

史忠科 / 著

# 最优估计的计算方法



科学出版社

国家自然科学基金及“211”工程资助

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

# 最优估计的计算方法

史忠科 著

科学出版社

2001

## 内 容 简 介

本书系统地总结了著者和国内外学者对最优估计计算方法的研究成果。重点介绍平方根滤波、平滑等算法的数值稳定性和计算效率,以及著者提出的 U-D 分解滤波、平滑新方法、状态与参数联合估计、鲁棒估计、非线性系统状态估计等研究成果。

著者建立的各类平滑新算法使计算效率有了突破性进展,有关的新算法已在实践中得到成功应用,取得了明显的社会、经济效益。

本书可供从事航空、航天、航海、工业过程控制、系统工程、信号处理、数据分析、计算数学等领域的科技人员学习,也可供有关专业的大学师生学习参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

最优估计的计算方法/史忠科著.-北京:科学出版社,2001.  
ISBN 7-03-009058-6

I. 最… II. 史… III. 估计-最优化算法 N.O211.67

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 81893 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号  
邮政编码:100717

源海印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2001 年 5 月第 一 版 开本:787×1092 1/16  
2001 年 5 月第一次印刷 印张:13 1/2  
印数:1—3 000 字数:307 000

定价:27.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(北燕))

超星浏览器提醒您:  
禁止复制或  
传播非法知识产权!



## 前 言

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

最优估计在航空、航天、工业过程控制等领域有着广泛的应用。它可用于统计图像的处理、交通密度估计、化工过程控制、河水流量估计、发电站负荷预测、卫星轨道估计、目标跟踪、飞行数据处理和其他实验数据处理等。这些处理大都采用卡尔曼滤波，推广卡尔曼滤波，固定点、固定区间、固定滞后平滑等方法。然而，理论研究和实际应用的结果表明，这些方法有两个明显的缺点：一是算法的数值稳定性差，在小型或微型机上实现时常常出现计算发散现象；二是平滑所需计算量较大，处理速度太慢。为了解决这些问题，国际上很多学者一直致力于研究滤波和平滑的具体算法，以提高数值稳定性和计算效率。近年来，著者对飞行状态估计问题进行了一系列的研究，提出了 U-D 分解滤波，固定点、固定区间、固定滞后平滑等新的计算方法和有关的鲁棒滤波算法，这些新算法使计算效率有了突破性进展，并在实践中得到成功应用，取得了明显的社会、经济效益。本书是对国内外 40 年来最优估计计算方法的系统总结，并讨论了状态与参数的联合估计问题和非线性系统的状态估计问题。

全书共十四章。第一章简单介绍最优估计理论的有关问题；第二章介绍线性系统的最优滤波和预测；第三章分析滤波的稳定性问题；第四章介绍线性离散系统的最优平滑估计理论和著者提出的固定点平滑估计的新方法；第五章介绍线性连续系统的平滑估计方法；第六章介绍线性离散系统的平方根滤波方法；第七章介绍线性离散系统的平方根平滑估计方法和著者对平滑问题的研究结果；第八章介绍连续系统的滤波和平滑计算方法；第九章介绍非线性系统的最优估计方法；第十章介绍大系统估计理论和著者给出的多级分解的卡尔曼滤波方法；第十一章介绍卡尔曼滤波器应用中的有关问题；第十二章介绍鲁棒估计理论；第十三章介绍状态和未知参数的联合估计及发展；第十四章给出了飞行状态估计的实际应用。

由于著者水平所限，书中难免有不成熟之处，敬请读者批评指正。

## 目 录

<b>第一章 估计理论简介</b>	<b>1</b>
1.1 绪论	1
1.2 最小方差估计	3
1.3 极大似然估计	7
1.4 极大验后估计	9
1.5 线性最小方差估计	12
1.6 最小二乘估计	16
1.7 加权最小二乘法	17
<b>第二章 线性系统的最优滤波和预测</b>	<b>19</b>
2.1 线性离散系统的最优滤波	19
2.2 线性离散系统的最优预测	22
2.3 线性连续系统的最优滤波	24
2.4 线性连续系统的最优预测	27
<b>第三章 滤波的稳定性</b>	<b>29</b>
3.1 滤波的稳定性概念	29
3.2 随机线性系统的可控性和可观测性	31
3.3 滤波误差的界	35
<b>第四章 线性离散系统的最优平滑估计</b>	<b>36</b>
4.1 固定区间最优平滑估计	36
4.2 固定点最优平滑估计	40
4.3 固定滞后最优平滑估计	43
4.4 固定点平滑估计的新方法	45
<b>第五章 线性连续系统的平滑估计</b>	<b>47</b>
5.1 线性连续系统的最优平滑问题	47
5.2 固定区间平滑估计	50
5.3 固定点平滑估计	53
5.4 固定滞后平滑	54
<b>第六章 线性离散系统的平方根滤波方法</b>	<b>56</b>
6.1 计算发散和 Joseph 方法	56
6.2 协方差平方根滤波方法	57
6.3 信息平方根滤波方法	61
6.4 序列平方根滤波方法	66
6.5 时间更新平方根滤波方法	68

6.6	U-D 分解的滤波方法 .....	70
6.7	奇异值分解最优滤波方法 .....	72
6.8	平方根类滤波方法计算量比较 .....	73
<b>第七章</b>	<b>线性离散系统的平方根平滑估计方法 .....</b>	<b>75</b>
7.1	平滑估计的稳定性和计算效率 .....	75
7.2	固定区间平滑估计的有效方法 .....	75
7.3	固定点平滑估计的有效方法 .....	81
7.4	固定滞后平滑估计的有效方法 .....	87
7.5	前向平滑估计方法 .....	98
7.6	信息平方根平滑估计方法 .....	108
<b>第八章</b>	<b>线性连续系统的滤波和平滑计算方法 .....</b>	<b>117</b>
8.1	黎卡提方程的求解方法 .....	117
8.2	李亚普诺夫方程求解方法 .....	120
8.3	基于奇异值分解的黎卡提方程求解 .....	121
<b>第九章</b>	<b>非线性系统的最优估计 .....</b>	<b>124</b>
9.1	围绕标称轨道线性化方法 .....	124
9.2	围绕滤波值 $\hat{x}(t t)$ 线性化的滤波方法 .....	127
9.3	近似条件均值滤波及二阶滤波 .....	129
9.4	迭代滤波 .....	133
<b>第十章</b>	<b>大系统估计理论 .....</b>	<b>135</b>
10.1	极大验后估计方法 .....	135
10.2	连续系统的分割滤波方法 .....	139
10.3	多级分解的卡尔曼滤波方法 .....	141
<b>第十一章</b>	<b>卡尔曼滤波器应用中的有关问题 .....</b>	<b>144</b>
11.1	滤波的发散及其克服方法 .....	144
11.2	自适应滤波 .....	147
11.3	次优滤波器 .....	155
<b>第十二章</b>	<b>鲁棒估计理论 .....</b>	<b>156</b>
12.1	噪声统计特性问题 .....	156
12.2	模型不确定问题 .....	158
12.3	$H_\infty$ 滤波方法 .....	162
12.4	连续系统的最小方差鲁棒滤波 .....	164
12.5	离散系统的最小方差鲁棒滤波 .....	166
<b>第十三章</b>	<b>状态和未知参数的联合估计 .....</b>	<b>171</b>
13.1	适应性分割估计方法 .....	171
13.2	线性系统的状态和参数分离算法 .....	175
13.3	非线性系统的分离算法 .....	178
13.4	状态和参数同时估计的极大似然方法 .....	179

<b>第十四章 飞行状态估计与监视</b> .....	<b>182</b>
14.1 飞机运动方程和估计模型.....	182
14.2 两段序列滤波方法.....	186
14.3 U-D 分解的两段序列滤波方法 .....	188
14.4 U-D 分解的序列平滑算法 .....	189
14.5 结果分析.....	191
<b>附录 A 矩阵运算的一些公式</b> .....	<b>198</b>
<b>附录 B 矩阵求逆引理</b> .....	<b>203</b>
<b>附录 C 矩阵许瓦茨不等式</b> .....	<b>204</b>
<b>附录 D 正交定理</b> .....	<b>204</b>
<b>参考文献</b> .....	<b>206</b>

超星阅读器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

# 第一章 估计理论简介

## 1.1 绪 论

### 1.1.1 基本概念

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

系统状态和参数估计具有广泛的应用,它可用于统计图像处理、交通密度估计、化学过程估计、河水流量估计、发电站负荷预测、卫星轨道估计、飞行器气动特性估计、最优导航、验后数据分析等。以验后数据分析为例,当一个试验完成后,为了判断试验的结果,必须对试验过程中所得到的数据进行处理。由于测量仪器本身含有系统偏差、刻度量因子误差和随机噪声,因此,在进行结果分析之前,必须将这些误差确定出来,否则会导致错误的结果。估计理论实际上是根据状态方程和观测方程,按概率统计和优化的原理对系统的状态或参数作出估计。以下,仅举一个简单的例子说明最优估计问题。

**例 1.1** 假定用两个相同的仪表对某一恒定量  $x$  进行观测,观测值为  $z_i (i=1,2)$ ,观测时存在随机的、相互独立的、均值为零的观测误差  $v_i (i=1,2)$ 。试设计一种数据处理方法,组合两个仪表观测值,以便得到  $x$  的无偏最优估值。

**解** 根据题意,观测值  $z_1, z_2$  应为

$$z_1 = x + v_1, \quad z_2 = x + v_2 \quad (1.1)$$

在没有其他信息情况下,我们可以假定  $x$  的估计值应为两个观测值的线性函数,并以  $\hat{x}$  表示  $x$  的估计值,则

$$\hat{x} = k_1 z_1 + k_2 z_2 \quad (1.2)$$

式中,  $k_1, k_2$  为待定系数。估值误差定义为  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ,我们取  $\tilde{x}$  的均方差为最小作为最优判据,而且选择  $k_1, k_2$  与  $x$  值无关。根据估计值为无偏的要求可得

$$E(\tilde{x}) = E[x - k_1(x + v_1) - k_2(x + v_2)] = 0 \quad (1.3)$$

由于  $E(v_1) = E(v_2) = 0, E(x) = E(\hat{x})$ ,由(1.3)式得

$$k_2 = 1 - k_1 \quad (1.4)$$

以(1.4)式代入  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ,求  $E(\tilde{x}^2)$  得

$$\begin{aligned} E(\tilde{x}^2) &= E\{[x - k_1(x + v_1) - (1 - k_1)(x + v_2)]^2\} \\ &= E\{[k_1 v_1 + (1 - k_1)v_2]^2\} \\ &= E[(k_1^2 v_1^2 + (1 - k_1)^2 v_2^2 + 2k_1(1 - k_1)v_1 v_2]) \end{aligned}$$

假定  $v_1, v_2$  的方差为  $E(v_1^2) = \sigma_1^2, E(v_2^2) = \sigma_2^2$ ,根据题意  $v_1, v_2$  相互独立,即  $E(v_1 v_2) = 0$ ,故得

$$E(\tilde{x}^2) = k_1^2 \sigma_1^2 + (1 - k_1)^2 \sigma_2^2$$

适当地选择  $k_1$ ,可使  $E(\tilde{x}^2)$  为最小。为此令  $E(\tilde{x}^2)$  对  $k_1$  的导数为零,即



$$\frac{\partial E(\hat{x}^2)}{\partial k_1} = 2k_1\sigma_1^2 - 2(1 - k_1)\sigma_2^2 = 0$$

由此求得  $k_1 = \sigma_2^2 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 。于是  $x$  的最优估值为

$$\hat{x} = \left( \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) z_1 + \left( \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) z_2$$

对应的最小估值误差均方值为

$$E(\hat{x}^2) = \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right)^{-1}$$

从上面例子可以看出,当缺乏其他信息并只能从观测值确定  $x$  时,  $x$  的最优估值  $\hat{x}$  应为观测值  $z_1, z_2$  的加权平均,加权系数  $k_1, k_2$  分别与观测误差的均方值成反比,即观测误差的均方值愈大,该观测值的加权系数愈小。反之,观测误差的均方值愈小,加权系数愈大。如果  $\sigma_1^2 = 0$ , 则  $\hat{x} = z_1$ ; 如果  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , 则  $\hat{x} = (z_1 + z_2)/2$ 。在以后的讨论中,我们将看到对所获得的系统状态各种信息进行加权处理,可以求得系统状态的最优估值,这是最优估计理论的基本思想。

### 1.1.2 估计问题提法和估计准则

实际中,人们根据对不同仪器仪表及被估值的统计特性的掌握程度提出了下列一些估计准则:最小方差准则、极大似然准则、极大验后准则、线性最小方差准则及最小二乘准则等。依据不同的准则,可得各种不同的估计方法,例如最小方差估计、极大似然估计、极大验后估计、线性最小方差估计等。

为了方便读者自学,本书将一维随机变量及其取值统一为小写字母表示,多维随机变量及其取值统一为小写黑体字母表示。

#### 1. 估计问题的分类

估计问题可分成两大类,即参数估计和状态估计,分别讨论如下。

##### (1) 参数估计

例如,在做完试验之后,会得到一系列不同时刻  $z$  的观测值,我们希望用一条曲线来表示  $z$  与  $t$  的关系,设

$$z(t) = x_1 h_1(t) + x_2 h_2(t) + \cdots + x_n h_n(t) \quad (1.5)$$

式中,  $h_1(t), h_2(t), \cdots, h_n(t)$  为已知的时间函数,一般是  $t$  的幂函数、指数函数或正余弦函数等;  $x_1, x_2, \cdots, x_n$  为  $n$  个未知数,它们不随时间而变。

要求根据  $m$  对观测值  $(z_i, t_i) (i=1, 2, \cdots, m; m > n)$  来估计未知参数  $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 。这就是前面提到过的曲线拟合问题。按照什么准则来拟合呢? 一般采用  $z(t)$  与各观测值  $z_i$  之间的差的平方和为最小作为估计参数的准则。

##### (2) 状态估计

如果被估计的量是系统的状态变量,则称这种估计为状态估计。状态变量是随时间而变的随机过程。例如,系统的状态变量  $\mathbf{x}(t)$  满足下列的微分方程:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{w}(t)$$

要求根据观测值

$$z(t) = H(t)x(t) + v(t)$$

来估计状态变量  $x(t)$ 。在上述两式中,  $w(t)$  和  $v(t)$  都为随机干扰,  $u(t)$  为控制量。  $x(t)$  是随时间而变的随机变量, 即为随机过程。这种估计称为状态估计。

## 2. 估计准则

前面已提到过对估计的要求, 估值愈接近真值愈好, 这是一种不严格的说法。为了进行估计, 必须有估计准则。所谓最优估计是指在某一估计准则条件下求得的最优估值, 如果换了一个估计准则, 则这一估值就不一定是最优的了。估计准则可能是多种多样的, 选取不同的估计准则, 就有不同的估计方法, 估计方法与估计准则是紧密相关的。

### (1) 最小方差准则(最小方差估计)

最小方差准则是以估计误差的方差阵达到最小作为估计的准则。按这种准则求得的最优估值叫做最小方差估计。为了进行最小方差估计, 需要知道被估值  $x$  和观测值  $z$  的条件概率分布密度  $p(x|z)$  或  $p(z)$ , 以及它们的联合概率分布密度  $p(x, z)$ 。

### (2) 极大似然准则(极大似然估计)

极大似然准则是使条件概率分布密度  $p(z|x)$  达到极大的那个  $x$  值作为估值。按这种估计准则求得的最优估值的方法称为极大似然估计。为了求出极大似然估计, 需要知道条件概率分布密度  $p(z|x)$ 。

### (3) 极大验后准则(极大验后估计)

极大验后准则是使条件概率分布密度  $p(x|z)$  达到极大的那个  $x$  值作为估值。按这种估计准则求得的最优估值的方法称为极大验后估计。为了求出极大验后估计, 需要知道验后概率分布密度  $p(x|z)$ 。

### (4) 线性最小方差准则(线性最小方差估计)

为了进行最小方差估计和极大验后估计, 需要知道  $p(x|z)$ ; 为了进行极大似然估计, 需要知道  $p(z|x)$ 。如果我们只知道观测值和被估值的一、二阶矩, 即  $E[x]$ ,  $E[z]$ ,  $\text{Var}(x)$ ,  $\text{Var}(z)$ ,  $\text{Cov}(x, z)$ 。在这种情况下, 为了得到有用的结果, 必须对估计量的函数形式加以限制。我们限定所求的估计量是观测值的线性函数, 以估计误差阵达到最小作为最优估计的准则。按这种方式求得的最优估计值称为线性最小方差估计。

### (5) 最小二乘准则(最小二乘估计)

如果我们不知道  $x$  和  $z$  的概率分布密度, 也不知道它们的一、二阶矩。这时就只能用高斯提出的最小二乘法。最小二乘法是将残差平方最小作为最优估计准则的, 详细内容在后面讨论。

下面分别讨论最小方差估计、极大似然估计、极大验后估计、线性最小方差估计和最小二乘法估计。

## 1.2 最小方差估计

在参数估计中, 经常采用最小方差准则, 即要求估计误差的方差为最小。下面将会看到, 被估量的数学期望或条件数学期望是最小方差估计。

下面分别讨论一维、二维和多维随机变量的最小方差估计。

### 1.2.1 一维随机变量的最小方差估计

设有一维随机变量  $x$ , 它的概率分布密度  $p(x)$  是已知的, 数学期望值为  $m_x$ , 常数  $a$  为  $x$  的估值  $\hat{x}$  (通常在字母上方加上“ $\hat{\cdot}$ ”记号表示估值), 则评价估计优劣的准则是  $\hat{x}$  与  $x$  的误差的方差为最小, 即

$$J = E[(x - a)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 p(x) dx = \min \quad (1.6)$$

将上式展开得

$$J = E[(x - a)^2] = E[x^2] - 2aE[x] + a^2$$

求上式对  $a$  的偏导数, 令偏导数等于零, 可得

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 2a - 2E[x] = 0$$

所以  $x$  的最优估值为

$$\hat{x} = a = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = m_x$$

(通常在字母上方加上“ $\sim$ ”记号表示误差)

$$E[\tilde{x}] = E[x] - E[\hat{x}] = E[x] - E[m_x] = m_x - m_x = 0$$

即

$$E[\hat{x}] = E[x]$$

如果估值  $\hat{x}$  的数学期望等于  $x$  的数学期望, 或者估计误差  $\tilde{x}$  的数学期望为零, 则称这种估计为无偏估计。因而这里的  $x$  的估计是无偏估计。

估计误差  $\tilde{x}$  的方差为

$$E[(x - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx = \sigma_x^2$$

所以数学期望  $m_x$  是  $x$  的最小方差估计。

### 1.2.2 多维随机变量的最小方差估计

设有两个随机变量  $x$  和  $z$ ,  $x$  为被估随机变量,  $z$  为观测值。  $x$  与  $z$  没有明确的函数关系, 只有概率上的联系。  $x$  和  $z$  的概率分布密度分别为  $p(x)$  和  $p(z)$ , 其联合概率分布密度为  $p(x, z)$ 。希望用随机变量  $z$  的函数  $g(z)$  作为随机变量  $x$  的估值, 并要求估计误差的方差为最小, 即

$$E\{[x - g(z)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - g(z)]^2 p(x, z) dx dz = \min$$

可以证明, 使上式为最小的函数  $g(z)$  是  $x$  的条件数学期望, 即

$$\hat{x} = g(z) = E[x|z]$$

$x$  和  $z$  的联合概率分布密度可用下式表示:

$$p(x, z) = p(x|z)p(z)$$

我们可得估计误差的方差

$$J = E\{[x - g(z)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} [x - g(z)]^2 p(x|z) dx \right\} p(z) dz \quad (1.7)$$

上面积分中的被积函数  $\int_{-\infty}^{\infty} [x - g(z)]^2 p(x|z) dx$  是非负的。因此为了使双重积分最小, 只要对每个  $z$  值, 使积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x - g(z)]^2 p(x|z) dx \quad (1.8)$$

为最小, 就可以使  $J$  为最小。

对于给定的  $z$  值, 随机变量  $x$  的条件概率密度为  $p(x|z)$ , 积分式(1.8)是  $x$  相对于常值  $g(z)$  的二阶矩, 参照(1.6)式可知, 使这个二阶矩为最小的  $g(z)$  值是  $x$  的条件数学期望

$$\hat{x} = g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x|z) dx = E[x|z]$$

对于两个随机变量  $x$  和  $z$  来说, 如果已知其联合概率分布密度  $p(x, z)$ , 则  $x$  的最小方差估计为  $x$  的条件数学期望

$$\hat{x} = E[x|z]$$

因为  $g(z)$  和  $z$  一般不成线性关系, 所以最小方差估计一般称为非线性估计。

这一结果可推广到多维随机变量的估计问题。设  $\mathbf{x}$  为需要估计的  $n$  维随机变量, 它的可能取值为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

观测值  $\mathbf{z}$  为  $q$  维随机变量, 其可能取值为

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix}$$

假定  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{z}$  的联合概率分布密度为

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = p(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_q)$$

$\mathbf{x}$  的概率分布密度为

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$\mathbf{z}$  的概率分布密度为

$$p(\mathbf{z}) = p(z_1, z_2, \dots, z_q)$$

$p(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ ,  $p(\mathbf{x})$  和  $p(\mathbf{z})$  都为标量函数。

现在要根据观测值  $\mathbf{z}$  来估计  $\mathbf{x}$ , 设  $\mathbf{x}$  的估值为

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$$

则  $\mathbf{x}$  的估计误差为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

估计误差  $\tilde{\mathbf{x}}$  是一个与  $\mathbf{x}$  同维数的随机向量。希望估计误差的方差阵

$$J = E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T] \quad (1.9)$$

为最小。

现在要求出  $\mathbf{x}$  的最优估值  $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ , 使得  $J$  为最小。关于矩阵大小的定义如下: 设有两个  $n \times n$  矩阵  $A$  和  $B$ , 若  $(A-B)$  正定 (或非负定), 则称  $A > B$  (或  $A \geq B$ )。

在给定  $\mathbf{z}=\mathbf{z}$  的条件下,  $\mathbf{x}$  的条件概率密度为  $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ , 由贝叶斯公式有

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{z})p(\mathbf{z})$$

估计误差的方差阵为

$$\begin{aligned} J &= E[\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T] = E\{[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{x} d\mathbf{z} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \right\} p(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \end{aligned} \quad (1.10)$$

因为  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{z}$  都是向量, 所以这里的  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ ,  $d\mathbf{z} = dz_1 dz_2 \cdots dz_q$ 。我们要选择  $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ , 使得 (1.10) 式的  $J$  是一个非负定的对称矩阵, 参照 (1.7) 式可知, 为了使  $J$  最小, 只要对每个  $\mathbf{z}$  值, 使

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \quad (1.11)$$

为最小即可。

对于给定的  $\mathbf{z}$  值, 随机变量  $\mathbf{x}$  的条件概率密度为  $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ , 积分式 (1.11) 是  $\mathbf{x}$  相对于  $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$  的二阶矩。参照 (1.8) 式可知, 使得这个二阶矩为最小的  $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$  值是  $\mathbf{x}$  的条件数学期望:

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} = E[\mathbf{x}|\mathbf{z}] \quad (1.12)$$

一般可写成

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = E[\mathbf{x}|\mathbf{z}] \quad (1.13)$$

估计误差的方差阵为

$$J = E[\tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{x}}^T] = E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})]^T\} \quad (1.14)$$

下面证明, 当  $\mathbf{x}$  的估值  $\hat{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}|\mathbf{z}]$  时, 确实使  $J$  为最小。设  $\mathbf{x}$  的估值为  $\mathbf{z}$  的任一向量函数  $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ , 则从 (1.11) 式出发, 可写出

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) + E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] \\ & \quad \times [\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) + E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \\ & \quad + [E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})] p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \cdot [E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T \\ & \quad + [E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.15)$$



由于

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x} &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})]p(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x} &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x} &= 0\end{aligned}$$

(1.15)式变成

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x} \\ & \quad + [E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][E(\mathbf{x}|\mathbf{z}) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T\end{aligned}\quad (1.16)$$

(1.16)式等号左边为非负定矩阵,等号右边的两个矩阵也分别为非负定矩阵,所以

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x} \\ & \geq \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x}|\mathbf{z})]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x}\end{aligned}\quad (1.17)$$

这就证明了  $\mathbf{x}$  的最优估计为

$$\hat{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}|\mathbf{z}]$$

下面讨论估计是否无偏的问题。由(1.12)式可得

$$\begin{aligned}E\{E[\mathbf{x}|\mathbf{z}]\} &= \int_{-\infty}^{\infty} E[\mathbf{x}|\mathbf{z}]p(\mathbf{z})d\mathbf{z} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}p(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x} \right] p(\mathbf{z})d\mathbf{z} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}|\mathbf{z})p(\mathbf{z})d\mathbf{z} \right] d\mathbf{x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}p(\mathbf{x})d\mathbf{x} = E[\mathbf{x}]\end{aligned}\quad (1.18)$$

因此估计是无偏的。

估计误差的方差阵为

$$\begin{aligned}\text{Var}\tilde{\mathbf{x}} &= E\{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T\} = E\{[\mathbf{x} - E[\mathbf{x}|\mathbf{z}]][\mathbf{x} - E[\mathbf{x}|\mathbf{z}]]^T\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{x} - E[\mathbf{x}|\mathbf{z}]][\mathbf{x} - E[\mathbf{x}|\mathbf{z}]]^T p(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x} \right\} \cdot p(\mathbf{z})d\mathbf{z} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Var}(\mathbf{x}|\mathbf{z})p(\mathbf{z})d\mathbf{z}\end{aligned}\quad (1.19)$$

### 1.3 极大似然估计

极大似然估计是以观测值出现的概率为最大作为准则的,这是一种很普通的参数估计方法。

设  $z$  是连续随机变量,其分布密度为  $p(z, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ , 含有  $n$  个未知参数  $\theta_1$ ,

$\theta_2, \dots, \theta_n$ 。把  $k$  个独立观测值  $z_1, z_2, \dots, z_k$  分别代入  $p(z, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  中, 可得

$$p(z_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n); \quad i = 1, 2, \dots, k$$

将所得的  $k$  个函数相乘得

$$L(z_1, z_2, \dots, z_k; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \prod_{i=1}^k p(z_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (1.20)$$

称函数  $L$  为似然函数。当  $z_1, z_2, \dots, z_k$  固定时,  $L$  是  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  的函数。极大似然法的实质, 就是求出使  $L$  达到极大时,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  的估值  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ 。从 (1.20) 式可以看到  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$  是观测值  $z_1, z_2, \dots, z_k$  的函数。

为了便于求出使  $L$  达到极大的  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ , 对 (1.20) 式取对数, 把乘转变为连加, 即

$$\ln L = \sum_{i=1}^k \ln p(z_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (1.21)$$

由于对数函数是单调增加函数, 当  $L$  取极大值时,  $\ln L$  也同时取极大值。将上式分别对  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  求偏导数, 令偏导数等于零, 可得下面的一组方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_1} (\ln L) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_n} (\ln L) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

解上述方程组, 可得使  $L$  达到极大值的  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ 。

按极大似然法确定的  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$  使  $z_1, z_2, \dots, z_k$  最有可能出现, 而不需要  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  的验前知识, 即不需要知道  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  的概率分布密度或一、二阶矩。因此, 极大似然估计是最小方差估计的次最优估计。

下面讨论用极大似然法估计参数的问题。

设  $\mathbf{z}$  为  $m$  维随机变量,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维随机变量, 假定已知  $\mathbf{z}$  的条件概率密度为  $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ , 现在得到  $k$  组  $\mathbf{z}$  的观测值  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k$ , 观测值互相独立。问  $\mathbf{x}$  是什么值时,  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k$  出现的可能性最大? 为此, 确定似然函数

$$L(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{z}_1|\mathbf{x})p(\mathbf{z}_2|\mathbf{x})\cdots p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}) = p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \quad (1.23)$$

或

$$\ln L(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \quad (1.24)$$

求使  $L$  为极大的  $\mathbf{x}$  值, 令

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (1.25)$$

解之, 可得  $\mathbf{x}$  的估值  $\hat{\mathbf{x}}$ 。而

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} < 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mathbf{x}^2} < 0$$

则为  $L$  取极大值的充分条件。

因此用极大似然法时, 应先求似然函数  $L$ , 然后用微分法求出使似然函数  $L$  为极大的  $\mathbf{x}$  的估值  $\hat{\mathbf{x}}$ 。

设有一线性观测系统

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = H\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (1.26)$$

式中,  $\mathbf{z}$  为  $m$  维观测值;  $\mathbf{x}$  为  $n$  维未知参数;  $\mathbf{v}$  为  $m$  维测量误差。设  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{x}$  独立, 已知  $\mathbf{v}$  的统计特性, 求  $\mathbf{x}$  的极大似然估计。由 (1.26) 式得

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} \quad (m \times m \text{ 单位阵})$$

下面求出似然函数:

$$L(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{p(\mathbf{x})}$$

根据不同随机变量的概率密度变换公式, 并考虑到  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{x}$  独立, 可得

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = p(\mathbf{x}, \mathbf{v}) |JJ^T|^{\frac{1}{2}} = p(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = p(\mathbf{x})p(\mathbf{v})$$

$$L(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})p(\mathbf{v})}{p(\mathbf{x})} = p(\mathbf{v}) = p(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})$$

令

$$\frac{\partial L(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial p(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

可得  $\mathbf{x}$  的估值  $\hat{\mathbf{x}}$ 。

假定噪声  $\mathbf{v}$  服从于零均值正态分布, 其方差阵为

$$E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \mathbf{R}$$

则

$$L(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{v}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}}$$

