 可表示为

$$u_C(t) = U_S e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-27)$$

根据电容、电阻元件的约束关系可求得电路中的电流及电阻上的电压分别为

$$i_C(t) = -\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-28)$$

$$u_R(t) = -U_S e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-29)$$

式 (6-27) ~ (6-29) 波形如图 6-14 所示。

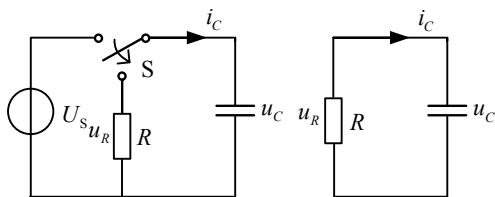


图 6-13 RC 电路的零输入响应

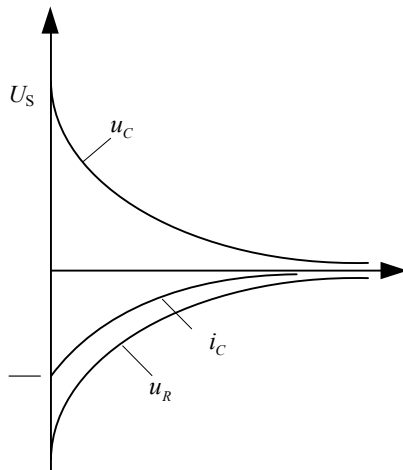


图 6-14 RC 电路的零输入响应曲线

图 6-14 与图 6-12 曲线变化规律相同。电容、电阻的电压及电路中的电流均按照指数规律衰减，当 $t \rightarrow \infty$ 时，三个量均趋于零，此时电容存储的电场能量全部被电阻消耗，这就是 RC 电路的零输入响应。它们随时间衰减的快慢取决于 τ 。 τ 也具有时间的量纲，为 RC 电路的时间常数。 τ 越大，各量衰减的就越慢， τ 越小，衰减就越快。理论上 $t \rightarrow \infty$ 时，电容的电压趋于零，但实际一般经过 $3\tau \sim 5\tau$ 之后，电容的电压就接近于零，在工程上一般可认为此时电路进入稳态。

综上所述，RL、RC 电路的零输入响应实质上就是电感、电容释放能量的过程。由 RL 电路和 RC 电路的计算结果可以看出，在发生零输入响应时，电路中各量均是自初始值开始按照指数规律衰减，因此，求解一阶电路的零输入响应时，只需计算出待求量的初始值

和电路的时间常数即可，而不必列微分方程。

若用 $f(t)$ 表示待求量，用 $f(0_+)$ 表示其初始值，则 $t \geq 0$ 时，一阶 RL (RC) 电路的零输入响应可以表示为

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (6-30)$$

下面通过例题加以说明。

例 6-4 如图 6-15 (a) 所示电路，换路前电路已达稳态， $t=0$ 时，开关 S 打开，求 $t \geq 0$ 时 $u_C(t)$ 、 $i_1(t)$ 。

解 求电容电压的初始值 $u_C(0_+)$ 及电流的初始值 $i_1(0_+)$ 。在 $t=0_-$ 时电路稳定，电容相当于开路，则

$$u_C(0_-) = 16 \times \frac{10}{10+6} = 10 \text{ V}$$

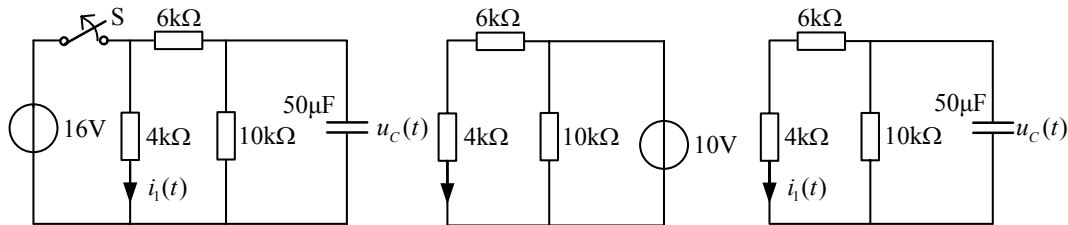


图 6-15 例 6-4 图

根据换路定律

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10 \text{ V}$$

$t=0_+$ 时，等效电路如图 6-15 (b) 所示，求 $i_1(0_+)$ 。

$$i_1(0_+) = \frac{10}{6+4} = 1 \text{ mA}$$

$t \geq 0$ 时，等效电路如图 6-15 (c) 所示。时间常数为

$$\tau = R_0 C = [(4+6) // 10] \times 10^3 \times 50 \times 10^{-6} = 0.25 \text{ s}$$

其中 R_0 为从电容两端看进去的戴维南等效电阻。

所以

$$u_C(t) = 10e^{-4t} \text{ V}, \quad i_1(t) = e^{-4t} \text{ mA}$$

例 6-5 如图 6-16 (a) 所示电路，换路前电路已达稳态， $t=0$ 时，开关 S 打开，已知 $I_S = 6 \text{ A}$ 、 $R_1 = 2 \Omega$ 、 $R_2 = 3 \Omega$ 、 $R_3 = 6 \Omega$ 、 $L = 0.9 \text{ H}$ 。求 $t \geq 0$ 时 $u_L(t)$ 、 $u_R(t)$ 和 $i_L(t)$ 。

+

+

—

—

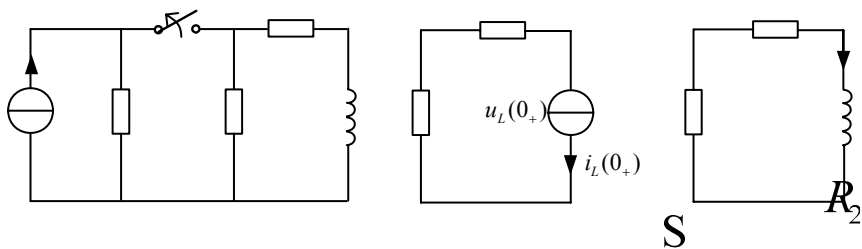


图 6-16 例 6-5 图

解 求电感电流的初始值 $i_L(0_+)$ 。在 $t=0_-$ 时电路稳定，电感相当于短路，则

$$\begin{aligned} i_L(0_-) &= I_S \times \frac{R_1}{R_1 + (R_2 // R_3)} \times \frac{R_3}{R_2 + R_3} \\ &= 6 \times \frac{2}{2 + (3 // 6)} \times \frac{6}{3 + 6} = 2 \text{ A} \end{aligned}$$

根据换路定律

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2 \text{ A}$$

$t=0_+$ 时的等效电路如图 6-16 (b) 所示，求 $u_R(0_+)$ ， $u_L(0_+)$ 。

$$\begin{aligned} u_R(0_+) &= -i_L(0_+) \times R_3 \\ &= -2 \times 6 = -12 \text{ V} \\ u_L(0_+) &= -i_L(0_+)(R_3 + R_2) \\ &= -2 \times (6 + 3) = -18 \text{ V} \end{aligned}$$

画出换路后 $t \geq 0$ 时的等效电路，如图 6-16 (c) 所示，则从电感两端看进去的等效电阻为

$$R_o = R_2 + R_3 = 3 + 6 = 9 \Omega$$

时间常数

$$\tau = \frac{L}{R_o} = \frac{0.9}{9} = 0.1 \text{ s}$$

所以

$$u_R(t) = -12e^{-10t} \text{ V}$$

$$i_L(t) = 2e^{-10t} \text{ A}$$

$$u_L(t) = -18e^{-10t} \text{ V}$$

由上述两道例题可知，求 $t \geq 0$ 时的零输入响应 $f(t)$ ，关键是求解各响应量的初始值及时间常数 τ 。初始值的求法见 6.2 节内容；用公式 $\tau = R_o C$ 或 $\tau = \frac{L}{R_o}$ 求解时间常数 τ 。注意 R_o 应为从电容或电感两端看进去的戴维南等效电阻。

【思考与分析】

1. 什么是一阶电路？什么是零输入响应？一阶电路的零输入响应具有怎样的变化规律？
2. 什么是时间常数？它与过渡过程有何关系？如何计算 RC 电路和 RL 电路的时间常数？如果与动态元件相联的不只是一个电阻，而是多个电阻联接而成的单口，又如何确定时间常数？

6.4 一阶电路的零状态响应

动态元件的初始储能为零，换路后仅由外加激励源作用而产生的响应称为零状态响应。本节讨论一阶电路在外加激励为直流电源时的零状态响应。

6.4.1 RL 电路的零状态响应

RL 电路如图 6-17 所示。 $t < 0$ 时，电感电流为零，此时电感无初始储能，电感处于零状态， $t = 0$ 时，开关 S 合上，在外加激励源 U_s 作用下，电路进入过渡过程。现在分析 $t \geq 0$ 时该电路的零状态响应。

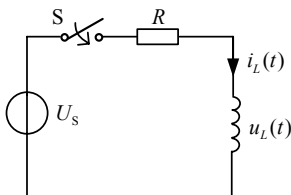


图 6-17 RL 电路的零状态响应

根据 KVL，得

$$u_L + Ri_L = U_s \quad (6-31)$$

由于 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ ，代入式 (6-31)，得

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_s \quad (6-32)$$

式 (6-32) 为常系数的一阶线性非齐次微分方程。其通解由两部分组成，一部分是与式 (6-32) 相应的齐次微分方程的通解 i_{Lh} ，也称齐次解，另一部分是方程的特解 i_{Lp} ，可表示为

$$i_L = i_{Lh} + i_{Lp} \quad (6-33)$$

与式 (6-32) 相应的齐次方程的通解为

$$i_{Lh} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-34)$$

其中 $\tau = \frac{L}{R}$, A 为待定的积分常数。

由于特解形式与式 (6-32) 右边激励的形式类似, 所以当激励为常量时, 特解也为常量, 故设特解 $i_{Lp} = B$, 代入式 (6-32), 得

$$i_{Lp} = B = \frac{U_s}{R} \quad (6-35)$$

则一阶线性非齐次常微分方程的解为

$$i_L = i_{Lh} + i_{Lp} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_s}{R} \quad (6-36)$$

由题意知 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$, 代入式 (6-36) 中, 得 $A = -\frac{U_s}{R}$, 所以有

$$i_L = i_{Lh} + i_{Lp} = -\frac{U_s}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{U_s}{R} = \frac{U_s}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (6-37)$$

电感、电阻上的电压分别为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_s e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-38)$$

$$u_R = i_L R = U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (6-39)$$

式 (6-37) ~ (6-39) 的波形如图 6-18 (a) 和图 6-18 (b) 所示。

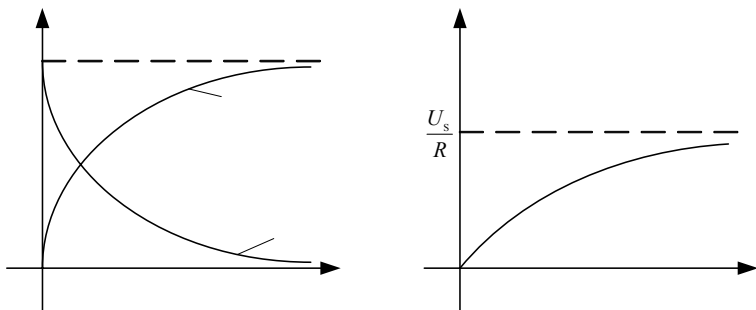


图 6-18 RL 电路的零状态响应曲线

由图 6-18 (a)、(b) 可知: 换路后, 电阻端电压 u_R 、电感电流 i_L 均按照指数规律增加, 电感电压 u_L 按照指数规律衰减; $t \rightarrow \infty$ 时, 电路进入稳态, 并有 $u_L(\infty) = 0$, $u_R(\infty) = U_s$, $i_L(\infty) = \frac{U_s}{R}$ 。

6.4.2 RC 电路的零状态响应

电路如图 6-19 所示。 $t < 0$ 时, 电容电压为零, 电容无初始储能; $t = 0$ 时, 开关 S 闭合, 在外加激励源 U_s 作用下, 电路进入过渡过程。现在分析 $t \geq 0$ 时该电路的零状态响应。

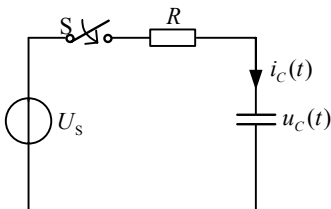


图 6-19 RC 电路的零状态响应

在图 6-19 中, 根据 KVL, 得

$$u_C + u_R = U_s \quad (6-40)$$

其中, $u_R = iR$, $i = C \frac{du_C}{dt}$, 代入式 (6-40), 得

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} = U_s \quad (6-41)$$

式 (6-41) 为一阶线性非齐次常微分方程, 其齐次方程的通解为

$$u_{Ch}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-42)$$

其中, A 为待定的积分常数。由于特解与方程右边激励形式相似, 设 $u_{Cp} = B$, 并代入式 (6-41), 得

$$u_{Cp} = B = U_s \quad (6-43)$$

所以原方程的通解为

$$u_C(t) = u_{Ch}(t) + u_{Cp} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + U_s \quad (6-44)$$

由题意知 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 代入式 (6-44), 得

$$A = -U_s \quad (6-45)$$

所以, 方程的解为

$$u_C(t) = -U_s e^{-\frac{t}{\tau}} + U_s = U_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (6-46)$$

电容电流、电阻电压分别为

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-47)$$

$$u_R(t) = Ri_C(t) = U_s e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6-48)$$

式 (6-46) ~ (6-48) 的波形如图 6-20 (a) 和 6-20 (b) 所示。

由图 6-20 (a)、(b) 可见, 换路后, 电容电压 u_C 按照指数规律增加, 电阻电压 u_R 、电路中电流 i_C 均按照指数规律衰减; $t \rightarrow \infty$ 时, $u_C(\infty) = U_S$, $u_R(\infty) = 0$, $i_C(\infty) = 0$, 电路进入稳态, 结束过渡过程。

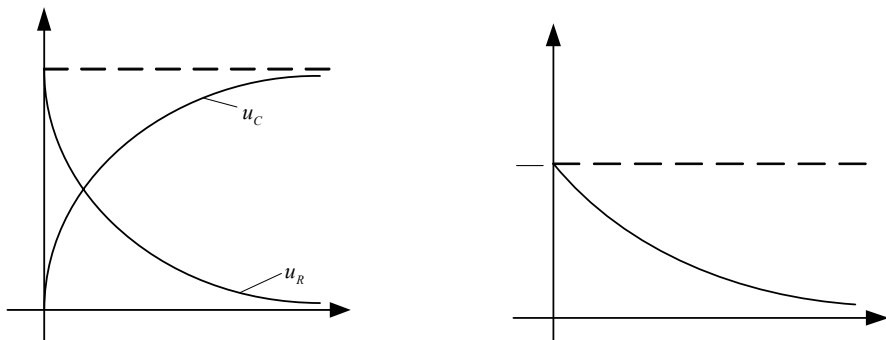


图 6-20 RC 电路的零状态响应曲线

由此可见, RL 、 RC 电路零状态响应反映了电感、电容储能过程中电压、电流随时间变化的规律。在求解一阶 RL 、 RC 电路的零状态响应时, 通常不必列写微分方程, 只需按照式 (6-49)、(6-50) 解出电感电流或电容电压, 然后再根据两类约束求解其他各量即可。

$$i_L(t) = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (6-49)$$

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}) \quad (6-50)$$

其中, $i_L(\infty)$ 、 $u_C(\infty)$ 分别为 $t \rightarrow \infty$ 时的电感电流和电容电压, $t \rightarrow \infty$ 时电路呈稳态。

例 6-6 如图 6-21 (a) 所示电路, 换路前电容无储能, $t=0$ 时, 开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 时 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 。

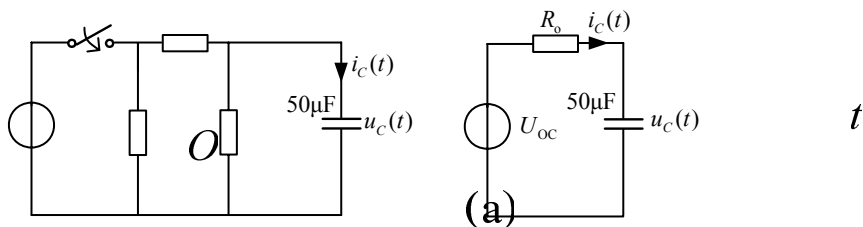


图 6-21 例 6-6 图

解 $t=0_-$ 时, 电容电压 $u_C(0_-)=0$, 电容无储能, 开关闭合后, 电路进入零状态响应。 $t \geq 0$ 时, 从电容 C 两端看进去的戴维南等效电路如图 6-21 (b) 所示。

$$U_{OC} = 16 \times \frac{6}{6+6} = 8 \text{ V}$$

$$R_0 = 6 // 6 = 3 \text{ k}\Omega$$

电路的时间常数为

$$\tau = R_0 C = 3 \times 10^3 \times 50 \times 10^{-6} = 0.15 \text{ s}$$

$t \rightarrow \infty$ 时, 电容电压为

$$u_C(\infty) = U_{OC} = 8 \text{ V}$$

所以

$$u_C(t) = u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 8(1 - e^{-6.7t}) \text{ V}$$

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{du_C}{dt} = 50 \times 10^{-6} \times \frac{d[8(1 - e^{-6.7t})]}{dt} \\ &= 2.68e^{-6.7t} \text{ mA} \end{aligned}$$

例 6-7 如图 6-22 (a) 所示电路, 换路前电路已达稳态, $t=0$ 时, 开关 S 闭合, 已知 $U_s = 12 \text{ V}$ 、 $R_1 = 2 \text{ }\Omega$ 、 $R_2 = 3 \text{ }\Omega$ 、 $R_3 = 6 \text{ }\Omega$ 、 $L = 0.9 \text{ H}$ 。求 $t \geq 0$ 时 $u_L(t)$ 和 $i_L(t)$ 。

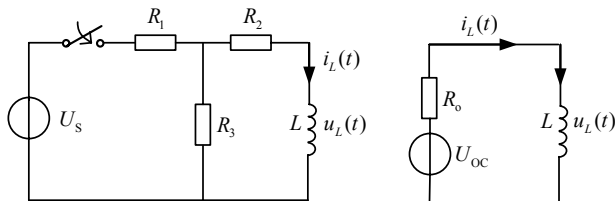


图 6-22 例 6-7 图

解 开关闭合前电路处于稳态, 电感相当于断路, $i_L(0_-)=0$, 电感无初始储能。开关闭合后电路进入零状态响应。

做出 $t \geq 0$ 时等效电路, 从电感两端看进去图 6-20 (a) 的等效戴维南电路如图 6-20 (b) 所示。

$$U_{OC} = U_s \times \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 12 \times \frac{6}{2+6} = 9 \text{ V}$$

$$R_0 = R_2 + (R_1 // R_3) = 3 + (2 // 6) = 4.5 \text{ }\Omega$$

电路时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R_o} = \frac{0.9}{4.5} = 0.2 \text{ s}$$

$t \rightarrow \infty$ 时电感电流为

$$i_L(\infty) = \frac{U_{oc}}{R_o} = \frac{9}{4.5} = 2 \text{ A}$$

所以

$$i_L = i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 2(1 - e^{-5t}) \text{ A}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0.9 \times \frac{d[2(1 - e^{-5t})]}{dt} = 9e^{-5t} \text{ V}$$

【思考与分析】

1. 什么是零状态电路？

2. 如图 6-23 所示电路， $U_s = 6 \text{ V}$ 、 $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ 、 $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ 、 $C = 3 \text{ } 000 \text{ }\mu\text{F}$ 。已知换路前 $u_C(0_-) = 0$ ， $t = 0$ 时，开关 S 闭合，求 $t \geq 0$ 时的 $u_C(t)$ 、 $i(t)$ 。

3. 如图 6-24 所示电路中， $I_s = 3 \text{ A}$ 、 $R = 6 \text{ }\Omega$ 、 $L = 3 \text{ H}$ ，换路前电感无初始储能，在 $t = 0$ 时，开关 S 打开，求 $t \geq 0$ 时的 $u_L(t)$ 、 $i_L(t)$ 。

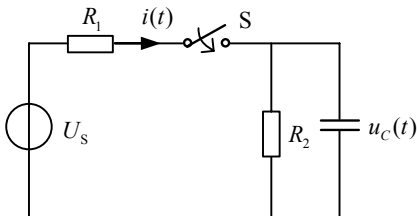


图 6-23 思考与分析题 2 图

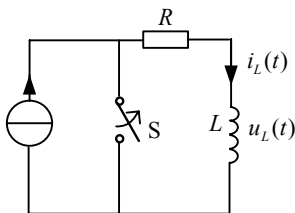


图 6-24 思考与分析题 3 图

6.5 一阶电路的全响应及三要素法

前面两节分别讨论了只有初始储能作用的零输入响应和只有电源作用的零状态响应。本节在上述内容的基础上，利用叠加定理分析求解一阶电路的全响应。

一阶电路的全响应是指在外加激励和初始储能共同作用下电路所产生的响应。外加激励仅限于讨论直流电源的情况。

零输入响应中，在电容或电感初始储能的作用下，电路中产生暂态响应，因此电容或

电感的非零初始储能可以看成是一种“激励”，则线性一阶电路的全响应可由零输入响应和零状态响应的叠加求解。下面通过例题具体介绍。

例 6-8 如图 6-25 (a) 所示电路，换路前电路已达稳态， $t=0$ 时，开关 S 闭合，求 $t \geq 0$ 时 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 。

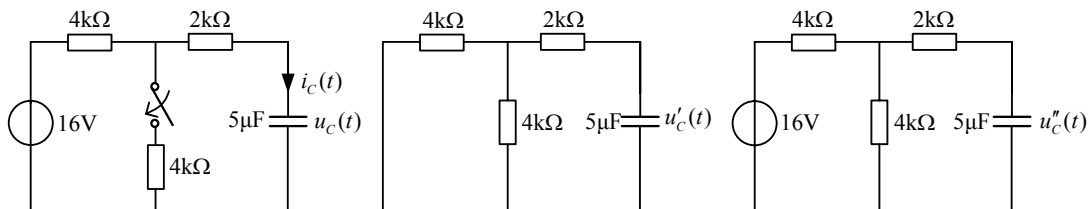


图 6-25 例 6-8 图

解 (1) 求零输入响应 $u'_C(t)$ 。

开关闭合前，即 $t=0_-$ 时， $u_C(0_-)=16\text{ V}$ ，则有 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=16\text{ V}$ 。

令电压源电压取零，电容初始储能单独作用，电路如图 6-25 (b)。 $u'_C(t)$ 将从其初始值 16 V 按照指数规律衰减，即 $t \geq 0$ 时，有

$$u'_C(t) = 16e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ V}$$

其中

$$\tau = R_0 C = [(4//4) + 2] \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6} = 0.02 \text{ s}$$

则

$$u'_C(t) = 16e^{-50t} \text{ V}$$

(2) 求零状态响应 $u''_C(t)$ 。

令电容初始储能为零，电压源单独作用。等效电路如图 6-25 (c)，则 $t \geq 0$ 时，有

$$u''_C(t) = u''_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (b)$$

其中

$$\tau = R_0 C = [(4//4) + 2] \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6} = 0.02 \text{ s}$$

$$u''_C(\infty) = 16 \times \frac{4}{4+4} = 8 \text{ V}$$

则

$$u''_C(t) = 8(1 - e^{-50t}) \text{ V}$$

(3) 求全响应 $u_C(t)$ 。

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u'_C(t) + u''_C(t) = 16e^{-50t} + 8(1 - e^{-50t}) \\ &= 8 + 8e^{-50t} \text{ V} \end{aligned}$$

电流 $i_C(t)$ 为

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = 5 \times 10^{-6} \times \frac{d(8 + 8e^{-50t})}{dt} = -2e^{-50t} \text{ mA}$$

例 6-9 如图 6-26 (a) 所示电路, 换路前电路已达稳态, $t=0$ 时, 开关 S 由 “1” 转换至 “2”, 求 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$ 。

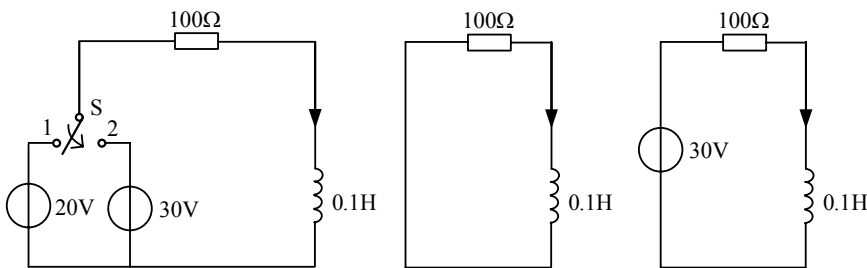


图 6-26 例 6-9 图

解 由题意可知, $i_L(0_-) = \frac{20}{100} = 0.2 \text{ A}$, 根据换路定律, 有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.2 \text{ A}$$

所以换路前电感初始储能不为零。

(1) 求零输入响应 $i_L'(t)$ 。

令电压源电压取零, 电感初始储能单独作用, 电路如图 6-26 (b)。 $i_L'(t)$ 将从其初始值 0.2 A 按照指数规律衰减, 即 $t \geq 0$ 时, 有

$$i_L'(t) = 0.2e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ A}$$

其中

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.1}{100} = 0.001 \text{ s}$$

则

$$i_L'(t) = 0.2e^{-1000t} \text{ A}$$

(2) 求零状态响应 $i_L''(t)$ 。

令电感初始储能为零, 电压源单独作用。等效电路如图 6-19 (c), 则 $t \geq 0$ 时, 有

(a)

$$i_L''(t) = i_L''(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

其中

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.1}{100} = 0.001 \text{ s}$$

$$i_L''(\infty) = \frac{30}{100} = 0.3 \text{ A}$$

则

$$i_L''(t) = 0.3(1 - e^{-1000t}) \text{ A}$$

(3) 求全响应 $i_L(t)$ 。

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L'(t) + i_L''(t) = 0.2e^{-1000t} + 0.3(1 - e^{-1000t}) \\ &= 0.3 - 0.1e^{-1000t} \text{ A} \end{aligned}$$

例 6-8、6-9 中，在电源和初始储能的同时激励下，根据叠加定理求解出电容元件的电压及电感元件的电流，这种方法可以推广到一般情况，并用通式 (6-51) 表示为

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (6-51)$$

其中， $f(t)$ 表示电路中任一电量的全响应， $f(0_+)$ 表示初始值， $f(\infty)$ 表示稳态值， τ 为电路的时间常数。

由式 (6-37) 可知，对一阶电路的分析，只要计算出待求量的初始值、稳态值和时间常数三个要素，便可以根据式 (6-51) 直接写出结果，这就是一阶电路的三要素法。对三要素的计算说明如下。

(1) 初始值 $f(0_+)$ ：先做出 $t=0_-$ 的等效电路，确定电容电压 $u_C(0_-)$ 或电感电流 $i_L(0_-)$ ；再做出 $t=0_+$ 的等效电路图，利用换路定律确定 $u_C(0_+)$ 或 $i_L(0_+)$ ，然后根据两类约束求出其他待求量的初始值。

(2) 稳态值 $f(\infty)$ ：做出 $t \rightarrow \infty$ 时的等效电路，然后根据两类约束求出待求量的稳态值。 $t \rightarrow \infty$ 时，电路呈稳态，此时电容相当于开路，电感相当于短路。

(3) 时间常数 τ ：RL 电路 $\tau = \frac{L}{R_0}$ ，RC 电路 $\tau = R_0 C$ ，式中 R_0 是换路后从动态元件两端看进去的戴维南等效电阻。

例 6-10 试用三要素法重新求解例 6-8 所示电路中的电压 $u_C(t)$ ， $i_C(t)$ 。

解 (1) 求初始值 $u_C(0_+)$ ， $i_C(0_+)$ 。 $t=0_-$ 等效电路如图 6-27 (a) 所示。由于电路处于稳态，则

$$u_C(0_-) = 16 \text{ V}$$

根据换路定律，有

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 16 \text{ V}$$

$t = 0_+$ 的等效电路如图 6-27 (b) 所示。则

$$i_C(0_+) = \frac{16}{4 + (4//2)} \times \frac{4}{4+2} - \frac{16}{2 + (4//4)} = -2 \text{ mA}$$

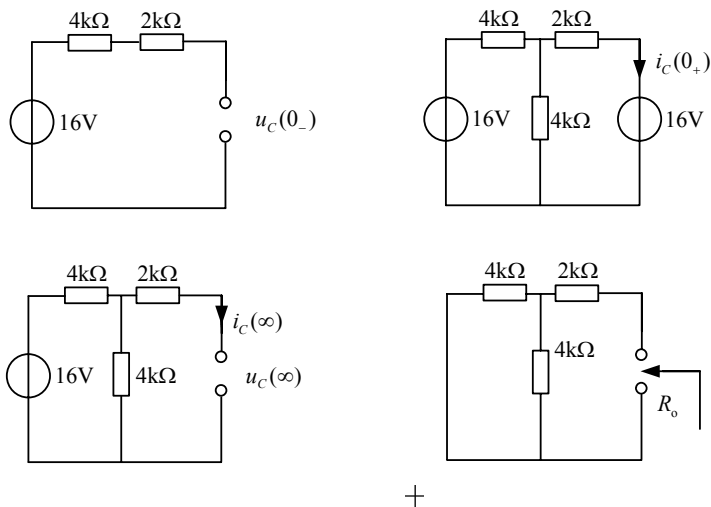


图 6-27 例 6-10 图

(2) 求稳态值 $u_C(\infty)$, $i_C(\infty)$, 电容等效为开路, 等效电路如图 6-27 (c) 所示。

$$u_C(\infty) = 16 \times \frac{4}{4+4} = 8 \text{ V}$$

$$i_C(\infty) = 0$$

(3) 求时间常数 τ 。戴维南等效电阻如图 6-27 (d) 所示。

$$\tau = R_o C = [(4//4) + 2] \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6} = 0.02 \text{ s}$$

则 $t \geq 0$ 时, 各响应为

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + u_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 16e^{-50t} + 8(1 - e^{-50t}) = 8 + 8e^{-50t} \text{ V}$$

$$i_C(t) = i_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + i_C(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = -2e^{-50t} + 0 \times (1 - e^{-50t}) = -2e^{-50t} \text{ mA}$$

计算结果与例 6-8 完全相同, 但计算步骤得到简化。

例 6-11 试用三要素法重新求解例 6-9 所示电路中的电压 $u_L(t)$, $i_L(t)$ 。

解 (1) 求初始值 $u_L(0_+)$, $i_L(0_+)$ 。 $t = 0_-$ 时等效电路如图 6-28 (a) 所示。由于电路处于稳态, 则

(c)

$$i_L(0_-) = \frac{20}{100} = 0.2 \text{ A}$$

根据换路定律, 有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.2 \text{ A}$$

$t = 0_+$ 时等效电路如图 6-28 (b) 所示, 则

$$u_L(0_+) = 30 - 0.2 \times 100 = 10 \text{ V}$$

(2) 求稳态值 $u_L(\infty)$, $i_L(\infty)$, 电感等效为短路, 电路如图 6-28 (c) 所示。

$$u_L(\infty) = 0$$

$$i_L(\infty) = \frac{30}{100} = 0.3 \text{ A}$$

(3) 求时间常数 τ ,

$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{0.1}{100} = 0.001 \text{ s}$$

则 $t \geq 0$ 时, 各响应量为

$$u_L(t) = u_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + u_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 10e^{-1000t} \text{ V}$$

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.2e^{-1000t} + 0.3 \times (1 - e^{-1000t}) = 0.3 - 0.1e^{-1000t} \text{ A}$$

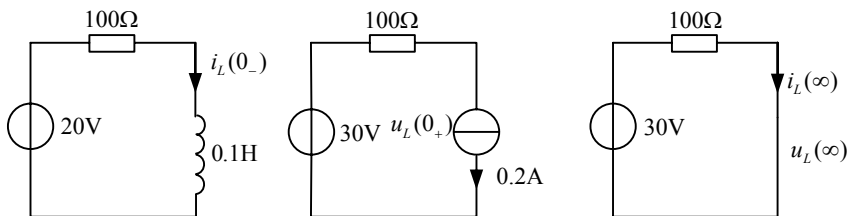


图 6-28 例 6-11 图

【思考与分析】

1. 什么是全响应? 什么是一阶电路的三要素?
2. 一阶电路的 0 、 0_- 、 0_+ 这 3 个时刻有何区别? $t \rightarrow \infty$ 表示什么含义?