将  $\mathbf{v} = \mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}$  代入上式得

$$L(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = p(\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = C \exp[(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})]$$

式中

$$C = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}}}$$

求出  $\mathbf{x}$ , 使

$$J = \frac{1}{2}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}) = \min \quad (1.27)$$

求  $J$  对  $\mathbf{x}$  的偏导数, 令偏导数等于零, 可得  $\mathbf{x}$  的估值  $\hat{\mathbf{x}}$ :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{x} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z} \quad (1.28)$$

## 1.4 极大验后估计

### 1.4.1 极大验后估计

使  $\mathbf{x}$  的验后概率密度  $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$  达到最大的那个  $\mathbf{x}$  值称为极大验后估计。 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_a$  称为  $\mathbf{x}$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

的极大验后估计。 $x_0$  为  $x$  的最可能出现值,称为“众数”或“最频数”。从直观上看很清楚,能使验后概率密度  $p(x|z)$  达到最大的那个  $x$  值就是  $x_0$ ,随机变量  $x$  落在  $x_0$  附近的小邻域内的概率大于落在其他任何  $x$  值的同样邻域内的概率。由于对数函数是单调增加函数,所以  $\ln p(x|z)$  与  $p(x|z)$  在相同的  $x$  值达到极大值。由微分可知  $x_0$  应满足下列方程:

$$\left. \frac{\partial \ln p(x|z)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权 (1.29)

上述方程叫做验后方程。

#### 1.4.2 最小方差估计及估计误差

要进行极大验后估计,必须知道验后概率密度  $p(x|z)$ 。如果知道  $p(z|x)$ ,可按下式计算:

$$p(x|z) = \frac{p(z|x)p(x)}{p(z)} \quad (1.30)$$

式中,  $p(x)$  是  $x$  的验前概率密度;  $p(z)$  是  $z$  的概率密度;  $p(z|x)$  可用计算方法或实验方法求得。为了计算  $p(x)$ ,我们在  $x$  没有验前知识可供利用时,可假定  $x$  在很大范围内变化。在这种情况下,可把  $x$  的验前概率密度  $p(x)$  近似地看作是方差阵趋于无限大的正态分布密度

$$p(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-m_x)^T P^{-1}(x-m_x)} / (2\pi)^{\frac{n}{2}} |P|^{\frac{1}{2}}$$

式中,  $P$  为  $x$  的方差阵,  $P \rightarrow \infty I$  ( $I$  为  $n \times n$  单位阵),  $P^{-1} \rightarrow 0$ , 于是

$$\begin{aligned} \ln p(x) &= -\ln[(2\pi)^{\frac{n}{2}} |P|^{\frac{1}{2}}] - \frac{1}{2}(x-m_x)^T P^{-1}(x-m_x) \\ \frac{\partial}{\partial x} \ln p(x) &= -P^{-1}(x-m_x) \end{aligned} \quad (1.31)$$

当  $P^{-1} \rightarrow 0$  时

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln p(x) = 0 \quad (1.32)$$

当缺乏  $x$  的验前概率分布密度时,极大验后估计与极大似然估计是等同的,这可证明如下:

对于极大似然估计,为了求得  $x$  的最优估值  $\hat{x}$ ,应令

$$\frac{\partial \ln p(z|x)}{\partial x} = 0 \quad (1.33)$$

上述方程叫做极大似然方程。

对于极大验后估计,为了求得  $x$  的最优估值  $\hat{x}$ ,应令

$$\frac{\partial \ln p(x|z)}{\partial x} = 0 \quad (1.34)$$

根据(1.30)式得

$$\begin{aligned} \ln p(x|z) &= \ln p(z|x) + \ln p(x) - \ln p(z) \\ \frac{\partial \ln p(x|z)}{\partial x} &= \frac{\partial \ln p(z|x)}{\partial x} + \frac{\partial \ln p(x)}{\partial x} - \frac{\partial \ln p(z)}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

考虑到  $p(z)$  不是  $x$  的函数,同时考虑到(1.32)式,可得

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{x}|\mathbf{z})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \ln p(\mathbf{z}|\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.35)$$

因此在  $\mathbf{x}$  没有验前知识的情况下,极大验后估计与极大似然估计是相同的。在一般情况下,极大验后估计考虑到  $\mathbf{x}$  的验前信息,所以极大验后估计要比极大似然估计的要求严格一些。但是在具体应用中,一般还是采用极大似然估计,这是由于计算似然函数比计算验后概率密度来得简单一些。下面举例说明极大验后估计的计算步骤。

**例 1.2** 设观测方程为

$$\mathbf{z} = H\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维随机变量,  $\mathbf{z}$  和  $\mathbf{v}$  分别为  $q$  维观测值和测量误差。 $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{v}$  都服从正态分布,而且互相独立。 $\mathbf{x}, \mathbf{v}$  的统计特性为

$$E[\mathbf{x}] = \mathbf{m}_x, \quad \text{Var}\mathbf{x} = P, \quad E[\mathbf{v}] = 0, \quad \text{Var}\mathbf{v} = R$$

求极大验后估计。

**解** 分别确定出  $p(\mathbf{x}), p(\mathbf{z}), p(\mathbf{v}), p(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  及  $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ 。

(1) 确定  $p(\mathbf{x})$

因  $\mathbf{x}$  服从正态分布,所以

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |P|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T P^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) \right\}$$

(2) 确定  $p(\mathbf{z})$

因为  $\mathbf{z} = H\mathbf{x} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{v}$  都是正态分布且相互独立,而且  $E[\mathbf{z}] = H\mathbf{m}_x$ ,  $\text{Var}\mathbf{z} = HPH^T + R$ , 因而可得  $p(\mathbf{z})$  是正态分布函数:

$$p(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}} |HPH^T + R|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{z} - H\mathbf{m}_x)^T (HPH^T + R)^{-1} (\mathbf{z} - H\mathbf{m}_x) \right\}$$

(3) 确定  $p(\mathbf{v})$

因  $\mathbf{v}$  服从正态分布,所以

$$p(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{v}^T R^{-1} \mathbf{v} \right\}$$

(4) 确定  $p(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

由上分析有

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = p(\mathbf{x})p(\mathbf{v}) = p(\mathbf{x})p(\mathbf{z} - H\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

式中的  $p(\mathbf{z} - H\mathbf{x})$  可用下式表示:

$$p(\mathbf{z} - H\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{z} - H\mathbf{x})^T R^{-1} (\mathbf{z} - H\mathbf{x}) \right\}$$

(5) 确定  $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$

由于

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \frac{p(\mathbf{x})p(\mathbf{z} - H\mathbf{x})}{p(\mathbf{z})}$$

将上面的  $p(\mathbf{x}), p(\mathbf{z})$  和  $p(\mathbf{z} - H\mathbf{x})$  代入上式,经过整理后,可得

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \frac{|HPH^T + R|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |P|^{\frac{1}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T (P^{-1} + H^T R^{-1} H) (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)] \right\}$$



$$+ \mathbf{z}^T[(R^{-1} - HPH^T + R)^{-1}]\mathbf{z} - \mathbf{z}^T R^{-1} H(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x) - (\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T H^T R^{-1} \mathbf{z}] \}$$

配平方后可得

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \frac{|HPH^T + R|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |P|^{\frac{1}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T K^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right\}$$

式中

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{m}_x + KH^T R^{-1} (\mathbf{z} - H\mathbf{m}_x)$$

$$K = (P^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1}$$

当  $-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T K^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = 0$  时,  $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$  取极大值。因此  $\mathbf{x}$  的最优估值

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{m}_x + KH^T R^{-1} (\mathbf{z} - H\mathbf{m}_x)$$

应用矩阵求逆引理可得

$$K = P - PH^T (HPH^T + R)^{-1} HP$$

## 1.5 线性最小方差估计

如前所述,为了计算条件数学期望  $E[\mathbf{x}|\mathbf{z}]$ ,需要知道联合概率分布密度,计算工作很麻烦,而且我们往往不知道随机变量的概率分布密度。但若放松对概率知识的要求,则可以通过观测值和被估值的一、二阶矩,即数学期望  $E[\mathbf{z}]$  和  $E[\mathbf{x}]$ ,方差  $\text{Var}(\mathbf{x})$  和  $\text{Var}(\mathbf{z})$  及协方差  $\text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{x})$  和  $\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  来估计。在这种情况下求估计时,就需要对估计量的函数形式加以限制,而不能像上面所考虑的估计量可以是观测值的任意形式的函数。一般情况下,估计值用观测值的线性函数来表示比较方便,因而经常采用线性最小方差估计。所谓线性最小方差估计就是估计值为观测值的线性函数,估计误差的方差为最小。对于正态分布随机变量来说,条件数学期望是观测值的线性函数,最小方差估计与线性最小方差估计的结果一样。由于很多随机变量都服从正态分布或接近正态分布,而且线性最小方差估计比较简单,所以这种方法得到了广泛应用。下面来讨论线性最小方差估计。

对于两个随机变量  $x$  和  $z$ ,  $x$  的条件数学期望  $E[x|z]$  是一条曲线,不是  $z$  的线性函数,而是  $z$  的非线性函数,因此其最小方差估计又称为非线性最小方差估计。而线性最小方差估计则是把随机变量  $x$  的估值  $\hat{x}$  用  $z$  的线性函数来表示,即设

$$\hat{x} = az + b \quad (1.36)$$

式中  $a$  和  $b$  为两个待定的常数。根据估计误差的方差

$$J = E\{(x - \hat{x})^2\} = E\{[x - (az + b)]^2\} = \min \quad (1.37)$$

的条件可以确定系数  $a$  和  $b$ 。

对(1.37)式的  $a$  和  $b$  求偏导数,令偏导数等于零,可求得  $a$  和  $b$  两个系数:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -2E\{[x - (az + b)]z\} = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = -2E\{[x - (az + b)]\} = 0 \quad (1.39)$$

从(1.39)式可得

$$m_x - am_z - b = 0$$

超星阅读器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

式中  $m_x$  和  $m_z$  为  $x$  和  $z$  的数学期望, 从该式可得

$$b = m_z - am_z \quad (1.40)$$

将(1.40)式代入(1.38)式得

$$E[(x - az - m_x + am_z)z] = 0$$

将上式改写成

$$E\{[(x - m_x) - a(z - m_z)](z - m_z + m_z)\} = 0$$

展开上式得

$$E\{(x - m_x)(z - m_z)\} + m_z E\{x - m_x\} - aE\{(x - m_x)z\} - am_z E\{z - m_z\} = 0$$

求上式的数学期望值, 可得

$$\begin{aligned} \gamma\sigma_x\sigma_z - a\sigma_z^2 &= 0 \\ a &= \frac{\gamma\sigma_x\sigma_z}{\sigma_z^2} = \frac{\gamma\sigma_x}{\sigma_z} \end{aligned} \quad (1.41)$$

式中

$$\gamma\sigma_x\sigma_z = E\{(x - m_x)(z - m_z)\}$$

于是  $x$  的估值为

$$\hat{x} = az + b = m_x + \frac{\gamma\sigma_x}{\sigma_z}(z - m_z) \quad (1.42)$$

该估计的无偏性描述如下:

由于

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - \hat{x} \\ E[\tilde{x}] &= E[x] - E[m_x] + \frac{\gamma\sigma_x}{\sigma_z}E[z - m_z] \\ &= m_x - m_x + \frac{\gamma\sigma_x}{\sigma_z}(m_z - m_z) = 0 \end{aligned}$$

因此

$$E[\hat{x}] = E[x]$$

所以估计是无偏的。

下面讨论多维随机变量的估计问题。设  $\mathbf{x}$  为  $n$  维,  $\mathbf{z}$  为  $q$  维, 且已知  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{z}$  的一、二阶矩, 即已知  $E[\mathbf{z}], E[\mathbf{x}], \text{Var}\mathbf{x}, \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  和  $\text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ 。

假定  $\mathbf{x}$  的估值  $\hat{\mathbf{x}}$  是  $\mathbf{z}$  的线性函数:

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \mathbf{b} + A\mathbf{z} \quad (1.43)$$

式中,  $\mathbf{b}$  为  $n$  维非随机常数向量;  $A$  为  $n \times q$  非随机常数矩阵。

下面分别按估计误差方差阵为最小和估计误差方差阵的迹为最小来确定  $\mathbf{b}$  和  $A$ 。

### 1.5.1 按估计误差方差阵最小来确定 $\mathbf{b}$ 和 $A$

$$\begin{aligned} J &= E\{[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T\} \\ &= E\{[\mathbf{x} - \mathbf{b} - A\mathbf{z}][\mathbf{x} - \mathbf{b} - A\mathbf{z}]^T\} \end{aligned} \quad (1.44)$$

为了求  $A$  和  $\mathbf{b}$ , 令

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} + E[\mathbf{x}] - AE[E[\mathbf{z}]] \quad (1.45)$$

式中  $\mathbf{c}$  为待求的  $n$  维非随机常数向量。

将求  $A$  和  $\mathbf{b}$  的问题转变为求  $A$  和  $\mathbf{c}$  的问题:

将(1.45)式代入(1.44)式得

$$\begin{aligned} J &= E\{[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})][\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})]^T\} \\ &= E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})] - \mathbf{c} - A[\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]\} \\ &\quad \times \{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})] - \mathbf{c} - A[\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]\}^T \\ &= E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T\} + E\{\mathbf{c}\mathbf{c}^T\} \\ &\quad + AE\{[\mathbf{z} - E(\mathbf{z})][\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]^T\}A^T \\ &\quad - E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]^T\}A^T \\ &\quad - AE\{[\mathbf{z} - E(\mathbf{z})][\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T\} - \mathbf{c}E\{\mathbf{x} - E(\mathbf{x})\} \\ &\quad + \mathbf{c}E\{[\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]^T\}A^T - E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T\}\mathbf{c}^T \\ &\quad + AE\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T\}\mathbf{c}^T \end{aligned}$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

在上式中后四项全为零,所以

$$\begin{aligned} J &= \text{Var}\mathbf{x} + E\{\mathbf{c}\mathbf{c}^T\} + A[\text{Var}\mathbf{z}]A^T \\ &\quad - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})A^T = A\text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

以下用配平方方法来求  $A$  和  $\mathbf{c}$ 。在上式中加上和减去  $\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1}\text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ , 得

$$\begin{aligned} J &= \text{Var}\mathbf{x} + E\{\mathbf{c}\mathbf{c}^T\} + [A - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1}] \\ &\quad \times \text{Var}\mathbf{z}[A - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1}]^T \\ &\quad - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1}\text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

上式右边第一项和第四项都与  $A$  和  $\mathbf{c}$  无关,第二项和第三项都是非负定矩阵。为了使  $J$  达到极小,惟一的解就是选取  $A$  和  $\mathbf{c}$  使右边第二项和第三项为零矩阵,即

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= 0 \\ A - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

于是可得

$$A = \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1} \quad (1.47)$$

将(1.46)和(1.47)式代入(1.45)式得

$$\mathbf{b} = E[\mathbf{x}] - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1}E[\mathbf{z}] \quad (1.48)$$

将(1.47)和(1.48)式代入(1.43)式得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= E[\mathbf{x}] + \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1}[\mathbf{z} - E(\mathbf{z})] \\ &= \mathbf{m}_x + \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_z) \end{aligned} \quad (1.49)$$

因此

$$\begin{aligned} E[\hat{\mathbf{x}}] &= E[\mathbf{m}_x] + \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1}E[\mathbf{z} - \mathbf{m}_z] \\ &= \mathbf{m}_x = E[\mathbf{x}] \end{aligned}$$

估计是无偏的。

估计误差的方差阵为

$$J = \text{Var}\mathbf{x} - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Var}\mathbf{z})^{-1}\text{Cov}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \quad (1.50)$$

### 1.5.2 按估计误差方差阵的迹最小来确定 $\mathbf{b}$ 和 $A$

我们也可把准则改变一下,由方差阵  $J$  为最小改为方差阵的迹为最小,即  $\hat{\mathbf{x}}$  的各分量的方差之和为最小:

$$J_t = \text{tr}E[(\mathbf{x} - \mathbf{b} - A\mathbf{z})(\mathbf{x} - \mathbf{b} - A\mathbf{z})^T] \\ = E[(\mathbf{x} - \mathbf{b} - A\mathbf{z})^T(\mathbf{x} - \mathbf{b} - A\mathbf{z})] = \min (1.51)$$

从下面分析可以看到,这两种准则得到的结果相同。我们可以用微分方法来求  $\frac{\partial J_t}{\partial \mathbf{b}}$ ,  $\frac{\partial J_t}{\partial A}$ , 令这些偏导数等于零,解之可得  $\mathbf{b}$  和  $A$ :

$$\frac{\partial J_t}{\partial \mathbf{b}} = -2E[\mathbf{x} - \mathbf{b} - A\mathbf{z}] = 2(\mathbf{b} + A\mathbf{m}_z - \mathbf{m}_x) = 0 \\ \mathbf{b} = \mathbf{m}_x - A\mathbf{m}_z = E[\mathbf{x}] - AE(\mathbf{z}) \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial J_t}{\partial A} = \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}E[(\mathbf{x} - \mathbf{b} - A\mathbf{z})(\mathbf{x} - \mathbf{b} - A\mathbf{z})^T] \\ = \frac{\partial}{\partial A} \text{tr}E[(\mathbf{x} - \mathbf{b})(\mathbf{x} - \mathbf{b})^T - (\mathbf{x} - \mathbf{b})\mathbf{z}^T A^T \\ - A\mathbf{z}(\mathbf{x} - \mathbf{b})^T + A\mathbf{z}\mathbf{z}^T A^T] \\ = -2E[(\mathbf{x} - \mathbf{b})\mathbf{z}^T] + 2E[A\mathbf{z}\mathbf{z}^T] \\ = 2[AE(\mathbf{z}\mathbf{z}^T) + \mathbf{b}E(\mathbf{z}^T) - E(\mathbf{x}\mathbf{z}^T)] = 0 \quad (1.53)$$

将(1.52)式代入(1.53)式,得

$$AE[\mathbf{z}\mathbf{z}^T] + E[\mathbf{x}]E[\mathbf{z}^T] - AE[\mathbf{z}]E[\mathbf{z}^T] - E[\mathbf{x}\mathbf{z}^T] = 0 \\ A[E(\mathbf{z}\mathbf{z}^T) - E(\mathbf{z})E(\mathbf{z}^T)] - [E(\mathbf{x}\mathbf{z}^T) - E(\mathbf{x})E(\mathbf{z}^T)] = 0 \\ AE\{[\mathbf{z} - E(\mathbf{z})][\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]^T\} - E\{[\mathbf{x} - E(\mathbf{x})][\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]^T\} = 0 \\ A\text{Varz} - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$$

因此

$$A = \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Varz})^{-1} \quad (1.54)$$

将(1.54)式代入(1.52)式得

$$\mathbf{b} = E[\mathbf{x}] - \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Varz})^{-1}E[\mathbf{z}] \quad (1.55)$$

将  $A, \mathbf{b}$  代入(1.43)式得

$$\hat{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}] + \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Varz})^{-1}[\mathbf{z} - E(\mathbf{z})] \\ = \mathbf{m}_x + \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})(\text{Varz})^{-1}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_z) \quad (1.56)$$

(1.56)式与(1.49)式完全相同,因此用两种准则所得的结果完全相同,所以使估计误差方差阵为最小,就等于使各分量方差之和为最小。

在随机变量  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{z}$  都是正态分布的情况下,比较(1.20)式、(1.42)式和(1.49)式或(1.56)式可知,  $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$  与  $E(\mathbf{x}|\mathbf{z})$  的公式完全相同,所以,在这种情况下线性最小方差估计与条件期望完全相同。因此在随机变量正态分布情况下,线性最小方差估计就是最小方差估计。在一般情况下,随机变量大多服从正态分布或接近正态分布,所以可采用在计算上比较简便的线性最小方差估计。

## 1.6 最小二乘估计

设系统的观测方程为

$$\begin{cases} z = Hx + v \\ z = H\hat{x} + e \end{cases}$$

式中

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1(t_1) & h_2(t_1) & \cdots & h_n(t_1) \\ h_1(t_2) & h_2(t_2) & \cdots & h_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_1(t_m) & h_2(t_m) & \cdots & h_n(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix}$$

$$h_i = [h_1(t_i), h_2(t_i), \cdots, h_n(t_i)]; \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

残差的平方可用下式来表示:

$$J = \sum_{i=1}^m e_i^2 = e^T e \quad (1.58)$$

式中

$$e = z - H\hat{x}$$

或

$$J = (z - H\hat{x})^T (z - H\hat{x})$$

求  $J$  对  $\hat{x}$  的偏导数, 令偏导数等于零, 可得

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{x}} = -2(H^T z - H^T H \hat{x}) = 0$$

因而

$$H^T H \hat{x} = H^T z$$

$\hat{x}$  的估值为

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T z \quad (1.59)$$

为了能求得估值  $\hat{x}$ , 逆阵  $(H^T H)^{-1}$  必须存在。

$J$  为最小的充分条件是

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{x}^2} = 2H^T H > 0 \quad (1.60)$$

即  $H^T H$  为正定矩阵。

当  $m=n$  时,  $H$  为  $n$  阶方阵, 于是

$$H\hat{x} = z$$

即

$$\hat{x} = H^{-1} z \quad (1.61)$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识(1.57)



在一般情况下,  $m > n$ , 因此  $\hat{\mathbf{x}}$  要用 (1.59) 式表示。

## 1.7 加权最小二乘法

在 (1.58) 式中, 每个误差值  $e_i^2$  的系数都为 1, 即在  $J$  中每个误差值都是“等权”的。这种“等权”的方法只有在各测量误差都相同的情况下才是合理的。事实上, 在  $z$  值的不同测量范围内, 测量精度往往不同, 因而测量误差也不相同。合理的办法是对不同的误差项  $e_i^2$  加不同的权, 即把  $J$  改写成

$$J = \sum_{i=1}^m w_i e_i^2 = \sum_{i=1}^m w_i (z_i - \mathbf{h}_i^T \hat{\mathbf{x}})^2 \quad (1.62)$$

当  $z_i$  的测量精度高时,  $w_i$  大, 反之,  $w_i$  小。这样可以使拟合的曲线非常接近于测量精度高的点, 保证拟合的准确度高。

把 (1.62) 式写成

$$J = (\mathbf{z} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{W} (\mathbf{z} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}) \quad (1.63)$$

式中  $\mathbf{W}$  为  $m \times m$  对称矩阵, 称为加权矩阵。关于  $\mathbf{W}$  的选择问题在后面讨论。现在先讨论  $\mathbf{W}$  为一般矩阵时的加权最小二乘法估计。求  $J$  对  $\hat{\mathbf{x}}$  的偏导数, 令其等于零可得

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\mathbf{x}}} = -2\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{z} + 2\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}} = 0$$

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}) \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{z}$$

从上式可得  $\hat{\mathbf{x}}$  的加权最小二乘法估计:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{z} \quad (1.64)$$

$J$  为最小的充分条件为

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\mathbf{x}}^2} = 2(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}) > 0 \quad (1.65)$$

即  $\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H}$  为正定矩阵。

在推导 (1.64) 式时, 完全没有考虑随机变量的统计特性。为了比较加权最小二乘法估计与线性最小方差估计之间的关系, 假定  $E[\mathbf{v}] = 0, E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{v}$  不一定是正态分布。由 (1.64) 式得加权最小二乘法的估计误差:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{z} \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} (\mathbf{H} \mathbf{x} - \mathbf{z}) \end{aligned}$$

考虑到观测方程 (1.57) 式, 可得

$$\tilde{\mathbf{x}} = -(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{v} \quad (1.66)$$

由上式可得

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathbf{x}}] &= E[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}] \\ &= E[-(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{v}] \\ &= -(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W} E[\mathbf{v}] = 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

所以在上述条件下加权最小二乘法估计  $\hat{\mathbf{x}}$  为无偏估计。

估计误差的方差阵为

$$\text{Var} \tilde{\mathbf{x}} = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T]$$

$$\begin{aligned}
 &= (H^TWH)^{-1}H^TWE[\mathbf{v}\mathbf{v}^T]WH(H^TWH)^{-1} \\
 &= (H^TWH)^{-1}H^TRWH(H^TWH)^{-1}
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

如果选取  $W=R^{-1}$ , 则估计  $\hat{\mathbf{x}}$  和  $\text{Var}\hat{\mathbf{x}}$  分别为

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}} &= (H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}\mathbf{z} \\
 \text{Var}\hat{\mathbf{x}} &= (H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}RR^{-1}H(H^TR^{-1}H)^{-1} \\
 &= (H^TR^{-1}H)^{-1}
 \end{aligned} \tag{1.69}$$

下面来证明,  $W=R^{-1}$  使估计误差的方差阵为最小, 因而  $W=R^{-1}$  是最优的加权矩阵。在附录三中给出了矩阵许瓦茨不等式:

$$A^TA > (A^TB)(B^TB)^{-1}(B^TA)$$

设  $R=C^TCA=CWH(H^TWH)^{-1}B=C^{-T}H$

则

$$\begin{aligned}
 A^TA &= (H^TWH)^{-1}H^TWC^TCWH(H^TWH)^{-1} \\
 &= (H^TWH)^{-1}H^TWRWH(H^TWH)^{-1} \\
 (A^TB)(B^TB)^{-1}(B^TA) &= (H^TWH)^{-1}H^TWC^TC^{-T}H \\
 &\quad \times (H^TC^{-1}C^{-T}H)^{-1}CWH(H^TWH)^{-1} \\
 &= (H^TWH)^{-1}H^TWH(H^TR^{-1}H)^{-1}H^TWH(H^TWH)^{-1} \\
 &= (H^TP^{-1}H)^{-1}
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

因此

$$(H^TWH)^{-1}H^TWRWH(H^TWH)^{-1} \geq (H^TR^{-1}H)^{-1} \tag{1.73}$$

所以采用加权最小二乘法时, 加权阵  $W$  取为  $R^{-1}$  所得的估计误差的方差阵最小。人们特别把加权阵  $W$  取为  $R^{-1}$  的加权最小二乘估计:

$$\hat{\mathbf{x}} = (H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1}\mathbf{z} \tag{1.74}$$

称为马尔可夫估计。

## 第二章 线性系统的最优滤波和预测

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

### 2.1 线性离散系统的最优滤波

假定系统分别由下列线性离散方程所描述：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k+1, k)\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k+1) &= H(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{v}(k+1) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中,  $\mathbf{x}(k+1)$  为  $n$  维随机序列;  $\mathbf{w}(k)$  为  $p$  维系统噪声序列;  $\mathbf{z}(k+1)$  为  $m$  维观测序列,  $\mathbf{v}(k+1)$  为  $m$  维观测噪声序列, 且系统噪声  $\mathbf{w}(k)$  和观测噪声  $\mathbf{v}(k+1)$  为零均值白噪声序列, 即对所有的  $k, j$ , 有

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{w}(k)] &= 0 \\ E[\mathbf{v}(k)] &= 0 \\ E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)] &= Q(k)\delta_{k,j} \\ E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(j)] &= R(k)\delta_{k,j} \\ E[\mathbf{w}(k)\mathbf{v}^T(j)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

假定初始状态有下列统计特性：

$$E[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{m}_x(0), \quad E[(\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_x(0))(\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_x(0))^T] = P_x(0) \quad (2.3)$$

$\mathbf{x}(0)$  与  $\mathbf{w}(k), \mathbf{v}(k)$  都不相关, 即

$$E[\mathbf{x}(0)\mathbf{w}^T(k)] = 0, \quad E[\mathbf{x}(0)\mathbf{v}^T(k)] = 0 \quad (2.4)$$

现在用正交投影法来推导随机线性离散系统的最优估计值的计算式。系统状态  $\mathbf{x}(j)$  基于前  $k$  次观测  $\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(k)$  的线性最小方差估计应为  $\mathbf{x}(j)$  在  $\mathbf{z}^k = [\mathbf{z}^T(1), \dots, \mathbf{z}^T(k)]^T$  上的正交投影, 即

$$\mathbf{x}(j|k) = E[\mathbf{x}(j)|\mathbf{z}^k] \quad (2.5)$$

当  $j=k$  时,  $\mathbf{x}(k|k)$  为最优滤波估计

$$\mathbf{x}(k|k) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^k] \quad (2.6)$$

由于

$$\mathbf{z}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^{k-1} \\ \mathbf{z}(k) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

式中,  $\mathbf{z}^{k-1}$  表示  $\mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(k-1)$  全体, 于是

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^{k-1}, \mathbf{z}(k)] \quad (2.8)$$

由于  $\mathbf{z}(k)$  与  $\mathbf{z}^{k-1}$  不相互独立, 根据条件期望公式有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k) &= E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] + E[\tilde{\mathbf{x}}(k)|\mathbf{z}(k|k-1)] \\ &= E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] + P_{\tilde{\mathbf{x}}}P_{\tilde{\mathbf{z}}}^{-1}\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

下面推导(2.9)式中各项的表达式：

$$E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] = E[(\Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1))|\mathbf{z}^{k-1}]$$

$$= \Phi(k, k-1)E[\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{z}^{k-1}] + \Gamma(k, k-1)E[\mathbf{w}(k-1)|\mathbf{z}^{k-1}]$$

由于  $\mathbf{w}(k-1)$  与  $\mathbf{z}^{k-1}$  互不相关, 而且  $E[\mathbf{w}(k-1)] = 0$ , 故

$$\mathbf{x}(k|k-1) = E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) \quad (2.10)$$

再来看(2.9)式等号右边的第二项  $P_{\mathbf{z}}P_{\mathbf{x}}^{-1}\mathbf{z}(k|k-1)$ , 由于

$$\mathbf{x}(k|k-1) = \mathbf{x}(k) - E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] = \mathbf{x}(k) - \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) \quad (2.11)$$

$$\mathbf{z}(k|k-1) = \mathbf{z}(k) - E[\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}^{k-1}]$$

而

$$\begin{aligned} E[\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] &= \mathbf{z}(k|k-1) = E[(H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k))|\mathbf{z}^{k-1}] \\ &= H(k)E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] + E[\mathbf{v}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] \end{aligned}$$

$\mathbf{v}(k)$  相对于  $\mathbf{z}^{k-1}$  独立, 且  $E[\mathbf{v}(k)] = 0$ , 故

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{z}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] &= H(k)E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}^{k-1}] = H(k)\Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) \\ \mathbf{z}(k|k-1) &= \mathbf{z}(k) - H(k)\Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

由于

$$\left. \begin{aligned} P_{\mathbf{x}} &= E[\mathbf{x}(k|k-1)\mathbf{x}^T(k|k-1)] \\ P_{\mathbf{z}} &= E[\mathbf{z}(k|k-1)\mathbf{z}^T(k|k-1)] \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

将表达式(2.11)和(2.12)代入(2.13)式中, 得

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{x}} &= E\{[\mathbf{x}(k) - \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1)] \\ &\quad \times [\mathbf{z}(k) - H(k)\Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1)]^T\} \\ &= E\{[\mathbf{x}(k) - \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1)][H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \\ &\quad - H(k)\Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1)]^T\} \\ &= E\{\mathbf{x}(k|k-1)[H(k)\mathbf{x}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)]^T\} \\ &= E[\mathbf{x}(k|k-1)\mathbf{x}^T(k|k-1)]H^T(k) + E[\mathbf{x}(k|k-1)\mathbf{v}^T(k)] \end{aligned}$$

由于  $\mathbf{v}(k)$  与  $\mathbf{x}(k|k-1)$  相互独立, 故

$$E[\mathbf{x}(k|k-1)\mathbf{v}^T(k)] = 0$$

令

$$E[\mathbf{x}(k|k-1)\mathbf{x}^T(k|k-1)] = P(k|k-1) \quad (2.14)$$

则

$$P_{\mathbf{x}} = P(k|k-1)H^T(k) \quad (2.15)$$

由(2.13)式得

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{z}}^{-1} &= \{E[\mathbf{z}(k|k-1)\mathbf{z}^T(k|k-1)]\}^{-1} \\ &= \{E[H(k)\mathbf{x}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)][H(k)\mathbf{x}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)]^T\}^{-1} \\ &= [H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

将(2.10)式、(2.15)式和(2.16)式代入(2.9)式, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k) &= \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) + P(k|k-1)H^T(k) \\ &\quad \times [H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \\ &\quad \times [\mathbf{z}(k) - H(k)\Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

(2.17)式表示在  $k$  时刻获得观测值  $z(k)$  后,  $x(k)$  的最优估值的计算式,它是用  $k$  时刻的观测值来修正递推值  $x(k|k-1)$  后得到的,因而是一种递推估计,通常称(2.17)式为卡尔曼滤波方程。

令

$$P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k)+R(k)]^{-1}=K(k) \quad (2.18)$$

则  $K(k)$  称为卡尔曼增益矩阵,  $P(k|k-1)$  为预测误差协方差阵,它可以由下式求得:

$$\begin{aligned} P(k|k-1) &= E[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{x}^T(k|k-1)] = E\{\Phi(k,k-1)\tilde{x}(k-1|k-1) \\ &\quad + \Gamma(k,k-1)w(k-1)\} \cdot [\Phi(k,k-1)\tilde{x}(k-1|k-1) \\ &\quad + \Gamma(k,k-1)w(k-1)]^T \\ &= \Phi(k,k-1)P(k-1|k-1)\Phi^T(k,k-1) \\ &\quad + \Gamma(k,k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k,k-1) \end{aligned} \quad (2.19)$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

现在求滤波误差协方差阵的表达式。由于

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k|k) &= x(k) - \hat{x}(k|k) \\ \hat{x}(k|k) &= \hat{x}(k|k-1) + K(k)\tilde{z}(k|k-1) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k|k) &= \tilde{x}(k|k-1) - K(k)[H(k)\tilde{x}(k|k-1) + v(k)] \\ &= [I - K(k)H(k)]\tilde{x}(k|k-1) - K(k)v(k) \end{aligned} \quad (2.20)$$

因为

$$\begin{aligned} P(k|k) &= E[\tilde{x}(k|k)\tilde{x}^T(k|k)] \\ &= E\{[I - K(k)H(k)]\tilde{x}(k|k-1) - K(k)v(k) \\ &\quad \times [(I - K(k)H(k))\tilde{x}(k|k-1) - K(k)v(k)]^T\} \\ &= [I - K(k)H(k)]P(k|k-1)[I - K(k)H(k)]^T + K(k)R(k)K^T(k) \\ &= P(k|k-1) - K(k)H(k)P(k|k-1) - P(k|k-1)H^T(k)K^T(k) \\ &\quad + K(k)H(k)P(k|k-1)H^T(k)K^T(k) + K(k)R(k)K^T(k) \\ &= P(k|k-1) - K(k)H(k)P(k|k-1) - P(k|k-1)H^T(k)K^T(k) \\ &\quad + K(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]K^T(k) \end{aligned}$$

将  $K(k) = P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k)+R(k)]^{-1}$  代入上式得

$$P(k|k) = [I - K(k)H(k)]P(k|k-1) \quad (2.21)$$

综上所述,最优滤波估计  $\hat{x}(k|k)$  由以下递推关系式给出:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \hat{x}(k|k) &= \Phi(k,k-1)\hat{x}(k-1|k-1) + K(k) \\ &\quad \times [z(k) - H(k)\Phi(k,k-1)\hat{x}(k-1|k-1)] \\ (2) \quad K(k) &= P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \\ (3) \quad P(k|k-1) &= \Phi(k,k-1)P(k-1|k-1)\Phi^T(k,k-1) \\ &\quad + \Gamma(k,k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k,k-1) \\ (4) \quad P(k|k) &= [I - K(k)H(k)]P(k|k-1) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

$k=0,1,\dots$

以上的递推滤波方程首先由卡尔曼证明,所以通常把(2.22)式所表达的递推滤波算法称为卡尔曼滤波器。



卡尔曼滤波器的特点是它的递推形式,这对用电子计算机来计算滤波值特别有利。计算最优滤波值只需要即时的观测值,无需储存以前的观测数据,可大大节省存储单元。

## 2.2 线性离散系统的最优预测

假定(2.1),(2.2)式所描述的离散系统中, $Q(k)$ 为已知的  $p \times p$  半正定矩阵, $R(k)$ 为已知的  $m \times m$  半正定矩阵。所谓对上述线性离散系统的状态向量  $\mathbf{x}$  求最优预测,即指在已知观测值  $\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(j)$  的情况下求  $\mathbf{x}(k), k > j$  的最优估值  $\mathbf{x}(k|j)$ 。现在推导  $\mathbf{x}(k|j)$  的表达式。在已知  $\mathbf{x}(k)$  和  $\mathbf{z}(k)$  的一、二阶矩情况下,可以用正交投影法来求最优预测  $\mathbf{x}(k|j)$ ,即

$$\mathbf{x}(k|j) = E[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)] \quad (2.23)$$

由于

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, j)\mathbf{x}(j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1), k \geq j+1 \quad (2.24)$$

代入  $\mathbf{x}(k|j)$  的表达式(2.23),并利用条件期望的性质可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|j) &= E\left[\left(\Phi(k, j)\mathbf{x}(j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1)\right) | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)\right] \\ &= E[\Phi(k, j)\mathbf{x}(j) | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)] \\ &\quad + E\left[\sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1) | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)\right] \\ &= \Phi(k, j)E[\mathbf{x}(j) | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)] \\ &\quad + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)E[\mathbf{w}(i-1) | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)] \end{aligned} \quad (2.25)$$

随机向量集  $\{\mathbf{w}(i-1), i=j+1, \dots, k\}$  和  $\mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)$  对于任意  $k \geq j+1$  是互不相关的,又因为两者都是高斯随机向量,所以这两个向量集必是互相独立的。考虑到  $\{\mathbf{w}(k), k=0, 1, \dots\}$  具有零均值,故

$$E[\mathbf{w}(i-1) | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)] = E[\mathbf{w}(i-1)] = 0; \quad i=j+1, j+2, \dots, k \quad (2.26)$$

由方程式(2.25)并根据最优滤波估计表达式(2.6)得

$$\mathbf{x}(k|j) = \Phi(k, j)E[\mathbf{x}(j) | \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)] = \Phi(k, j)\mathbf{x}(j|j) \quad (2.27)$$

(2.27)式即为最优预测  $\mathbf{x}(k|j)$  的表达式。显然,最优滤波估计中所用到的一步动态外推,  $\mathbf{x}(k|k-1) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1)$  即为一步最优预测。

下面我们讨论预测误差的协方差阵。预测误差  $\mathbf{\hat{x}}(k|j)$  应为

$$\begin{aligned} \mathbf{\hat{x}}(k|j) &= \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|j) = \Phi(k, j)\mathbf{x}(j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1) \\ &\quad - \Phi(k, j)\mathbf{x}(j|j) \\ &= \Phi(k, j)\mathbf{\hat{x}}(j|j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

显然,  $\{\mathbf{\hat{x}}(k|j), k=j+1, j+2, \dots\}$  为零均值高斯序列。预测误差协方差阵  $P(k|j)$  应为

$$P(k|j) = E[\mathbf{\hat{x}}(k|j)\mathbf{\hat{x}}^T(k|j)]$$

$$\begin{aligned}
&= E\left\{\left[\Phi(k, j)\bar{\mathbf{x}}(j|j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1)\right]\right. \\
&\quad \times \left.\left[\Phi(k, j)\bar{\mathbf{x}}(j|j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1)\right]^T\right\} \quad (2.29)
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
E[\bar{\mathbf{x}}(j|j)\mathbf{w}^T(i-1)] &= E\{[\mathbf{x}(j) - \hat{\mathbf{x}}(j|j)]\mathbf{w}^T(i-1)\} \\
&= E[\mathbf{x}(j)\mathbf{w}^T(i-1)] - E[\hat{\mathbf{x}}(j|j)\mathbf{w}^T(i-1)]
\end{aligned}$$

当  $i=j+1, j+2, \dots, k$  时, 上式等号右边第一项显然应为零, 而第二项为

$$\begin{aligned}
E[\hat{\mathbf{x}}(j|j)\mathbf{w}^T(i-1)] &= E\{[\Phi(j, j-1)\mathbf{x}(j-1|j-1) + K(j)[\mathbf{z}(j) \\
&\quad - H(j)\Phi(j, j-1)\mathbf{x}(j-1|j-1)]\mathbf{w}^T(i-1)\} \\
&\quad i=j+1, j+2, \dots
\end{aligned}$$

由于

$$E[\mathbf{x}(j-1|j-1)\mathbf{w}^T(i-1)] = 0; \quad i=j+1, j+2, \dots$$

这表示(2.29)式的等号右边交叉项均为零, 考虑到  $E[\mathbf{w}(j)\mathbf{w}^T(k)] = 0 (j \neq k)$ , 则(2.29)式将写为

$$\begin{aligned}
P(k|j) &= \Phi(k, j)E[\bar{\mathbf{x}}(j|j)\bar{\mathbf{x}}^T(j|j)]\Phi^T(k, j) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)E[\mathbf{w}(i-1)\mathbf{w}^T(i-1)]\Gamma^T(i, i-1)\Phi^T(k, i)
\end{aligned}$$

由于

$$E[\bar{\mathbf{x}}(j|j)\bar{\mathbf{x}}^T(j|j)] = P(j|j), \quad E[\mathbf{w}(i-1)\mathbf{w}^T(i-1)] = Q(i-1)$$

最后得  $P(k|j)$  的表达式为

$$\begin{aligned}
P(k|j) &= \Phi(k, j)P(j|j)\Phi^T(k, j) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)Q(i-1)\Gamma^T(i, i-1)\Phi^T(k, i) \quad (2.30)
\end{aligned}$$

预测误差协方差阵还可写成另外一种形式:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}(k|j) &= \Phi(k, j)\bar{\mathbf{x}}(j|j) + \sum_{i=j+1}^k \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1) \\
&= \Phi(k, k-1)\Phi(k-1, j)\bar{\mathbf{x}}(j|j) + \Phi(k, k)\Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{k-1} \Phi(k, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1) \\
&= \Phi(k, k-1)\Phi(k-1, j)\bar{\mathbf{x}}(j|j) + \Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1) \\
&\quad + \Phi(k, k-1) \sum_{i=j+1}^{k-1} \Phi(k-1, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1) \\
&= \Phi(k, k-1)\left[\Phi(k-1, j)\bar{\mathbf{x}}(j|j) + \sum_{i=j+1}^{k-1} \Phi(k-1, i)\Gamma(i, i-1)\mathbf{w}(i-1)\right] \\
&\quad + \Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1) \\
&= \Phi(k, k-1)\bar{\mathbf{x}}(k-1|j) + \Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1) \quad (2.31)
\end{aligned}$$

由此可见,  $\bar{\mathbf{x}}(k|j)$  不仅为零均值高斯序列, 且具有马尔可夫性质。下面利用(2.31)式来求预测误差协方差矩阵  $P(k|j)$ 。

$$\begin{aligned}
 P(k|j) &= E[\tilde{x}(k|j)\tilde{x}^T(k|j)] \\
 &= E\{[\Phi(k, k-1)\tilde{x}(k-1|j) + \Gamma(k, k-1)w(k-1)] \\
 &\quad \times [\Phi(k, k-1)\tilde{x}(k-1|j) + \Gamma(k, k-1)w(k-1)]^T\} \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

由于  $E[\tilde{x}(k-1|j)w^T(k-1)] = 0$ , 故可将(2.32)式写为

$$\begin{aligned}
 P(k|j) &= \Phi(k, k-1)P(k-1|j)\Phi^T(k, k-1) \\
 &\quad + \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1) \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

(2.32)式为预测误差协方差矩阵  $P(k|j)$  的另一个表达式。

(2.27)式、(2.33)式即为预测估计及估计误差的协方差阵计算式。

## 2.3 线性连续系统的最优滤波

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

### 2.3.1 高斯-马尔可夫过程模型及其等效离散形式

假定随机线性连续系统的状态方程和观测方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t)x(t) + G(t)w(t) \\ z(t) &= H(t)x(t) + v(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

式中,  $x(t)$  为  $n$  维状态向量;  $w(t)$  为  $p$  维干扰向量;  $z(t)$  为  $m$  维观测向量;  $v(t)$  为  $m$  维观测噪声;  $F(t)$  为  $n \times n$  系统矩阵;  $H(t)$  为  $m \times n$  观测矩阵;  $G(t)$  为过程噪声的系数矩阵,  $w(t)$  和  $v(t)$  为零均值高斯白噪声过程, 即

$$\begin{aligned}
 E[w(t)] &= 0, \quad E[w(t)w^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau) \\
 E[v(t)] &= 0, \quad E[v(t)v^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)
 \end{aligned}$$

其中,  $Q(t)$  为  $p \times p$  阶系统噪声方差阵, 对任意  $t \geq t_0$  为连续且非负定;  $R(t)$  为  $m \times m$  阶观测噪声方差阵, 对任意  $t \geq t_0$  为连续且正定。系统噪声与观测噪声相互独立, 即对任意  $t \geq t_0$  有

$$E[w(t)v^T(\tau)] = 0$$

状态方程式的通解应为

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)G(\tau)w(\tau)d\tau$$

对于时刻  $t + \Delta t$  时的状态向量  $x(t + \Delta t)$  为

$$x(t + \Delta t) = \Phi(t + \Delta t, t)x(t) + \int_t^{t+\Delta t} \Phi(t + \Delta t, \tau)G(\tau)w(\tau)d\tau \quad (2.35)$$

假设在时间间隔  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$  中  $w(\tau) = w(t) = \text{常数向量}$ , 令

$$\int_t^{t+\Delta t} \Phi(t + \Delta t, \tau)G(\tau)d\tau = \Gamma(t + \Delta t, t)$$

则(2.35)式可写为

$$x(t + \Delta t) = \Phi(t + \Delta t, t)x(t) + \Gamma(t + \Delta t, t)w(t) \quad (2.36)$$

$\Phi(t, \tau)$  为  $n \times n$  转移矩阵, 且满足

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}(t, \tau) &= F(t)\Phi(t, \tau) \\ \Phi(\tau, \tau) &= I \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

将  $\Phi(t + \Delta t, t)$  展为泰勒级数, 并考虑到(2.37)式得

$$\left. \begin{aligned} \Phi(t + \Delta t, t) &= I + F(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \\ \Gamma(t + \Delta t, t) &= G(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

将(2.38)式代入(2.35)式得

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = [I + F(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]\mathbf{x}(t) + G(t)\mathbf{w}(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \quad (2.39)$$

由上式可知,线性连续系统的状态  $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  为高斯-马尔可夫随机过程。(2.39)式为连续系统的等效离散时间表达式。利用该式,在线性离散系统的滤波方程中令  $k = t, k + 1 = t + \Delta t$ , 并取极限后即可得连续系统的滤波方程。

### 2.3.2 线性连续系统的最优滤波

离散时间线性系统最优滤波估计  $\mathbf{x}(k+1|k+1)$  的表达式根据(2.17)式应为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k+1) &= \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k) + K(k+1) \\ &\quad \times [\mathbf{z}(k+1) - H(k+1)\Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k)] \end{aligned}$$

令  $k+1 = t + \Delta t, k = t$ , 并利用式(2.39), 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t + \Delta t|t + \Delta t) - \mathbf{x}(t|t) &= F(t)\mathbf{x}(t|t)\Delta t + K(t + \Delta t)[\mathbf{z}(t + \Delta t) \\ &\quad - H(t + \Delta t)\Phi(t + \Delta t, t)\mathbf{x}(t|t)] + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (2.40)$$

以  $\Delta t$  除等号两边, 然后令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 取极限得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t|t) &= F(t)\mathbf{x}(t|t) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} K(t + \Delta t) \\ &\quad \times [\mathbf{z}(t + \Delta t) - H(t + \Delta t)\Phi(t + \Delta t, t)\mathbf{x}(t|t)]/\Delta t \end{aligned} \quad (2.41)$$

将(2.41)式等号右边第二项分为两项, 即  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} K(t + \Delta t)/\Delta t$  和  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\mathbf{z}(t + \Delta t) - H(t + \Delta t)\Phi(t + \Delta t, t)\mathbf{x}(t|t)]$ , 如果极限存在, 则可看作两个极限的乘积。不难看出

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\mathbf{z}(t + \Delta t) - H(t + \Delta t)\Phi(t + \Delta t, t)\mathbf{x}(t|t)] = \mathbf{z}(t) - H(t)\mathbf{x}(t|t) \quad (2.42)$$

而

$$\begin{aligned} K(t + \Delta t) &= P(t + \Delta t|t)H^T(t + \Delta t) \\ &\quad \times [H(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t)H^T(t + \Delta t) + R(t + \Delta t)/\Delta t]^{-1} \\ &= P(t + \Delta t|t)H^T(t + \Delta t) \\ &\quad \times [H(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t)H^T(t + \Delta t)\Delta t + R(t + \Delta t)]^{-1}\Delta t \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t|t) &= \Phi(t + \Delta t, t)P(t|t)\Phi^T(t + \Delta t, t) + \Gamma(t + \Delta t, t)Q(t)\Gamma^T(t + \Delta t, t)/\Delta t \\ &= [I + F(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]P(t|t)[I + F(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]^T \\ &\quad + [G(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]Q(t)[G(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]^T/\Delta t \\ &= P(t|t) + [F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t)]\Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} P(t + \Delta t|t) = P(t|t)$$

故

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} K(t + \Delta t)/\Delta t = K(t) = P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t) \quad (2.43)$$

将(2.42)式和(2.43)式代入(2.41)式, 得

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t) = F(t)\mathbf{x}(t|t) + K(t)[\mathbf{z}(t) - H(t)\mathbf{x}(t|t)], \quad t \geq t_0 \quad (2.44)$$

(2.44)式即为线性连续系统的最优滤波方程,权矩阵  $K(t)$  定义为

$$K(t) = P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)$$

下面分析滤波误差:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t + \Delta t) &= \mathbf{x}(t + \Delta t) - [\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t) + K(t + \Delta t)\mathbf{z}(t + \Delta t) \\ &\quad - H(t + \Delta t)\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t)] \\ &= \hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t) - K(t + \Delta t)H(t + \Delta t)\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t) \\ &\quad - K(t + \Delta t)\mathbf{v}(t + \Delta t) \\ &= [I - K(t + \Delta t)H(t + \Delta t)]\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t) - K(t + \Delta t)\mathbf{v}(t + \Delta t)\end{aligned}$$

将  $\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t) = \Phi(t + \Delta t, t)\mathbf{x}(t|t) + \Gamma(t + \Delta t, t)\mathbf{w}(t)$  代入上式,得

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t + \Delta t) &= [I - K(t + \Delta t)H(t + \Delta t)][\Phi(t + \Delta t, t)\hat{\mathbf{x}}(t|t) \\ &\quad + \Gamma(t + \Delta t, t)\mathbf{w}(t)] - K(t + \Delta t)\mathbf{v}(t + \Delta t)\end{aligned}$$

以  $\Phi(t + \Delta t, t) = I + F(t)\Delta t + O(\Delta t)^2$ ,  $\Gamma(t + \Delta t, t) = G(t)\Delta t + O(\Delta t)^2$  代入,得

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t + \Delta t) &= \hat{\mathbf{x}}(t|t) + [F(t)\Delta t - K(t + \Delta t)H(t + \Delta t)] \\ &\quad \times \hat{\mathbf{x}}(t|t) + G(t)\mathbf{w}(t)\Delta t - K(t + \Delta t)\mathbf{v}(t + \Delta t) + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

将  $\hat{\mathbf{x}}(t|t)$  移到等号左边,然后用  $\Delta t$  去除,并令  $\Delta t \rightarrow 0$ ,取极限得

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{x}}(t|t)]/\Delta t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{ [F(t) - (K(t + \Delta t)/\Delta t)H(t + \Delta t)] \\ &\quad \times \hat{\mathbf{x}}(t|t) + G(t)\mathbf{w}(t) - (K(t + \Delta t)/\Delta t)\mathbf{v}(t + \Delta t) + O(\Delta t^2)/\Delta t \}\end{aligned}$$

由此得

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t|t) = [F(t) - K(t)H(t)]\hat{\mathbf{x}}(t|t) + G(t)\mathbf{w}(t) - K(t)\mathbf{v}(t), t \geq t_0 \quad (2.45)$$

因此  $\{\hat{\mathbf{x}}(t + \Delta t|t + \Delta t), t = t_0 + i\Delta t, i = 0, 1, \dots\}$  为零均值高斯-马尔可夫过程。现在求  $P(t|t)$  应满足的微分方程。由于

$$P(t + \Delta t|t + \Delta t) = [I - K(t + \Delta t)H(t + \Delta t)]P(t + \Delta t|t)$$

将

$$\begin{aligned}P(t + \Delta t|t) &= [I + F(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]P(t|t)[I + F(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]^T \\ &\quad + [G(t)\Delta t + O(\Delta t^2)] \times [Q(t)/\Delta t][G(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]^T\end{aligned}$$

代入上式求得

$$\begin{aligned}P(t + \Delta t|t + \Delta t) &= P(t|t) + [F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t)]\Delta t \\ &\quad - K(t + \Delta t)H(t + \Delta t)P(t + \Delta t|t) + O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

将  $P(t|t)$  移到等式左边,并以  $\Delta t$  除等号两边,令  $\Delta t \rightarrow 0$ ,取极限得

$$\dot{P}(t|t) = F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - K(t)H(t)P(t|t) \quad (2.46)$$

将  $K(t) = P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)$  代入上式,  $\dot{P}(t|t)$  也可写为

$$\begin{aligned}\dot{P}(t|t) &= F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \\ &\quad - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t)\end{aligned} \quad (2.47)$$

综合以上分析线性连续系统的最优滤波方程组如下:

$$(1) \quad \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t|t) = F(t)\hat{\mathbf{x}}(t|t) + K(t)[\mathbf{z}(t) - H(t)\hat{\mathbf{x}}(t|t)], t \geq t_0$$

通常初始条件为  $\hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0) = 0$ ;

$$(2) \quad K(t) = P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t), t \geq t_0$$

$$(3) \quad \dot{P}(t|t) = F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \\ - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t), t \geq t_0$$

$t_0$  时刻的滤波误差协方差阵为  $P(t_0|t_0)$ 。

在连续时间线性系统的滤波器中不像离散时间滤波器那样用观测的预报值  $\mathbf{z}(k+1|k) = H(k+1)\Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k)$ , 而是用观测滤波值  $\mathbf{z}(t|t) = H(t)\mathbf{x}(t|t)$ 。因而与滤波器增益矩阵相乘的新息向量为  $\bar{\mathbf{z}}(t|t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t|t)$ 。

因为滤波器中不存在预测, 所以不必计算预测误差协方差阵。但为了计算权矩阵  $K(t)$ , 必须对方程组(2.47)求解, 以得到  $P(t|t)$ 。(2.47)式是一个一阶二次常微分方程组, 通常称之为黎卡提矩阵微分方程。关于解黎卡提微分方程问题将在下面一节讨论。

$P(t|t)$  包含有  $n^2$  个元素, 但由于  $P(t|t)$  是协方差阵, 具有对称性, 所以在方程组(2.47)中只须考察  $n(n+1)/2$  个方程即可。

只要  $P(t|t)$  一确定, 随机过程  $\{\mathbf{x}(t|t), t \geq t_0\}$  就完全由其特征函数  $\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, t)$  所表征:

$$\Phi_{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, t) = \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{s}^T P(t|t)\mathbf{s}\right]$$

式中  $\mathbf{s}$  为  $n$  维向量。通常在方程式(2.47)中假定  $R(t), t \geq t_0$  为正定, 其理由是从物理观点来看观测向量  $\mathbf{z}(t)$  的所有分量都存在误差。

方程式(2.44)所表示的连续系统最优滤波器, 显然是以  $\mathbf{z}(t)$  为输入,  $\mathbf{x}(t|t)$  为输出的线性系统。如果把它写为

$$\dot{\mathbf{x}} = [F(t) - K(t)H(t)]\mathbf{x}(t|t) + K(t)\mathbf{z}(t)$$

令  $\Psi(t, \tau)$  表示上述方程式的转移矩阵, 则上述方程式的解可表示为

$$\mathbf{x}(t|t) = \Psi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0|t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)K(\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau$$

又因为  $\mathbf{x}(t_0|t_0) = 0$ , 于是

$$\mathbf{x}(t|t) = \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)K(\tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau$$

令  $\Psi(t, \tau)K(\tau) = A(t, \tau)$ , 则最优滤波  $\mathbf{x}(t|t)$  又可表示为

$$\mathbf{x}(t|t) = \int_{t_0}^t A(t, \tau)\mathbf{z}(\tau)d\tau \quad (2.48)$$

这样, 可以把最优滤波器看成是对观测的一种特殊线性变换。

## 2.4 线性连续系统的最优预测

分析连续时间线性系统的最优预测仍利用等效离散时间表达式, 从线性离散系统最优预测方程式中直接求出线性连续系统的最优预测估计的微分方程式。在(2.27)式中, 令  $k = t + \Delta t, j = t_1$ , 将(2.27)式写为等效离散时间形式:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t|t_1) = \Phi(t + \Delta t, t_1)\mathbf{x}(t_1|t_1), \quad t \geq t_1 \geq t_0$$

以  $\Phi(t + \Delta t, t_1) = \Phi(t + \Delta t, t)\Phi(t, t_1)$  代入上式, 可得

$$\mathbf{x}(t + \Delta t|t_1) = \Phi(t + \Delta t, t)\Phi(t, t_1)\mathbf{x}(t_1|t_1) = \Phi(t + \Delta t, t)\mathbf{x}(t|t_1)$$

再以  $\Phi(t + \Delta t, t) = I + F(t)\Delta t + O(\Delta t^2)$  代入得



$$\mathbf{x}(t + \Delta t | t_1) = \mathbf{x}(t | t_1) + F(t)\mathbf{x}(t | t_1)\Delta t + P(\Delta t^2) \quad (2.49)$$

将  $\mathbf{x}(t | t_1)$  移到等号左边, 用  $\Delta t$  除方程两边, 并令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 取极限得

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t | t_1) = F(t)\mathbf{x}(t | t_1), \quad t \geq t_1 \geq t_0 \quad (2.50)$$

(2.50) 式即为线性连续系统最优预测的微分方程式。当给定  $t_1 \geq t_0$  时的最优滤波估计  $\mathbf{x}(t_1 | t_1)$  以后, 对所有  $t \geq t_1$  的最优预测估计  $\mathbf{x}(t | t_1)$  将由解微分方程式 (2.50) 求得, 其初始条件为  $\mathbf{x}(t_1 | t_1)$ 。

在线性离散系统最优预测误差的表达式 (2.30) 中, 以  $k = t + \Delta t, j = t_1$  代入得

$$\bar{\mathbf{x}}(t + \Delta t | t_1) = \Phi(t + \Delta t, t)\bar{\mathbf{x}}(t | t_1) + \Gamma(t + \Delta t, t)\mathbf{w}(t) \quad (2.51)$$