6.6 本章小结

1. 电感、电容元件的伏安关系式可以表示成微分或积分的关系。

电感元件（关联一致）： $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ 或 $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt$

电容元件（关联一致）： $i_C = C \frac{du}{dt}$ 或 $u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt$

2. 表 6-1 为电感、电容元件串、并联等效化简的公式，同时给出了相应电阻元件的表达式，以方便对照学习。

表 6-1 元件的串联、并联等效化简

元件 内容	电阻元件	电感元件	电容元件
串联等效化简	$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$	$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$
并联等效化简	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$	$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$	$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

3. 在电路发生换路后的初始瞬间，电感元件上通过的电流 i_L 和电容元件上的电压 u_C ，都应保持换路前终了瞬间的原有值不变，这就是换路定律。用公式表示为

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad u_C(0_+) = u_C(0_-)$$

4. 根据换路定律求换路瞬时初始值的计算步骤具体如下：

(1) 做出换路前 $t = 0_-$ 时的等效电路，求出 $t = 0_-$ 时的电感电流 $i_L(0_-)$ 和电容电压 $u_C(0_-)$ ；

(2) 根据换路定律确定换路后瞬间 $t = 0_+$ 时电感电流 $i_L(0_+)$ 和电容电压 $u_C(0_+)$ ；

(3) 做出 $t = 0_+$ 时的等效电路，根据两类约束关系求 $t = 0_+$ 时各支路电流和各元件上的电压。画等效电路时，用电流值为 $i_L(0_+)$ 的电流源代替换路前电路中的电感元件，用电压值为 $u_C(0_+)$ 的电压源代替换路前电路中的电容元件。

5. 一阶电路的零输入响应是外加激励为零，仅由储能元件的初始储能所应起的响应；零状态响应是指初始储能为零，仅由外加激励作用引起的响应。零输入响应实质上是储能元件释放能量的过程，零状态响应实质上是储能元件储存能量的过程。

6. 一阶电路的分析可以统一使用三要素法。初始值 $f(0_+)$ 、稳态值 $f(\infty)$ 和时间常数 τ 为一阶电路的三要素。不论是零输入响应、零状态响应或全响应，均可以用下式计算电路中任一响应 $f(t)$ 。

$$f(t) = f(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} + f(\infty)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

6.7 自测与练习

6-1 含有储能元件的电路换路时,从一种稳定状态变化到另一种稳定状态,期间所经历的过程称为_____。

6-2 换路时电感元件的电流、电容元件的电压_____发生跃变,用数学公式表示为_____、_____。

6-3 时间常数 τ 表示过渡过程的快慢, τ 越大,过渡过程越_____。 RC 电路中, τ 等于_____, RL 电路中, τ 等于_____。

6-4 一阶动态电路的三要素分别指_____、_____和_____。

6-5 零输入响应是仅由动态元件的_____作用而产生的响应;零状态响应是仅由_____作用而产生的响应。

6-6 图 6-29 为 RC 电路在不同时间常数 τ 时的电压曲线,则 τ_1 、 τ_2 及 τ_3 的大小关系为()。

- (a) $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$ (b) $\tau_2 > \tau_1 > \tau_3$ (c) $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1$

6-7 电路如图 6-30 所示,若 $t > 0$ 时, $i_L(t) = 5e^{-2t}$ A,则 $t > 0$ 时的 $i_S(t)$ 等于()。

- (a) $-5e^{-2t}$ A (b) $3e^{-2t}$ A (c) $8e^{-2t}$ A (d) $8e^{-2t}$ A

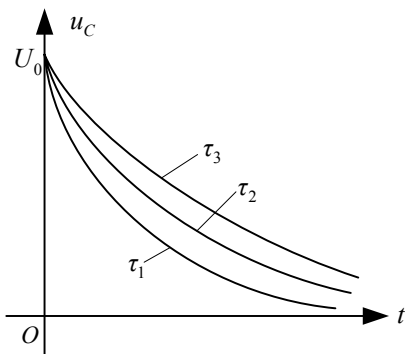


图 6-29 自测与练习 6-6 图

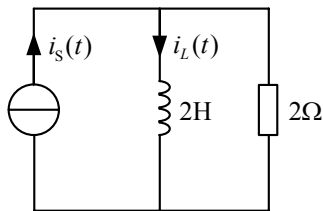


图 6-30 自测与练习 6-7 图

6-8 如图 6-31 所示电路,开关 S 打开前电路处于稳态。当 $t = 0$ 时开关 S 打开,电流 $i(0_+)$ 等于()。

- (a) 0 (b) 2 A (c) 3 A (d) 5 A

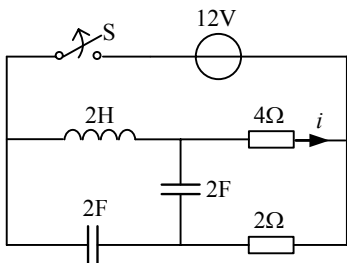


图 6-31 自测与练习 6-8 图

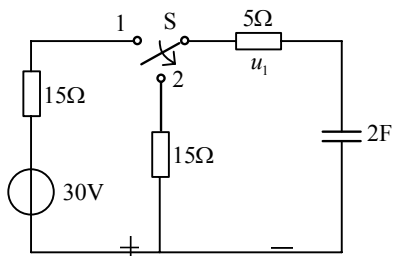


图 6-32 自测与练习 6-9 图

6-9 电路如图 6-32 所示, 开关 S 位于“1”电路处于稳态。当 $t=0$ 时, 开关 S 由“1”扳向“2”, 则 $u_1(0_+)$ 等于 ()。

- (a) -7.5 V (b) 7.5 V (c) 0 (d) -6 V

6-10 下列叙述正确的是 ()。

- (a) 只有直流电源激励的电路达到稳态时, 电感相当于短路, 电容相当于断路
 (b) 零状态响应电路在 $t=0$ 时换路, 则在 $t=0_+$ 时电感相当于短路, 电容相当于开路
 (c) 零输入响应电路在 $t=0$ 时换路, 则在 $t=0_+$ 时电感相当于开路, 电容相当于短路

6-11 如图 6-33 所示电路, 在 $t=0_-$ 时刻, 电容器的电压是 ()。

- (a) 10 V (b) 7 V (c) 6 V (d) 4 V

6-12 如图 6-34 所示电路的时间常数为 ()。

- (a) $1.0 \times 10^{-6}\text{ s}$ (b) $4 \times 10^{-7}\text{ s}$ (c) 1.0 s (d) 0.4 s

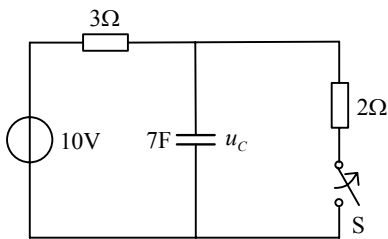


图 6-33 自测与练习 6-11 图

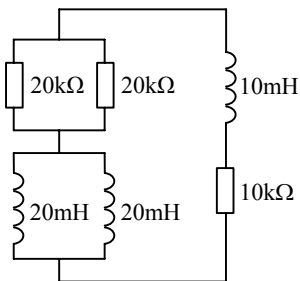
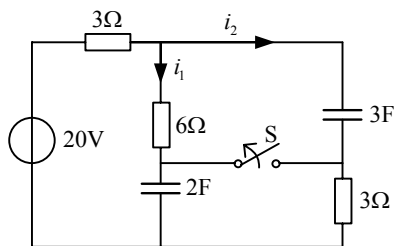
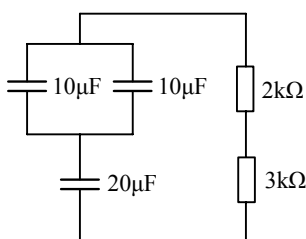


图 6-34 自测与练习 6-12 图

6-13 如图 6-35 所示电路的时间常数为 ()。

- (a) 0.05 s (b) 1.25 s (c) 50 s (d) 125 s

6-14 如图 6-36 所示电路中, 开关 S 打开前电路已处于稳态。 $t=0$ 时开关打开, 求 $t=0_+$ 时 i_1 、 i_2 的初始值。



6-15 如图 6-37 所示电路在开关动作前已达稳态, 求换路后瞬间各支路电流。

6-16 如图 6-38 所示电路, 开关闭合前处于稳态, $t=0$ 时开关闭合, 求闭合后瞬间的 $u_L(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 。

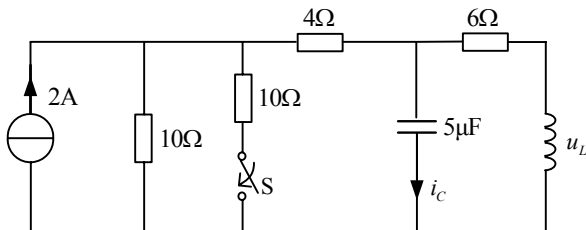
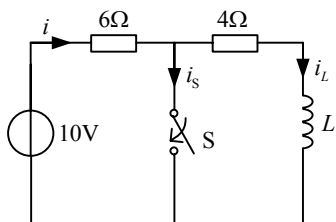
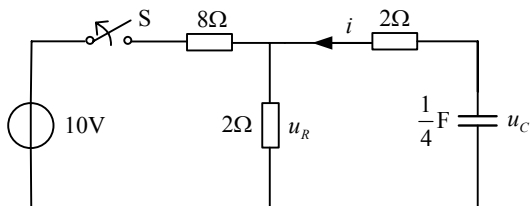
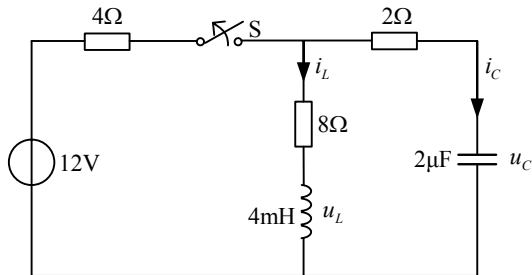


图6-35 自测与练习6-13图

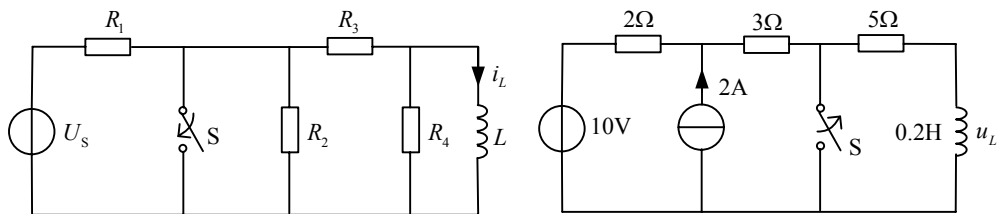
6-17 电路如图 6-39 所示, $t=0$ 时开关打开, 已知开关动作前电路处于稳态, 求换路后的初始值 $u_L(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 、 $u_C(0_+)$ 和 $i_C(0_+)$ 。

6-18 如图 6-40 所示电路中, 设开关 S 在 $t=0$ 时打开, 开关打开前电路已处于稳态, 求 $t \geq 0$ 时的 u_C 、 u_R 和 i 。



6-19 如图 6-41 所示电路中, 已知 $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $R_3 = 10 \Omega$, $R_4 = 10 \Omega$, $U_s = 15 \text{ V}$, 设换路前电路已工作了很长时间, 试求零输入响应 $i_L(t)$ 。

6-20 如图示 6-42 所示电路中, 开关打开前电路已处于稳态。 $t = 0$ 时开关打开, 求 $t \geq 0$ 时的 u_L 。

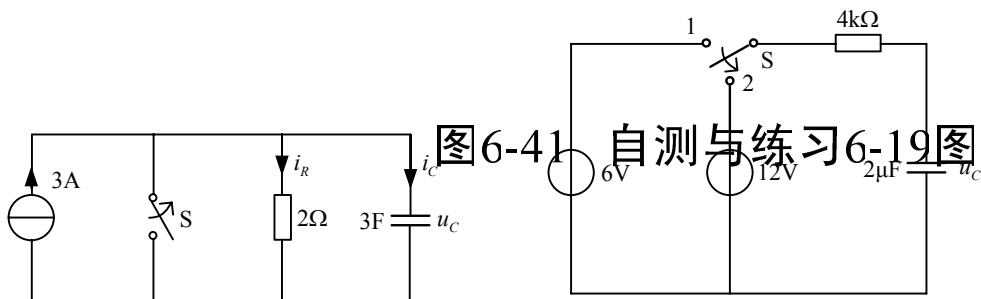


6-21 如图 6-43 所示电路中, 开关打开前电路处于稳态。 $t = 0$ 时开关打开, 求 $t \geq 0$ 时的 $i_C(t)$ 、 $u_C(t)$ 和 $i_R(t)$ 。

6-22 电路系统中有一电容量为 $30 \mu\text{F}$ 的电容器, 因工作需要将其从电网中拆除, 切除瞬间电容器的电压为 5000 V , 而后电容 C 经自身的 $120 \text{ M}\Omega$ 泄漏电阻 R 放电。试求电容电压衰减到 380 V 时所需要的时间。

6-23 如图 6-44 所示电路中, $t = 0$ 时 S 由 “1” 合向 “2”, 换路前电路处于稳态, 计算换路后的电容电压 $u_C(t)$ 。

6-24 如图 6-45 所示电路中, $U_s = 220 \text{ V}$, 继电器线圈的电阻 $R_1 = 3 \Omega$, 电感 $L = 0.2 \text{ H}$, $R_2 = 2 \Omega$, 负载电阻 $R_L = 20 \Omega$, 若继电器线圈中流过 30 A 电流时继电器动作, 问负载短路时, 即 S 闭合后多长时间继电器动作。



6-25 如图 6-46 所示电路已达稳态, 开关 S 在 $t = 0$ 时打开, 试用三要素法求解 $t \geq 0$ 时

的 i_1 、 i_2 和 i_L 。

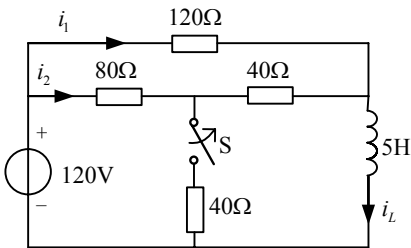
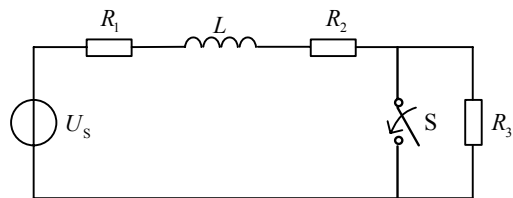


图6-46 自测与练习6-25图

+

—

图6-45 自测与练习6-24图

第 7 章 耦合电感电路

前面介绍了单一线圈的理想化模型——电感元件，在电子技术中，还常遇到另一类线圈组成的电路——耦合电感电路。本章主要介绍耦合电感的基本概念及伏安关系的分析和典型的耦合电感电路——理想变压器。通过学习要清楚什么样的电路是耦合电感电路，对耦合电感电路能正确的写出伏安关系，掌握理想变压器原副边电流、电压及功率的关系。

7.1 耦合电感的基本概念

【实训室活动】

目的：观察互感现象。研究耦合线圈相对位置的改变和不同的磁介质对互感的影响。研究不同的电流方向对互感电压的影响。

设备与器材：直流稳压电源一台、粗细不同的两个线圈、软铁棒一个、电流计一个。

操作步骤：

(1) 将粗线圈接直流电源，细线圈放入粗线圈内，并在细线圈两端接一电流计。当给粗线圈通电的瞬间，观察与细线圈相连的电流计指针摆动情况。此现象说明什么问题？分析出现这种现象的原因。

(2) 保持两线圈在同一轴线上，将两线圈拉开适当距离后，重新给粗线圈通电，观察电流计指针摆动幅度的变化。与步骤(1)比较，分析原因。

(3) 保持两线圈位置不动，使软铁棒穿过两线圈。通电观察电流计指针摆动的变化，并分析原因。

(4) 将软铁棒取出，并使两线圈相互垂直放置，通电观察电流计指针的变化。此现象说明什么？并进行分析。

(5) 仍按步骤(1)接好电路，使通入粗线圈的电流方向改变，观察电流计指针摆动的变化。对此现象进行分析说明。

7.1.1 磁耦合与互感现象

由实训活动可以看出：两个相互邻近的线圈 I 和 II，当通入线圈 I 的电流发生变化时，

线圈 II 中会有电流通过, 即线圈 II 的两端产生了电压。如何解释这种现象呢?

如图 7-1 (a) 所示, I、II 两线圈相互邻近, 两线圈的匝数分别为 N_1 和 N_2 。当线圈 I 有电流 i_1 通过时, 此电流将会产生自感磁通 Φ_{11} 和自感磁链 $\Psi_{11} = N_1 \Phi_{11}$ 。自感磁通在穿过线圈 I 的同时, 其中一部分也穿过了线圈 II, 穿过线圈 II 的这部分磁通称为互感磁通。同样, 在图 7-1 (b) 中, 当线圈 II 通有电流 i_2 时, 它产生的自感磁通 Φ_{22} 的一部分也穿过了线圈 I, 这部分磁通称为互感磁通 Φ_{12} 。

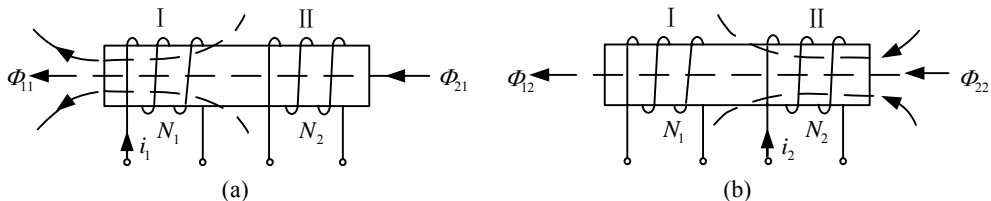


图7-1 磁耦合

这种由于一个线圈通过电流, 所产生的磁通穿过另一个线圈的现象, 叫磁耦合。具有磁耦合的两个或两个以上的线圈, 称为耦合线圈。耦合线圈的理想化模型就是耦合电感。具有耦合电感的电路叫耦合电感电路。当电流 i_1 、 i_2 发生变化时, 引起 Φ_{21} 、 Φ_{12} 的变化, 导致线圈 I 和 II 产生互感电压, 这就是互感现象。

互感现象在电子工程、通信工程、电气工程和测量仪器中被广泛应用。如: 电力变压器, 电流互感器, 电压互感器, 电视机、收音机中的中周振荡线圈等都是根据互感原理制成的。但是, 互感也会给某些设备的正常工作带来负面影响。如: 电话的串音干扰就是互感造成的。

7.1.2 互感系数与耦合系数

由以上分析可以知道, 当有电流通过线圈 I 时, 产生的自感磁链为 $\Psi_{11} = N_1 \Phi_{11}$, 于是有线圈 I 的自感系数 L_1 为

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = N_1 \frac{\Phi_{11}}{i_1}$$

此电流在线圈 II 中也会产生互感磁链 $\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21}$ 。与自感的定义类似, 定义互感磁链 Ψ_{21} 与产生它的电流 i_1 的比值为线圈 I 对线圈 II 的互感系数, 简称互感。即