$\{\bar{\mathbf{x}}(t + \Delta t | t_1), t = t_1 + i\Delta t, i = 0, 1, \dots\}$  是零均值高斯-马尔可夫序列, 相应的预测误差协方差矩阵由 (2.33) 式可推出为

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t | t_1) &= \Phi(t + \Delta t, t)P(t | t_1)\Phi^T(t + \Delta t, t) \\ &\quad + \Gamma(t + \Delta t, t)\frac{Q(t)}{\Delta t}\Gamma^T(t + \Delta t, t) \end{aligned} \quad (2.52)$$

以  $\Phi(t + \Delta t, t) = I + F(t)\Delta t + O(\Delta t^2), \Gamma(t + \Delta t, t) = G(t)\Delta t + O(\Delta t^2)$  代入上式, 得

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t | t_1) &= [I + F(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]P(t | t_1)[1 + F^T(t)\Delta t + O(\Delta t^2)]^T \\ &\quad + G(t)Q(t)G^T(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= P(t | t_1) + F(t)P(t | t_1)\Delta t + P(t | t_1)F^T(t)\Delta t \\ &\quad + G(t)Q(t)G^T(t)\Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

将  $P(t | t_1)$  移到等号左边并以  $\Delta t$  除等号两边, 令  $\Delta t \rightarrow 0$ , 取极限得

$$\dot{P}(t | t_1) = F(t)P(t | t_1) + P(t | t_1)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \quad (2.53)$$

(2.53) 式与 (2.47) 式进行比较, 可以看到预测误差协方差阵比滤波误差协方差阵少了一项, 即  $-P(t | t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t | t)$ 。这一项可以看作获得观测信息后的校正项, 它的作用是限制滤波误差协方差阵的增大。当  $R(t) \rightarrow \infty$  时即观测受到极大干扰, 所得观测信息不可利用时, 滤波误差协方差阵与预测误差协方差阵是相同的。

综上所述, 对于线性连续系统的最优预测估计, 可以得到以下结论:

(1) 给定  $t_1 \geq t_0$  时的最优滤波估计  $\mathbf{x}(t_1 | t_1)$ , 对于所有  $t \geq t_1$  的最优预测估计  $\mathbf{x}(t | t_1)$  由下列微分方程求解得出:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t | t_1) = F(t)\mathbf{x}(t | t_1)$$

其初始条件为  $\mathbf{x}(t_1 | t_1)$ 。

(2) 预测误差  $\bar{\mathbf{x}}(t | t_1) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t | t_1)$  是零均值高斯-马尔可夫过程, 其协方差阵是下列微分方程的解:

$$\dot{P}(t | t_1) = F(t)P(t | t_1) + P(t | t_1)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t)$$

其初始条件为  $P(t_1 | t_1)$ 。

## 第三章 滤波的稳定性

前面比较详细地讨论了线性系统卡尔曼滤波的基本方程。为了得到状态向量  $\mathbf{x}$  的无偏估计和求解估计误差方差阵,需要确切地知道  $\mathbf{x}$  的初值  $\mathbf{x}(0)$  和估计误差方差阵的初值  $P(0|0)$ 。但  $\mathbf{x}(0)$  和  $P(0|0)$  往往不能确切地知道,这会对滤波带来什么影响呢? 如果滤波系统是一致渐近稳定的,则滤波初值取得不准确的影响可以忽略不计。本章主要讨论滤波系统在什么情况下是一致渐近稳定的。主要内容有滤波的稳定性概念,随机线性系统的可控性和可测性,滤波误差的界,稳定性定理的证明,滤波误差方差阵的渐近性和定常随机线性系统的稳定性问题。

### 3.1 滤波的稳定性概念

我们利用一连串测量数据,按照滤波方程的递推计算,可得状态向量  $\mathbf{x}$  的最优估值  $\hat{\mathbf{x}}$ 。在许多实际问题中,往往不可能确切地知道初值  $\mathbf{x}(0)$  和  $P(0|0)$ ,甚至根本不知道这些值。为了进行滤波计算,只能假定初值  $\mathbf{x}(0)$  和  $P(0|0)$ 。这里我们要研究不确切的初值对滤波的影响问题。如果用正确的初值  $\mathbf{x}^*(0)$  和  $P^*(0|0)$ ,按照滤波方程可以得到最优的滤波值  $\mathbf{x}^*(k|k)$  及  $P^*(k|k)$ 。选取不确切的初值  $\mathbf{x}(0)$  和  $P(0|0)$ ,可能得到非最优的  $\mathbf{x}(k|k)$  和  $P(k|k)$ 。在时间充分长之后,如果  $\mathbf{x}(k|k)$  能任意地接近  $\mathbf{x}^*(k|k)$ ,  $P(k|k)$  能任意地接近  $P^*(k|k)$ ,则初值不确切的影响可忽略不计,在这种情况下称滤波是稳定的。滤波是否稳定,与滤波系统的稳定性有关,而滤波系统的稳定性与原系统的状态方程及观测方程的结构和参数有关。下面为了方便,我们称滤波系统为滤波器。

对于离散系统,滤波方程为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k|k) = & \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) + K(k) \\ & \times [\mathbf{z}(k) - H(k)\Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1)]\end{aligned}\quad (3.1)$$

或

$$\mathbf{x}(k|k) = \Psi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) + K(k)\mathbf{z}(k) \quad (3.2)$$

式中

$$\Psi(k, k-1) = [I - K(k)H(k)]\Phi(k, k-1)$$

为滤波器的转移矩阵;  $K(k)\mathbf{z}(k)$  为滤波器的输入项。

可以通过分析方程(3.2)相应的齐次方程来研究最优滤波的稳定性问题。如果齐次方程

$$\mathbf{x}(k|k) = \Psi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) \quad (3.3)$$

所描述的自由系统是一致渐近稳定的,则滤波是稳定的。关于系统的稳定、渐近稳定和一致渐近稳定的定义在线性系统中已经讲过,这里不再重复。方程(3.3)与一般的齐次方程完全相同,因此可用李亚普诺夫第二方法来判定滤波的稳定性问题。下面先讨论,为什么方程(3.3)是一致渐近稳定的,滤波才是稳定的,即初值误差的影响可忽略不计。设有不同

的初值  $\mathbf{x}(0|0)$  和  $\mathbf{x}^*(0|0)$ , 则方程 (3.3) 有相应的不同解:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k|k) &= \Psi(k, 0)\mathbf{x}(0|0) \\ \mathbf{x}^*(k|k) &= \Psi(k, 0)\mathbf{x}^*(0|0)\end{aligned}$$

两式相减, 得解的差

$$\mathbf{x}(k|k) - \mathbf{x}^*(k|k) = \Psi(k, 0)[\mathbf{x}(0|0) - \mathbf{x}^*(0|0)] \quad (3.4)$$

对上式等号两边取范数, 得

$$\|\mathbf{x}(k|k) - \mathbf{x}^*(k|k)\| \leq \|\Psi(k, 0)\| \|\mathbf{x}(0|0) - \mathbf{x}^*(0|0)\|$$

当  $k$  很大时, 如果范数  $\|\Psi(k, 0)\|$  趋近于零, 则  $\mathbf{x}(k|k)$  趋近于  $\mathbf{x}^*(k|k)$ 。经过推导, 也可得到  $P(k|k)$  趋近于  $P^*(k|k)$ , 因而滤波是稳定的。从上面的讨论可以看出, 只要滤波系统是渐近稳定的, 即当  $k$  很大时,  $\|\Psi(k, 0)\|$  趋近于零, 滤波是稳定的。但是为了使滤波系统是物理可实现的, 要求有界的输入必有有界的输出, 这样就要求滤波系统是一致渐近稳定的。对于离散齐次方程 (3.3), 一致渐近稳定的充分必要条件是: 如果存在常数  $c_1 > 0, c_2 > 0$ , 使得对所有  $k \geq l \geq 0$ , 范数

$$\|\Psi(k, l)\| \leq c_2 e^{-c_1(k-l)} \quad (3.5)$$

则系统是一致渐近稳定的。

如果滤波系统是一致渐近稳定的, 当  $k$  很大时,  $\|\Psi(k, 0)\|$  必定趋近于零, 因而滤波是稳定的, 同时滤波系统是物理可实现的系统。

对于连续系统, 滤波方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t) = A(t)\mathbf{x}(t|t) + K(t)[\mathbf{z}(t) - H(t)\mathbf{x}(t|t)] \quad (3.6)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t) = \bar{A}(t)\mathbf{x}(t|t) + K(t)\mathbf{z}(t) \quad (3.7)$$

式中

$$\bar{A}(t) = A(t) - K(t)H(t)$$

为滤波器的系统矩阵。

可通过分析方程 (3.7) 相应的齐次方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t) = \bar{A}(t)\mathbf{x}(t|t) \quad (3.8)$$

来研究最优滤波和稳定性。

对齐次方程 (3.8), 设其转移矩阵为  $\Psi(t, t_0)$ 。对不同的初值  $\mathbf{x}(t_0|t_0)$  和  $\mathbf{x}^*(t_0|t_0)$ , 有相应的不同的解:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t|t) &= \Psi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0|t_0) \\ \mathbf{x}^*(t|t) &= \Psi(t, t_0)\mathbf{x}^*(t_0|t_0)\end{aligned}$$

两式相减, 得解的差

$$\mathbf{x}(t|t) - \mathbf{x}^*(t|t) = \Psi(t, t_0)[\mathbf{x}(t_0|t_0) - \mathbf{x}^*(t_0|t_0)] \quad (3.9)$$

对上式等号两边取范数得

$$\|\mathbf{x}(t|t) - \mathbf{x}^*(t|t)\| \leq \|\Psi(t, t_0)\| \|\mathbf{x}(t_0|t_0) - \mathbf{x}^*(t_0|t_0)\|$$

当  $t$  很大时, 如果范数  $\|\Psi(t, t_0)\|$  趋近于零, 则  $\mathbf{x}(t|t)$  趋近于  $\mathbf{x}^*(t|t)$ , 同样  $P(t|t)$  趋近于  $P^*(t|t)$ 。因此只要滤波系统是渐近稳定的, 滤波是稳定的, 不受初值选取的影响。同样为了使滤波系统是物理可实现的, 要求有界的输入必有有界的输出, 因此要求滤波系统是一致渐近稳定的。对于连续系统的齐次方程 (3.8), 一致渐近稳定的充分必要条件是: 如

果存在常数  $c_1 > 0, c_2 > 0$ , 使得对所有  $t \geq t_0 \geq 0$ , 范数

$$\|\Psi(t, t_0)\| \leq c_2 e^{-c_1(t-t_0)} \quad (3.10)$$

则系统是一致渐近稳定的。如果滤波系统是一致渐近稳定的, 当  $t$  很大时,  $\|\Psi(t, t_0)\|$  必定趋近于零, 因而滤波是稳定的。

由于在转移矩阵  $\Psi(k, k-1)$  中有  $K(k)$ , 在系统矩阵  $\bar{A}(t)$  中有  $K(t)$ ,  $K(k)$  和  $K(t)$  很难用解析式来表示, 因此很难用上述方法来判定滤波的稳定性。滤波方程是从系统的状态方程和观测方程推导出来的, 因此滤波的稳定性必与原系统的结构和参数有关, 我们希望直接从原系统

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (3.12)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + G(t)\mathbf{w}(t) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{z}(t) = H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.14)$$

来判定滤波的稳定性。上式中  $\mathbf{w}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  是零均值白噪声序列;  $E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)] = Q_k \delta_{kj}$ ,  $E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(j)] = R_k \delta_{kj}$ ;  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  是零均值白噪声过程,  $E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$ ,  $E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)$ 。

卡尔曼等人从原系统出发, 经过证明, 得到如下的滤波稳定性定理: 如果系统是一致完全可控和一致完全可观测的, 那么它的线性最优滤波系统是一致渐近稳定的。

这个定理告诉我们, 判定最优滤波系统是否一致渐近稳定, 只要考察系统本身是否具有完全可控和一致完全可观测就可以了。定理还表明, 对一致完全可控和一致完全可观测系统, 滤波初值  $\mathbf{x}(0|0)$  和  $P(0|0)$  是允许任意选择的。

这里值得注意的是: 稳定性是对滤波方程(3.1)和(3.6)所描述的滤波系统而言的, 而不是对原系统(3.11)和(3.13)而言的。

从原系统的一致完全可控和一致完全可观测, 一直到滤波的稳定性定理, 需要较长的数学推导过程。在下面的几节中, 首先从系统的一致完全可控和一致完全可观测, 推导出滤波误差的方差阵有上界和下界, 再进一步证得稳定性定理。

## 3.2 随机线性系统的可控性和可观测性

### 3.2.1 可控性

设离散控制系统的状态方程如下:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1) \quad (3.15)$$

在这里假定  $\mathbf{w}(k-1)$  是非随机的未知控制项。

如果存在某个正整数  $N$ , 使得从前面第  $k-N$  时刻的任意给定状态  $\mathbf{x}(k-N)$  出发, 只要适当地选取控制项  $\mathbf{w}(k-N), \dots, \mathbf{w}(k-1)$  就可以使系统达到给定的状态  $\mathbf{x}(k)$ , 那么称此离散系统(在  $k$  时刻)是完全可控的。

离散系统完全可控的充分必要条件为存在正整数  $N$ , 使矩阵

$$W(k-N+1, k) = \sum_{i=k-N+1}^k \Phi(k, j) \Gamma(i-1) \Gamma^T(i-1) \Phi^T(k, j) > 0 \quad (3.16)$$

即矩阵  $W(k-N+1, k)$  为正定矩阵。 $W(k-N+1, k)$  称为完全可控性矩阵。在(3.16)式中, 为了简便起见, 令  $\Gamma(i-1)$  表示  $\Gamma(i, i-1)$

设连续系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + F(t)\mathbf{w}(t) \quad (3.17)$$

这里假定  $\mathbf{w}(t)$  是非随机的未知控制项。因而上述系统为确定性系统。确定性时变系统在区间  $(t_0, t)$  完全可控的充分必要条件是矩阵

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) F(\tau) F^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau > 0 \quad (3.18)$$

式中  $\Phi(t, \tau)$  为系统转移矩阵。

如果对任意初始时刻  $t_0$ , 系统都是完全可控的, 则称此系统为一致完全可控。一致完全可控的充分必要条件是: 如果存在  $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, t_0$  为任意时刻, 对  $t > t_0$ , 有

$$\alpha_1 I \leq W(t_0, t) \leq \beta_1 I \quad (3.19)$$

则称系统为一致完全可控。

如果在(3.17)式中  $\mathbf{w}(t)$  为随机干扰, 并设  $\mathbf{w}(t)$  是零均值白噪声过程,  $E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$ 。与确定性系统的  $W(t_0, t)$  相比较, 对随机线性系统定义如下矩阵:

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) F(\tau) Q^T(\tau) F^T(\tau) \Phi^T(t, \tau) d\tau > 0 \quad (3.20)$$

随机线性系统一致完全可控的充分必要条件是: 如果存在  $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, t_0$  为任意时刻, 对  $t > t_0$  有

$$\alpha_1 I \leq W(t_0, t) \leq \beta_1 I \quad (3.21)$$

### 3.2.2 可观性

设离散系统状态方程和观测方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1) \\ \mathbf{z}(k) &= H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

式中,  $\mathbf{w}(k)$  为非随机的控制项;  $\mathbf{v}(k) = 0$ 。

对于时刻  $k$  的任意给定状态  $\mathbf{x}(k)$ , 如果存在某一个正整数  $N$ , 使得由时刻  $k$  之前的  $N$  个观测值  $\mathbf{z}(k-N+1), \dots, \mathbf{z}(k-1), \mathbf{z}(k)$ , 可以惟一地确定  $\mathbf{x}(k)$ , 则称此离散系统(在  $k$  时刻)是完全可观的。系统完全可观的充分必要条件是: 存在正整数  $N$ , 使得矩阵

$$M(k-N+1, k) = \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j, k) H^T(j) H(j) \Phi(j, k) > 0 \quad (3.23)$$

则  $M(k-N+1, k)$  称为完全可观测阵。上述条件可证明如下:

将  $\mathbf{x}(k)$  表示成下列形式:

$$\mathbf{x}(j) = \Phi(j, k)\mathbf{x}(k) - \sum_{i=j+1}^k \Phi(j, i) \Gamma(i-1) \mathbf{w}(i-1) \quad (3.24)$$

$$j = k-N+1, \dots, k$$

上式两边左乘  $H(j)$  得

$$H(j)x(j) = H(j)\Phi(j,k)x(k) - \sum_{i=j+1}^k H(j)\Phi(j,i)\Gamma(i-1)w(i-1)$$

将上式移项得

$$H(j)\Phi(j,k)x(k) = z(j) + \sum_{i=j+1}^k H(j)\Phi(j,i)\Gamma(i-1)w(i-1)$$

$$j = k - N + 1, \dots, k$$

设

$$z(j) + \sum_{i=j+1}^k H(j)\Phi(j,i)\Gamma(i-1)w(i-1) = y(j)$$

$$j = k - N + 1, \dots, k$$

则

$$H(j)\Phi(j,k)x(k) = y(j)$$

$$j = k - N + 1, \dots, k \quad (3.25)$$

利用(3.25)式可得下列矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} H(k-N+1)\Phi(k-N+1,k) \\ \vdots \\ H(k-1)\Phi(k-1,k) \\ H(k) \end{bmatrix} x(k) = \begin{bmatrix} y(k-N+1) \\ \vdots \\ y(k-1) \\ y(k) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

如果系统是完全可观测的,则根据  $z(k-N+1), \dots, z(k)$  能唯一地确定  $x(k)$ ,也就是说根据  $y(k-N+1), \dots, y(k-1), y(k)$  能唯一地确定  $x(k)$ ,即上面方程有惟一解  $x(k)$ 。上述线性方程组有解的充分必要条件是下面的非负定矩阵为可逆的,即为正定的,也就是

$$\begin{bmatrix} H(k-N+1)\Phi(k-N+1,k) \\ \vdots \\ H(k-1)\Phi(k-1,k) \\ H(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H(k-N+1)\Phi(k-N+1,k) \\ \vdots \\ H(k-1)\Phi(k-1,k) \\ H(k) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j,k)H^T(j)H(j)\Phi(j,k) > 0$$

设

$$M(k-N+1,k) = \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j,k)H^T(j)H(j)\Phi(j,k) \quad (3.27)$$

则称  $M(k-N+1,k)$  为完全可观测阵。

如果对任何时刻  $k$ ,系统是完全可观测的,则称此系统为一致完全可观测。一致完全可观测的充分必要条件是:如果存在正整数  $N$  和正数  $\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$  ( $\alpha_2$  和  $\beta_2$  与  $k$  无关,使得对所有  $k > N$ ,有

$$\alpha_2 I \leq M(k-N+1,k) \leq \beta_2 I \quad (3.28)$$

则称系统为一致完全可观测。

下面讨论离散随机系统的可观测性,系统状态方程和观测方程为(3.22)式。假定  $v(k)$  是零均值白噪声序列,  $E[v(k)v^T(j)] = R(k)\delta_{kj}$ , 对  $k$  时刻,如果存在正整数  $N$ ,使

$$M(k-N+1) = \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j,k)H^T(j)R^{-1}(j)H(j)\Phi(j,k) > 0$$



则称此随机系统为完全可观测。

如果存在正数  $\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$  及正整数  $N$ , 使得对所有  $k \geq N$ , 有

$$\alpha_2 I \leq M(k-N+1, k) \leq \beta_2 I \quad (3.29)$$

则称此随机系统为一致完全可观测。与确定性系统相比较, 在随机系统的观测阵中多了  $R^{-1}(j)$ , 关于这一点可说明如下: 如果  $M(k-N+1, k) > 0$ , 取

$$\mathbf{x}^*(k) = M^{-1}(k-N+1, k) \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j, k) H^T(j) R^{-1}(j) \mathbf{z}(j) \quad (3.30)$$

$\mathbf{x}^*(k)$  是观测值  $\mathbf{z}(k-N+1), \dots, \mathbf{z}(k-1), \mathbf{z}(k)$  的线性组合, 计算  $\mathbf{x}^*(k)$  的数学期望:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}^*(k)] &= M^{-1}(k-N+1, k) \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j, k) H^T(j) R^{-1}(j) E[\mathbf{z}(j)] \\ &= M^{-1}(k-N+1, k) \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j, k) H^T(j) R^{-1}(j) E[H(j)\mathbf{x}(j) + \mathbf{v}(j)] \\ &= M^{-1}(k-N+1, k) \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j, k) H^T(j) R^{-1}(j) H(j) E[\mathbf{x}(j)] \\ &= M^{-1}(k-N+1, k) \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j, k) H^T(j) R^{-1}(j) H(j) \\ &\quad E\left[\Phi(j, k)\mathbf{x}(k) - \sum_{i=j+1}^k \Phi(j, i) \Gamma(i-1) \mathbf{w}(i-1)\right] \\ &= M^{-1}(k-N+1, k) \sum_{j=k-N+1}^k \Phi^T(j, k) H^T(j) R^{-1}(j) H(j) \Phi(j, k) E[\mathbf{x}(k)] \\ &= M^{-1}(k-N+1, k) M(k-N+1, k) E[\mathbf{x}(k)] \\ &= E[\mathbf{x}(k)] \end{aligned}$$

所以,  $\mathbf{x}^*(k)$  是状态向量  $\mathbf{x}(k)$  基于  $\mathbf{z}(k-N+1), \dots, \mathbf{z}(k)$  的线性无偏估计。由此看来, 只要  $M^{-1}(k-N+1, k) > 0$ , 虽然由  $\mathbf{z}(k-N+1), \dots, \mathbf{z}(k)$  不能完全确定状态  $\mathbf{x}(k)$ , 但  $\mathbf{z}(k-N+1), \dots, \mathbf{z}(k)$  可作出  $\mathbf{x}(k)$  的无偏线性方差估计  $\mathbf{x}^*(k)$ 。然而  $\mathbf{x}^*(k)$  只是线性无偏估计, 不是线性最小方差估计。线性最小方差估计的误差阵  $P(k|k)$  必须满足下列不等式:

$$P(k|k) \leq E\{[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)][\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)]^T\} \quad (3.31)$$

设连续系统状态方程和观测方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + F(t)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

式中,  $\mathbf{w}(t)$  为非随机的控制量;  $\mathbf{v}(t) = 0$ , 则系统为确定性系统。线性时变系统在  $(t_0, t)$  完全可观测的充分必要条件为

$$M(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t) H^T(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau > 0$$

如果对任意初始时刻  $t_0$ , 系统都是完全可观测的, 则称此系统为一致完全可观测。一致完全可观测的充分必要条件是: 如果存在  $\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0, t_0$  为任意时刻, 对  $t > t_0$ , 有

$$\alpha_2 I \leq M(t_0, t) \leq \beta_2 I$$

则称系统为一致完全可观测。

下面讨论连续随机系统的可观测性。在 (3.32) 式中, 如果  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  都为随机干扰, 假定  $\mathbf{v}(t)$  是零均值白噪声过程,  $E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)$ , 则随机线性系统在  $(t_0, t)$  完

全可观测的充分必要条件为

$$M(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau > 0 \quad (3.33)$$

如果对任意初始时刻  $t_0$ , 系统都是完全可观测的, 则称此系统为一致完全可观测。一致完全可观测的充分必要条件是: 如果存在  $\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0, t_0$  为任意时刻, 对  $t > t_0$ , 有

$$\alpha_2 I \leq M(t_0, t) \leq \beta_2 I \quad (3.34)$$

则称系统为一致完全可观测。

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

### 3.3 滤波误差的界

我们希望滤波误差的方差阵随着滤波时间的增长, 能够达到稳态值。在证明稳定性定理时, 需要知道滤波误差阵的上下界。下面来讨论滤波误差方差阵的上下界问题。如果离散系统

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1) \\ \mathbf{z}(k) &= H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

一致完全可控和一致完全可观测, 即存在  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  (都大于零) 和正整数  $N$ , 使得  $\forall k \geq N$ , 则有

$$\alpha_1 I \leq W(k-N+1, k) \leq \beta_1 I$$

及

$$\alpha_2 I \leq M(k-N+1, k) \leq \beta_2 I$$

那么,  $\forall k \geq N$ , 最优估计误差协方差阵有一致的上、下界:

$$\frac{\alpha_1}{1+n^2\beta_1\beta_2} I \leq P(k|k) \leq \frac{1+n^2\beta_1\beta_2}{\alpha_2} I$$

类似地, 可以得到连续系统估计误差协方差阵的上、下界。

## 第四章 线性离散系统的最优平滑估计

在第二章,我们讨论了最优线性预测与滤波的基本方程。现在来讨论最优线性平滑问题。前面已提到过平滑的定义,如果已知观测值  $z(1), z(2), \dots, z(j)$ , 要求找出  $x(k)$  的最优线性估计  $x(k|j)$ , 当  $k < j$ , 则称为平滑。根据  $k$  和  $j$  的具体变化情况, 最优平滑问题可分为三种类型:

(1) 固定区间最优平滑: 固定  $j=N$ , 变化  $k$ , 并且令  $k < j$ , 即  $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ , 设  $x(k)$  的最优平滑值为  $x(k|N)$ 。

(2) 固定点最优平滑: 固定  $k=N$ , 变化  $j$ , 并且  $j > k=N$ , 设  $x(N)$  的最优平滑值为  $x(N|j)$ 。

(3) 固定滞后最优平滑:  $k$  和  $j$  都变化, 但是保持  $j=k+N$ , 设  $x(k)$  的最优平滑值为  $x(k|k+N)$ 。

最优平滑问题比最优预测和滤波问题复杂得多但估计精度高。在许多实际问题中, 需要知道状态变量的最优平滑值, 例如在研究一个卫星系统时, 往往会出现下列问题: ①卫星是否在预定的轨道上飞行? ②导航系统中哪一类误差源对卫星偏离理想轨道的影响最大? ③在什么时间段上动力装置的推力太大或太小? 为了回答上述问题及其他一些问题, 必须处理在卫星发射和飞行时所获得的遥测和跟踪数据, 给出卫星飞行状态变量的最优平滑值。在此只讨论离散情况。下面分别推导离散系统固定区间最优平滑, 固定点最优平滑及固定滞后最优平滑的基本方程。

### 4.1 固定区间最优平滑估计

设系统状态方程和观测方程为

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k+1, k)w(k) \quad (4.1)$$

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k) \quad (4.2)$$

$w(k)$  和  $v(k)$  都是零均值高斯白噪声序列, 且互不相关, 同时

$$E[w(k)] = E[v(k)] = 0, \quad E[w(k)w^T(j)] = Q(k)\delta_{kj}$$

$$E[v(k)v^T(j)] = R(k)\delta_{kj}$$

$x(k)$  的初始状态  $x(0)$  是高斯分布的,  $E[x(0)] = m_0$ , 方差阵为  $P(0|0)$ 。因此随机序列  $\{x(k)\}$  和  $\{z(j)\}$  都服从高斯分布。如果知道了  $\{x(k)\}$  和  $\{z(j)\}$  的数学期望和方差阵, 就可以完全确定概率分布密度函数。下面我们用极大验后估计来求固定区间最优平滑。在非高斯的一般情况, 可用线性最小方差估计, 推导出形式上完全相同的结果。

给定观测数据集  $z^N$  [即  $z(1), z(2), \dots, z(N)$ ], 并设  $x(k)$  的极大验后估计量就是使得条件概率分布密度  $p[x(k)|z^N]$  达到极大的  $x(k)$  的值, 这一估值就是  $x(k)$  的固定区间最优平滑, 记为  $x(k|N)$ 。

$x(k|N)$  和  $x(k+1|N)$  可通过求解下列联立方程来得到:

$$\left. \frac{\partial p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1) | \mathbf{z}_1^N]}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\substack{\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k|N) \\ \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k+1|N)}} = 0 \quad (4.3)$$

$$\left. \frac{\partial p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1) | \mathbf{z}_1^N]}{\partial \mathbf{x}(k+1)} \right|_{\substack{\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k|N) \\ \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k+1|N)}} = 0 \quad (4.4)$$

后面将会看到, 由于所得到的方程是递推的, 因此, 只要求解(4.3)式就行了。由贝叶斯公式, 可得条件概率分布密度

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1) | \mathbf{z}_1^N] &= \frac{p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}_1^N]}{p(\mathbf{z}_1^N)} \\ &= \frac{p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{z}_1^k] p(\mathbf{z}_1^k)}{p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{z}_1^k] \cdot p(\mathbf{z}_1^k)} \end{aligned}$$

消去共同项  $p(\mathbf{z}_1^k)$  后, 上式变成

$$p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1) | \mathbf{z}_1^N] = \frac{p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{z}_1^k]}{p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{z}_1^k]}$$

再运用联合概率公式, 上式可变成

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1) | \mathbf{z}_1^N] &= \frac{p[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{x}(k), \mathbf{z}_1^k] p[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}_1^k]}{p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{z}_1^k]} \quad (4.5) \end{aligned}$$

从状态方程(4.1)可以看出, 系统状态是由高斯白噪声序列激励, 且  $\mathbf{x}(0)$  服从高斯分布, 因此  $\{\mathbf{x}(k)\}$  是高斯-马尔可夫序列。根据观测方程(4.2), 可把  $\mathbf{z}(k)$  表示成  $\mathbf{z}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  的线性函数, 另外考虑到  $\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N)$  与  $\mathbf{v}(k), \dots, \mathbf{v}(1)$  不相关, 则可得

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{x}(k), \mathbf{z}_1^N] &= p[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{x}(k), \\ &\quad \mathbf{x}(k-1), \dots, \mathbf{x}(1), \mathbf{v}(k), \dots, \mathbf{v}(1)] \\ &= p[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{x}(k)] \end{aligned}$$

于是(4.5)式变成

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1) | \mathbf{z}_1^N] &= \frac{p[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{x}(k)] p[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}_1^k]}{p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{z}_1^k]} \quad (4.6) \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{x}(k)] &= p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{x}(k+1), \mathbf{x}(k)] \\ &\quad \times p[\mathbf{x}(k+1), \dots, \mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k)] = p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{x}(k-1)] \\ &\quad \times p[\mathbf{x}(k+1) | \mathbf{x}(k)] \end{aligned}$$

(4.6)式可进一步写成

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1) | \mathbf{z}_1^N] &= \frac{p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{x}(k+1)] p[\mathbf{x}(k+1) | \mathbf{x}(k)] p[\mathbf{x}(k) | \mathbf{z}_1^k]}{p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N) | \mathbf{z}_1^k]} \quad (4.7) \end{aligned}$$

在(4.7)式中的所有概率分布密度函数都是高斯分布的, 并且只有两项概率分布密度

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

函数  $p[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)]$  和  $p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}_1^k]$  含有  $\mathbf{x}(k)$ , 只要计算相应的数学期望和方差阵就可确定这两个概率分布密度函数。由状态方程(4.1)可得

$$E[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)] = \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k)$$

$$\text{Var}\{\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)\} = \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k)$$

因此  $p[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)]$  为

$$p[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)] = K_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k+1) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k)]^T [\Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k)]^{-1} [\mathbf{x}(k+1) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k)] \right\} \quad (4.8)$$

在上式中, 假定  $\Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k)$  是正定的。

由于在高斯分布下, 概率分布密度  $p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}_1^k]$  可由  $\mathbf{x}(k)$  的条件数学期望  $E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}_1^k]$  和条件方差  $\text{Var}[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}_1^k]$  来确定。在高斯分布情况下,  $\mathbf{x}(k)$  的条件数学期望就是最优滤波估计  $\mathbf{x}(k|k)$ , 条件方差就是估计误差协方差阵  $P(k|k)$ , 即

$$E[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}_1^k] = \mathbf{x}(k|k)$$

$$\text{Var}[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}_1^k] = P(k|k)$$

从而可得

$$p[\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}_1^k] = K_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)]^T P^{-1}(k|k) [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)] \right\} \quad (4.9)$$

将(4.8)式和(4.9)式代入(4.7)式, 得

$$\begin{aligned} p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^N] &= K \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k+1) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k)]^T [\Gamma(k+1, k) \right. \\ &\quad \times Q(k)\Gamma^T(k+1, k)]^{-1} [\mathbf{x}(k+1) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k)] \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)]^T P^{-1}(k|k) [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)] \right\} \\ &\quad \times \frac{p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N)|\mathbf{x}(k+1)]}{p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N)|\mathbf{z}_1^k]} \end{aligned} \quad (4.10)$$

式中  $K=K_1K_2$ 。对上式两边取对数, 得

$$\begin{aligned} \ln p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^N] &= -\frac{1}{2} [\mathbf{x}(k+1) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k)]^T [\Gamma(k+1, k) \\ &\quad \times Q(k)\Gamma^T(k+1, k)]^{-1} [\mathbf{x}(k+1) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k)] \\ &\quad - \frac{1}{2} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)]^T P^{-1}(k|k) [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)] \\ &\quad + \ln \frac{K p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N)|\mathbf{x}(k+1)]}{p[\mathbf{z}(k+1), \dots, \mathbf{z}(N)|\mathbf{z}_1^k]} \end{aligned} \quad (4.11)$$

因此, 固定区间最优平滑估计量满足下列方程:

$$\left. \frac{\partial \ln p[\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^N]}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{\substack{\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(k|N) \\ \mathbf{x}(k+1)=\mathbf{x}(k+1|N)}} = 0 \quad (4.12)$$

即

$$\Phi^T(k+1, k) [\Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k)]^{-1} [\mathbf{x}(k+1|N) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|N)] + P^{-1}(k|k) [\mathbf{x}(k|N) - \mathbf{x}(k|k)] = 0$$

$$-\Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|N)] - P^{-1}(k|k)[\mathbf{x}(k|N) - \mathbf{x}(k|k)] = 0 \quad (4.13)$$

解上式,可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|N) &= \{P^{-1}(k|k) + \Phi^T(k+1, k)[\Gamma(k+1, k) \times Q(k)\Gamma^T(k+1, k)]^{-1} \\ &\quad \times \Phi(k+1, k)\}^{-1} \Phi^T(k+1, k)[\Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k)]^{-1} \\ &\quad \times \mathbf{x}(k+1|N) + \{P^{-1}(k|k) + \Phi^T(k+1, k) \\ &\quad \times [\Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k)]^{-1} \\ &\quad \times \Phi(k+1, k)\}^{-1} P^{-1}(k|k)\mathbf{x}(k|k) \end{aligned} \quad (4.14)$$

应用矩阵求逆引理,并作一些简化,可得固定区间最优平滑估计:

$$\mathbf{x}(k|N) = \mathbf{x}(k|k) + A_S(k)[\mathbf{x}(k+1|N) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k)] \quad (4.15)$$

式中

$$\begin{aligned} A_S(k) &= P(k|k)\Phi^T(k+1, k)[\Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k) \\ &\quad + \Gamma(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k)]^{-1} \end{aligned} \quad (4.16)$$

由滤波方程(2.22)得

$$\begin{aligned} P(k+1|k) &= \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) \\ &\quad + \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k) \end{aligned}$$

因此  $A_S(k)$  的表示式可简化成

$$A_S(k) = P(k|k)\Phi^T(k+1, k)P^{-1}(k+1|k) \quad (4.17)$$

方程(4.15)就是固定区间最优平滑方程。(4.17)式是固定区间最优增益矩阵方程。为了逆向计算  $k=N-1, N-2, \dots$  的固定区间最优平滑,必须预先算得相应时刻的滤波解  $\mathbf{x}(k|k)$  和滤波误差方差阵  $P(k|k)$  及一步预测误差方差阵  $P(k+1|k)$ 。上述固定区间最优平滑方程的边界条件为  $\mathbf{x}(N|N)$ 。 $\mathbf{x}(k+1|N)$  不必由方程(4.4)单独求出,由于是逆向递推,在计算  $\mathbf{x}(k|N)$  时,  $\mathbf{x}(k+1|N)$  已在上一步计算中得到。

现在计算平滑误差

$$\tilde{\mathbf{x}}(k|N) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|N) \quad (4.18)$$

由(4.15)式得

$$\begin{aligned} s\tilde{\mathbf{x}}(k|N) &= \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|N) \\ &= \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k) - A_S(k)[\mathbf{x}(k+1|N) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k)] \\ &= \tilde{\mathbf{x}}(k|k) - A_S(k)[\mathbf{x}(k+1|N) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k)] \\ &\quad \times \tilde{\mathbf{x}}(k|N) + A_S(k)\mathbf{x}(k+1|N) \\ &= \tilde{\mathbf{x}}(k|k) + A_S(k)\Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k) \\ &\quad \times \tilde{\mathbf{x}}(k|N) + A_S(k)\mathbf{x}(k+1|N) = \tilde{\mathbf{x}}(k|k) + A_S(k)\mathbf{x}(k+1|k) \end{aligned} \quad (4.19)$$

考虑到  $\mathbf{x}(k+1|N)$  是观测值  $z(1), z(2), \dots, z(N)$  的线性组合,  $\mathbf{x}(k|k)$  是观测值  $z(1), z(2), \dots, z(k)$  的线性组合。因此  $\tilde{\mathbf{x}}(k|N)$  与  $\mathbf{x}(k+1|N)$  正交,  $\tilde{\mathbf{x}}(k|k)$  与  $\mathbf{x}(k|k)$  正交,于是

$$E[\tilde{\mathbf{x}}(k|N)\mathbf{x}^T(k+1|N)] = 0$$

$$E[\tilde{\mathbf{x}}(k|N)\mathbf{x}^T(k|k)] = 0$$

对(4.19)式等号两边取方差,得

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathbf{x}}(k|N)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|N)] &+ A_S(k)E[\mathbf{x}(k+1|N) \times \mathbf{x}^T(k+1|N)]A_S^T(k) \\ &= E[\tilde{\mathbf{x}}(k|k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k)] + A_S(k) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times E[\mathbf{x}(k+1|k)\mathbf{x}^T(k+1|k)]A_S^T(k) \\
P(k|N) + A_S(k)E[\mathbf{x}(k+1|N)\mathbf{x}^T(k+1|N)]A_S^T(k) \\
& = P(k|k) + A_S(k)E[\mathbf{x}(k+1|k)\mathbf{x}^T(k+1|k)]A_S^T(k) \quad (4.20) \\
E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1)] & = E\{[\mathbf{x}(k+1|k) + \tilde{\mathbf{x}}(k+1|k)] \\
& \quad \times [\mathbf{x}(k+1|k) + \tilde{\mathbf{x}}(k+1|k)]^T\} \\
& = E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1|k)] + E[\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k+1|k)]
\end{aligned}$$

$$E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1|k)] = E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1)] - P(k+1|k) \quad (4.21)$$

同理

$$\begin{aligned}
& E[\mathbf{x}(k+1|N)\mathbf{x}^T(k+1|k)] \\
& = E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1)] - P(k+1|N) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

将(4.21)式和(4.22)式代入(4.20)式,有

$$\begin{aligned}
P(k|N) + P_S(k)\{E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1)] - P(k+1|N)\}A_S^T(k) \\
= P(k|k) + A_S(k)\{E[\mathbf{x}(k+1)\mathbf{x}^T(k+1)] - P(k+1|k)\}A_S^T(k)
\end{aligned}$$

可得固定区间最优平滑误差方差阵的递推公式:

$$P(k|N) = P(k|k) + A_S(k)[P(k+1) - P(k+1|k)]A_S^T(k) \quad (4.23)$$

方程中  $k$  的变化次序为  $k=N-1, N-2, \dots, 0$ , 其边界条件为  $k=N-1$  时的  $P(k+1|N) = P(N|N)$ 。

方程(4.15), (4.17)和(4.23)是固定区间最优平滑的一组方程。

固定区间最优平滑的计算顺序如下:

(1) 利用卡尔曼滤波公式,按  $k=0, 1, \dots, N-1$  顺时方向计算  $\mathbf{x}(k|k), P(k|k), P(k+1|k)$ 。将这些值存储于计算机,同时给出终端值  $P(N|N)$  和  $\mathbf{x}(N|N)$ 。

(2) 利用平滑公式(4.15)和(4.16),按  $k=N-1, N-2, \dots, 0$  逆时方向计算最优平滑值  $\mathbf{x}(k|N)$  和  $P(k|N)$ 。平滑的初始条件为  $\mathbf{x}(N|N)$  和  $P(N|N)$ 。

(4.15)式的边界条件是  $k=N-1$  时的滤波估值  $\mathbf{x}(k+1|N) = \mathbf{x}(N|N)$ 。(4.16)式的边界条件是  $k=N-1$  时的  $P(k+1|N) = P(N|N)$ 。

## 4.2 固定点最优平滑估计

固定点最优平滑是利用较多的观测数据  $\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(j)$ , 对观测时间区间内的某一固定时间点  $N(0 \leq N < j)$  上的系统状态  $\mathbf{x}(N)$  进行最优估计。固定点最优平滑算法在工程中有着广泛的应用,例如前面提到过的卫星系统,往往希望由发射、加速和入轨以后的跟踪数据  $\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(j)$  来得到我们特别关心的卫星在入轨点(关车点)时刻  $N$  的状态向量  $\mathbf{x}(N)$  的最优估计。这就是固定点最优平滑的问题。

下面推导固定点最优平滑的计算方法。在这里观测数据集  $\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(j)$  中的数目  $j$  是可变的,而固定点的时刻  $N$  是固定的,且  $j > k = N$ , 先令(4.15)式中的  $N=j$ , 得

$$\mathbf{x}(k|j) = \mathbf{x}(k|k) + A_S(k)[\mathbf{x}(k+1|j) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k)] \quad (4.24)$$

令(4.15)式中的  $N=j-1$ , 得

$$\mathbf{x}(k|j-1) = \mathbf{x}(k|k) + A_S(k)[\mathbf{x}(k+1|j-1) - \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k)] \quad (4.25)$$

(4.24)式减去(4.25)式,得

$$\mathbf{x}(k|j) - \mathbf{x}(k|j-1) = A_s(k)[\mathbf{x}(k+1|j) - \mathbf{x}(k+1|j-1)], j > k \quad (4.26)$$

(4.26)式给出了 $\mathbf{x}(k)$ 的估计值与 $\mathbf{x}(k+1)$ 的估计值之间的递推关系。在(4.26)式中,如果令 $k=N$ 为常量,则得

$$\mathbf{x}(N|j) - \mathbf{x}(N|j-1) = A_s(N)[\mathbf{x}(N+1|j) - \mathbf{x}(N+1|j-1)] \quad (4.27)$$

如果在(4.26)式中进一步令 $k=N+1$ ,得

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}(N+1|j) - \mathbf{x}(N+1|j-1) \\ &= A_s(N+1)[\mathbf{x}(N+2|j) - \mathbf{x}(N+2|j-1)] \end{aligned} \quad (4.28)$$

将(4.28)式代入(4.27)式的右边,得

$$\mathbf{x}(N|j) - \mathbf{x}(N|j-1) = A_s(N)A_s(N+1)[\mathbf{x}(N+2|j) - \mathbf{x}(N+2|j-1)] \quad (4.29)$$

将(4.29)式改写成如下形式:

$$\mathbf{x}(N|j) - \mathbf{x}(N|j-1) = \sum_{i=N}^{j-1} A_s(i)[\mathbf{x}(j|j) - \mathbf{x}(j|j-1)] \quad (4.30)$$

将(4.30)式改写成如下形式:

$$\mathbf{x}(N|j) = \mathbf{x}(N|j-1) + B(N, j)[\mathbf{x}(j|j) - \mathbf{x}(j|j-1)] \quad (4.31)$$

式中 $j=N+1, N+2, \dots$ , 并且

$$\left. \begin{aligned} B(N, j) &= \sum_{i=N}^{j-1} A_s(i) = B(N, j-1)A_s(j-1) \\ B(N, N) &= I \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

由第二章的滤波方程可知

$$\mathbf{x}(j|j) = \mathbf{x}(j|j-1) + K(j)[\mathbf{z}(j) - H(j)\mathbf{x}(j|j-1)]$$

因此对 $j=N+1, N+2, \dots$ , (4.31)式又可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(N|j) &= \mathbf{x}(N|j-1) + B(N, j)K(j)[\mathbf{z}(j) \\ &\quad - H(j)\mathbf{x}(j|j-1)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

方程(4.31)或(4.33)以及方程(4.32)就是固定点最优平滑方程。为了求固定点最优平滑,如果按(4.31)式计算,需要知道最优滤波值 $\mathbf{x}(j|j)$ 和一步最优预测估计值 $\mathbf{x}(j|j-1)$ 。如果按(4.33)式计算,需要知道观测数据 $\mathbf{z}(j)$  ( $j>N$ )和一步最优预测 $\mathbf{x}(j|j-1)$ 。平滑方程(4.33)的边界条件为 $j=N+1$ 时的

$$\mathbf{x}(N|j-1) = \mathbf{x}(N|N)$$

$A_s(k)$ 按(4.17)式计算,  $B(N, j)$ 称为固定点最优平滑增益。

下面计算固定点最优平滑误差 $\tilde{\mathbf{x}}(N|j)$ 。由定义得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(N|j) &= \mathbf{x}(N) - \mathbf{x}(N|j) \\ &= \mathbf{x}(N) - \mathbf{x}(N|j-1) - B(N, j)[\mathbf{x}(j|j) - \mathbf{x}(j|j-1)] \\ \tilde{\mathbf{x}}(N|j) &= \tilde{\mathbf{x}}(N|j-1) - B(N, j)[\mathbf{x}(j|j) - \mathbf{x}(j|j-1)] \end{aligned} \quad (4.34)$$

将(4.34)式改写成

$$\tilde{\mathbf{x}}(N|j) + B(N, j)\mathbf{x}(j|j) = \tilde{\mathbf{x}}(N|j-1) + B(N, j)\mathbf{x}(j|j-1) \quad (4.35)$$

对上式等号两边取方差,并考虑到 $\tilde{\mathbf{x}}(N|j)$ 与 $\mathbf{x}(j|j)$ 正交,  $\tilde{\mathbf{x}}(N|j-1)$ 与 $\mathbf{x}(j|j-1)$ 正交,得

$$E[\tilde{\mathbf{x}}(N|j)\tilde{\mathbf{x}}^T(N|j)] + B(N, j)E[\mathbf{x}(j|j)\mathbf{x}^T(j|j)]B^T(N, j)$$

$$= E[\mathbf{x}(N|j-1)\mathbf{x}^T(N|j-1)] \\ + B(N,j)E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j|j-1)]B^T(N,j) \quad (4.36)$$

$$P(N|j) = P(N|j-1) - B(N,j)\{E[\mathbf{x}(j|j)\mathbf{x}^T(j|j)] \\ - E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j|j-1)]\}B^T(N,j) \quad (4.37)$$

为了简化上式,利用(4.21)式和(4.22)式。在(4.21)式中令  $k=j-1$ ,在(4.22)式中令  $k=j-1, N=j$ ,得

$$E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j|j-1)] = E[\mathbf{x}(j)\mathbf{x}^T(j)] - P(j|j-1)$$

$$E[\mathbf{x}(j|j)\mathbf{x}^T(j|j)] = E[\mathbf{x}(j)\mathbf{x}^T(j)] - P(j|j)$$

$$E[\mathbf{x}(j|j)\mathbf{x}^T(j|j)] - E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j|j-1)] = -[P(j|j) - P(j|j-1)]$$

最后得固定点平滑误差方差阵方程为

$$P(N|j) = P(N|j-1) + B(N,j) \\ \times [P(j|j) - P(j|j-1)]B^T(N,j) \quad (4.38)$$

上式对于  $\forall j=N+1, N+2, \dots$ , 都成立。初始条件为  $j=N+1$  时的  $P(N|j-1)=P(N|N)$ 。

由(2.22)式得

$$P(j|j) - P(j|j-1) = -K(j)H(j)P(j|j-1)$$

于是(4.38)式又可写成

$$P(N|j) = P(N|j-1) \\ - B(N,j)K(j)H(j)P(j|j-1) \cdot B^T(N,j) \quad (4.39)$$

现将固定点最优平滑方程综合如下:

(1) 对于固定的  $N$  和  $j=N+1, N+2, \dots$ , 固定点最优平滑方程为

$$\mathbf{x}(N|j) = \mathbf{x}(N|j-1) + B(N,j)[\mathbf{x}(j|j) - \mathbf{x}(j|j-1)]$$

或

$$\mathbf{x}(N|j) = \mathbf{x}(N|j-1) + B(N,j)K(j)[\mathbf{z}(j) - H(j) \cdot \mathbf{x}(j|j-1)]$$

其初始条件为  $\mathbf{x}(N|N)$ 。

(2) 对于  $j=N+1, N+2, \dots$ , 固定点最优平滑增益矩阵为

$$B(N,j) = \sum_{i=N}^{j-1} A_s(i) = B(N,j-1)A_s(j-1)$$

且

$$B(N,N) = I, \quad A_s(i) = P(i|i)\Phi^T(i+1,i)P^{-1}(i+1|i)$$

(3) 对于  $j=N+1, N+2, \dots$ , 固定点平滑误差方差阵为

$$P(N|j) = P(N|j-1) + B(N,j)[P(j|j) - P(j|j-1)]B^T(N,j)$$

或

$$P(N|j) = P(N|j-1) - B(N,j)K(j)H(j)P(j|j-1)B^T(N,j)$$

按(4.31)式或(4.33)式计算固定点最优平滑有一个缺点:在计算最优平滑增益矩阵  $B(N,j)$  时,需要计算一步预测误差方差阵  $P(j|j-1)$  的逆矩阵。由于  $P(j|j-1)$  是  $n \times n$  矩阵,当  $n$  比较大时,计算量比较大。为了克服这一缺点,Meditch 提出了以下处理方法,即先把(4.33)式写成如下的形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(N|j) = & \mathbf{x}(N|j-1) \\ & + W(N, j)H^T(j)R^{-1}(j)[\mathbf{z}(j) - H(j)\mathbf{x}(j|j-1)] \end{aligned} \quad (4.40)$$

其初始条件为  $\mathbf{x}(N|N)$ 。

而平滑的增益阵为

$$\begin{aligned} W(N, j) = & W(N, j-1)\Phi^T(j, j-1) \\ & \times [I - H^T(j)R^{-1}(j) \cdot H(j)P(j|j)] \end{aligned} \quad (4.41)$$

其中  $j=N+1, N+2, \dots$ , 初始条件为  $W(N, N)=P(N, N)$ 。

这时平滑误差  $\mathbf{x}(N|j)(j=N, N+1, \dots)$  的方差阵为

$$\begin{aligned} P(N|j) = & P(N|j-1) - W(N, j)[H^T(j)R^{-1}(j)H(j) \\ & \times P(N|j-1)H^T(j)R^{-1}(j)H(j) + H^T(j) \\ & \times R^{-1}(j)H(j)]W^T(N, j) \end{aligned} \quad (4.42)$$

式中  $j=N+1, N+2, \dots$ , 并且初始条件为  $P(N|N)$ 。

在(4.40), (4.41)和(4.42)式中, 只要求矩阵  $R(j)$  的逆, 通常  $R(j)$  是  $m \times m$  矩阵, 一般  $m$  都比  $n$  小, 因此对(4.40), (4.41)和(4.42)式进行计算比较方便, 不过要求  $R(j)$  为正定矩阵。

### 4.3 固定滞后最优平滑估计

固定滞后最优平滑是在滞后最新观测时间一个固定时间间隔  $N$  的时间点上, 给出系统状态最优估计的一种方法。这种方法在通信和遥测数据的处理中有广泛的应用。固定滞后最优平滑是利用观测值  $\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(k+N)$  来求  $\mathbf{x}(k)$  的最优估值  $\mathbf{x}(k|k)$ 。 $\mathbf{x}(k)$  在时间上比  $\mathbf{z}(k+N)$  滞后固定时间  $N$ 。固定滞后最优平滑算法可由固定区间最优平滑算法和固定点最优平滑算法联合得到。

首先假定  $A_S(k)$  为非奇异的, 由固定区间最优平滑方程(4.15)式得

$$\mathbf{x}(k+1|N) = \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k) + A_S^{-1}(k)[\mathbf{x}(k|N) - \mathbf{x}(k|k)]$$

在上式中的右边加上和减去  $\Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|N)$  后得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|N) = & \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|N) + [A_S^{-1}(k) - \Phi(k+1, k)] \\ & \times [\mathbf{x}(k|N) - \mathbf{x}(k|k)] \end{aligned} \quad (4.43)$$

而由(4.17)式得

$$A_S^{-1}(k) = P(k+1|k)\Phi^T(k+1, k)P^{-1}(k|k)$$

因为

$$\begin{aligned} P(k+1|k) = & \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) \\ & + \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} A_S^{-1}(k) = & [\Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k) \\ & \times Q(k)\Gamma^T(k+1, k)]\Phi^{-T}(k+1, k)P^{-1}(k|k) \end{aligned}$$

由上式可得

$$A_S^{-1}(k) - \Phi(k+1, k) = \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k)$$

$$\times \Phi^{-T}(k+1, k)P^{-1}(k|k) \quad (4.44)$$

设

$$G_S(k) = A_S^{-1}(k) - \Phi(k+1, k) \quad (4.45)$$

则(4.43)式可以写成

$$\mathbf{x}(k+1|N) = \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|N) + G_S(k)[\mathbf{x}(k|N) - \mathbf{x}(k|k)]$$

在上面的关系式中,用  $k+N$  代替  $N$  得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k+N) &= \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k+N) \\ &\quad + G_S(k)[\mathbf{x}(k|k+N) - \mathbf{x}(k|k)] \end{aligned} \quad (4.46)$$

另外,由固定点最优平滑方程(4.33)式得

$$\mathbf{x}(N|j) = \mathbf{x}(N|j-1) + B(N, j)K(j)[\mathbf{z}(j) - H(j)\mathbf{x}(j|j-1)]$$

由于上式对于  $\forall j=N+1, N+2, \dots$  都成立,因此如果用  $k+1$  代替  $N$ ,而用  $k+1+N$  来代替  $j$ ,则可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k+1+N) &= \mathbf{x}(k+1|k+N) + B(k+1, k+1+N) \\ &\quad \times K(k+1+N)[\mathbf{z}(k+1+N) \\ &\quad - H(k+1+N) \times \mathbf{x}(k+1+N|k+N)] \end{aligned} \quad (4.47)$$

式中  $k=0, 1, 2, \dots$ 。而由式(4.32)得

$$\left. \begin{aligned} B(k+1, k+1+N) &= \sum_{i=k+1}^{k+N} A_S(i) = A_S^{-1}(k)B(k, k+N)A_S(k+N) \\ B(0, N) &= \sum_{i=0}^{N-1} A_S(i) \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

将(4.46)式代入(4.47)式,得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k+1+N) &= \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k+N) + B(k+1, k+1+N) \\ &\quad \times K(k+1+N)[\mathbf{z}(k+1+N) - H(k+1+N) \\ &\quad \times \mathbf{x}(k+1+N|k+N)] + G_S(k)[\mathbf{x}(k|k+N) - \mathbf{x}(k|k)] \\ &\quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.49)$$

式中

$$G_S(k) = \Gamma(k+1, k)Q(k)\Gamma^T(k+1, k)\Phi^{-T}(k+1, k)P^{-1}(k|k)$$

(4.49)式就是固定滞后最优平滑方程,其初始条件为  $\mathbf{x}(0|N)$ 。

下面求固定滞后最优平滑误差的方差阵的递推方程。把方程(4.23)式经过变换,可得

$$P(k+1|N) = P(k+1|k) + A_S^{-1}(k)[P(k|N) - P(k|k)]A_S^{-T}(k)$$

用  $k+N$  代替式中的  $N$ ,则得

$$P(k+1|k+N) = P(k+1|k) + A_S^{-1}(k)[P(k|k+N) - P(k|k)]A_S^{-1}(k) \quad (4.50)$$

再在(4.39)式中,用  $k+1$  代替  $N$ ,而  $j$  用  $k+1+N$  代替,则可得

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1+N) &= P(k+1|k+N) - B(k+1, k+1+N) \\ &\quad \times K(k+1+N)H(k+1+N)B^T(k+1, k+1+N) \\ P(k+1|k+1+N) &= P(k+1|k+N) - B(k+1, k+1+N)K(k+1+N) \\ &\quad \times H(k+1+N)P(k+1+N|k+N) \end{aligned}$$

提醒您:  
超星阅览器  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

$$\begin{aligned} & \times B^T(k+1, k+1+N) - A_S^{-T}(k)[P(k|k) \\ & - P(k|k+N)]A_S^{-T}(k) \end{aligned} \quad (4.51)$$

式中  $k=0,1,2,\dots$ ; 初始条件为  $P(0|N)$ 。

方程(4.48),(4.49),(4.45)和(4.51)构成一组固定滞后最优平滑的计算公式。

#### 4.4 固定点平滑估计的新方法

Meditch 固定点平滑算法(4.41)式中,仍存在两个  $n \times n$  矩阵相乘的运算,计算复杂度为  $n^3$ ,影响了平滑估计的计算效率。著者于1992年对此算法作了如下改进,进一步提高了计算的效率。

设

$$\left. \begin{aligned} W(N, j) &= A(N|j)\Phi^T(j, N), \quad W(N, N) = A(N|N) = P(N|N) \\ M(j) &= H(j)\Phi(j, N), \quad P(j|j) = \Phi(j, N)P^*(j|j)\Phi^T(j, N) \\ j &= N+1, N+2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.52)$$

而

$$H^T(j)R^{-1}(j)H(j) = P^{-1}(j|j) - P^{-1}(j|j-1) \quad (4.53)$$

将(4.52),(4.53)式代入(4.40)~(4.42)式,可得

$$\begin{aligned} P(N|j) &= P(N|j-1) + W(N, j)P^{-1}(j|j)[P(j|j) - P(j|j-1)] \\ &\quad \times P^{-1}(j|j)W^T(N, j) \\ &= P(N|j-1) - W(N, j-1)\Phi^T(j, j-1)H^T(j) \\ &\quad \times [R(j) + H(j)P(j|j-1)H^T(j)] \\ &\quad \times H(j)\Phi(j, j-1)W^T(N, j-1) \\ &= P(N|j-1) - A(N|j-1)M^T(j)[R(j) + H(j)P(j|j-1)H^T(j)]^{-1} \\ &\quad \times M(j)A^T(N|j-1) \end{aligned} \quad (4.54)$$

利用矩阵反逆公式,可得

$$\begin{aligned} P(N|j) &= P(N|j-1) - A(N|j-1)M^T(j)R^{-1}(j) \\ &\quad \times [R(j) - M(j)P^*(j|j)M^T(j)]R^{-1}(j)M(j)A^T(N|j-1) \end{aligned} \quad (4.55)$$

因此,算法可整理为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(N|j) &= \mathbf{x}(N|j-1) + A(N|j)M^T(j)R^{-1}(j) \\ &\quad \times [\mathbf{z}(j) - M(j)\mathbf{x}^*(j|j-1)] \\ P(N|j) &= P(N|j-1) - A(N|j-1)M^T(j)R^{-1}(j) \\ &\quad \times [R(j) - M(j)P^*(j|j)M^T(j)]R^{-1}(j)M(j)A^T(N|j-1) \\ A(N|j) &= A(N|j-1)[I - M^T(j)R^{-1}(j)M(j)P^*(j|j)] \\ j &= N+1, N+2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