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \quad (7-1)$$

同理, 可得线圈 II 对线圈 I 的互感系数为

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} \quad (7-2)$$

在国际单位制中,互感的单位为亨利,符号为 H 。可以证明 $M_{21} = M_{12} = M$ 。

应当指出,当磁介质为非铁磁性物质时, M 是常数。这时 M 的大小与两线圈的几何尺寸、匝数、相对位置有关。本章只讨论 M 为常数的情况。

由实训活动还可以看到:当两线圈的位置和磁介质发生变化时,两线圈的耦合程度将随之发生变化。工程上用耦合系数表示两线圈耦合的紧密程度,并把两线圈的互感磁链与自感磁链比值的几何平均值定义为耦合系数。用 k 表示,即

$$k = \sqrt{\frac{\Psi_{21}\Psi_{12}}{\Psi_{11}\Psi_{22}}}$$

将 $\Psi_{11} = L_1 i_1$, $\Psi_{12} = M i_2$, $\Psi_{22} = L_2 i_2$, $\Psi_{21} = M i_1$ 代入上式,得

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (7-3)$$

其中, $0 \leq k \leq 1$, k 越大表示耦合程度越高,当 $k=1$ 时为全耦合, $k=0$ 时无耦合现象。 k 的大小与线圈的结构、两线圈的相对位置及周围的磁介质有关。

在电力、电子技术中,为了利用互感有效的传输功率或信号,常采用合理绕制线圈及用铁磁性材料作为磁介质等方法,使耦合系数 k 接近1;若要减小互感的影响,除合理布置线圈的位置外,还可以采用磁屏蔽等措施。

7.1.3 互感电压与同名端

两线圈因互感磁链的变化而产生的感应电压称为互感电压。

在图 7-2 中,当通入线圈 I 的电流 i_1 发生变化时,就会在线圈 II 中产生变化的互感磁链 Ψ_{21} ,互感磁链 Ψ_{21} 的变化会在线圈 II 的两端产生互感电压 u_{21} 。同理,当线圈 II 中的电流 i_2 发生变化时,将在线圈 I 两端产生互感电压 u_{12} 。

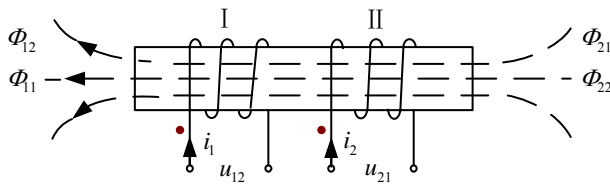


图 7-2 互感现象

当两线圈中电流、电压的参考方向如图 7-2 所示,即两线圈中电流、电压的参考方向相关联,且与各自磁链的方向符合右手螺旋定则时,由楞次定律可得

$$u_{21} = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{12} = \frac{d\Psi_{12}}{dt} = M \frac{di_2}{dt}$$

若通入的电流是角频率为 ω 的正弦交流电, 则上述伏安关系可用相量表示为

$$\dot{U}_{21} = j\omega M \dot{I}_1$$

$$\dot{U}_{12} = j\omega M \dot{I}_2$$

当线圈中电流、电压的参考方向不变, 只改变线圈 II 的绕向时, 如图 7-3 (a) 所示, 由楞次定理可得

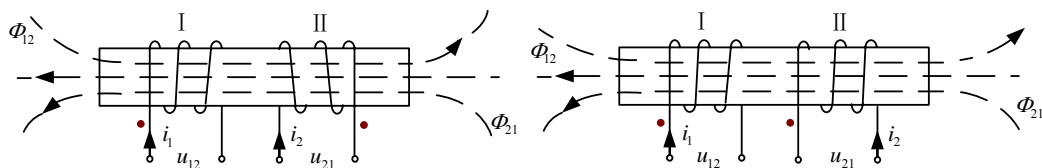
$$u_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}$$

对于正弦交流电可用相量表示为

$$\dot{U}_{21} = -j\omega M \dot{I}_1$$

$$\dot{U}_{12} = -j\omega M \dot{I}_2$$



在图 7-3 (b) 中, 线圈绕向不变, 只改变线圈 II 中电流、电压的参考方向, 同样由楞次定理可得

$$u_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

$$u_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{di_2}{dt}$$

用相量表示为

$$\dot{U}_{21} = -j\omega M \dot{I}_1$$

$$\dot{U}_{12} = -j\omega M \dot{I}_2$$

可见, 改变任一线圈的实际绕向, 或是改变任一线圈电流、电压的参考方向, 都可使互感电压的正负号发生变化。

线圈的实际绕向通常是不易观察出来的, 电路图中也不画出线圈的实际绕向, 工程上, 采用标注同名端的方法示意出线圈的相对绕向, 以便对两线圈的耦合方向作出判断。通常

用“*”、“•”或“△”等号表示同名端。同名端的规定如下：当两个线圈中电流产生的磁通量相互加强时，此时两个施感电流的输入端称为同名端。并在这两个端子上各打一个记号“•”来表示。

确定了同名端以后，就可以用图 7-4 的形式表示具有互感的电路，而不必画出线圈的实际绕向。在这样的电路图中，当互感电压的参考方向与产生该电压的电流的参考方向对同名端一致时， M 前面不带负号。若两者对同名端不一致时， M 前带负号。

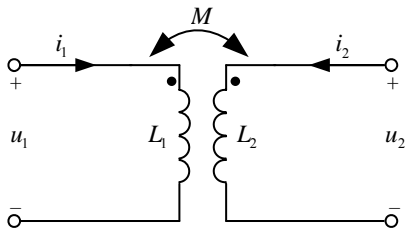


图 7-4 互感元件的电路符号

【实训室活动】

目的：学会测定耦合线圈同名端和互感系数的方法。

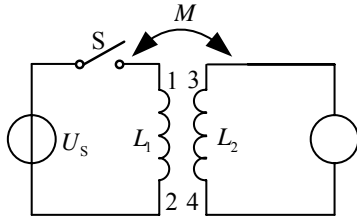
设备与器材：直流稳压电源一台，直流电压表、交流电压表和交流电流表各一只，线圈 L_1 、线圈 L_2 、软铁芯各一个。

操作步骤如下所述。

1. 测定耦合线圈同名端

将线圈 L_1 和 L_2 同心套在一起，把铁心放入其中，用以下方法判断两线圈的同名端。

(1) 直流判别法 按图 7-5 所示接线，在线圈 L_1 两端接一直流电源，在 L_2 两端接一高内阻指针式直流电压表（端点 3 接电压表的“+”极性端）。在开关 S 闭合的瞬间，线圈 L_2 中产生一个感应电动势，使电压表指针偏转。如指针正偏，则线圈 L_1 的端点 1 与线圈 L_2 的端点 3（接电压表的“+”极性端）为同名端；若电压表指针反转，则端点 1 与端点 3 为异名端。



(2) 等值阻抗法 将两个耦合线圈 L_1 和 L_2 的端子分别按两种方式串联，即顺串一次，反串一次，如图 7-6 所示。两次施加相同的交流电压，用交流电流表测量电路中的电流，并记录在表 7-1 中。根据所测电流的大小，判断两线圈的同名端。因线圈顺串时的等效电感大于反串时的等效电感，所以其中电流小的一次为顺串，相连接的两个端子为异名端，而电流大的一次为反串，相连接的两个端子为同名端。

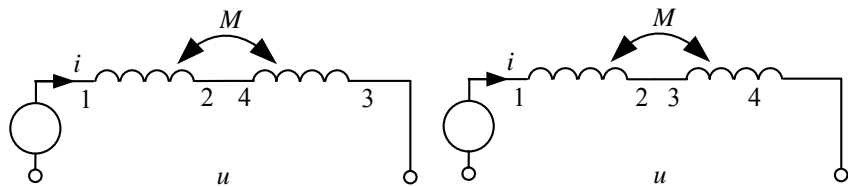


图 7-6 等值阻抗法判断同名端

表 7-1 用等值阻抗法判断同名端

连接方式	U (V)	I (A)	判断同名端
2、4 连接	10V		
2、3 连接	10V		

(3) 三压法（交流判别法） 如图 7-7 所示，将线圈 L_1 和 L_2 的任意一端相连（如 2、4 相连），对其中某一线圈（如 L_1 ）加一交流电压，另一线圈开路。用交流电压表分别测量线圈 L_1 的端电压 U_1 （即 1、2 两端电压）、线圈 L_2 的端电压 U_2 （即 3、4 两端电压）及两线圈的总电压 U （即 1、3 两端电压）并记入表 7-2 中，比较三个电压大小。若 U 近似为 U_1 、 U_2 之和，则相连接端（2 和 4）为异名端；若 U 近似为 U_1 、 U_2 之差，则相连接端（2 和 4）为同名端。

+

—

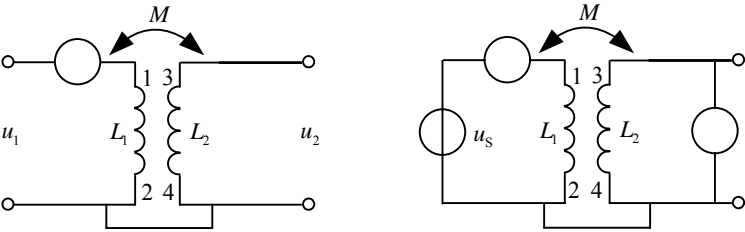
表 7-2 用三压法判断同名端

(a)

连接方式	U_1 (V)	U_2 (V)	U (V)	判断同名端
2、4 连接	10 V			
2、3 连接	10 V			

2. 耦合线圈互感系数的测定

按图 7-8 所示电路连接，在 L_1 侧施加一个 50 Hz 低压交流电， L_2 线圈开路。分别用交流电流表和电压表测量线圈 L_1 的施感电流 I_1 和线圈 L_2 端开路电压 U_2 。



根据公式 $U_2 = E_2 = \omega M_{21} I_1$ ，计算互感系数 $M_{21} = \frac{U_2}{\omega I_1}$ 。式中， $\omega = 2\pi f$ ， f 为工频 50 Hz。这种方法称为互感电势法，将测量结果记入表 7-3。

表 7-3 耦合线圈互感系数的测定

U_2 (V)	I_1 (A)	$M_{21} = \frac{U_2}{\omega I_1}$

【思考与分析】

- 1. 互感系数 M 的大小与哪些因素有关？
- 2. 为使收音机中的电源变压器与输出变压器彼此不发生互感现象，即 $k=0$ ，应采取什么措施？
- 3. 判断图 7-9 所示电路中两线圈的同名端，并在图中标出。

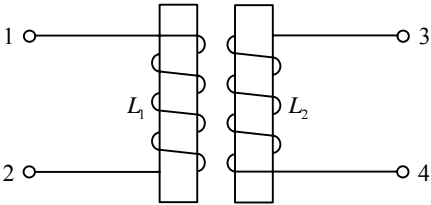


图 7-9 思考与分析题 3 图

图7-7 三压法判别同名端

7.2 互感线圈的连接

具有互感的两个线圈连接方式有两种：串联和并联。

7.2.1 串联

两个具有互感的线圈串联时,可以顺接串联,也可以反接串联。顺接串联是指两个线圈的异名端相连。这时,两线圈流过同一电流,且它们产生的磁通相互加强,如图 7-10 (a) 所示。反接串联是指两个线圈的同名端相连。此时,两线圈产生的磁通相互削弱,如图 7-10 (b) 所示。

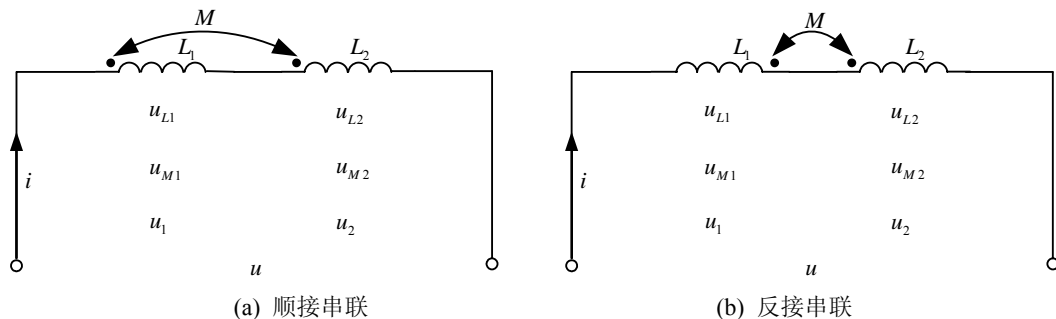


图 7-10 互感线圈串联

在图 7-10 (a) 顺接串联电路中,当有电流通过互感线圈时,在每一个线圈的两端除产生自感电压外,同时还产生互感电压,参考方向如图示,由基尔霍夫电压定律可知,线圈 I 两端的电压和线圈 II 两端电压分别为

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{11} + u_{M1} = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \\ u_2^+ &= u_{22} + u_{M2} = L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad + \quad -$$

其中 u_{11} 和 u_{22} 为自感电压, u_{M1} 和 u_{M2} 为互感电压,即每个线圈两端都有两部分电压组成。这时,互感线圈两端的总电压

$$u = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} \quad (7-4)$$

设 $L_s = L_1 + L_2 + 2M$ 为顺接串联的等效电感。

当线圈中通入正弦交流电时,上式可用相量表示为

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = j\omega(L_1 + L_2 + 2M) \dot{I}$$

同理,在图 7-10 (b) 反接串联电路中,当有电流通过时,则

$$u = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} \quad (7-5)$$

设 $L_f = L_1 + L_2 - 2M$

则 L_f 为反接串联的等效电感

当线圈中通入正弦交流电时，上式可用相量表示为

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I}$$

由上述分析可以看出，当线圈顺串时，等效电感增加；反串时，等效电感减小。

7.2.2 并联

具有互感的两个线圈并联也有两种连接方式：同侧并联、异侧并联。同侧并联是指两线圈的同名端两两相连，如图 7-11 (a) 所示。异侧并联是指两线圈的异名端两两相连，如图 7-11 (b) 所示。

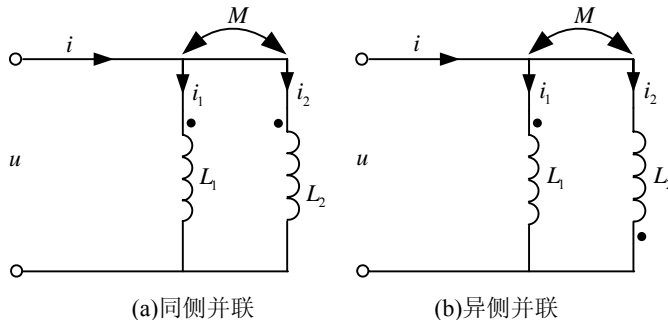


图 7-11 互感线圈并联

在图 7-11 (a) 同侧并联电路中，由基尔霍夫电压定律可知

$$u = u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (7-6)$$

$$u = u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

对于正弦交流电路，则可表示为

$$\dot{U} = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \quad (7-7)$$

$$\dot{U} = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \quad (7-8)$$

将式 (7-7) 两边乘以 L_2 ，式 (7-8) 两边乘以 L_1 可得

$$L_2 \dot{U} = j\omega L_1 L_2 \dot{I}_1 + j\omega M L_2 \dot{I}_2 \quad (7-9)$$

$$L_1 \dot{U} = j\omega L_2 L_1 \dot{I}_2 + j\omega M L_1 \dot{I}_1$$

将式 (7-7)、(7-8) 两边同乘以 M 后相加，并结合电流关系 $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ ，可得

$$2M\dot{U} = j\omega M \left(L_1 \dot{I}_1 + L_2 \dot{I}_2 \right) + j\omega M^2 \dot{I} \quad (7-10)$$

将式 (7-9) 中两式相加后减去式 (7-10)，整理得

$$\dot{U} = j\omega \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \dot{I}$$

则同侧并联的等效电感为

$$L_{\text{eq}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

用同样的方法可得异侧并联的等效电感为：

$$L_{\text{eq}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

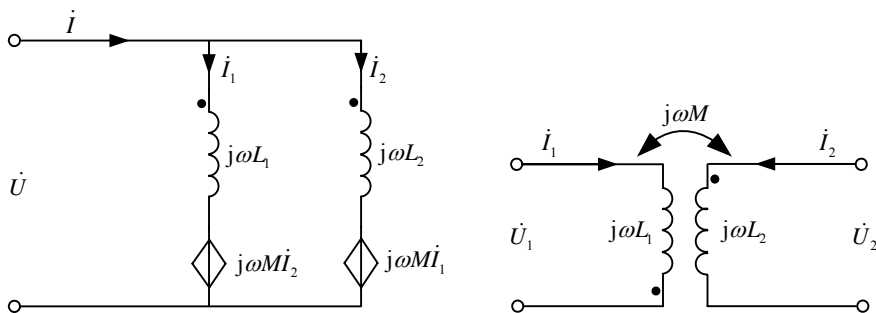
由此可见，同侧并联时，磁场增强，等效电感增大，异侧并联时，磁场削弱，等效电感减小。

7.2.3 互感的等效受控源电路

从互感线圈的电流、电压关系式中可以看出，每个线圈两端的电压都包含两项，一项是自感电压，另一项是互感电压，后一项的作用可以用电流控制电压源来表示。例如，根据式 (7-6)，可以画出图 7-11 (a) 电路所对应的等效受控源电路图 7-12。

【思考与分析】

1. 如图 7-13 所示电路的两线圈中通入正弦交流电，试写出线圈 L_1 和 L_2 两端电压的相量表达式。
2. 根据上题所得电压表达式，画出其对应的等效受控源电路。



7.3 理想变压器

7.3.1 理想变压器的特点

理想变压器也是一种耦合器件，它是从实际变压器中抽象出来的理想化模型。它的电路模型与耦合电感相同，如图 7-14 所示。理想变压器具有三个特点：第一，无损耗，即忽略了线圈和铁芯的损耗，其内阻为零；第二，完全耦合，即忽略了外漏磁通的影响，耦合系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$ ，或 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ ；第三，铁芯的磁导率 μ 为无穷大，极小的电流通过线圈会产生很大的磁通，即自感和互感都很大，可认为是无穷大。

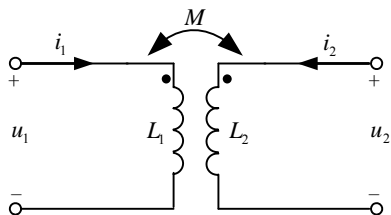


图7-14 理想变压器

7.3.2 理想变压器的电压、电流、功率及阻抗

1. 电压关系

在如图 7-15 所示的变压器中，理想情况下两线圈完全耦合无漏磁通，即 $\Phi_{21} = \Phi_{11}$ ， $\Phi_{12} = \Phi_{22}$ 。此时，穿过两线圈的磁通相等，均为

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{22}$$

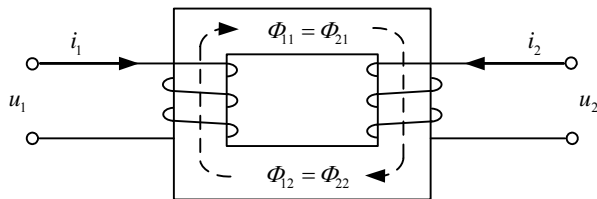


图 7-15 理想变压器的磁场分布

设输入端线圈（原线圈）匝数为 N_1 ，输出端线圈（副线圈）匝数为 N_2 ，则两线圈的磁链分别为

$$\Psi_1 = N_1 \Phi, \quad \Psi_2 = N_2 \Phi$$

磁链在两线圈中分别产生电压 u_1 和 u_2 ，则

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

两式相比，得

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

式中， n 是线圈的匝数比（变比）。于是有

$$u_1 = nu_2 \quad (7-11)$$

用相量表示为

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2$$

2. 电流关系

对于图 7-14 的理想变压器模型，可对应画出其相量模型如图 7-16 所示。

根据 KVL 列出相量形式的电压方程为

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

将 $M = \sqrt{L_1 L_2}$ 代入上式，得

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega \sqrt{L_1 L_2} \dot{I}_1 \quad (7-12)$$

当输出端接入负载 Z_L 时，则有 $\dot{U}_2 = -Z_L \dot{I}_2$ ，将其代入式 (7-8)，得

$$j\omega \sqrt{L_1 L_2} \dot{I}_1 + (j\omega L_2 + Z_L) \dot{I}_2 = 0$$

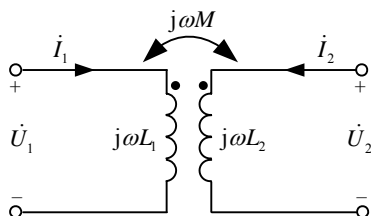


图7-16 理想变压器的相量模型图

由理想变压器的第三个特点, 可知 Z_L 与 $j\omega L_2$ 相比可以忽略不计, 从而有

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad (7-13)$$

又根据理想变压器完全耦合的特点 $\Phi_{21} = \Phi_{11}$, $\Phi_{12} = \Phi_{22}$, 于是

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}}{\frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2}} = \frac{\frac{N_1}{N_2} \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}}{\frac{N_2}{N_1} \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{M_{21}}{M_{12}} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = n^2$$

将此结果代入式 (7-9), 得

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = -\frac{1}{n} \text{ 或 } \dot{I}_1 = -\frac{1}{n} \dot{I}_2 \quad (7-14)$$

瞬时值表达式可写为

$$i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \quad (7-15)$$

3. 功率

不论理想变压器的同名端如何, 输入端吸收的功率

$$p_1 = u_1 i_1 = n u_2 \times \left(-\frac{1}{n} i_2\right) = -u_2 i_2 = p_2$$

上式中, p_2 为理想变压器输出端发出的功率。即理想变压器在传输电能时, 将电能从输入端全部传输到输出端, 变压器本身没有消耗能量。

4. 阻抗

在理想变压器的输出端接入阻抗 Z_L , 从输入端看其等效阻抗为

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n \dot{U}_2}{-\frac{1}{n} \dot{I}_2} = n^2 \left(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right) = n^2 Z_L$$

即, 理想变压器有变换阻抗的作用。

【思考与分析】

1. 什么是理想变压器?
2. 理想变压器两线圈的电流、电压有效值之间存在什么关系?

7.4 本章小结

1. 一个线圈通过电流时,所产生的磁通穿过另一个线圈的现象,叫磁耦合。耦合时两线圈的互感 M 的大小与两线圈的几何尺寸、匝数、相对位置有关。当磁介质为非铁磁性物质时, M 是常数。

2. 两线圈耦合的紧密程度用耦合系数表示,并把两线圈的互感磁链与自感磁链比值的几何平均值定义为耦合系数。用 k 表示,即 $k = \frac{\sqrt{\Psi_{21}\Psi_{12}}}{\sqrt{\Psi_{11}\Psi_{22}}}$, 将 $\Psi_{11} = L_1 i_1$, $\Psi_{12} = M i_2$, $\Psi_{22} = L_2 i_2$, $\Psi_{21} = M i_1$ 将代入上式,得 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ 。

3. 同名端对耦合电感电路的分析很重要。当两个线圈中电流产生的磁通是相互加强时,两个施感电流的输入端称为同名端。同名端的实验判别方法有:直流判别法、等值阻抗法和三压法。

4. 两线圈因互感磁通的变化而产生的感应电压称为互感电压。互感电压前正、负号的判断要根据电流、电压参考方向及同名端综合分析。

5. 两个具有互感的线圈串联时,可以顺接串联,也可以反接串联。顺接串联是指两个线圈的异名端相连。这时,两线圈流过同一电流,且它们产生的磁通相互加强。反接串联是指两个线圈的同名端相连,此时,两线圈产生的磁通相互削弱。顺接串联的等效电感为 $L_s = L_1 + L_2 + 2M$; 反接串联的等效电感为 $L_f = L_1 + L_2 - 2M$ 。

6. 具有互感的两个线圈的并联也有两种连接方式:同侧并联和异侧并联。同侧并联是指两线圈的同名端两两相连。异侧并联是指两线圈的异名端两两相连。

同侧并联的等效电感为

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

异侧并联的等效电感为

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

7. 理想变压器的三个特点:第一,无损耗,即忽略了线圈和铁芯的损耗,其内阻为零;第二,完全耦合,即忽略了外漏磁通的影响,耦合系数 $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1$, 或 $M = \sqrt{L_1 L_2}$; 第三,铁芯的磁导率 μ 为无穷大,极小的电流通过线圈会产生很大的磁通,即自感和互感都很大,可认为是无穷大。

理想变压器原、副线圈的电压、电流和功率关系分别为 $u_1 = n u_2$; $i_1 = -\frac{1}{n} i_2$; $p_1 = p_2$ 。

7.5 自测与练习

7-1 两耦合线圈 $L_1 = 0.1 \text{ H}$, $L_2 = 0.9 \text{ H}$, $M = 0.1 \text{ H}$, 则其耦合系数为_____。

7-2 对两个互感线圈同名端进行测试时, 其中一个线圈加低压交流电压 U_1 , 串接两个互感线圈, 并测得总电压为 U , 若 $U_1 > U$, 则相连的两个端钮为_____; 若 $U_1 < U$, 则相连的两个端钮为_____。

7-3 两线圈连接情况如图 7-17 所示, 设两线圈的电感分别为 L_1 和 L_2 , 互感为 M , 则其等效电感为 ()。

- (a) $L_1 + L_2 - 2M$ (b) $L_1 + L_2 + 2M$ (c) $\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$ (d) $\frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$

7-4 在图 7-18 (a) 所示电路中互为同名端的是 (), 在图 7-18 (b) 中互为同名端的是 ()。

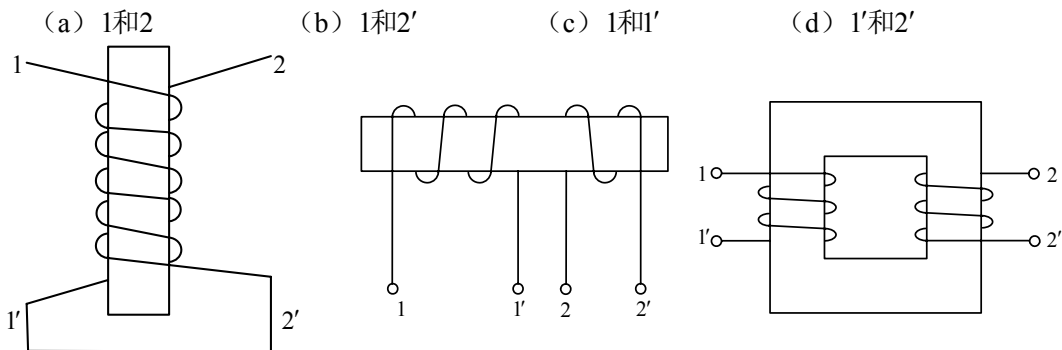


图 7-17 自测与练习 7-3 图

图 7-18 自测与练习 7-4 图

7-5 具有互感的两个线圈如图 7-19 所示, (1) 试标出它们的同名端; (2) 判断开关闭合或断开的瞬间, 毫伏表的偏转方向。

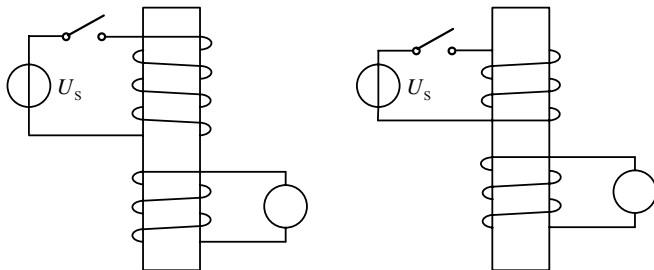


图 7-19 自测与练习 7-5 图

7-6 电路如图 7-20 所示, 互感 $M = 0.02 \text{ H}$, $i_1 = 10 \sin 1000t \text{ A}$, 试求互感电压 u_2 。

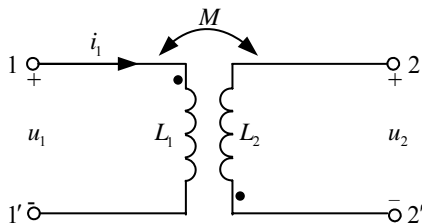


图 7-20 自测与练习 7-6 图

7-7 试写出如图 7-21 所示电路中的电压 u_1 和 u_2 的表达式及对应的相量形式。

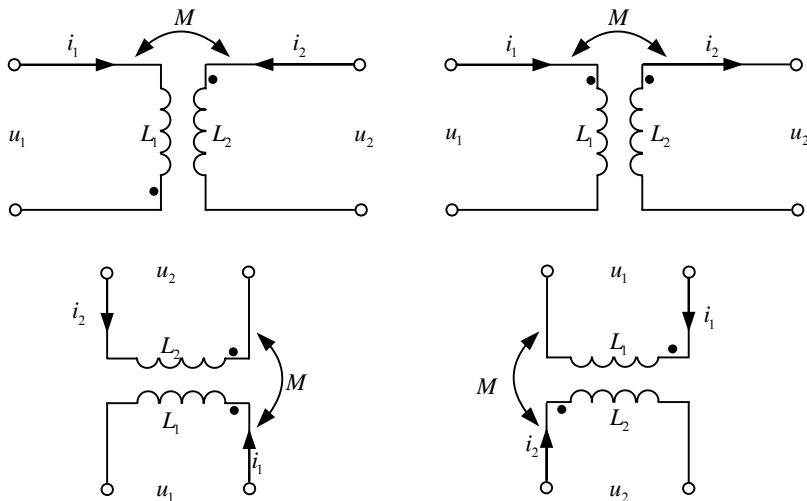


图 7-21 自测与练习 7-7 图

7-8 电路如图 7-22 所示, 已知 $L_1 = 1 \text{ H}$, $L_2 = 2 \text{ H}$, $M = 0.5 \text{ H}$, $i = 10\sqrt{2} \sin 100t \text{ A}$, 试求电压 u 。

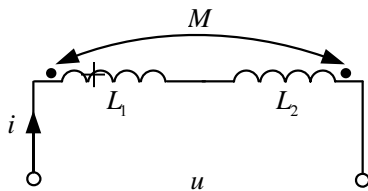


图 7-22 自测与练习 7-8 图

7-9 利用开路电压法测互感系数 M 时, 在线圈 1 两端加一电源频率 $f = 50 \text{ Hz}$ 的正弦电压, 用电流表测出其输出电流为 1 A 。线圈 2 开路, 用电压表测出其开路电压为 20 V , 试求两线圈的互感 M 的值。

第 8 章 二端口网络

二端口网络在实际工程中有着广泛的应用。对于一个庞大的电气系统，其电路模型可能十分复杂，用电路的基本分析方法进行分析，将非常繁琐，甚至无法完成。这时可以将电路分成几部分，搞清每部分的输入、输出关系，整个系统便可以分析清楚，这就是二端口网络理论的特殊价值和重要作用。本章主要介绍二端口网络的概念、二端口网络的常用方程和参数、二端口网络的等效电路及二端口网络的连接。通过学习知道什么样的网络是二端口网络，能够正确列出二端口网络的方程，并能求出二端口网络的有关参数，根据参数能画出等效电路。

8.1 二端口网络概述

前面学习了单口网络（二端网络）的概念和等效电路，如等效电阻和戴维南等效电路。而在实际电工和电子技术中，常常会遇到有两对端钮的网络，其中一对端钮作为信号的输入端钮，称为输入端口；另一对端钮作为信号的输出端钮，称为输出端口。对于每一个端口都满足端口条件：流入其中一个端钮的电流等于流出该端口另一端钮的电流。满足这样条件的具有两个端口的网络称为二端口网络，否则只能叫四端网络。例如：传输线、变压器、晶体管、运算放大器、滤波器等都属于二端口网络，见图 8-1。

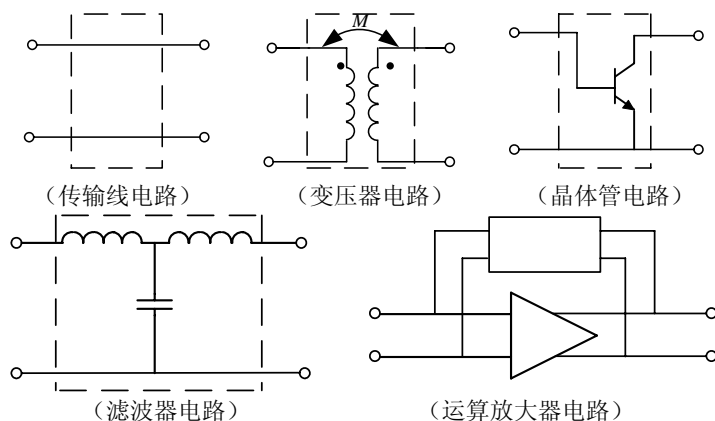


图 8-1 二端口网络实例

对于一个二端口网络，不管网络内部结构多么复杂，都可以将两对端钮之间的电路封装在一个“黑盒子”中，即用一个方框表示网络内部结构，在方框两端标出两个端口，如图 8-2 所示，这就是二端口网络的表示方法。

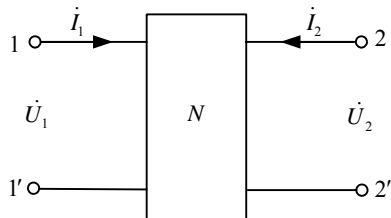


图 8-2 二端口网络的示意图

如果二端口网络内部是由线性电阻、电感、电容和线性受控源等线性元件组成，且内部不含电源的网络，称为线性无源二端口网络。本章只讨论线性无源二端口网络。

在实际应用中，往往只关心两个端口的输入、输出电流电压关系，而对内部电流电压如何分配不感兴趣。并且目前的一些集成电路内部结构都被封装起来，只留下与外电路相连的端钮。这些电路的性能、用途只能通过两个端口的电流电压关系来表征。因此，研究二端口网络的电流电压关系（伏安关系）具有重要的现实意义。

【思考与分析】

1. 什么是二端口网络的端口条件？
2. 四端网络一定是二端口网络吗？

—

8.2 二端口网络的方程和参数

在研究二端口网络的伏安关系时，其输入端口和输出端口共有四个变量 $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{U}_2$ 和 \dot{I}_2 。其中只有两个变量是独立的，所以，只要建立两个联系上述四个变量的网络方程即可。分析时，可以选择四个变量中任意两个为自变量，用选择的两个自变量表示另外两个变量，这样建立起来的方程就是二端口网络的独立方程。自变量有六种不同的选择方法，相应的独立方程和参数也有六种，本节只介绍其中最常用的四种：阻抗参数方程和阻抗参数 Z 、导纳参数方程和导纳参数 Y 、传输参数方程和传输参数 T 及混合参数方程和混合参数 H 。

8.2.1 阻抗参数方程和阻抗参数 Z

阻抗参数方程是一组以二端口网络的电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 为自变量来表征电压 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 的方