式中的初值为

$$A(N|N) = P(N|N), \quad \mathbf{x}^*(j|j-1) = \Phi(j, N)\mathbf{x}(j|j-1)$$

(4.56)式平滑所需的滤波方法可按下式进行:



$$\begin{aligned}
 P^*(j+1|j) &= P^*(j|j) + E(j)Q(j)E^T(j) \\
 \mathbf{x}^*(j+1|j+1) &= \mathbf{x}^*(j|j) + K^*(j+1)[\mathbf{z}(j+1) - M(j+1)\mathbf{x}^*(j|j)] \\
 K^*(j+1) &= P^*(j+1|j+1)M^T(j+1)R^{-1}(j+1) \\
 P^*(j+1|j+1) &= P^*(j+1|j) - P^*(j+1|j)M^T(j+1) \\
 &\quad \times [R(j+1) + M(j+1)P^*(j+1|j)M^T(j+1)]^{-1} \\
 &\quad \times M(j+1)P^*(j+1|j)
 \end{aligned}
 \tag{4.57}$$

式中

$$E(j) = \Phi(N, j+1)\Gamma(j)$$

在(4.56)式中,  $A(N|j)$  的计算避免了两个  $n \times n$  矩阵的相乘运算。

## 第五章 线性连续系统的平滑估计

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

### 5.1 线性连续系统的最优平滑问题

与第二章相似,我们用维纳-霍夫方程来推导平滑算法的方程式,但是在维纳-霍夫方程中将用新息向量  $\mathbf{g}(t)$  来代替观测向量  $\mathbf{z}(t)$ 。新息向量  $\mathbf{g}(t)$  的表达式为

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{z}(t) - H(t)\mathbf{x}(t|t) \quad (5.1)$$

当系统噪声  $\mathbf{w}(t)$  和观测噪声  $\mathbf{v}(t)$  为零均值不相关的白噪声时,  $\mathbf{g}(t)$  为白噪声过程。

**证明** 先分析  $\mathbf{g}(t)$  的均值:

$$E[\mathbf{g}(t)] = E[H(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) - H(t)\mathbf{x}(t|t)] = E[H(t)\tilde{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{v}(t)]$$

因为最优滤波估计是无偏的,即  $E[\tilde{\mathbf{x}}(t|t)] = 0$ ,  $\mathbf{v}(t)$  为零均值白噪声过程,故  $E[\mathbf{g}(t)] = 0$ 。

接着分析  $\mathbf{g}(t)$  的协方差阵:

$$E[\mathbf{g}(t)\mathbf{g}^T(\tau)] = E\{[H(t)\tilde{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{v}(t)][H(\tau)\tilde{\mathbf{x}}(\tau|\tau) + \mathbf{v}(\tau)]^T\}$$

由于  $E[\tilde{\mathbf{x}}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = 0 (t > \tau)$ ,  $E[\tilde{\mathbf{x}}(t|t)\tilde{\mathbf{x}}^T(\tau|\tau)] = 0$ , 所以  $E[\mathbf{g}(t)\mathbf{g}^T(\tau)] = 0 (t > \tau)$ 。

由此证明了  $\mathbf{g}(t)$  为零均值白噪声过程。下面再来看  $t = \tau$  时的方差:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{g}(t)\mathbf{g}^T(t)] &= E\{[H(t)\tilde{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{v}(t)][H(t)\tilde{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{v}(t)]^T\} \\ &= H(t)E[\tilde{\mathbf{x}}(t|t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t|t)]H^T(t) + E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)] \end{aligned}$$

方差  $E[\tilde{\mathbf{x}}(t|t)\tilde{\mathbf{x}}^T(t|t)]$  是有界的,它与  $E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)] = R(t)\delta(t)$  相比可以忽略,故可得

$$E[\mathbf{g}(t)\mathbf{g}^T(\tau)] = R(t)\delta(t - \tau) \quad (5.2)$$

即新息的二阶矩与观测噪声的二阶矩相等。由(5.1)式可得

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{g}(t) + H(t)\mathbf{x}(t)$$

可见  $\mathbf{g}(t)$  与  $\mathbf{z}(t)$  由一个因果可逆的线性变换相联系。所以,从它们包含相同统计信息的意义上说它们是等效的,即基于  $\mathbf{z}(t)$  得到的任何估计量也可以用  $\mathbf{g}(t)$  的形式表示。因此线性最小方差估计  $\mathbf{x}(t_1|t)$  的表达式可改写为

$$\mathbf{x}(t_1|t_2) = \int_{t_0}^{t_2} A(t_1, \tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau, \quad t_0 \leq \tau \leq t_2 \quad (5.3)$$

以  $\mathbf{g}^T(\lambda)$  乘上式两边,求其均值得

$$E[\mathbf{x}(t_1|t_2)\mathbf{g}^T(\lambda)] = \int_{t_0}^{t_2} A(t_1, \tau)E[\mathbf{g}(\tau)\mathbf{g}^T(\lambda)]d\tau, \quad t_0 \leq \lambda \leq t_2 \quad (5.4)$$

由于

$$E[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2)\mathbf{g}^T(\lambda)] = 0, \quad t_0 \leq \lambda \leq t_2$$

由(5.4)式可得

$$E[(\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_1|t_2))\mathbf{g}^T(\lambda)] = E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\lambda)] - \int_{t_0}^{t_2} A(t_1, \tau)E[\mathbf{g}(\tau)\mathbf{g}^T(\lambda)]d\tau = 0$$

由此得

$$E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\lambda)] = \int_{t_0}^{t_2} A(t_1, \tau) E[\mathbf{g}(\tau)\mathbf{g}^T(\lambda)] d\tau, \quad t_0 \leq \lambda \leq t_2 \quad (5.5)$$

(5.5)式即为维纳-霍夫方程的一般形式,由于新息是白噪声过程,故(5.5)式可写为

$$E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\lambda)] = \int_{t_0}^{t_2} A(t_1, \tau) R(\tau) \delta(\tau - \lambda) d\tau, \quad t_0 \leq \lambda \leq t_2 \quad (5.6)$$

根据  $\delta$  函数的性质,上式可以写为

$$E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\lambda)] = A(t_1, \lambda) R(\lambda), \quad t_0 \leq \lambda \leq t_2 \quad (5.6)$$

这样,关于  $A(t_1, \tau)$  的维纳-霍夫积分方程即变为了简单的代数式(5.6)。由(5.6)式解出  $A(t_1, \tau)$ , 得

$$A(t_1, \tau) = E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)] R^{-1}(\tau) \quad (5.7)$$

因此,估计值  $\mathbf{x}(t_1|t_2)$  可由下式求出:

$$\mathbf{x}(t_1|t_2) = \int_{t_0}^{t_2} E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)] R^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau \quad (5.8)$$

从(5.8)式既可以求出平滑解( $t_2 > t_1$ ),又可求出滤波解( $t_2 = t_1$ )和预测解( $t_2 < t_1$ )。求解这些估计值的关键,是必须先求出  $E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)]$  的表达式。对于滤波问题,在(5.8)式中置  $t_1 = t_2 = t$ , 得到

$$\mathbf{x}(t|t) = \int_{t_0}^t E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(\tau)] R^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau \quad (5.9)$$

若在(5.9)式两边对  $t$  求导,则有

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(\tau)] R^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau + E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(t)] R^{-1}(t) \mathbf{g}(t) \quad (5.10)$$

由于  $\frac{\partial}{\partial t} E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(\tau)] = E[\dot{\mathbf{x}}(t)\mathbf{g}^T(\tau)] = E[[F(t)\mathbf{x}(t) + G(t)\mathbf{w}(t)]\mathbf{g}^T(\tau)\mathbf{w}(t)]$  和  $\mathbf{g}(\tau)$  ( $t_0 \leq \tau < t$ ) 是不相关的,所以

$$\frac{\partial}{\partial t} E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(\tau)] = F(t) E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(\tau)], \quad t_0 \leq \tau < t \quad (5.11)$$

(5.10)式将变为

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t) = F(t) \int_{t_0}^t E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(\tau)] R^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau + E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(t)] R^{-1}(t) \mathbf{g}(t)$$

根据(5.9)式,上式中积分正好等于  $\mathbf{x}(t|t)$ , 故

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t) = F(t)\mathbf{x}(t|t) + E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(t)] R^{-1}(t) \mathbf{g}(t) \quad (5.12)$$

将  $E[\mathbf{x}(t)\mathbf{g}^T(t)]$  写为

$$E[[\mathbf{x}(t|t) + \tilde{\mathbf{x}}(t|t)]\mathbf{g}^T(t)] = E[[\mathbf{x}(t|t) + \tilde{\mathbf{x}}(t|t)][H(t)\tilde{\mathbf{x}}(t|t) + \mathbf{v}(t)]^T]$$

由于  $\mathbf{x}(t|t)$  与  $\tilde{\mathbf{x}}(t|t)$  正交,故上式为

$$E[\mathbf{x}(t|t)\mathbf{g}^T(t)] = P(t|t)H^T(t) + E[\mathbf{x}(t)\mathbf{v}^T(t)]$$

$\mathbf{x}(t)$  只依赖于  $\mathbf{w}(\tau)$  ( $t_0 \leq \tau \leq t$ ) 和  $\mathbf{x}(t_0)$ , 而  $\mathbf{w}(\tau)$ ,  $\mathbf{x}(t_0)$  和  $\mathbf{v}(t)$  都相互独立, 因此

$$E[\mathbf{x}(t|t)\mathbf{g}^T(t)] = P(t|t)H^T(t)$$

代入(5.12)式得

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t) = F(t)\mathbf{x}(t|t) + P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)[\mathbf{z}(t) - H(t)\mathbf{x}(t|t)] \quad (5.13)$$

(5.13)式即为线性连续系统最优滤波方程。

现在我们利用(5.8)式来推导平滑估计的算式。由(5.8)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_1|t_2) &= \int_{t_0}^{t_2} E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)]R^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)]R^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)]R^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (5.14)$$

第一项积分应为

$$\int_{t_0}^{t_1} E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)]R^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau = \mathbf{x}(t_1|t_1)$$

所以

$$\mathbf{x}(t_1|t_2) = \mathbf{x}(t_1|t_1) + \int_{t_1}^{t_2} E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)]R^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau \quad (5.15)$$

下面讨论  $E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)], \tau \geq t_1$ :

$$E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)] = E[(\mathbf{x}(t_1|t_2) + \tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2))(H(\tau)\tilde{\mathbf{x}}(\tau|\tau) + \mathbf{v}(\tau))^T]$$

由于

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t|t) = [F(t) - K(t)H(t)]\tilde{\mathbf{x}}(t|t) + G(t)\mathbf{w}(t) - K(t)\mathbf{v}(t) \quad (5.16)$$

令(5.16)式的转移矩阵为  $\Psi(\tau, t_1)$ , 则

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tau|\tau) = \Psi(\tau, t_1)\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2) + \int_{t_2}^{\tau} \Psi(\tau, \lambda)[G(\lambda)\mathbf{w}(\lambda) - K(\lambda)\mathbf{v}(\lambda)]d\lambda$$

所以

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_1)\tilde{\mathbf{x}}^T(\tau|\tau)] &= E\{\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2)[\Psi(\tau, t_1)\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_1) \\ &\quad + \int_{t_1}^{\tau} \Psi(\tau, \lambda)[G(\lambda)\mathbf{w}(\lambda) - K(\lambda)\mathbf{v}(\lambda)]d\lambda]^T\} \end{aligned}$$

由于  $\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_1)$  与  $\mathbf{w}(\lambda), \mathbf{v}(\lambda) (\lambda > t_1)$  是相互独立的, 故

$$E[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_1)\tilde{\mathbf{x}}^T(\tau|\tau)] = P(t_1|t_2)\Psi^T(\tau, t_1)$$

代入  $E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)]$  的表达式中, 得

$$E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{g}^T(\tau)] = P(t_1|t_1)\Psi^T(\tau, t_1)H^T(\tau)$$

将上式代入(5.15)式得

$$\mathbf{x}(t_1|t_2) = \mathbf{x}(t_1|t_2) + P(t_1|t_2) \int_{t_1}^{t_2} \Psi^T(\tau, t_1)H^T(\tau)R^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau$$

为简化书写, 令  $\int_{t_1}^{t_2} \Psi^T(\tau, t_1)H^T(\tau)R^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau = \lambda(t_1, t_2)$ , (5.16)式可以写为

$$\mathbf{x}(t_1|t_2) = \mathbf{x}(t_1|t_1) + P(t_1|t_1)\lambda(t_1, t_2) \quad (5.17)$$

由(5.17)式可以看到, 如果得到  $t_1$  以后的观测  $z(t_1+1), \dots, z(t_1+N), t_1+N=t_2$ , 利用这些观测值对  $t_1$  时刻的滤波估计  $\mathbf{x}(t_1|t_1)$  进行修正, 即可得到平滑估计  $\mathbf{x}(t_1|t_2)$ , 修正项为  $P(t_1|t_1)\lambda(t_1, t_2)$ 。

利用(5.16)式容易确定平滑估计误差的协方差阵。由于平滑误差  $\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2)$  为

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2) = \mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}(t_1|t_2) = \tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_1) - P(t_1|t_1) \int_{t_1}^{t_2} \Psi^T(\tau, t_1) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau \quad (5.18)$$

所以平滑误差的协方差阵为

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_1|t_2)] &= E\left\{\left[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_1) - P(t_1|t_1) \int_{t_1}^{t_2} \Psi^T(\tau, t_1) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau\right]\right. \\ &\quad \times \left.\left[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_1) - P(t_1|t_1) \int_{t_1}^{t_2} \Psi^T(\tau, t_1) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau\right]^T\right\} \\ &= P(t_1|t_1) - P(t_1|t_1) \int_{t_1}^{t_2} \Psi^T(\tau, t_1) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) E[\mathbf{g}(\tau)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_1|t_1)] d\tau \\ &\quad - \left[\int_{t_1}^{t_2} E[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2)\mathbf{g}^T(\tau)] R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t_1) d\tau\right] P(t_1|t_1) \\ &\quad + P(t_1|t_1) \left[\int_{t_1}^{t_2} \Psi^T(\tau, t_1) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t_1) d\tau\right] P(t_1|t_1) \end{aligned} \quad (5.19)$$

上式中有  $\mathbf{g}(\tau)$  与  $\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_1)$  的协方差阵:

$$E[\mathbf{g}(\tau)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_1|t_2)] = E\{[H(\tau)\tilde{\mathbf{x}}(\tau|\tau) + \mathbf{v}(\tau)]\tilde{\mathbf{x}}^T(t_1|t_1)\}$$

由于

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tau|\tau) = \Psi(\tau, t_1)\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_1) + \int_{t_1}^{\tau} \Psi(\tau, \lambda)[G(\lambda)\mathbf{w}(\lambda) - K(\lambda)\mathbf{v}(\lambda)]d\lambda$$

代入上式, 在  $\tau > t_1$  时,  $\mathbf{x}(t_1|t_1)$  与  $\mathbf{v}(\tau), \mathbf{w}(\tau)$  不相关, 故

$$\begin{aligned} E[\mathbf{g}(\tau)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_1|t_1)] &= H(\tau)\Psi(\tau, t_1)P(t_1|t_1) \\ E[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2)\mathbf{g}^T(\tau)] &= P(t_1|t_1)\Psi^T(\tau, t_1)H^T(\tau) \end{aligned}$$

则(5.19)式写为

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathbf{x}}(t_1|t_2)\tilde{\mathbf{x}}^T(t_1|t_2)] &= P(t_1|t_2) = P(t_1|t_1) - P(t_1|t_1) \\ &\quad \times \left[\int_{t_1}^{t_2} \Psi^T(\tau, t_1) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t_1) d\tau\right] P(t_1|t_1) \end{aligned} \quad (5.20)$$

由上式可清楚地看到通过未来观测数据的平滑将降低滤波估计  $\mathbf{x}(t_1|t_2)$  的误差方差的数值。下面分别讨论平滑的三种类型。

## 5.2 固定区间平滑估计

令  $t_2 = T$  (常值),  $t_1 = t$ , (5.17) 式将变为

$$\mathbf{x}(t|T) = \mathbf{x}(t|t) + P(t|t)\lambda(t, T) \quad (5.21)$$

式中,  $\lambda(t, T) = \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau$ 。将  $\lambda(t, T)$  对  $t$  求偏导得

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t, T) = -\Psi^T(t, t) H^T(t) R^{-1}(t) \mathbf{g}(t) + \int_t^T \frac{\partial}{\partial t} \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau \quad (5.22)$$

由于  $\frac{\partial}{\partial t} \Psi^T(\tau, t) = -[F(t) - K(t)H(t)]^T \Psi^T(\tau, t)$ , 代入(5.22)式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \lambda(t, T) = & -H^T(t)R^{-1}(t)g(t) - [F(t) - K(t)H(t)]^T \\ & \times \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) g(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.23)$$

积分项正好等于  $\lambda(t, T)$ , 因而得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda(t, T) = -H^T(t)R^{-1}(t)g(t) - [F(t) - K(t)H(t)]^T \lambda(t, T) \quad (5.24)$$

将(5.21)式对  $t$  求导, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t|T) = \dot{\mathbf{x}}(t|t) + \dot{P}(t|t)\lambda(t, T) + P(t|t) \frac{\partial}{\partial t} \lambda(t, T) \quad (5.25)$$

将

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t|t) = & F(t)\mathbf{x}(t|t) + K(t)[z(t) - H(t)\mathbf{x}(t|t)] \\ \dot{P}(t|t) = & F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t) \end{aligned}$$

和(5.24)式代入(5.25)式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t|T) = & F(t)\mathbf{x}(t|t) + K(t)[z(t) - H(t)\mathbf{x}(t|t)] + [F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) \\ & + G(t)Q(t)G^T(t) - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t)]\lambda(t, T) \\ & - P(t|t)\{H^T(t)R^{-1}(t)g(t) + [F(t) - K(t)H(t)]^T \lambda(t, T)\} \\ = & F(t)\mathbf{x}(t|T) + G(t)Q(t)G^T(t)\lambda(t, T) \end{aligned} \quad (5.26)$$

从(5.21)式可求得

$$\lambda(t, T) = P^{-1}(t|t)[\mathbf{x}(t|T) - \mathbf{x}(t|t)]$$

代入(5.26)式得

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t|T) = F(t)\mathbf{x}(t|T) + G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t)[\mathbf{x}(t|T) - \mathbf{x}(t|t)] \quad (5.27)$$

为了简化书写, 定义固定区间平滑增益矩阵为

$$B(t|T) = G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t) \quad (5.28)$$

(5.27)式将变为

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(t|T) = F(t)\mathbf{x}(t|T) + B(t|T)[\mathbf{x}(t|T) - \mathbf{x}(t|t)] \quad (5.29)$$

(5.29)式即为固定区间平滑算式, 它与滤波估计的算式非常相似。在平滑算式中, 以平滑估计量和滤波估计量之差代替了滤波算式中的实际观测量与期望观测量之差。

处理平滑问题的完整程序应包含两步: 第一步先用滤波算法从  $t_0$  到  $T$  向前求解, 求出每一时刻的滤波值  $\mathbf{x}(t|t)$  ( $t_0 \leq t \leq T$ ), 然后再从  $t=T$  开始向后对式(5.29)积分, 求得状态的平滑估计  $\mathbf{x}(t|T)$ 。下面再来推导固定区间平滑估计的误差及其方差的微分方程。令  $\tilde{\mathbf{x}}(t|T)$  表示平滑误差, 它应为

$$\tilde{\mathbf{x}}(t|T) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t|T) \quad (5.30)$$

于是

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t|T) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t|T) \quad (5.31)$$

根据线性连续系统的状态方程和平滑方程(5.29), (5.31)式可写为

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t|T) = F(t)\mathbf{x}(t) + G(t)\mathbf{w}(t) - \{F(t)\mathbf{x}(t|T) + B(t|T)[\mathbf{x}(t|T) - \mathbf{x}(t|t)]\}$$



上式简化后得

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t|T) = F(t)\hat{\mathbf{x}}(t|T) + B(t|T)[\hat{\mathbf{x}}(t|T) - \hat{\mathbf{x}}(t|t)] + G(t)\mathbf{w}(t) \quad (5.32)$$

(5.32)式与(5.29)式相类似,可以从终止条件 $\hat{\mathbf{x}}(T|T)$ 出发向后求解得到 $\hat{\mathbf{x}}(t|T)$ 。利用(5.20)式求平滑误差的方差,在(5.20)式中令 $t_1=t, t_2=T$ ,得

$$P(t|T) = P(t|t) - P(t|t) \left[ \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \right] P(t|t) \quad (5.33)$$

利用上式计算 $P(t|T)$ 时,必须计算 $\Psi(\tau, t)$ ,并要求取积分值,很不方便。为了便于计算,把 $P(t|T)$ 的表达式写为另一种形式。(5.33)式等号两边对 $t$ 求偏导数,得

$$\begin{aligned} \dot{P}(t|T) &= \dot{P}(t|t) - \dot{P}(t|t) \left[ \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \right] P(t|t) \\ &\quad - P(t|t) \left[ \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \right] - \dot{P}(t|t) - P(t|t) \\ &\quad \times \left\{ -H^T(t) R^{-1}(t) H(t) + \int_t^T \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Psi^T(\tau, t) \right] H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H^T(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) H(\tau) \left[ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\tau, t) \right] d\tau \right\} P(t|t) \end{aligned} \quad (5.34)$$

将黎卡提方程

$$\begin{aligned} \dot{P}(t|T) &= F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \\ &\quad - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t) \end{aligned}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi^T(\tau, t) = -[F(t) - K(t)H(t)]^T \Psi^T(\tau, t)$$

代入上式,得

$$\begin{aligned} \dot{P}(t|T) &= F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \\ &\quad - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t) \\ &\quad - [F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \\ &\quad - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t)] \\ &\quad \times \left[ \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \right] P(t|t) \\ &\quad - P(t|t) \left[ \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \right] [F(t)P(t|t) \\ &\quad + P(t|t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t)] \\ &\quad - P(t|t) \{ -H^T(t)R^{-1}(t)H(t) - [F(t) - K(t)H(t)]^T \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) \\ &\quad \times R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau - \left[ \int_t^T \Psi^T(\tau, t) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \right] \\ &\quad \times [F(t) - K(t)H(t)] \} P(t|t) \end{aligned}$$

经代数运算后得

$$\dot{P}(t|T) = [F(t) + B(t|T)]P(t|T)[F(t) + B(t|T)]^T - G(t)Q(t)G^T(t) \quad (5.35)$$

线性连续系统固定区间平滑可归纳如下:

(1) 线性连续系统最优固定区间平滑方程

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t|T) = F(t)\hat{\mathbf{x}}(t|T) + B(t|T)[\mathbf{x}(t|T) - \hat{\mathbf{x}}(t|t)]$$

初始条件为  $\hat{\mathbf{x}}(T|T)$ 。

(2) 固定区间平滑增益矩阵

$$B(t|T) = G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t)$$

(3) 固定区间平滑误差协方差的微分方程

$$\begin{aligned} \dot{P}(t|T) = & [F(t) + B(t|T)]P(t|T) + P(t|T)[F(t) + B(t|T)]^T \\ & - G(t)Q(t)G^T(t) \end{aligned}$$

初始条件为  $P(T|T)$ 。

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重知识产权！

### 5.3 固定点平滑估计

对于固定点平滑只需将需要平滑的某一时刻固定,即  $t_1=t^*$  ( $t^*$  代表固定时刻),而让观测时间增加,即  $t_2=t$  即可。在(5.17)式中,令  $t_1=t^*, t_2=t$ ,则有

$$\hat{\mathbf{x}}(t^*|t) = \hat{\mathbf{x}}(t^*|t^*) + P(t^*|t^*) \int_{t^*}^t \Psi^T(\tau, t^*) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau \quad (5.36)$$

将(5.36)式等号两边对  $t$  求导,得

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t^*|t) = P(t^*|t^*) \Psi^T(t, t^*) H^T(t) R^{-1}(t) \mathbf{g}(t) \quad (5.37)$$

式中  $P(t^*|t^*) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(t^*|t^*)[\Psi(t, t^*)\tilde{\mathbf{x}}(t^*|t^*)]^T\} = P(t^*|t^*)\Psi^T(t, t^*)$ , 称为传递估计误差协方差;  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{z}(t) - H(t)\hat{\mathbf{x}}(t|t)$ 。因此上式也可以写为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t^*|t) = P(t^*|t) H^T(t) R^{-1}(t) [\mathbf{z}(t) - H(t)\hat{\mathbf{x}}(t|t)] \quad (5.38)$$

初始条件为  $\hat{\mathbf{x}}(t^*|t^*)$ 。

我们希望将  $\dot{P}(t^*, t)$  表示为微分方程的解,这样就能避免计算  $\Psi(t, t^*)$ ,所以对  $P(t^*, t)$  求导,得

$$\dot{P}(t^*, t) = \frac{\partial}{\partial t} [P(t^*|t^*) \Psi^T(t, t^*)] = P(t^*|t^*) \Psi^T(t, t^*) [F(t) - K(t)H(t)]^T \quad (5.39)$$

对(5.39)式求解,即得  $P(t^*, t)$ , 将其代入(5.38)式并求解,即可得固定点最优平滑估计  $\hat{\mathbf{x}}(t^*|t)$ 。

关于固定点平滑误差的协方差,由于

$$\tilde{\mathbf{x}}(t^*|t) = \mathbf{x}(t^*) - \hat{\mathbf{x}}(t^*|t)$$

很容易得固定点平滑误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t^*|t) = & -P(t^*, t) H^T(t) R^{-1}(t) [\mathbf{z}(t) - H(t)\hat{\mathbf{x}}(t|t)] \\ = & -P(t^*, t) H^T(t) R^{-1}(t) H(t) \tilde{\mathbf{x}}(t|t) - P(t^*, t) H^T(t) R^{-1}(t) \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (5.40)$$

固定点平滑误差的协方差可以利用(6.20)式求得。在(6.20)式中,令  $t_1=t^*, t_2=t$  得

$$\begin{aligned} P(t^*|t) = & P(t^*|t^*) - P(t^*|t^*) \\ & \times \left[ \int_{t^*}^t \Psi^T(\tau, t^*) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Psi(\tau, t^*) d\tau \right] P(t^*|t^*) \end{aligned} \quad (5.41)$$

将上式对时间  $t$  求导,得

$$\dot{P}(t^*|t) = -P(t^*|t^*) \Psi^T(t, t^*) H^T(t) R^{-1}(t) H(t) \Psi(t, t^*) P(t^*|t^*) \quad (5.42)$$

初始条件为  $P(t^*|t^*)$ 。(5.42)式等号右边为非正函数,因此  $P(t^*|t)$  必定单调减小。

固定点平滑算法归纳如下:

(1)线性连续系统最优固定点平滑方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t^*|t) = P(t^*|t)H^T(t)R^{-1}(t)[\mathbf{z}(t) - H(t)\mathbf{x}(t|t)]$$

初始条件为  $\mathbf{x}(t^*|t^*)$ 。

(2)传递估计误差协方差算法

$$\dot{P}(t^*|t) = P(t^*|t)\Psi^T(t, t^*)[F(t) - K(t)H(t)]$$

(3)固定点平滑误差协方差方程

$$\dot{P}(t^*|t) = -P(t^*|t^*)\Psi^T(t, t^*)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)\Psi(t, t^*)P(t^*|t^*)$$

初始条件为  $P(t^*|t^*)$ 。

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

## 5.4 固定滞后平滑

仍用(5.17)式来推导固定滞后平滑算法。在(5.17)式中令  $t_1=t, t_2=t+T$ , 得

$$\mathbf{x}(t|t+T) = \mathbf{x}(t|t) + P(t|t)\lambda(t, t+T) \quad (5.43)$$

式中

$$\dot{\lambda}(t, t+T) = \int_t^{t+T} \Psi^T(\tau, t)H^T(\tau)R^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau \quad (5.44)$$

将(5.44)式等号两边对  $t$  求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t, t+T) &= \Psi^T(t+T, t)H^T(t+T)R^{-1}(t+T)\mathbf{g}(t+T) \\ &\quad - H^T(t)R^{-1}(t)\mathbf{g}(t) - [F(t) - K(t)H(t)]^T\lambda(t, t+T) \end{aligned} \quad (5.45)$$

将(5.43)式等号两边对  $t$  求导, 得

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t+T) = \dot{\mathbf{x}}(t|t) + \dot{P}(t|t)\lambda(t, t+T) + P(t|t)\dot{\lambda}(t, t+T)$$

然后以  $\dot{\mathbf{x}}(t|t)$ ,  $\dot{P}(t|t)$  和  $\dot{\lambda}(t, t+T)$  的表达式代入, 经代数运算后得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t|t+T) &= F(t)\mathbf{x}(t|t+T) + G(t)Q(t)G^T(t)\lambda(t, t+T) \\ &\quad + P(t|t)\Psi^T(t+T, t)R^{-1}(t+T)\mathbf{g}(t+T) \end{aligned} \quad (5.46)$$