程。四个量的参考方向如图 8-3 所示。

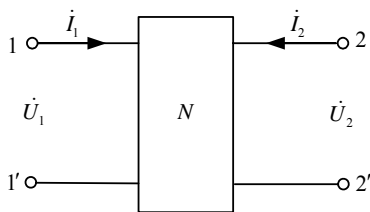


图 8-3 二端口网络

其中, 端口电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 为已知量。由替代定理可知, 这两个电流可以用施加于输入端口和输出端口的两个电流源来替代, 如图 8-4 (a) 所示。根据叠加定理可以求出另外两个量 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 。

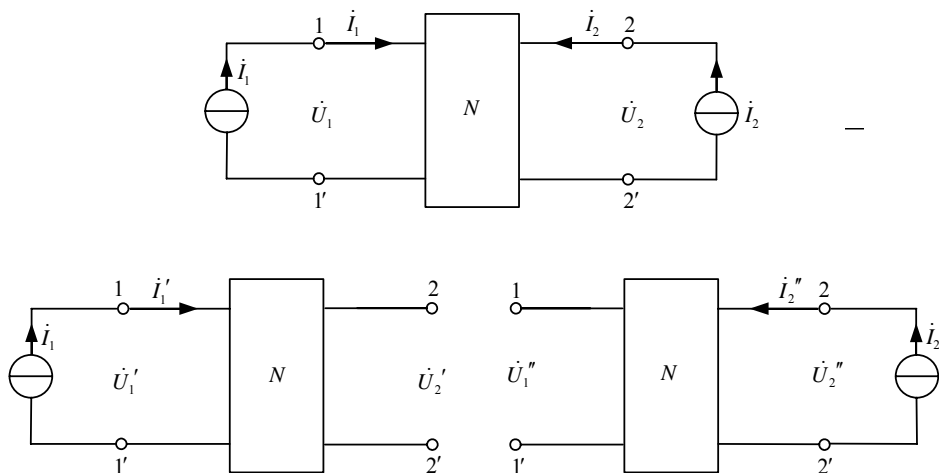


图 8-4 用电流源替代端口电流

利用叠加定理, 当电流源 \dot{I}_1 单独作用时, 电路如图 8-4 (b) 所示。这时, 在两端口处产生的电压分别为 \dot{U}_1' 和 \dot{U}_2' , 由线性电路的比例性可知 \dot{U}_1' 和 \dot{U}_2' 与电流源 \dot{I}_1 成正比。可表示为

$$\dot{U}_1' = Z_{11} \dot{I}_1; \quad \dot{U}_2' = Z_{21} \dot{I}_1 \quad +$$

同理, 当电流源 \dot{I}_2 单独作用时, 如图 8-4 (c) 所示, 在两端口处产生的电压分别为

$$\dot{U}_1'' = Z_{12} \dot{I}_2; \quad \dot{U}_2'' = Z_{22} \dot{I}_2。$$

将两个结果叠加, 可得

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_1' + \dot{U}_1'' = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}_2' + \dot{U}_2'' = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2\end{aligned}\tag{8-1}$$

这就是用端口电流表示端口电压的网络方程。其中, 比例系数 Z_{11} 、 Z_{12} 、 Z_{21} 和 Z_{22} 具有阻抗的性质, 称为阻抗参数 Z , 网络方程称为阻抗参数方程。阻抗参数取决于网络内部各元件的参数、连接方式及电源的频率。

对于一个给定的二端口网络, 可以根据叠加定理求出网络的阻抗参数方程, 从而确定阻抗参数。那么, 在不列出参数方程的基础上, 能否用简单的方法确定其阻抗参数呢? 从式 (8-1) 不难看出四个参数有如下特点:

$$\begin{aligned}Z_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}, \text{ 即 } Z_{11} \text{ 是输出端开路时, 输入端的输入阻抗;} \\ Z_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}, \text{ 即 } Z_{12} \text{ 是输入端开路时, 输入端对输出端的转移阻抗;} \\ Z_{21} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0}, \text{ 即 } Z_{21} \text{ 是输出端开路时, 输出端对输入端的转移阻抗;} \\ Z_{22} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}, \text{ 即 } Z_{22} \text{ 是输入端开路时, 输出端的输入阻抗。}\end{aligned}\tag{8-2}$$

根据式 (8-2) 可以直接计算或测量二端口网络的阻抗参数。

阻抗参数方程还可以用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

或表示为

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Z} \dot{\mathbf{I}}$$

其中, $\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$ 为端口电流列向量;

$\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$ 为端口电压列向量;

$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$ 为开路阻抗矩阵。

例 8-1 求如图 8-5 所示理想变压器的 Z 参数。

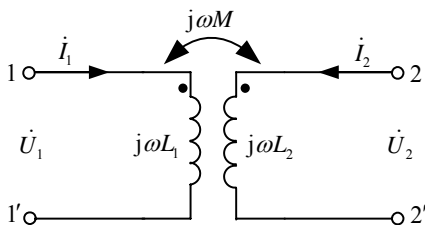


图 8-5 例 8-1 题图

解 利用 KVL 列出理想变压器的原、副边的电压方程为

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1$$

由式 (8-2) 得

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} = j\omega L_1 & Z_{12} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = j\omega M \\ Z_{21} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} = j\omega M & Z_{22} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} = j\omega L_2 \end{aligned}$$

由上题计算可以看出, 在理想变压器的 Z 参数中 $Z_{12} = Z_{21}$, 满足这样条件的二端口网

络称为互易网络。事实上可以证明, 不含独立电源和受控源的线性无源二端口网络都是互易网络, 互易网络的 Z 参数只有三个是独立的。对于互易网络, 若同时满足 $Z_{11} = Z_{22}$, 则网络为对称网络, 对称网络只有两个参数是独立的。对称网络的输入端和输出端可以对调使用, 对调后对外电路没有任何影响。

例 8-2 试求如图 8-6 所示二端口网络的 Z 参数。

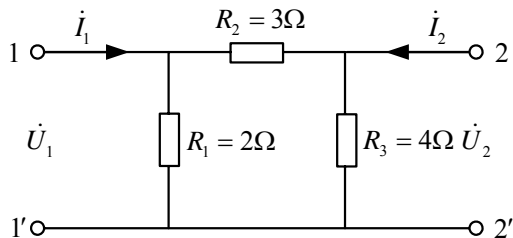


图 8-6 例 8-2 题图

解 令输出端开路, 则 $\dot{I}_2 = 0$, 可得

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_1}{R_1} + \frac{\dot{U}_1}{R_2 + R_3} = \frac{\dot{U}_1}{2} + \frac{\dot{U}_1}{3+4} = \frac{9}{14}\dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 &= \frac{\dot{U}_1}{R_2 + R_3} \times R_3 = \frac{\dot{U}_1}{3+4} \times 4 = \frac{4}{7}\dot{U}_1\end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned}Z_{11} &= \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{14}{9} \Omega \\ Z_{21} &= \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{8}{9} \Omega\end{aligned}$$

令输入端开路, 则 $\dot{I}_1 = 0$, 可得

$$\begin{aligned}\dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}_2}{R_3} + \frac{\dot{U}_2}{R_1 + R_2} = \frac{\dot{U}_2}{4} + \frac{\dot{U}_2}{2+3} = \frac{9}{20}\dot{U}_2 \\ \dot{U}_1 &= \frac{\dot{U}_2}{R_1 + R_2} \times R_1 = \frac{\dot{U}_2}{2+3} \times 2 = \frac{2}{5}\dot{U}_2\end{aligned}$$

从而得

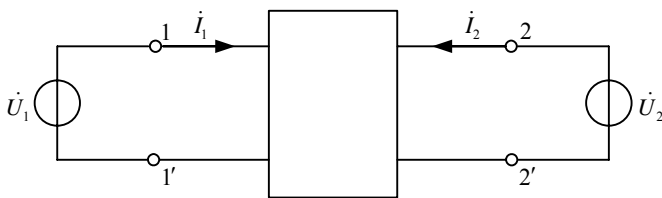
$$Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \bigg|_{\dot{I}_1=0} = \frac{20}{9} \Omega$$

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \bigg|_{\dot{I}_1=0} = \frac{8}{9} \Omega$$

可见 $Z_{12} = Z_{21}$ ，即该网络为互易网络。

8.2.2 导纳参数方程和导纳参数 Y

导纳参数方程是一组以二端口网络的电压 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 为自变量来表征电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 的方程。四个量的参考方向如图 8-3 所示。其中，端口电压 \dot{U}_1 和 \dot{U}_2 为已知量，根据替代定理，这两个电压可以用施加于输入端口和输出端口的两个电压源来替代，如图 8-7 所示，同样根据叠加定理可求出另外两个量 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 。



利用叠加定理可得

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2 \end{aligned} \quad (8-3)$$

其中 Y_{11} 、 Y_{12} 、 Y_{21} 和 Y_{22} 具有导纳的性质，称为导纳参数 Y 。对应的方程为导纳参数方程。由式 (8-3) 可以得到：

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \bigg|_{\dot{U}_2=0}, \text{ 即 } Y_{11} \text{ 是输出端短路时，输入端的输入导纳；}$$

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \bigg|_{\dot{U}_1=0}, \text{ 即 } Y_{12} \text{ 是输入端短路时，输入端对输出端的转移导纳；}$$

(8-4)

$$Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}, \text{ 即 } Y_{21} \text{ 是输出端短路时, 输出端对输入端的转移导纳;}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0}, \text{ 即 } Y_{22} \text{ 是输入端短路时, 输出端的输入导纳。}$$

根据式(8-4)可以计算或测量二端口网络的导纳参数。当二端口网络互易时满足 $Y_{12} = Y_{21}$, 若同时满足 $Y_{11} = Y_{22}$, 则网络对称。

导纳参数方程也可以用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

或表示为

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y} \dot{\mathbf{U}}$$

其中 $\dot{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$ 为端口电流列向量;

$\dot{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$ 为端口电压列向量;

$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$ 为短路导纳矩阵。

例 8-3 求如图 8-8 所示电路的 Y 参数。

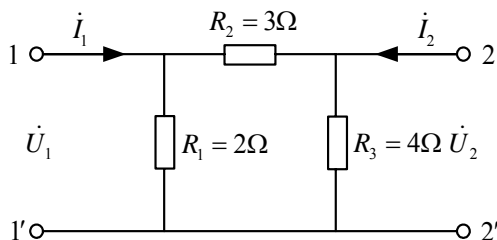


图8-8 例8-3题图

解 令输出端短路, 则 $\dot{U}_2 = 0$, 可得

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{R_1} + \frac{\dot{U}_1}{R_2} = \frac{\dot{U}_1}{2} + \frac{\dot{U}_1}{3} = \frac{5}{6}\dot{U}_1$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{\dot{U}_1}{R_2} = -\frac{\dot{U}_1}{3} = -\frac{1}{3}\dot{U}_1$$

从而得

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{5}{6}\text{S}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = -\frac{1}{3}\text{S}$$

令输入端短路, 则 $\dot{U}_1 = 0$, 可得

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{R_3} + \frac{\dot{U}_2}{R_2} = \frac{\dot{U}_2}{4} + \frac{\dot{U}_2}{3} = \frac{7}{12}\dot{U}_2 \quad \dot{I}_1 = -\frac{\dot{U}_2}{R_2} = -\frac{\dot{U}_2}{3} = -\frac{1}{3}\dot{U}_2$$

从而得

$$Y_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = \frac{7}{12}\text{S}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = -\frac{1}{3}\text{S}$$

从以上计算可以看出 $Y_{12} = Y_{21}$, 即该网络为互易网络。

例 8-4 求如图 8-9 所示电路的 Y 参数。

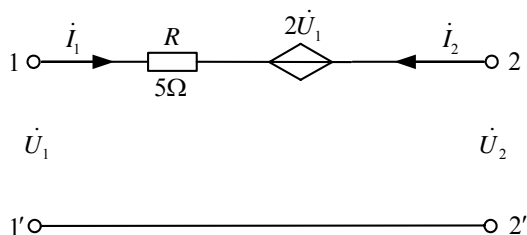


图8-9 例8-4题图

解 令输出端短路, 则 $\dot{U}_2 = 0$, 可得

$$\dot{U}_1 = 5\dot{I}_1 - 2\dot{U}_1$$

即

$$3\dot{U}_1 = 5\dot{I}_1$$

因为

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$$

所以

$$3\dot{U}_1 = -5\dot{I}_2$$

从而得

$$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = \frac{3}{5} \text{ S} \quad Y_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} = -\frac{3}{5} \text{ S}$$

令输入端短路, 则 $\dot{U}_1 = 0$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= 5\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 &= -5\dot{I}_1 \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned} Y_{22} &= \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = \frac{1}{5} \text{ S} \\ Y_{12} &= \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{U}_1=0} = -\frac{1}{5} \text{ S} \end{aligned}$$

由于本网络含有受控源, 故 $Y_{12} \neq Y_{21}$, 所以该网络为非互易网络。

8.2.3 传输参数方程和传输参数 T

传输参数方程是一组以二端口网络输出端电压 \dot{U}_2 和电流 \dot{I}_2 为自变量来表征输入端的电压 \dot{U}_1 和电流 \dot{I}_1 的方程。四个量的参考方向如图 8-3 所示。由导纳参数方程可推得

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B(-\dot{I}_2) \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D(-\dot{I}_2) \end{aligned} \quad (8-5)$$

在式 (8-5) 中, \dot{I}_2 前加负号的原因是: 人们习惯上认为既然是“传输”, \dot{I}_1 从输入端

口的高电位流入网络, 应从输出端口的高电位流出网络, 这样和图中假定的参考方向相反, 所以 \dot{I}_2 前加一负号。其中 A 、 B 、 C 、 D 称为传输参数 T 。 A 、 D 无量纲, B 具有阻抗的量纲, C 具有导纳的量纲。对应的方程称为传输参数方程。

由式 (8-5) 可以得到:

$$A = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0}, \text{ 即 } A \text{ 是输出端开路时, 输入端电压与输出端电压比;}$$

$$C = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0}, \text{ 即 } C \text{ 是输出端开路时, 输入端对输出端的转移导纳;}$$

(8-6)

$$B = \left. \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0}, \text{ 即 } B \text{ 是输出端短路时, 输入端对输出端的转移阻抗;}$$

$$D = \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0}, \text{ 即 } D \text{ 是输出端短路时, 输入电流与输出电流比。}$$

根据式 (8-6) 可以计算或测量二端口网络的传输参数。当 $AD - BC = 1$ 时, 二端口网络互易, 若同时满足 $A = D$, 则网络对称。

传输参数方程用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

其中, $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 为传输参数矩阵。

例 8-5 求如图 8-10 二端口网络的 T 参数。

解 令输出端开路, 则 $\dot{I}_2 = 0$, 可得

$$A = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = 1, \quad C = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = 0$$

令输出端短路, 则 $\dot{U}_2 = 0$, 可得

$$B = \left. \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = Z, \quad D = \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = 1$$

由计算可以看出, $AD - BC = 1$, 且 $A = D$, 所以该网络为对称网络。

例 8-6 求如图 8-11 二端口网络的 T 参数。

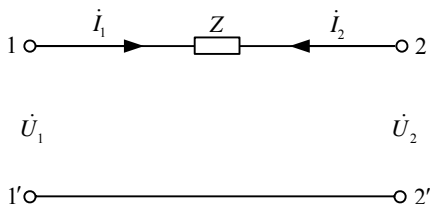


图 8-10 例 8-5 题图

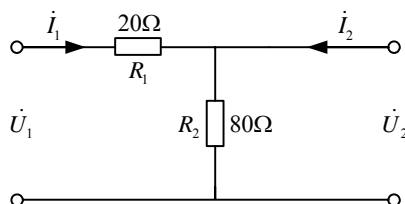


图 8-11 例 8-6 题图

解 根据 T 参数的计算方法可得

$$A = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{20 + 80}{80} = 1.25 \quad B = \left. \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = R_1 = 20 \, \Omega$$

$$C = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{80} = 0.0125 \, \text{S} \quad D = \left. \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} = 1$$

8.2.4 混合参数方程和混合参数 H

在低频电子线路中, 常将 \dot{I}_1 和 \dot{U}_2 作为已知量, \dot{U}_1 和 \dot{I}_2 为待求量, 这时可列出网络方程

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11} \dot{I}_1 + H_{12} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 &= H_{21} \dot{I}_1 + H_{22} \dot{U}_2 \end{aligned} \quad (8-7)$$

此方程称为混合参数方程, 对应的参数为混合参数 H 。由式 (8-7) 可以得到计算和测量混合参数的方法:

$$H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}, \quad \text{即 } H_{11} \text{ 是输出端短路时, 输入端的输入阻抗;}$$

$$H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}, \quad \text{即 } H_{12} \text{ 是输入端开路时, 输入端电压与输出端电压比;} \quad (8-8)$$

$$H_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{U_2=0}, \text{ 即 } H_{21} \text{ 是输出端短路时, 输出端电流与输入端电流比;}$$

$$H_{22} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}, \text{ 即 } H_{22} \text{ 是输入端开路时, 输出端的输入导纳。}$$

若网络互易, 则 $H_{12} = -H_{21}$, 若同时满足 $H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1$ 时, 网络对称。

混合参数方程用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

其中, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ 为混合参数矩阵。

二端口网络四种参数之间可以相互转换, 转换关系见下表 8-1。

表 8-1 二端口网络四种参数之间的转换关系

	Z 参数	Y 参数	H 参数	T 参数
Z 参数	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\Delta Y} & -\frac{Y_{12}}{\Delta Y} \\ -\frac{Y_{21}}{\Delta Y} & \frac{Y_{11}}{\Delta Y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ -\frac{H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A}{C} & \frac{\Delta T}{C} \\ \frac{1}{C} & \frac{D}{C} \end{matrix}$
Y 参数	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\Delta Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{H_{11}} & -\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta H}{H_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{D}{B} & -\frac{\Delta T}{B} \\ -\frac{1}{B} & \frac{A}{B} \end{matrix}$
H 参数	$\begin{matrix} \frac{\Delta Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\Delta Y}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{B}{D} & \frac{\Delta T}{D} \\ -\frac{1}{D} & \frac{C}{D} \end{matrix}$
T 参数	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\Delta Z}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{Y_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\ -\frac{\Delta Y}{Y_{21}} & -\frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta H}{H_{21}} & -\frac{H_{11}}{H_{21}} \\ -\frac{H_{22}}{H_{21}} & -\frac{1}{H_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$

在表 8-1 中:

$$\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}, \quad \Delta Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}, \quad \Delta H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}, \quad \Delta T = AD - BC。$$

【实训室活动】

目的：加深理解二端口网络的基本理论，掌握直流无源二端口网络传输参数的测定方法。

设备与器材：电阻器板、直流稳压电源、直流电流表、直流电压表。

操作步骤：

1. 按图 8-12 接好电路；

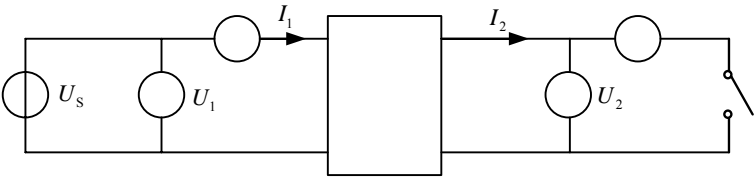


图 8-12 传输参数的测定

2. 调节直流稳压电源，使电压逐渐增大至 $U_1 = 20\text{ V}$ 为止，将网络输出端开路，此时 $I_2 = 0$ ，测出此时的输入电压 U_{10} 和电流 I_{10} 及输出端电压 U_{20} ，将结果填入表 8-2；

3. 将输出端短路，同时测出此时的 U_{1S} 、 I_{1S} 和 I_{2S} ，将结果记入表 8-2；

表 8-2

输出端开路 $I_2 = 0$	$U_{10}(\text{V})$	$U_{20}(\text{V})$	$I_{10}(\text{mA})$
输出端短路 $U_2 = 0$	$U_{1S}(\text{V})$	$I_{2S}(\text{mA})$	$I_{1S}(\text{mA})$

4. 根据测量结果计算出传输参数 T ，填入表 8-3。

表 8-3

A	B	C	D

【思考与分析】

1. 推导四种参数之间的关系。
2. 同一个二端口网络的阻抗参数与导纳参数是否对应为倒数？
3. 已知二端口网络参数，设输入端口电压增加二倍，则网络参数如何变化？为什么？

8.3 二端口网络的等效电路

由前面的学习知道,任何一个线性无源单口网络都可以用一个等效电阻来代替。同样,任何一个不含受控源的线性无源二端口网络也可以用一个简单的电路来代替。也就是说,已知一个二端口网络的某种参数时,可以找一个具体的电路与该网络等效。

由 8.2 节可知。在二端口网络的四种参数中,每种都有四个参数,即每种参数有四个独立的量,对于任何一个线性无源互易二端口网络,则四个参数中仅有三个是独立的,因此等效的网络中只包含三个元件即可。对于线性无源二端口互易网络,一般用三个阻抗或三个导纳组成 T 形或 π 形等效电路来等效代替原网络,如图 8-13 所示。

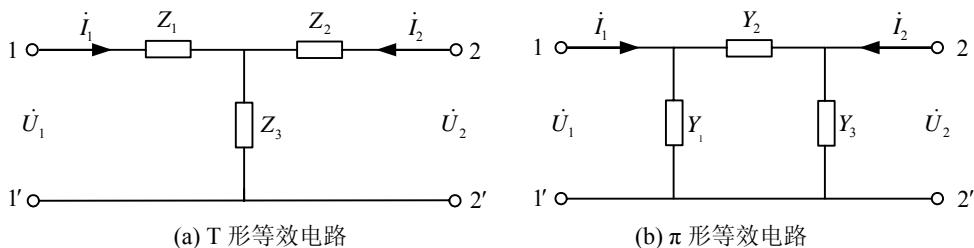


图 8-13 二端口网络的等效电路

8.3.1 T 形等效电路

如果已知某线性无源二端口互易网络的 Z 参数,那么如何求与其等效的 T 形电路呢?在图 8-13 (a) 中,由式 (8-2) Z 参数的计算方法可得

$$\begin{aligned} Z_{11} &= Z_1 + Z_3 \\ Z_{12} &= Z_{21} = Z_3 \\ Z_{22} &= Z_2 + Z_3 \end{aligned} \quad (8-9)$$

由式 (8-9) 可求得

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_{11} - Z_{12} \\ + \quad Z_2 &= Z_{22} - Z_{12} \\ Z_3 &= Z_{12} = Z_{21} \end{aligned} \quad (8-10) \quad +$$

式 (8-10) 就是由 Z 参数求对应 T 形等效电路的公式。

若给出二端口网络的 Y 参数、 T 参数、 H 参数,也可以通过表 8-1 先转换成 Z 参数,然后用式 (8-10) 确定 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 。例如给出 T 参数,则可得

$$Z_{1+} = \frac{A}{C}, \quad Z_{12} = \frac{\Delta T}{C} = \frac{1}{C}, \quad Z_{21} = \frac{1}{C}, \quad Z_{22} = \frac{D}{C} \quad -$$

从而

$$Z_1 = \frac{A-1}{C} \quad Z_2 = \frac{D-1}{C} \quad Z_3 = \frac{1}{C}$$

8.3.2 π 形等效电路

如果已知某线性无源二端口互易网络的 Y 参数, 如何求对应的 π 形等效电路呢? 在图 8-13 (b) 中, 由式 (8-4) Y 参数的计算方法可得

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_1 + Y_3 \\ Y_{12} &= Y_{21} = -Y_3 \\ Y_{22} &= Y_2 + Y_3 \end{aligned} \quad (8-11)$$

由式 (8-11) 可求得

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_{11} + Y_{12} \\ Y_2 &= Y_{22} + Y_{12} \\ Y_3 &= -Y_{12} = -Y_{21} \end{aligned} \quad (8-12)$$

式 (8-12) 就是由 Y 参数求 π 形等效电路的公式。

若给出二端口网络的 Z 参数、 T 参数、 H 参数, 同样可以通过表 8-1 先转换成 Y 参数, 然后用式 (8-12) 确定 Y_1 、 Y_2 、 Y_3 。例如给出 T 参数, 则可得

$$Y_{11} = \frac{D}{B}, \quad Y_{12} = -\frac{\Delta T}{B} = -\frac{1}{B}, \quad Y_{21} = -\frac{1}{B}, \quad Y_{22} = \frac{A}{B}$$

从而

$$Y_1 = \frac{D-1}{B} \quad Y_2 = \frac{A-1}{B} \quad Y_3 = \frac{1}{B}$$

例 8-7 已知某二端口网络的传输参数 $A=9$, $B=7$, $C=5$, $D=4$ 。试求 T 形和 π 形等效电路中各元件参数的值。

解 首先验证网络的互易性

$$AD - BC = 9 \times 4 - 7 \times 5 = 1$$

故原网络为互易网络

T 形等效电路元件参数为

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{A-1}{C} = \frac{8}{5} \, \Omega \\ Z_2 &= \frac{D-1}{C} = \frac{3}{5} \, \Omega \\ Z_3 &= \frac{1}{C} = \frac{1}{5} \, \Omega \end{aligned}$$

$$Y_1 = \frac{D-1}{B} = \frac{3}{7} \text{ S}$$

$$\pi \text{ 形等效电路元件参数为}$$

$$Y_2 = \frac{A-1}{B} = \frac{8}{7} \text{ S}$$

$$Y_3 = \frac{1}{B} = \frac{1}{7} \text{ S}$$

例 8-8 如图 8-14(a)所示, 已知线性无源二端口网络的 Z 参数为 $Z_{11} = 8 \Omega$, $Z_{12} = 4 \Omega$, $Z_{21} = 4 \Omega$, $Z_{22} = 6 \Omega$, $\dot{U}_s = 14\angle 0^\circ \text{ V}$, $R_s = 1 \Omega$, $R_L = 2 \Omega$, 求 \dot{U}_2 。

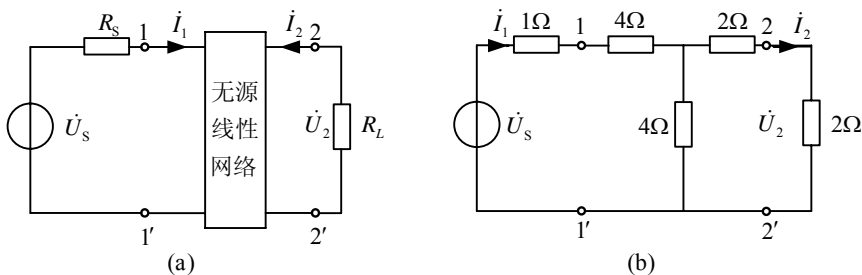


图 8-14 例 8-8 题图

解 由已知条件可知, 该网络为互易网络, 故可得 T 形等效电路的三个参数为

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12} = 4 \Omega \quad Z_2 = Z_{22} - Z_{12} = 2 \Omega \quad Z_3 = Z_{12} = Z_{21} = 4 \Omega,$$

用等效电路代替二端口网络, 可得图 8-14 (b) 所示等效电路。

电路中的电流

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{14\angle 0^\circ}{7} = 2\angle 0^\circ (\text{A})$$

从而得

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{2} \dot{I}_1 = 1\angle 0^\circ (\text{A})$$

则

$$\dot{U}_2 = 2\dot{I}_2 = 2\angle 0^\circ (\text{V})$$

【思考与分析】

1. 试推导 Y 参数与 T 形等效电路三个参数之间的变换关系。
2. 试证明 T 形等效电路和 π 形等效电路的阻抗之间满足 Y- Δ 变换关系。

8.4 二端口网络的连接

在分析和设计电路时,常将几个简单的二端口网络按一定方式连接起来,构成一个新的二端口网络。二端口网络的连接方式有级联、串联、并联、串并联、并串联五种,下面将就前三种进行讨论。

8.4.1 二端口网络的串联

如图 8-15 所示,将两个或两个以上二端口网络的对应端口分别作串联连接称为二端口网络的串联。

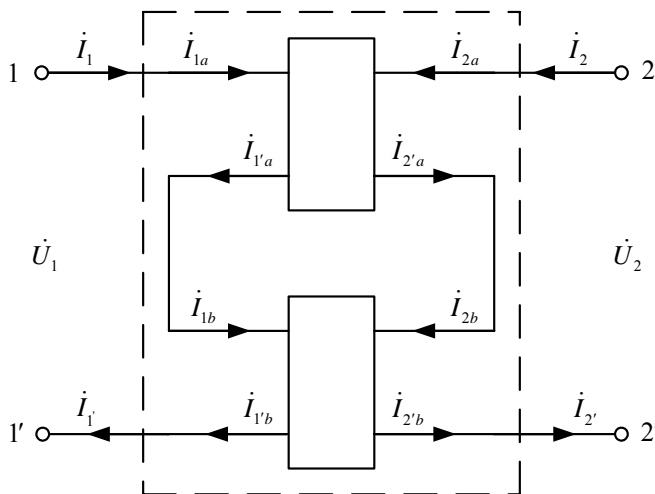


图 8-15 二端口网络的串联

由图 8-15, 根据 KCL 可得 $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1'}$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2'}$, 故, 两个二端口网络串联后仍满足二端口网络的端口条件, 仍为二端口网络。若串连后 a 网络的端口特性 $\dot{I}_{1a} = \dot{I}_{1'a}$, $\dot{I}_{2a} = \dot{I}_{2'a}$ 和 b 网络的端口特性 $\dot{I}_{1b} = \dot{I}_{1'b}$, $\dot{I}_{2b} = \dot{I}_{2'b}$ 也仍然成立, 即原二端口网络的端口特性没有被破坏, 这种串联称为有效串联。有效串联后得到的新二端口网络的 Z 参数矩阵不必重新求解, 它满足 $Z = Z_a + Z_b$ 。如果串联后原二端口网络的端口特性被破坏, 则 Z 参数需按照上节中的 (8-2) 式重新求解。同理, 当 n 个二端口网络有效串联时, 得到的新二端口网络的 Z 参数矩阵满足

$$Z = Z_a + Z_b + \cdots + Z_n$$

8.4.2 二端口网络的并联

如图 8-16 所示, 将两个或两个以上的二端口网络的对应端分别作并联连接称为二端口网络的并联。如果并联后, 原二端口网络的端口特性没有被破坏, 则称为有效并联。有效并联后的新二端口网络 Y 参数矩阵不必重新求解, 它满足 $Y = Y_a + Y_b$ 。如果不是有效并联, 则参数需按照上节中的式 (8-4) 重新求解。

同理, 当 n 个二端口网络有效并联时, 得到的新二端口网络的 Y 参数矩阵满足

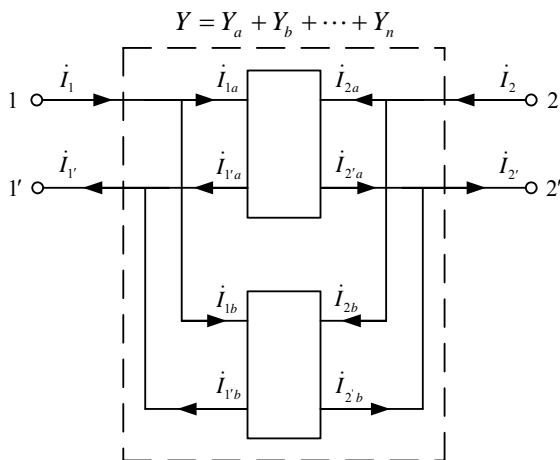


图 8-16 二端口网络的并联

8.4.3 二端口网络的级联

如图 8-17 所示, 将上一级二端口网络的输出端口直接与下一级二端口网络的输入端口作对应连接, 称为二端口网络的级联。级联总是有效的, 级联后新二端口网络的 T 参数矩阵满足 $T = T_a \cdot T_b$ 。

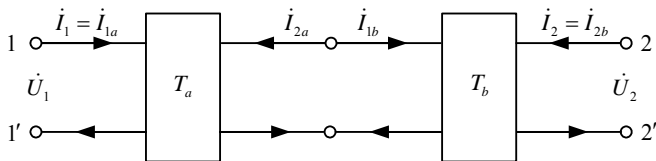


图 8-17 二端口网络的级联

当 n 个二端口网络级联时, 得到的新二端口网络的 T 参数矩阵满足

$$T = T_a \cdot T_b \cdot \cdots \cdot T_n$$

【思考与分析】

1. 什么是二端口网络的串联?
2. 什么是有效串联? 若串联不是有效串联, 则新二端口网络的参数如何得到?