由(5.43)式可求得

$$\lambda(t, t+T) = P^{-1}(t|t)[\mathbf{x}(t|t+T) - \mathbf{x}(t|t)]$$

代入(5.46)式后, 得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t|t+T) &= F(t)\mathbf{x}(t|t+T) + G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t)[\mathbf{x}(t|t+T) - \mathbf{x}(t|t)] \\ &\quad + P(t|t)\Psi^T(t+T, t)H^T(t+T)R^{-1}(t+T)[\mathbf{z}(t+T) \\ &\quad - H(t+T)\mathbf{x}(t+T|t+T)] \end{aligned} \quad (5.47)$$

此方程的初始条件为  $\mathbf{x}(t_0|t_0+T)$ , 是通过从  $t_0$  到  $t_0+T$  处理固定点平滑算法得到的。方程式(5.47)中包含有  $\Psi(t+T, t)$  项, 将  $\Psi(t+T, t)$  对  $t$  求导数得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi(t+T, t) &= \left[ \frac{\partial}{\partial \tau}\Psi(\tau, t) \right] \Big|_{\tau=t+T} + \left[ \frac{\partial}{\partial \tau}\Psi(\tau, t) \right] \Big|_{\tau=t+T} \\ &= [F(t+T) - K(t+T)H(t+T)]\Psi(t+T, t) \\ &\quad - \Psi(t+T, t)[F(t) - K(t)H(t)] \end{aligned} \quad (5.48)$$

此方程式的初始条件为  $\Psi(t_0+T, t_0)$ , 解方程式可得  $\Psi(t+T, t)$ 。下面再来推导固定滞后

平滑误差协方差的算法。固定滞后平滑估计的误差为

$$\tilde{\mathbf{x}}(t|t+T) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t|t+T)$$

对上式求导数得

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t|t+T) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t|t+T)$$

将系统的状态方程  $\dot{\mathbf{x}} = F(t)\mathbf{x}(t) + G(t)\mathbf{w}(t)$  和 (5.47) 式代入后得

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t|t+T) &= F(t)\tilde{\mathbf{x}}(t|t+T) + G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t)[\tilde{\mathbf{x}}(t|t+T) - \tilde{\mathbf{x}}(t|t)] \\ &\quad - P(t|t)\Psi^T(t+T, t)H^T(t+T)R^{-1}(t+T)H(t+T)\tilde{\mathbf{x}}(t+T|t+T) \\ &\quad - P(t|t)\Psi^T(t+T, t)H^T(t+T)\mathbf{v}(t+T) + G(t)\mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (5.49)$$

初始条件  $\tilde{\mathbf{x}}(t_0|t_0+T)$  可从固定点平滑误差方程式 (5.40) 求得。固定滞后平滑误差协方差的微分方程仍从 (5.20) 式经过代数运算后得到:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t|t+T) &= [F(t)G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t)]P(t|t+T) + P(t|t+T) \\ &\quad \times [F(t) + G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t)]^T - P(t|t)\Psi^T(t+T, t)H^T(t+T) \\ &\quad \times R^{-1}(t+T)H(t+T)\Psi(t+T, t)P(t|t) - G(t)Q(t)G^T(t) \end{aligned} \quad (5.50)$$

初始条件为  $P(t_0|t_0+T)$  可由固定点平滑算法得到。

综上所述, 可将固定滞后平滑估计的算式归纳如下:

(1) 线性连续系统固定滞后平滑估计方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t|t+T) &= F(t)\mathbf{x}(t|t+T) + G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t+T)[\mathbf{x}(t|t+T) - \mathbf{x}(t|t)] \\ &\quad + P(t|t)\Psi^T(t+T, t)H^T(t+T)R^{-1}(t+T)[\mathbf{z}(t+T) \\ &\quad - H(t+T)\mathbf{x}(t+T|t+T)] \end{aligned}$$

初始条件  $\mathbf{x}(t_0|t_0+T)$  可由固定点平滑解出。

(2) 误差状态转移矩阵算法

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t+T, t) &= [F(t+T) - K(t+T)H(t+T)]\Psi(t+T, t) \\ &\quad - \Psi(t+T, t)[F(t) - K(t)H(t)] \end{aligned}$$

(3) 线性连续系统固定滞后平滑误差协方差算法

$$\begin{aligned} \dot{P}(t|t+T) &= [F(t) + G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t)]P(t|t+T) + P(t|t+T) \\ &\quad \times [F(t) + G(t)Q(t)G^T(t)P^{-1}(t|t)]^T \\ &\quad - P(t|t)\Psi^T(t+T, t)H^T(t+T)R^{-1}(t+T) \\ &\quad \times H(t+T)\Psi(t+T, t)P(t|t) - G(t)Q(t)G^T(t) \end{aligned}$$

初始条件  $P(t_0|t_0+T)$  可由固定点平滑解出。

## 第六章 线性离散系统的平方根滤波方法

第二章给出的卡尔曼滤波方程中的协方差矩阵  $P$  必须是正定的, 否则在迭代计算时会发散。由于计算机字长受限制, 而测量更新的协方差计算中有一个是矩阵与一个半正定矩阵的相减运算, 它在小型机和微型机上实现时很容易使协方差阵  $P$  失去正定性, 从而造成滤波发散。本章将用不同的平方根类型算法解决卡尔曼滤波的数值稳定性问题。

### 6.1 计算发散和 Joseph 方法

设离散时间系统的状态方程和观测方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma(k-1)\mathbf{w}(k-1) \\ \mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (6.1)$$

式中,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ ;  $\Phi(k, k-1)$  为状态转移矩阵;  $\Gamma(k-1)$  为过程噪声的系数矩阵;  $H(k)$  为观测矩阵;  $\mathbf{v}(k)$ ,  $\mathbf{w}(k)$  为白噪声序列, 其统计特性如下:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}(k)] &= 0, & E[\mathbf{v}(k)] &= 0 \\ E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)] &= Q(k)\delta_{kj}, & E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(j)] &= R(k)\delta_{kj} \\ E[\mathbf{v}(k)\mathbf{w}^T(j)] &= 0, & E[\mathbf{w}(k)\mathbf{x}_0^T] &= 0 \\ E[\mathbf{v}(k)\mathbf{x}_0^T] &= 0 \end{aligned}$$

离散卡尔曼滤波方程的时间更新为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k|k-1) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) \\ P(k|k-1) = \Phi(k, k-1)P(k-1|k-1)\Phi^T(k, k-1) \\ \quad + \Gamma(k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k-1) \end{cases} \quad (6.2)$$

测量更新为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}(k|k-1) + K(k)[\mathbf{z}(k) - H(k)\mathbf{x}(k|k-1)] \\ K(k) = P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \\ P(k|k) = P(k|k-1) - P(k|k-1)H^T(k)[R(k) \\ \quad + H(k)P(k|k-1)H^T(k)]^{-1}H(k)P(k|k-1) \end{cases} \quad (6.3)$$

显然, (6.3) 式的  $P(k|k)$  计算存在着矩阵相减运算, 可能会导致  $P$  阵失去正定性。

例如

$$P(k|k-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 0], \quad R = r = \epsilon^2$$

当  $\epsilon \ll 1$  时, 考虑计算机字长限制时  $\epsilon^2 = 0$ 。

计算  $P(k|k)$  可知

$$P(k|k) = \begin{bmatrix} \epsilon^2/(1 + \epsilon^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K(k) = P(k|k)H^T(k)R^{-1}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\epsilon^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

而

$$K(k) = P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此,出现了数值不稳定的现象。

Joseph 曾对卡尔曼滤波的方差阵计算作了改进,给出了如下的计算式:

$$P(k|k) = [I - K(k)H(k)]P(k|k-1)[I - K(k)H(k)]^T + K(k)P(k)K^T(k) \quad (6.4)$$

这一公式不含矩阵相减运算,增强了数值稳定性,但数值稳定性仍不能满足实际要求。

例如,当取  $P(k|k-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $H = [1 \quad 1]$ ,  $R = \epsilon^2$  时,由(6.4)式可得

$$P(k|k) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

而

$$K(k) = P(k|k)H^T(k)R^{-1}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

数值稳定性也不能充分保证。

## 6.2 协方差平方根滤波方法

对于任何矩阵  $S$ , 可得  $SS^T$  是对称非负定的。因此,如果分解  $P(k|k) = S(k|k) \times S^T(k|k)$ ,  $P(k|k-1) = S(k|k-1)S^T(k|k-1)$ , 并在卡尔曼滤波基本方程中,以  $S(k|k)$  的递推关系式代替  $P(k|k)$  的递推关系式,则可以保证对于任何时刻  $k$ ,  $P(k|k) = S(k|k) \times S^T(k|k)$  至少具有对称非负定性。这样就可以限制由于计算误差引起发散的可能性,这就是采用平方根滤波克服发散的基本思想。

由于平方根滤波的关键在于分解  $P(k|k)$  为  $S(k|k)S^T(k|k)$ , 因此先介绍一下矩阵的平方根分解法。

### 6.2.1 矩阵的下三角分解法

从线性代数我们可知,任何一个对称的非负定性矩阵  $P$  都可以分解成

$$P = SS^T$$

其中  $S$  是一个下三角阵,称为  $P$  的平方根阵。如果  $P$  是正定阵,则  $S$  还具有非奇异性。

平方根  $S$  阵可以通过比较元素来确定:

设矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix}$$



是一个已知的对称非负定矩阵, 设  $P$  阵已分解为

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \cdots & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & \cdots & S_{n1} \\ 0 & S_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix}$$

通过比较两边的对应元素, 可以确定出

$$\left. \begin{aligned} S_{ii} &= \sqrt{P_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} S_{ij}^2} \quad (i < j) \\ S_{ij} &= \begin{cases} 0 \\ (P_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} S_{ik}S_{jk}) \end{cases} \quad (i > j) \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

例 设

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$

求  $P$  的平方根阵  $S$ 。

解 根据(6.5)式, 可以算出

$$\begin{aligned} S_{11} &= 1, \quad S_{21} = \frac{1}{S_{11}} P_{21} = 2, \quad S_{31} = \frac{1}{S_{11}} P_{31} = 3 \\ S_{22} &= \sqrt{P_{22} - S_{21}^2} = 2, \quad S_{32} = \frac{1}{S_{22}} (P_{32} - S_{31}S_{21}) = -2 \\ S_{33} &= \sqrt{P_{33} - S_{31}^2 - S_{32}^2} = 1 \end{aligned}$$

于是得  $P$  的平方根阵

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

采取矩阵的平方根分解是为了确保滤波方差阵的正定性, 克服由于计算误差而引起的发散现象。另外也可以减少计算误差, 例如, 设数值  $a$  取值范围为  $10^{-6} \sim 10^6$ ,  $\sqrt{a}$  的取值范围就是  $10^{-3} \sim 10^3$ , 所以用  $\sqrt{a}$  运算也可以减小计算误差。

### 6.2.2 观测值为标量的平方根滤波

设控制系统没有噪声, 即

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) \quad (6.6)$$

观测值为

$$z(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + v(k) \quad (6.7)$$

其中,  $v(k)$  为白噪声序列,  $E[v(k)] = 0$ ,  $E[v(k)v^T(j)] = R(k)\delta_{kj}$ ;  $v(k)$ ,  $R(k)$ ,  $z(k)$  都是标量。

卡尔曼滤波基本方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k-1) &= \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) \\ &+ K(k)[z(k) - H(k)\Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1)] \end{aligned}$$

超星阅读器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

$$\begin{aligned}
 K(k) &= P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)] \\
 P(k|k-1) &= \Phi(k, k-1)P(k-1|k-1)\Phi^T(k, k-1) \\
 P(k|k) &= [I - K(k)H(k)P(k|k-1)]P(k|k-1)[I - K(k)H(k)]^T \\
 &\quad + K(k)R(k)K^T(k) = [I - K(k)H(k)]P(k|k-1)
 \end{aligned}$$

初始值为  $x(0|0) = E[x(0)]$ ,  $P(0|0) = \text{Var}x(0) = P_0$ 。

这里  $P(k|k-1)$ ,  $P(k|k)$  根据定义至少是非负定的, 但在计算舍入误差的影响下, 很难保证这一点。为此我们把  $P(k|k)$  的递推式改为  $P(k|k)$  的平方根递推式, 从而建立平方根滤波方程。

### 1. $P(k|k)$ 的平方根递推方程

根据协方差定义,  $P(k-1|k-1)$  具有对称非负定性, 可设

$$P(k-1|k-1) = S(k-1|k-1)S^T(k-1|k-1)$$

于是

$$\begin{aligned}
 P(k-1|k-1) &= \Phi(k, k-1)P(k-1|k-1)\Phi^T(k, k-1) \\
 P(k|k-1) &= \Phi(k, k-1)S(k-1|k-1)S^T(k-1|k-1)\Phi^T(k, k-1) \\
 &= S(k|k-1)S^T(k|k-1)
 \end{aligned}$$

式中

$$S(k|k-1) = \Phi(k, k-1)S(k-1|k-1) \quad (6.8)$$

由于

$$\begin{aligned}
 P(k|k) &= [I - K(k)H(k)]P(k|k-1) \\
 &= P(k|k-1) - P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1) \\
 &\quad \times H^T(k) + R(k)]^{-1}H(k)P(k|k-1)
 \end{aligned}$$

将  $P(k|k-1) = S(k|k-1)S^T(k|k-1)$  代入上式得

$$\begin{aligned}
 P(k|k) &= S(k|k-1)\{I - S^T(k|k-1)H^T(k)[H(k) \\
 &\quad \times S(k|k-1)S^T(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \\
 &\quad \times H(k)S(k|k-1)\}S^T(k|k-1)
 \end{aligned}$$

再记

$$F_k = S^T(k|k-1)H^T(k) \quad (6.9)$$

上式又可写成

$$\begin{aligned}
 P(k|k) &= S(k|k-1)\{I - F_k[F_k^T F_k + R_k]^{-1}F_k^T\}S^T(k|k-1) \\
 &= S(k|k-1)[I - a_k F_k F_k^T]S^T(k|k-1)
 \end{aligned}$$

式中

$$a_k = [F_k^T F_k + R(k)]^{-1} \quad (6.10)$$

是一个标量, 这是因为观测值是标量之故。 $a_k$  可与  $F_k$  互换位置。

将  $P(k|k)$  进行分解的关键, 在于分解

$$\begin{aligned}
 I - a_k F_k F_k^T &= [I - a_k r_k F_k F_k^T][I - a_k r_k F_k F_k^T]^T \\
 &= I - 2a_k r_k F_k F_k^T + a_k^2 r_k^2 F_k F_k^T F_k F_k^T \\
 &= I - a_k F_k [2r_k - a_k r_k^2 F_k^T F_k] F_k^T
 \end{aligned}$$

比较等式两边可以看出,应选取  $r_k$  使

$$2r_k - a_k r_k^2 F_k^T F_k = 1$$

注意到

$$\begin{aligned} a_k &= [F_k^T F_k + R(k)]^{-1} \\ F_k^T F_k &= a_k^{-1} - R(k) \end{aligned}$$

上式又可写成

$$(1 - a_k R(k)) r_k^2 - 2r_k + 1 = 0$$

解之可得

$$r_k = \frac{1 \pm \sqrt{a_k R(k)}}{(1 - \sqrt{a_k R(k)})(1 + \sqrt{a_k R(k)})} = \frac{1 \pm \sqrt{a_k R(k)}}{1 - a_k R(k)} \quad (6.11)$$

于是可得

$$\begin{aligned} P(k|k) &= S(k|k-1)(I - a_k r_k F_k F_k^T)(I - a_k r_k F_k F_k^T)^T S^T(k|k-1) \\ &= S(k|k) S^T(k|k) \end{aligned}$$

式中

$$S(k|k) = S(k|k-1)(I - a_k r_k F_k F_k^T) \quad (6.12)$$

以上所得出的方程(6.8)~(6.11)构成了一组  $P(k|k)$  的平方根递推方程。

## 2. 以平方根 $S(k|k-1)$ 表示的 $K(k)$

把(6.8)式代入最优增益矩阵方程,并注意到  $P(k|k-1) = S(k|k-1)S^T(k|k-1)$  及  $F_k = S^T(k|k-1)H^T(k)$ ,得

$$[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} = [F_k^T F_k + R(k)]^{-1} = a_k$$

于是  $K(k)$  可通过  $S(k|k-1)$  写成

$$K(k) = a_k S(k|k-1)H^T(k) = a_k S(k|k-1)F_k \quad (6.13)$$

## 3. 平方根滤波方程

综合以上各式,可得一整套平方根滤波方程:

$$(1) \quad \mathbf{x}(k|k) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) + K(k)[\mathbf{z}(k) - H(k)\Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1)]$$

$$E[\mathbf{x}(0|0)] = E[\mathbf{x}(0)] = 0$$

$$(2) \quad K(k) = a_k S(k|k-1)F_k$$

其中

$$F_k = S^T(k|k-1)H^T(k)$$

$$a_k = [F_k^T F_k + R(k)]^{-1}$$

$$(3) \quad S(k|k-1) = \Phi(k, k-1)S(k-1|k-1)$$

$$S(0|0)S^T(0|0) = P(0|0) = \text{Var}\{\mathbf{x}(0)\}$$

$$(4) \quad S(k|k) = S(k|k-1)[I - a_k r_k F_k F_k^T]$$

其中

$$r_k = \frac{1 \pm \sqrt{a_k R(k)}}{1 + a_k R(k)}$$

根据以上平方根滤波方程进行滤波,所得到的每一步的  $P(k|k)$  及  $P(k|k-1)$  至少是非负定的,因为  $P(0|0) \geq 0$  时,  $P(k|k)$  及  $P(k|k-1)$  总是对称非负定的。

当观测量为向量时,可按 6.4 节给出的序列平方根滤波方法计算。

超星阅读器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

## 6.3 信息平方根滤波方法

### 6.3.1 信息滤波

我们通过矩阵求逆公式可以把以传播误差协方差阵  $P(k|k-1)$  和  $P(k|k)$  的卡尔曼滤波方程,转换为以传播信息阵  $P^{-1}(k|k-1)$  和  $P^{-1}(k|k)$  为特点的信息滤波方程。

通过矩阵求逆公式,可由 (6.3) 式得到

$$P^{-1}(k|k) = P^{-1}(k|k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \quad (6.14)$$

把方程 (6.2) 式中  $P(k|k-1)$  化为

$$\begin{aligned} P^{-1}(k|k-1) &= [M^{-1}(k-1) + \Gamma(k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k-1)]^{-1} \\ &= \{I - M(k-1)\Gamma(k-1)[\Gamma^T(k-1)M(k-1)\Gamma(k-1) \\ &\quad + Q^{-1}(k-1)]^{-1}\Gamma^T(k-1)\}M(k-1) \end{aligned}$$

式中

$$M(k-1) = \Phi^{-T}(k, k-1)P^{-1}(k-1|k-1)\Phi^{-1}(k, k-1) \quad (6.15)$$

或

$$P^{-1}(k|k-1) = [I - N(k-1)\Gamma^T(k-1)]M(k-1) \quad (6.16)$$

其中

$$\begin{aligned} N(k-1) &= M(k-1)\Gamma(k-1)[\Gamma^T(k-1)M(k-1)\Gamma(k-1) \\ &\quad + Q^{-1}(k-1)]^{-1} \end{aligned} \quad (6.17)$$

信息滤波算法不是直接寻求  $X(k|k)$  和  $X(k|k-1)$  的递推公式,而是通过引进中间向量

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}(k|k-1) &= P^{-1}(k|k-1)\mathbf{x}(k|k-1) \\ \mathbf{a}(k|k) &= P^{-1}(k|k)\mathbf{x}(k|k) \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

并将 (6.16) 式中  $P^{-1}(k|k-1)$  及  $\mathbf{x}(k+1|k) = \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k)$  代入 (6.18) 式来得到:

$$\mathbf{a}(k+1|k) = [I - N(k)\Gamma^T(k)]M(k)\Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k) \quad (6.19)$$

从 (6.15) 式知

$$M(k)\Phi(k+1, k) = \Phi^{-T}(k+1, k)\mathbf{a}(k|k) \quad (6.20)$$

将 (6.19) 式代入 (6.20) 式,并注意 (6.18) 式,得

$$\mathbf{a}(k+1|k) = [I - N(k)\Gamma^T(k)]\Phi^{-T}(k+1, k)\mathbf{a}(k|k) \quad (6.21)$$

这是时间更新公式。经过类似地变换和代替,可从滤波公式 (6.3) 中的

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k) &= \mathbf{x}(k|k-1) + P(k|k-1)H(k)[H^T(k)P(k|k-1)H^T(k) \\ &\quad + R(k)]^{-1}[\mathbf{z}(k) - H(k)\mathbf{x}(k|k-1)] \end{aligned}$$

得  $\mathbf{a}(k|k)$  的测量更新公式

$$\mathbf{a}(k|k) = \mathbf{a}(k|k-1) + H(k)R^{-1}(k)\mathbf{z}(k) \quad (6.22)$$

总结以上结果,得到以下信息滤波算法:

时间更新

$$\left. \begin{aligned} P^{-1}(k+1|k) &= [I - N(k)\Gamma^T(k)]M(k) \\ M(k) &= \Phi^{-T}(k+1, k)P^{-1}(k)\Phi^{-1}(k+1, k) \\ N(k) &= M(k)\Gamma(k)[\Gamma^T(k)M(k)\Gamma(k) + Q^{-1}(k)]^{-1} \\ \mathbf{a}(k+1|k) &= [I - N(k)\Gamma^T(k)]\Phi^{-T}(k+1, k)\mathbf{a}(k|k) \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

测量更新

$$\left. \begin{aligned} P^{-1}(k|k) &= P^{-1}(k|k-1) + H(k)R^{-1}(k)H^T(k) \\ \mathbf{a}(k|k) &= \mathbf{a}(k|k-1) + H(k)R^{-1}(k)\mathbf{z}(k) \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}(k|k-1) &= P^{-1}(k|k-1)\mathbf{x}(k|k-1) \\ \mathbf{a}(k|k) &= P^{-1}(k|k)\mathbf{x}(k|k) \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

信息滤波算法是在卡尔曼滤波算法基础上推导出来的,两者在代数上等价。信息滤波的优点为:①在缺乏初值的验前知识,信息量为零,即当 $P^{-1}(0|0)=0$ 时, $P(0|0)$ 为无限大,协方差滤波起动困难,信息滤波则容易处理;②当输出量维数比输入量维数大时,计算量将减小,这是因为在协方差滤波算法中,要计算逆阵 $[H(k)P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1}$ ,而信息滤波算法中,则计算逆阵 $[\Gamma^T(k)M(k)\Gamma(k) + Q^{-1}(k)]^{-1}$ ;③信息滤波算法处理测量更新时较有效。

但在信息滤波算法中,由于要计算矩阵差 $[I - N(k)\Gamma^T(k)]$ ,可能导致 $P^{-1}(k|k-1)$ 失去对称性和正定性而引起滤波发散。仍以前例说明,当

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 1], \quad R = r = \epsilon^2, \quad \epsilon \ll 1$$

这一问题的精确解为

$$P(k|k) = \frac{1}{2 + \epsilon^2} \begin{bmatrix} 1 + \epsilon^2 & -1 \\ -1 & 1 + \epsilon^2 \end{bmatrix}$$

普通卡尔曼滤波

$$P(k|k) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

信息滤波

$$P^{-1}(k|k) = \frac{1}{\epsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可见卡尔曼滤波和信息滤波的滤波误差协方差阵都变为了奇异阵,使滤波增益阵 $K(k)$ 为零。为了解决这一问题,给出了信息平方根滤波。

### 6.3.2 条件极值的求法

信息平方根滤波问题采用下面方法解决:①把最优估计问题化为条件极值问题;②采用动态规划法,逐步寻优。

设离散时间系统差分方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), k] + \Gamma(k)\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{h}[\mathbf{x}(k), k] + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

式中  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{w} \in \mathbb{R}^r; \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m; \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m; \mathbf{f}, \mathbf{h}$  分别为  $n$  和  $m$  维向量函数;  $\mathbf{w}(k) \sim N[0, Q(k)]$ ,  $\mathbf{v} \sim N[0, R(k)]$ , 且  $F\{\mathbf{w}(j)\mathbf{v}^T(k)\} = 0$ .

根据以上假设, 可知系统状态  $\mathbf{x}(k)$  为高斯-马尔可夫序列, 它的条件概率分布密度为

$$p_{\mathbf{x}(k)|\mathbf{z}(k)}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = C(\mathbf{z}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}(0) - M\|_{P^{-1}(0|0)}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \|\mathbf{z}(i) - \mathbf{h}[\mathbf{x}(i), i]\|_{R^{-1}(i)}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{x}(i+1) - \mathbf{f}[\mathbf{x}(i), i]\|_{F(i)Q(i)F^T(i)}^2 \right\} \quad (6.27)$$

(6.27) 式等价于求序列  $\{\mathbf{x}(0), \dots, \mathbf{x}(k)\}$  使性能函数

$$J_k = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(0) - M\|_{P^{-1}(0|0)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \|\mathbf{z}(i) - \mathbf{h}(\mathbf{x}(i), i)\|_{R^{-1}(i)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{x}(i+1) - \mathbf{f}[\mathbf{x}(i), i]\|_{F(i)Q(i)F^T(i)}^2 \quad (6.28)$$

为最小, 或者等价于选序列  $\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k\}$  和  $\{\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_{k-1}\}$  使

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_0 - M\|_{P^{-1}(0|0)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \|\mathbf{z}(i) - \mathbf{h}[\mathbf{x}(i), i]\|_{R^{-1}(i)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{w}_i\|_{Q^{-1}(i)}^2 \quad (6.29)$$

在约束条件

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(i), i] + \Gamma(i)\mathbf{w}(i) \quad (6.30)$$

下为极小, 这是求条件极值的问题. 引入拉格朗日向量乘子  $\lambda$  可把上述条件约束求极值问题化为一般求极值问题, 即令下式为极小:

$$I(k, k) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_0 - M\|_{P^{-1}(0|0)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \|\mathbf{z}(i) - \mathbf{h}[\mathbf{x}(i), i]\|_{R^{-1}(i)}^2 + \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(i)\|_{Q^{-1}(i)}^2 + \lambda^T(i) [\mathbf{x}(i+1) - \mathbf{f}[\mathbf{x}(i), i] - \Gamma(i)\mathbf{w}(i)] \right\} \quad (6.31)$$

式中,  $I(k, k)$  代表根据观察向量  $\mathbf{z}_k^T$  对  $k$  时刻状态进行估计, 这时所求的解是滤波估计, 如果根据观察向量  $\mathbf{z}_p^T$  对  $p > k$  时刻状态进行估计, 则所求的解是平滑估计, 这时 (6.31) 式应改为

$$I(k, p) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_0 - M\|_{P^{-1}(0|0)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^k \|\mathbf{z}(i) - \mathbf{h}[\mathbf{x}(i), i]\|_{R^{-1}(i)}^2 + \sum_{i=k}^{k+p-1} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(i)\|_{Q^{-1}(i)}^2 + \lambda^T(i) [\mathbf{x}(i+1) - \mathbf{f}[\mathbf{x}(i), i] - \Gamma(i)\mathbf{w}(i)] \right\} \quad (6.32)$$

比较 (6.31) 和 (6.32) 两式, 知

$$I(k, p) = I(k, k) + \sum_{i=k}^{k+p-1} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(i)\|_{Q^{-1}(i)}^2 + \lambda^T(i) [\mathbf{x}(i+1) - \mathbf{f}[\mathbf{x}(i), i] - \Gamma(i)\mathbf{w}(i)] \right\} \quad (6.33)$$

现用动态规划法, 求解这个由估计转化的极值问题, 设从方程 (6.30) 解出



$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{f}^{-1}[\mathbf{x}(k+1) - \Gamma(k)\mathbf{w}(k), k] \quad (6.34)$$

假设  $\mathbf{f}^{-1}$  存在, 定义损失函数

$$\begin{aligned} S_0(\mathbf{x}_0) &= \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{M}\|_{\mathbf{P}^{-1}(0|0)}^2 + \|\mathbf{z}_0 - \mathbf{h}(\mathbf{x}(0,0))\|_{\mathbf{R}^{-1}(0)}^2 \\ S_k(\mathbf{x}(k)) &= \min_{\mathbf{w}(0), \dots, \mathbf{w}(k-1)} \left\{ \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{M}\|_{\mathbf{P}^{-1}(0|0)}^2 + \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{z}(i) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{h}[\mathbf{x}(i), i]\|_{\mathbf{R}^{-1}(i)}^2 + \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathbf{w}^2(i)\|_{\mathbf{Q}^{-1}(i)} \right\}; \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.35)$$

(6.35)式可写为

$$\begin{aligned} S_k(\mathbf{x}(k)) &= \min_{\mathbf{w}(k-1)} \{ S(k-1)[\mathbf{f}^{-1}[\mathbf{x}(k) - \Gamma(k-1)\mathbf{w}(k-1), k-1]] \\ &\quad + \|\mathbf{w}(k-1)\|_{\mathbf{Q}^{-1}(k-1)}^2 + \|\mathbf{z}(k) - \mathbf{h}[\mathbf{x}(k|k)]\|_{\mathbf{R}^{-1}(k)}^2 \} \end{aligned} \quad (6.36)$$

这样, 一步一步递推下去, 即可求出所需结果。

### 6.3.3 信息平方根滤波

设离散时间系统方程为

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma(k-1)\mathbf{w}(k-1) \quad (6.37)$$

$$\mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (6.38)$$

各变量维数及随机变量的统计特性如第二章所述, 按 Cholesky 分解法, 得

$$\left. \begin{aligned} P(k|k-1) &= S(k|k-1)S^T(k|k-1) \\ P(k|k) &= S(k|k)S^T(k|k) \\ Q(k) &= U(k)U^T(k) \\ R(k) &= N(k)N^T(k) \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