8.5 本章小结

1. 当四端网络的四个端钮满足二端口条件时, 称为二端口网络。二端口网络的性能可用网络的参数方程来表征。

2. 从二端口网络的输入和输出端口的电流、电压四个量中, 任取其中的两个为自变量, 另两个为因变量, 可以列出六种不同的网络方程, 对应得到六种不同的网络参数, 其中最常用的参数有 Z 、 Y 、 T 、 H 四种, 四种参数之间可以相互转换。

3. 满足 $Z_{12} = Z_{21}$ 的二端口网络称为互易网络, 互易网络的 Z 参数只有三个是独立的。对于互易网络, 若同时满足 $Z_{11} = Z_{22}$, 则网络为对称网络。对称网络的 Z 参数中只有两个是独立的。对称网络的输入和输出端可以对调使用, 对调后对外电路没有任何影响。

4. 当已知网络内部结构及各元件的参数时, 可根据定义求出各种网络参数。当网络结构未知时, 可用实验的方法测量、计算出各种参数。

5. 对于线性无源二端口互易网络, 可用三个阻抗或三个导纳组成 T 形或 π 形等效电路来代替原二端口网络。等效电路与原网络具有相同的外特性。

6. 一个复杂的二端口网络, 可以认为是若干个简单的二端口网络通过一定方式连接得到的, 当 n 个二端口网络有效串联组成一个新二端口网络时, 其 Z 参数矩阵满足 $Z = Z_a + Z_b + \cdots + Z_n$ 。当 n 个二端口网络有效并联组成一个新二端口网络时, 其 Y 参数矩阵满足 $Y = Y_a + Y_b + \cdots + Y_n$ 。当 n 个二端口网络级联组成新二端口网络时, 其 T 参数矩阵满足 $T = T_a \cdot T_b \cdot \cdots \cdot T_n$ 。

8.6 自测与练习

8-1 当二端口网络的 T 参数满足_____条件时, 网络为互易网络, 满足_____条件时, 网络为对称网络。对称网络_____是互易网络。但互易网络不一定是对称网络。

8-2 二端口网络 Z 参数中的四个参数都具有_____的性质, 故单位都为_____。

8-3 用 T 形或 π 形等效电路代替二端口网络时, 二端口网络必须满足_____条件。

8-4 已知两个二端口网络的阻抗参数矩阵分别为 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, 则两网络有效串联后的新二端口网络的阻抗参数矩阵为 ()。

- (a) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$

8-5 若两个二端口网络的传输参数矩阵分别为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix}$, 则两网络级联后的新二端口网络的传输参数矩阵为 ()。

- (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ Y_1 + Y_2 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 Y_2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 + Y_2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

8-6 求图 8-18 所示电路中二端口网络的 Z 参数。

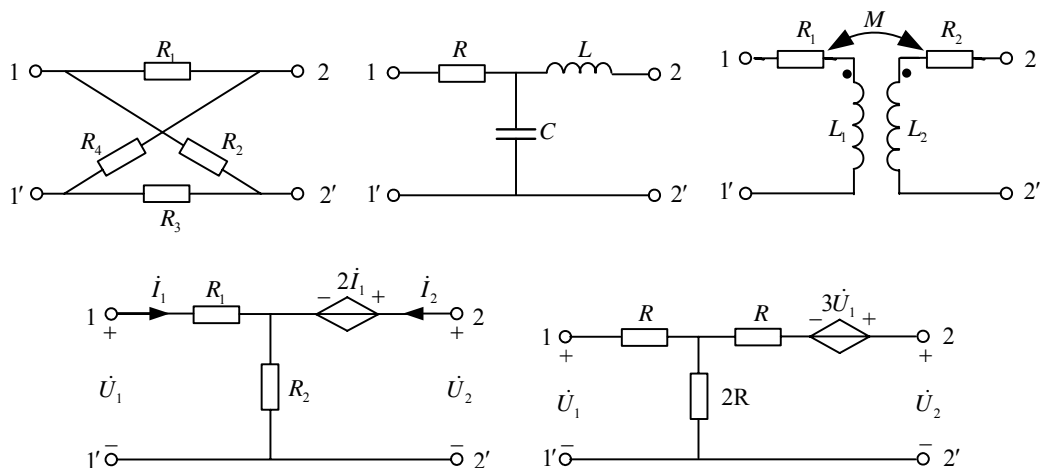


图 8-18 自测与练习 8-6 图

8-7 求图 8-19 所示电路中二端口网络的 Y 参数。

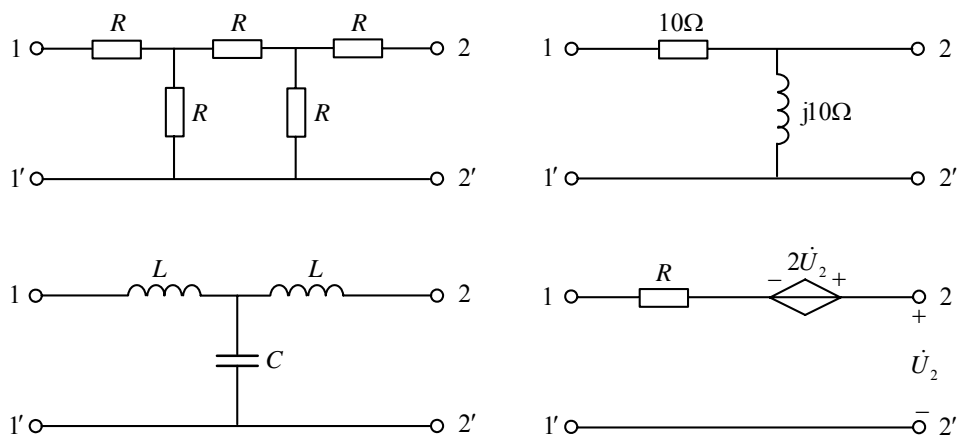


图 8-19 自测与练习 8-7 图

8-8 求图 8-20 所示电路中二端口网络的 T 参数。

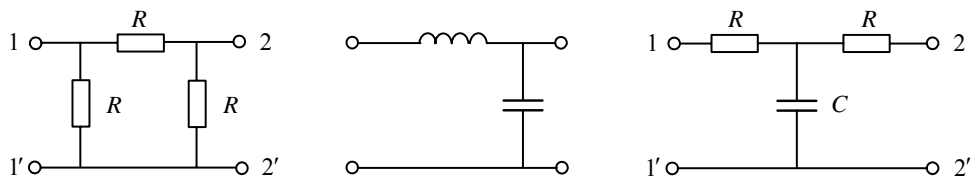


图 8-20 自测与练习 8-8 图

8-9 求图 8-21 所示电路中二端口网络的 H 参数。

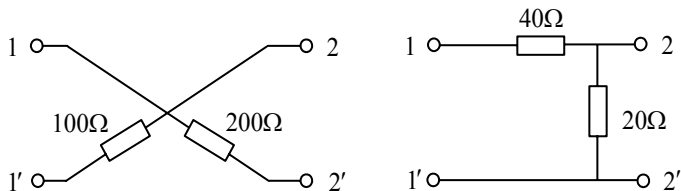


图 8-21 自测与练习 8-19 图

8-10 求图 8-22 所示电路中二端口网络的 Z 、 Y 、 H 、 T 参数。

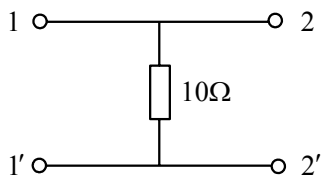


图 8-22 自测与练习 8-10 图

8-11 已知互易二端口网络的 $A=1$, $B=1-j$, $C=1$, 求 D 。

8-12 求对应下面开路阻抗矩阵的二端口网络的等效电路。

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

8-13 求对应下面短开路导纳矩阵的二端口网络的等效电路。

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

自测与练习部分答案

第 1 章 电路的基本概念和基本定律

- 1-1 由 a 到 b , 由 b 到 a
- 1-2 负
- 1-3 12 W , -12 W , 12 W
- 1-4 $U = RI$, $U = -RI$
- 1-5 4.5 A ,
- 1-6 0.114 A , $1.9\text{ k}\Omega$
- 1-7 -1 V
- 1-8 a
- 1-9 c
- 1-10 c
- 1-11 3 A , 自上而下; 4 A , 自上而下
- 1-12 -140 W , 40 W , 100 W
- 1-13 9 V , -14 V , -4 V , 2 V
- 1-14 1 A , -3.5 A , -8 A , -1 A
- 1-15 1 A , 6Ω
- 1-16 -1 A , -6 A
- 1-17 图 (a): 6 V , 3 V , 0 , 图 (b): 4 V , 0 , -2 V ;
图 (c): 6 V , -2 V , -6 V ; 图 (d): 6 V , 6 V , 0 。
- 1-18 S 打开时: -1.8 V ; 关闭时: 5.2 V 。

第 2 章 等效电路

- 2-1 对相同的外电路, 相互等效的二端网络端纽伏安关系相同
- 2-2 不一定

- 2-3 VCVS, VCCS, CCCS, CCVS
2-4 3.75Ω
2-5 c
2-6 a
2-7 b
2-8 c
2-9 50 W , -50 W
2-10 3Ω , 2Ω , 6Ω , 2.2Ω 。
2-11 6 V 、 0 ; 6 V 、 2 A ; 6 V 、 1 A ; 0 、 6 A ; 12 V 、 6 A ; 24 V 、 6 A
2-13 6Ω 、 2.67Ω ;
2-14 1 A 、 1 A 。

第 3 章 电阻电路的一般分析方法

- 3-1 9 W , -1 W
3-2 1 A , 2.5 A , 3.5 A , 5 A
3-6 3.33 A , 6Ω , 16.67 W
3-7 b
3-8 c
3-9 a
3-10 $U = 52 \text{ V}$
3-11 $U_1 = 7.5 \text{ V}$, $U_2 = 12.5 \text{ V}$
3-12 2.67 W
3-13 $I = 1 \text{ A}$
3-14 $I_1 = 32 \text{ A}$, $I_2 = 20 \text{ A}$, $I_3 = 12 \text{ A}$, $I_4 = 8 \text{ A}$, $I_5 = 4 \text{ A}$
3-15 $U_0 = 3 \text{ V}$

第 4 章 正弦交流电路

- 4-1 5 A 、 0.02 s 、 50 Hz 、 60°
4-2 101 、 100

$$4-3 \quad u = 311 \sin(314t - \frac{\pi}{3}) \text{ V}$$

$$4-4 \quad i = 22\sqrt{2} \sin(1000t - 6.9^\circ) \text{ A} 、 3.8 \text{ kW} 、 2.9 \text{ kvar} 、 4.84 \text{ kVA}$$

$$4-5 \quad (1)、(4)$$

$$4-6 \quad (4)$$

$$4-7 \quad (1)、(4)$$

$$4-8 \quad (1)、(4)$$

$$4-9 \quad (2)、(5)$$

$$4-10 \quad (2)、(5)$$

$$4-11 \quad u = 5 \sin(785t - \frac{\pi}{4}) \text{ V} 、 i = 0.004 \sin(785t + \frac{\pi}{4}) \text{ A} 、 \frac{\pi}{2}$$

$$4-12 \quad \dot{I}_{m2} = 1.5e^{j30^\circ} \text{ A} 、 \dot{I}_{m1} = 2.5e^{j70^\circ} \text{ A}$$

$$4-15 \quad 0、5\sqrt{2}、5\sqrt{2}$$

$$4-16 \quad 12\sqrt{2}、12\sqrt{2}、0$$

$$4-17 \quad u = 8 \sin(\omega t - 146.1^\circ) \text{ V}$$

$$4-18 \quad 132 \text{ V} 、 0.44 \text{ A}$$

$$4-19 \quad u = 20\sqrt{2} \sin(314t + 83.1^\circ) \text{ V} 、 0.6 、 24 \text{ W} 、 32 \text{ var} 、 40 \text{ VA}$$

$$4-20 \quad 0.6 、 58 \text{ W} 、 77.4 \text{ var} 、 96.8 \text{ VA}$$

$$4-21 \quad 0.27 \text{ H}$$

$$4-22 \quad 2e^{j60^\circ} \Omega 、 25 \text{ W}$$

第 5 章 三相正弦交流电路

$$5-1 \quad \text{三相负载对称、三相负载不对称}$$

$$5-2 \quad 220e^{-j90^\circ} \text{ V} 、 220e^{j150^\circ} \text{ V} 、 220\sqrt{3}e^{j60^\circ} \text{ V} 、 220\sqrt{3}e^{-j60^\circ} \text{ V} 、 220\sqrt{3}e^{-j180^\circ} \text{ V}$$

$$5-3 \quad 1.74 \text{ kW} 、 2.23 \text{ kvar} 、 2.9 \text{ kVA}$$

$$5-4 \quad (1)、(4)$$

$$5-5 \quad (1)、(4)$$

$$5-6 \quad 68 \text{ A} 、 0$$

$$5-7 \quad 220 \text{ V} 、 22 \text{ A} 、 22 \text{ A}$$

$$5-8 \quad 2.7 \text{ A} 、 2.7 \text{ A} 、 8.2 \text{ A} 、 5.5 \text{ A}$$

$$5-9 \quad 3$$

$$5-10 \quad 38 \text{ A} 、 38\sqrt{3} \text{ A}$$

- 5-11 (1) $8\sqrt{3}$ A (2) 0、 $8\sqrt{3}$ A、 $8\sqrt{3}$ A (3) $8\sqrt{3}$ A、 $4\sqrt{3}$ A、 $4\sqrt{3}$ A
 5-12 26 kW、34.7 kvar、43.3 kVA
 5-13 $3.3\sqrt{3}$ kW、5.7 kW

第 6 章 一阶电路的暂态分析

- 6-1 过渡过程
 6-2 不; $i_L(0_+) = i_L(0_-)$, $u_C(0_+) = u_C(0_-)$
 6-3 慢, $R_0 C$, $\frac{L}{R_0}$
 6-4 初始值, 稳态值, 时间常数
 6-5 初始储能, 外加激励
 6-6 c
 6-7 a
 6-8 b
 6-9 a
 6-10 a
 6-11 d
 6-12 a
 6-13 a
 6-14 0, 0
 6-15 $i(0_+) = 1.67$ A $i_s(0_+) = 0.68$ A $i_L(0_+) = 1$ A
 6-16 0, 0.78 A
 6-17 -2 V, 1 A, 6 V, -1 A
 6-18 $2e^{-t}$ V, e^{-t} V, $0.5e^{-t}$ A
 6-19 $0.5e^{-t}$ A
 6-20 $14e^{-50t}$ V
 6-21 $3e^{-\frac{t}{6}}$ A, $6(1 - e^{-\frac{t}{6}})$ V, $3(1 - e^{-\frac{t}{6}})$ A
 6-22 9 277.28 s
 6-23 $(12 - 6e^{-125t})$ V,
 6-24 0.0368 s
 6-25 $(1 - 0.2e^{-12t})$ A, $(1 - 0.2e^{-12t})$ A, $(2 - 0.4e^{-12t})$ A

第7章 耦合电感电路

7-1 0.33

7-2 同名端 异名端

7-3 (a)

7-4 (b) (a)

7-5 闭合: 反偏, 断开: 正偏; 闭合: 正偏, 断开: 反偏

$$7-6 \quad u_2 = 200 \sin(1000t - \frac{\pi}{2})$$

$$7-7 \quad \begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} & \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} & \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} & \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ u_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & \dot{U}_2 = -j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} & \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 \\ u_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & \dot{U}_2 = -j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & \dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

$$7-8 \quad u = 2000\sqrt{2} \sin(100t + \frac{\pi}{2}) \text{ V}$$

7-9 0.064 H

第8章 二端口网络

8-1 $AD - BC = 1$; $AD - BC = 1$, 且 $A = D$; 一定

8-2 阻抗, 欧姆

8-3 互易

8-4 a

8-5 c

8-6

$$Z_{11} = \frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \quad Z_{21} = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = Z_{12} \quad Z_{22} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

$$Z_{11} = R - j\frac{1}{\omega C} \quad Z_{21} = -j\frac{1}{\omega C} = Z_{12} \quad Z_{22} = j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$$

$$Z_{11} = R_1 + j\omega L_1 \quad Z_{21} = j\omega M = Z_{12} \quad Z_{22} = R_2 + j\omega L_2$$

$$Z_{11} = R_1 + R_2 \quad Z_{21} = 2 + R_2 \quad Z_{12} = Z_{22} = R_2$$

$$Z_{11} = 3R \quad Z_{21} = 11R \quad Z_{12} = 2R \quad Z_{22} = 9R$$

$$8-7 \quad Y_{11} = \frac{5}{8R} = Y_{22} \quad Y_{21} = -\frac{1}{8R} = Y_{12}; \quad Y_{11} = \frac{1}{10} \quad Y_{21} = -\frac{1}{10} = Y_{12} \quad Y_{22} = \frac{1-j}{10}$$

$$Y_{11} = \frac{j\omega(LC-1)}{2L-\omega^2 L^2 C} = Y_{22} \quad Y_{21} = \frac{-j}{\omega^3 L^2 C - 2\omega L} = Y_{12}$$

$$Y_{11} = \frac{1}{R} = Y_{12} \quad Y_{21} = -\frac{1}{R} = Y_{22}$$

$$8-8 \quad A = 2 \quad B = R \quad C = \frac{3}{R} \quad D = 2$$

$$A = 1 - \omega^2 LC \quad B = j\omega L \quad C = j\omega C \quad D = 1$$

$$A = jR\omega C + 1 \quad B = jR^2\omega C + 2R \quad C = j\omega C \quad D = 1 + jR\omega C$$

$$8-9 \quad H_{11} = 300 \quad H_{21} = 1 \quad H_{12} = -1 \quad H_{22} = 0$$

$$H_{11} = 40 \quad H_{21} = -1 \quad H_{12} = 1 \quad H_{22} = 0.05$$

$$8-10 \quad Z_{11} = 10 \quad Z_{21} = 10 \quad Z_{12} = 10 \quad Z_{22} = 10$$

$$Y_{11} = Y_{22} = \infty \quad Y_{21} = Y_{12} = -\infty$$

$$H_{11} = 0 \quad H_{21} = -1 \quad H_{12} = 1 \quad H_{22} = 0.1$$

$$T_{11} = 1 \quad T_{21} = 0.1 \quad T_{12} = 0 \quad T_{22} = 1$$

$$8-11 \quad 2-j$$

$$8-12 \quad Z_1 = 2 \quad Z_2 = 1 \quad Z_3 = 1$$

$$8-13 \quad Y_1 = 3 \quad Y_2 = 1 \quad Y_3 = 2$$

参 考 文 献

- [1] 李瀚荪. 电路及磁路 [M]. 北京: 中央广播电视大学出版社, 2005.
- [2] 石生. 电路基本分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] 姚国依. 电路与电子学 [M]. 北京: 电子工业出版社, 1998.
- [4] 高玉良. 电路与模拟电子技术 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [5] 胡翔骏. 电路基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [6] 王淑敏. 电路基础常见题型解析及模拟题 [M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.
- [7] 张永瑞, 陈生潭. 电路分析基础 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [8] 王俊鹏. 电路基础 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2005.
- [9] 上官右黎. 电路基础 [M]. 北京: 北京邮电大学出版社, 2003.
- [10] 席时达. 电工技术 (第 2 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.
- [11] 王慧玲. 电路基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [12] 付玉明. 电路分析基础 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2002.
- [13] 张年凤. 电路基本理论 [M]. 北京: 清华大学出版社, 北京交通大学出版社, 2004.