如已求得

$$\mathbf{b}(k|k-1) = S^{-1}(k|k-1)\mathbf{x}(k|k-1) \quad (6.40)$$

则测量更新的性能函数为

$$\begin{aligned} J(k|k) &= \|\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k-1)\|_{\mathbf{P}^{-1}(k|k-1)}^2 + \|\mathbf{z}(k) - H(k)\mathbf{x}(k)\|_{\mathbf{R}^{-1}(k)}^2 \\ &= \|S^{-1}(k|k-1)[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k-1)]\|^2 \\ &\quad + \|N^{-1}(k)[H(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}(k)]\|^2 \end{aligned} \quad (6.41)$$

也可写为

$$J(k|k) = \left\| \begin{bmatrix} S^{-1}(k|k-1) \\ N^{-1}(k)H(k) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) - \begin{bmatrix} \mathbf{b}(k|k-1) \\ N(k)\mathbf{z}(k) \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (6.42)$$

按 Householder 变换构造正交阵  $T$ , 使

$$T \begin{bmatrix} S^{-1}(k|k-1) \\ N^{-1}(k)H(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{-1}(k|k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} \mathbf{b}(k|k-1) \\ N(k)\mathbf{z}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}(k|k) \\ \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

将变换结果代入(6.42)式中, 得

$$J(k|k) = \|S^{-1}(k|k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{b}(k|k)\|^2 + \|\mathbf{e}(k)\|^2 \quad (6.44)$$

式中  $\mathbf{e}(k)$  是测量更新的残差, 欲使  $J(k|k)$  为最小, 应有

$$\mathbf{b}(k|k) = S^{-1}(k|k)\mathbf{x}(k|k) \quad (6.45)$$

这样, 就求得了滤波的测量更新算法。

如已知  $\mathbf{b}(k|k) = S^{-1}(k|k)\mathbf{x}(k|k)$ , 则时间更新性能函数为

$$\begin{aligned} J(k+1, k) &= J(k, k) + \|\mathbf{w}(k)\|_{\Sigma^{-1}(k)}^2 \\ &= J(k, k) + \|U^{-1}(k)\mathbf{w}(k)\|^2 \\ &= \|S^{-1}(k|k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{b}(k|k)\|^2 \\ &\quad + \|\mathbf{e}(k)\|^2 + \|U^{-1}(k)\mathbf{w}(k)\|^2 \end{aligned} \quad (6.46)$$

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

从系统方程(6.1)得

$$\mathbf{x}(k) = \Phi^{-1}(k+1, k)[\mathbf{x}(k+1) - \Gamma(k)\mathbf{w}(k)]$$

代入(6.46)式,并改写为

$$\begin{aligned} J(k+1, k) &= \left\| \begin{bmatrix} U^{-1}(k) & 0 \\ S^{-1}(k|k) & S^{-1}(k|k)\Phi^{-1}(k+1, k) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \times \left. \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}(k|k) \end{bmatrix} \right\|^2 + \|\mathbf{e}(k)\|^2 \end{aligned} \quad (6.47)$$

再构造正交阵  $T$  使

$$\left. \begin{aligned} T \begin{bmatrix} U^{-1}(k) & 0 \\ S^{-1}(k|k)\Phi^{-1}(k+1, k)\Gamma(k) & S^{-1}(k|k)\Phi^{-1}(k+1, k) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} A(k+1) & B(k+1) \\ 0 & S^{-1}(k+1|k) \end{bmatrix} \\ T \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}(k|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}(k+1) \\ \mathbf{b}(k+1|k) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

式中  $A(k+1)$  为非奇异上三角阵,将变换结果(6.48)式代入(6.47)式,得

$$\begin{aligned} J(k+1, k) &= \|A(k+1)\mathbf{w}(k) + B(k+1)\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{c}(k+1)\|^2 \\ &\quad + \|S^{-1}(k+1|k)\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{b}(k+1|k)\|^2 + \|\mathbf{e}(k)\|^2 \end{aligned} \quad (6.49)$$

欲使  $H(k+1, k)$  最小,应使

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}(k) &= A^{-1}(k+1)[\mathbf{c}(k+1) - B(k+1)\mathbf{x}(k+1)] \\ \mathbf{b}(k+1|k) &= S^{-1}(k+1|k)\mathbf{x}(k+1|k) \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

这样,就得到了滤波的时间更新算法。

总结以上结果,信息平方根滤波算法如下:

时间更新

$$\begin{aligned} T_1 \begin{bmatrix} U^{-1}(k) & 0 & 0 \\ S^{-1}(k|k)\Phi(k+1, k)\Gamma(k) & S^{-1}(k|k)\Phi^{-1}(k+1, k) & \mathbf{b}(k|k) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} A(k+1) & B(k+1) & \mathbf{c}(k+1) \\ 0 & S^{-1}(k+1|k) & \mathbf{b}(k+1|k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.51)$$

测量更新

$$\left. \begin{aligned} T_2 \begin{bmatrix} S^{-1}(k|k-1) & \mathbf{b}(k|k-1) \\ N^{-1}(k)H(k) & N^{-1}(k)\mathbf{z}(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S^{-1}(k|k) & \mathbf{b}(k|k) \\ 0 & \mathbf{e}(k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}(k|k) &= S^{-1}(k|k)\mathbf{x}(k), \mathbf{b}(k+1|k) = S^{-1}(k+1|k)\mathbf{x}(k+1|k) \\ P(k|k) &= S(k|k)S^{-1}(k|k), P(k|k-1) = S(k|k-1)S^T(k|k-1) \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

## 6.4 序列平方根滤波方法

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

### 6.4.1 测量向量的序列处理法

在卡尔曼滤波算法中,需要计算  $m \times m$  逆阵  $[H(k)P(k|k-1)H^T(k)+R(k)]^{-1}$ ,而逆阵的计算量与  $m^3$  成比例,计算量大。因此当测量向量维数  $m$  很大时,可采用序列处理法,即每次只处理一个或少数个分量。用序列处理要求测量噪声方差阵为块状对角阵或对阵,即

$$E[v(k)v^T(k)] = \text{diag}(r_1^i, r_2^i, \dots, r_l^i) \quad (6.53)$$

设  $r_k^i$  为  $m^i \times m^i$  阵,  $\sum_{i=1}^l m^i = m$ 。当  $l=m$  时,  $r_k^i$  均为标量,同样可把测量阵  $H$  分块为

$$H(k) = [(h_1^i)^T, (h_2^i)^T, \dots, (h_l^i)^T]^T \quad (6.54)$$

这时每组分量的测量方程为

$$z_i^i = h_i^i x(k) + v_i^i \quad (6.55)$$

式中,  $E[v^i(k)(v^i(k))^T] = r_k^i$ ;  $h_i^i$  为  $m^i \times n$  分块测量阵。普通卡尔曼滤波对测量向量  $z(k)$  同时处理,一步预测估计  $x(k|k-1) = E[x(k) | z_1^{i-1}]$  [见(2.5)式],在获得  $z(k)$  后,滤波估计为  $x(k|k) = E[x(k) | z_1^{i-1}, z(k)]$ 。序列处理把  $z(k)$  分为  $z_i^i (i=1, 2, \dots, l)$ , 一个一个按顺序处理,即第一次从  $x(k|k-1) = E[x(k) | z_1^{i-1}]$  和  $z_i^i$  计算得  $x_i^i = E[x(k) | z_1^{i-1}, z_i^i]$ ,再用  $x_i^i$  和  $z_i^i$  计算  $x_i^i = E[x(k) | z_1^{i-1}, z_i^i, z_i^i]$ ,一直到

$$x_i^i = E[x(k) | z_1^{i-1}, z_i^i, \dots, z_i^i] = E[x(k) | z_1^{i-1}, z(k)] = E[x(k) | z_1^i] = x(k|k)$$

测量向量序列处理只在测量更新中进行,滤波公式为

$$\left. \begin{aligned} x_i^i &= x_i^{i-1} + K_i^i (z_i^i - h_i^i x_i^{i-1}) \\ K_i^i &= P_i^{i-1} h_i^i (h_i^i P_i^{i-1} h_i^{iT} + r_k^i)^{-1} \\ P_i^i &= (I - K_i^i h_i^i) P_i^{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

当  $x_k = x_k^i, P_k = P_k^i$  时序列处理终止,式中,  $i=1, 2, \dots, l$ 。当  $x(k|k) = x_k^i, P(k|k) = P_k^i$  算出后,再进行时间更新。

从(6.56)式可以明显地看出,采用序列处理法,只需进行  $l$  次  $m^i \times m^i$  阵求逆。例如,测量向量的维数  $m=12$ ,如分四次处理,即  $l=4, m^i=3$  时,普通  $K, F$  计算量为  $12^3 = 1728$ ,序列处理计算量为  $4 \times 3^3 = 108$ ,仅为前者 6.25%。序列处理算法的另一个优点是,当测量装置中某个或某几个传感器突然中断时,滤波器还可以利用测得的信息继续工作。由于传感器工作时常常互不影响,测量误差方差阵  $R$  为严格对角阵,即

$$R(k) = \text{diag}(r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i)$$

因此,每次只处理一个测量分量,计算效率更高。

### 6.4.2 序列平方根滤波

采用协方差平方根滤波,当测量量为向量时,不仅计算量大,在测量更新中,也不能保证(6.12)式中的  $S(k|k)$  为上三角阵,因此,在测量更新中,采用了序列平方根滤波的方法。

在测量更新中,滤波误差协方差阵为

$$\begin{aligned}
 P(k) &= [I - K(k)H(k)]P(k|k-1) \\
 &= P(k|k-1) - P(k|k-1)H^T(k)[H(k)P(k|k-1)H^T(k) \\
 &\quad + R(k)]^{-1}H(k)P(k|k-1)
 \end{aligned}$$

令

$$P(k|k-1) = S(k|k-1)S^T(k|k-1), \quad B(k) = S^T(k|k-1)H^T(k) \quad (6.58)$$

故

$$P(k) = S(k|k-1)[I - B(k)[B^T(k)B(k) + R(k)]^{-1}B^T(k)]S^T(k|k-1) \quad (6.59)$$

把  $m$  维测量向量  $z(k)$  分为  $m$  次处理, 并设

$$E[v(k)v^T(k)] = \text{diag}(r_k^1, r_k^2, \dots, r_k^m), \quad H(k) = [(h_k^1)^T, (h_k^2)^T, \dots, (h_k^m)^T]^T \quad (6.60)$$

$$F^i(k) = S^T(k|k-1)h^T(k_k^i) \quad (F^i(k) \text{ 为向量, 为简化起见, 以后省略上标 } i)$$

这样, (6.57) 式中逆阵就化为标量, 即

$$h(k)P(k|k-1)h^T(k) + r(k) = F^T(k)F(k) + r(k) = \alpha(k) \quad (6.61)$$

在序列处理时, (6.59) 式化为

$$S(k)S^T(k) = S(k|k-1)[I - F(k)F^T(k)/\alpha(k)]S^T(k|k-1) \quad (6.62)$$

当  $S(k|k-1)$  为上三角阵时, 为了保证  $S(k)$  也为上三角阵,  $[I - F(k)F^T(k)/\alpha(k)]^{1/2}$  也必须为上三角阵。

令  $A = [I - F(k)F^T(k)/\alpha]^{1/2}$  (以下时间  $k$  省去, 下同), 并设  $f_i (i=1, \dots, n)$  为  $n \times 1$  向量  $F$  的分量, 从 (6.61) 式知

$$\alpha = r + \sum_{i=1}^n f_i^2$$

定义

$$a_p = r + \sum_{i=1}^p f_i^2 = r + \sum_{i=1}^n f_i^2 - \sum_{i=p+1}^n f_i^2 = \alpha - \sum_{i=p+1}^n f_i^2$$

显然,  $a_0 = r, a_p = a_{p-1} + f_p^2$ 。由此即可证明, 上三角阵  $A$  的元素为

$$[a_{ij}] = \begin{cases} (\alpha_{i-1}/\alpha_i)^{1/2}, & i = j \\ -f_i f_j / (\alpha_{j-1} \alpha_j)^{1/2}, & i < j \\ 0, & i > j \end{cases} \quad (6.63)$$

因此, (6.62) 式可写为

$$S(k)S^T(k) = S(k|k-1)AA^T S^T(k|k-1)$$

故

$$S(k) = S(k|k-1)A \quad (6.64)$$

$$A = [I - F(k)F^T(k)/\alpha]^{1/2}$$

(6.64) 式即为所求的测量更新的序列平方根公式。

为了进一步减少计算量, 还可分解矩阵  $A$ , 以避免矩阵乘, 即使

$$A = M^D - f^A N^D \quad (6.65)$$

式中

$$M^D \triangleq \text{diag}[(\alpha_0/\alpha_1)^{1/2}, (\alpha_1/\alpha_2)^{1/2}, \dots, (\alpha_{n-1}/\alpha_n)^{1/2}]$$

$$N^D \triangleq \text{diag}[f_1/(\alpha_0 \alpha_1)^{1/2}, f_2/(\alpha_1 \alpha_2)^{1/2}, \dots, f_n/(\alpha_{n-1} \alpha_n)^{1/2}]$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= r \\ \alpha_i &= \alpha_{i-1} + f^{\Delta} \\ f^{\Delta} &= [0, f^{(1)}, \dots, f^{(n-1)}]^T \text{ 为上三角阵} \\ f^{(i)} &= [f_1, f_2, \dots, f_i, 0, \dots, 0]^T \end{aligned}$$

超星阅读器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

这样可得

$$S(k) = S(k|k-1)(M^D - f^{\Delta}N^D) \quad (6.66)$$

如果把矩阵计算化为向量计算, 计算量还可进一步减少。把  $S(k), S(k|k-1)$  写成分块形式:

$$\left. \begin{aligned} S(k) &= S^+ = [S_1^+, S_2^+, \dots, S_n^+] \\ S(k|k-1) &= S = [S_1, S_2, \dots, S_n] \end{aligned} \right\} \quad (6.67)$$

令  $M_i = (\alpha_{i-1}/\alpha_i)^{1/2}, N_i = f_i/(\alpha_{i-1}\alpha_i)^{1/2}$  分别为对角阵  $M^D, N^D$  的对角元素, 并注意  $\alpha_0 = r$ , 则 (6.66) 式可以表示为分块形式:

$$S_i^+ = M_i S_i - \mathbf{b}_{i-1} N_i$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &= S f^{(i)} = S[f_1, \dots, f_i, 0, \dots, 0]^T = \mathbf{b}_{i-1} + S_i f_i \\ \mathbf{b}_n &= S f^{(n)} = S \mathbf{F} = S S^T \mathbf{h} = P(k|k-1) \mathbf{h} \\ &= P(k|k-1) \mathbf{h} [\mathbf{h}^T P(k|k-1) \mathbf{h} + r]^{-1} [\mathbf{h}^T P(k|k-1) \mathbf{h} + r] \\ &= K(k) \alpha \end{aligned}$$

故

$$K(k) = \mathbf{b}_n / \alpha \quad (6.68)$$

这样, 序列平方根滤波公式可写成

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k|k-1) + \frac{\mathbf{b}_n}{\alpha} [z(k) - \mathbf{h} \mathbf{x}(k|k-1)] \quad (6.69)$$

## 6.5 时间更新平方根滤波方法

在卡尔曼滤波器中, 状态预测误差协方差阵的计算式为

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k) P(k|k) \Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k) Q(k) \Gamma^T(k) \quad (6.70)$$

令

$$\left. \begin{aligned} P(k|k) &= S(k|k) S^T(k|k) \\ P(k+1|k) &= S(k+1|k) S^T(k+1|k) \\ Q(k) &= W(k) W^T(k) \end{aligned} \right\} \quad (6.71)$$

式中  $S, W$  均为下三角阵。

将 (6.71) 式代入 (6.70) 式中, 可得

$$P(k+1|k) = \tilde{S}(k+1|k) \tilde{S}^T(k+1|k) \quad (6.72)$$

其中

$$\tilde{S}(k+1|k) = [\Phi(k+1, k) S(k|k) \Gamma(k) W(k)] \quad (6.73)$$

设  $T$  为正交矩阵, 则

$$\tilde{S}(k+1|k) T T^T \tilde{S}^T(k+1|k) = \tilde{S}(k+1|k) \tilde{S}^T(k+1|k) \quad (6.74)$$

因此, 若存在  $T$ , 使

$$\tilde{S}(k+1|k)T = [S(k+1|k) \quad 0] \quad (6.75)$$

则时间更新的协方差阵即可以确定。

通常,正交变换方法可以采用以下几种算法之一。

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

### 6.5.1 Gram-Schmidt 正变化方法

将(6.72)式中的  $\tilde{S}^T(k+1|k)$  用下述列向量描述:

$$\tilde{s}^i = \tilde{S}^T(k+1|k)\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+r \quad (6.76)$$

式中

$$\mathbf{e}_i = [0 \cdots 0 \ 1 \ 0 \cdots 0]^T$$

Gram-Schmidt 方法如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}^1 &= \text{unit}(\tilde{s}^1) \\ \mathbf{b}^2 &= \text{unit}[\tilde{s}^2 - [(\tilde{s}^2)^T \mathbf{b}^1] \mathbf{b}^1] \\ \mathbf{b}^j &= \text{unit}\{\tilde{s}^j - [(\tilde{s}^j)^T \mathbf{b}^1] \mathbf{b}^1 - [(\tilde{s}^j)^T \mathbf{b}^2] \mathbf{b}^2\} \\ &\vdots \\ \mathbf{b}^n &= \text{unit}\left\{\tilde{s}^n - \sum_{j=1}^{n-1} [(\tilde{s}^n)^T \mathbf{b}^j] \mathbf{b}^j\right\} \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

令

$$T = [\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^n, \mathbf{b}^{n+1}, \dots, \mathbf{b}^{n+r}]$$

则

$$T^T \tilde{S}^T(k+1|k) = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^{1T} \tilde{s}^1 & \mathbf{b}^{1T} \tilde{s}^2 & \cdots & \mathbf{b}^{1T} \tilde{s}^n \\ \mathbf{b}^{2T} \tilde{s}^1 & \mathbf{b}^{2T} \tilde{s}^2 & \cdots & \mathbf{b}^{2T} \tilde{s}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}^{(n+r)T} \tilde{s}^1 & \mathbf{b}^{(n+r)T} \tilde{s}^2 & \cdots & \mathbf{b}^{(n+r)T} \tilde{s}^n \end{bmatrix} \quad (6.78)$$

由于  $\tilde{S}^T(k+1|k)$  秩为  $n$ ,  $[\mathbf{b}^{n+1}, \mathbf{b}^{n+2}, \dots, \mathbf{b}^{n+r}]$  为由  $[\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^n]$  张成的正交子矩阵。因此,有

$$\mathbf{b}^{kT} \tilde{s}^j = 0, \quad k > j$$

这样,  $T^T \tilde{S}^T(k+1|k)$  就为上三角阵,时间更新(6.75)式就得到了。

令  $A^k = \tilde{S}^T(k+1|k)$ ,  $A_j^k$  表示  $A^k$  的第  $j$  列,则算法可归纳如下:

$$\left. \begin{aligned} Q^k &= \sqrt{(A_k^k)^T A_k^k} \\ C_{kj} &= \begin{cases} 0, & j = 1, 2, \dots, k-1 \\ a^k, & j = k \\ [(1/a^k)(A_k^k)^T] A_j^k, & j = k+1, k+2, \dots, n \end{cases} \\ A_j^{k+1} &= A_j^k - C_{kj} [1/a^k A_k^k], \quad j = k+1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.79)$$

最后再计算

$$S(k+1|k) = C^T \quad (6.80)$$

### 6.5.2 Householder 变换

令



$$T = T^n T^{(n-1)} \dots T^1 \quad (6.81)$$

式中

$$T^k = I - d^k \mathbf{u}^k (\mathbf{u}^k)^T \quad (6.82)$$

因为  $A^1 = \tilde{S}^T(k+1|k)$ , 用  $A_j^k$  表示  $A^k$  的第  $j$  列, 则 Householder 算法如下:

$$\left. \begin{aligned} a^k &= \sqrt{\sum_{j=k}^{n+r} [A_{jk}^k]^2} \cdot \text{sgn}\{A_{kk}^k\} \\ d^k &= 1/[a^k(a^k + A_{kk}^k)] \\ u_j^k &= \begin{cases} 0; & j < k \\ 1; & j = k \\ d^k (\mathbf{u}^k)^T A_j^k; & j = k+1, \dots, n \end{cases} \\ A^{k+1} &= A^k - \mathbf{u}^k \mathbf{y}^{kT} \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.83)$$

于是

$$A^{n+1} = \begin{bmatrix} S^T(k+1|k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

## 6.6 U-D 分解的滤波方法

与平方根分根类似, 下面介绍一种 U-D 分解的滤波方法, 该方法由 Bierman 和 Thornton 给出。

令

$$\begin{aligned} P(k|k) &= U(k|k)D(k|k)U^T(k|k) \\ P(k|k-1) &= U(k|k-1)D(k|k-1)U^T(k|k-1) \end{aligned} \quad (6.85)$$

式中,  $U$  为单位上三角阵;  $D$  为对角阵。显然,  $P$  阵的正定性与  $D$  阵相同。

$P$  阵可以通过下述方法进行 U-D 分解:

$$\left. \begin{aligned} D_m &= P_m \\ U_{in} &= \begin{cases} 1; & i = n \\ P_{in}/D_m; & i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{jj} &= P_{jj} - \sum_{k=j+1}^n D_{jk} U_{jk}^2 \\ U_{ij} &= \begin{cases} 0; & i > j \\ 1; & i = j \\ [P_{ij} - \sum_{k=j+1}^n D_{ik} U_{ik} U_{jk}]/D_{jj}; & i = j-1, j-2, \dots, 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad j = n-1, n-2, \dots, 1 \quad (6.87)$$

### 6.6.1 测量更新算法

为了便于书写, 令  $P = P(k|k-1)$ ,  $U = U(k|k-1)$ ,  $D = D(k|k-1)$ ,  $H = H(k)$ , 且假定

观测量为标量。

根据卡尔曼滤波公式(6.3),可得

$$\left. \begin{aligned} P(k|k) &= P - PH^T(1/a)HP \\ a &= HPH^T + R \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

(6.88)式的 U-D 分解为

$$\begin{aligned} U(k|k)D(k|k)U^T(k|k) &= UDU^T - \frac{1}{a}UDU^TH^THUDU^T \\ &= U[D - \frac{1}{a}DU^TH^THUD]U^T \end{aligned} \quad (6.89)$$

令

$$f = U^TH, \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n] = DF (v_j = D_{jj}f_j, j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.90)$$

将(6.90)式代入(6.89)式,得

$$\begin{aligned} U(k|k)D(k|k)U^T(k|k) &= U[D - \frac{1}{a}\mathbf{v}\mathbf{v}^T]U^T \\ &= U\bar{U}\bar{D}\bar{U}^TU^T \end{aligned} \quad (6.91)$$

式中,  $\bar{U}, \bar{D}$  为  $D - \frac{1}{a}\mathbf{v}\mathbf{v}^T$  的 U-D 分解。

由(6.91)式可得

$$U(k|k) = U\bar{U}, D(k|k) = \bar{D} \quad (6.92)$$

$\bar{U}, \bar{D}$  的计算式如下:

$$\left. \begin{aligned} a_j &= \sum_{k=1}^j D_{kk}f_k^2 + R \\ \bar{D}_{jj} &= D_{jj}a_{j-1}/a_j \\ \bar{U}_{ij} &= \begin{cases} -D_{ii}f_i f_j / a_{j-1}; & i = 1, 2, \dots, j-1 \\ 1; & i = j \\ 0; & i = j+1, j+2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \right\} j = 1, 2, \dots, n \quad (6.93)$$

其中  $a_0 = R$ 。

由(6.91), (6.92)式可推导出观测量为标量时的测量更新 U-D 分解算法:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f} &= U^T(k|k-1)H^T(k) \\ v_j &= D_{jj}(k|k-1)f_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \\ a_0 &= R \end{aligned} \right\} \quad (6.94)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= a_{i-1} + f_i v_i \\ D_{ii}(k|k) &= D_{ii}(k|k-1)a_{i-1}/a_i \\ b_i &\leftarrow v_i \\ p_i &= -f_i/a_{i-1} \\ U_{ji}(k|k) &= U_{ji}(k|k-1) + b_j p_i \\ b_j &\leftarrow b_j + U_{ji}(k|k-1)v_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n \quad (6.95)$$

(式中,  $\leftarrow$  表示改写, 例如  $a \leftarrow b$  为用  $b$  值改写  $a$ )

$$K(k|k) = b_n/a_n$$

$$\mathbf{x}(k|k) = \mathbf{x}(k|k-1) + K(k|k)[\mathbf{z}(k) - H(k)\mathbf{x}(k|k-1)] \quad (6.96)$$

超星阅读器提醒您  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

## 6.6.2 时间更新算法

令

$$\begin{aligned} Y(k+1|k) &= [\Phi(k+1, k)U(k|k)\Gamma(k)] \\ \tilde{D}(k+1|k) &= \begin{bmatrix} D(k|k) & 0 \\ 0 & Q(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.97)$$

时间更新方程(6.2)可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k) &= \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k|k) \\ P(k+1|k) &= Y(k+1|k)\tilde{D}(k+1|k)Y^T(k+1|k) \end{aligned} \quad (6.98)$$

根据 Gram-Schmidt 算法可得时间更新算法:

$$\begin{aligned} D_{jj}(k+1|k) &= [\mathbf{b}^j]^T \tilde{D}(k+1|k) \mathbf{b}^j \\ U_{\mu}(k+1|k) &= \frac{1}{D_{\mu\mu}(k+1|k)} ([\mathbf{y}^j]^T \tilde{D}(k+1|k) \mathbf{b}^j) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & i = j, j+1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

式中  $\mathbf{y}^j$  为  $Y^T(k+1|k)$  的第  $j$  列向量。

上述算法可进一步写为

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i &= \tilde{D}(k+1|k) \mathbf{a}_i (C_{ij} = \tilde{D}_{ij}(k+1|k) a_{ij}; j = 1, 2, \dots, n+r) \\ D_{ii}(k+1|k) &= \mathbf{a}_i^T \mathbf{c}_i \\ \mathbf{d}_i &= \mathbf{c}_i / D_{ii}(k+1|k) \\ U_{\mu}(k+1|k) &= \mathbf{a}_i^T \mathbf{d}_i \\ \mathbf{a}_j &\leftarrow \mathbf{a}_j - U_{\mu}(k+1|k) \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & j = 1, 2, \dots, i-1 \end{aligned} \right\} \quad i = n, n-1, \dots, 1 \quad (6.100)$$

(6.100)式给出了  $P(k+1|k)$  的 U-D 分解全部计算式。

## 6.7 奇异值分解最优滤波方法

由于滤波误差的协方差阵为一个实对称矩阵,因此它可以用以下的正交分解来表示:

$$\begin{aligned} P(k|k) &= V(k|k)D(k|k)V^T(k|k) \\ P(k+1|k) &= V(k+1|k)D(k+1|k)V^T(k+1|k) \end{aligned} \quad (6.101)$$

式中,  $V$  为正交矩阵;  $D$  为对角矩阵。

这样,在协方差阵的传播计算中,只要  $D$  阵的对角之差大于零,则可保证  $P$  阵的正定性。

由卡尔曼滤波的方程(2.22)可知

$$P^{-1}(k+1|k+1) = P^{-1}(k+1|k) + H^T(k+1)R^{-1}(k+1)H(k+1) \quad (6.102)$$

将(6.102)式用奇异值分解表示,则有

$$\begin{aligned} & V(k+1|k+1)D^{-1}(k+1|k+1)V^T(k+1|k+1) \\ &= V(k+1|k)D^{-1}(k+1|k)V^T(k+1|k) \\ & \quad + H^T(k+1)R^{-1}(k+1)H(k+1) \\ &= Y(k+1)Y^T(k+1) \end{aligned} \quad (6.103)$$

式中

$$Y(k+1) = [V(k+1|k)D^{-\frac{1}{2}}(k+1|k)H^T(k+1)R^{-\frac{1}{2}}(k+1)] \quad (6.104)$$

$Y^T(k+1)$ 用奇异值分解为

$$Y^T(k+1) = SAU^T \quad (6.105)$$

其中,  $S^T S = I$ ;  $U^T U = U U^T = I$ ;  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ 。

将(6.105)式代入(6.103)式,得

$$V(k+1|k+1)D^{-1}(k+1|k+1)V^T(k+1|k+1) = U \Lambda S^T S U^T = U \Lambda^2 U^T \quad (6.106)$$

因此

$$V(k+1|k+1) = U, \quad D(k+1|k+1) = \Lambda^{-2} \quad (6.107)$$

(6.105)式可用标准奇异值分解程序计算出。

时间更新协方差阵

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k)$$

的奇异值分解形式为

$$V(k+1|k)D(k+1|k)V^T(k+1|k) = A(k+1)A^T(k+1) \quad (6.108)$$

式中

$$A(k+1) = [\Phi(k+1, k)V(k|k)D^{1/2}(k|k), \quad \Gamma(k)Q^{1/2}(k)] \quad (6.109)$$

对  $A^T(k+1)$  进行奇异值分解计算,则按(6.105)~(6.107)式即可得到  $V(k+1|k)$  和  $D(k+1|k)$ 。

## 6.8 平方根类滤波方法计算量比较

表 6.1 给出了有关滤波算法计算量的统计。

表 6.1 平方根算法一步滤波计算量比较

滤波器	加法(全部乘以 $\frac{1}{6}$ )	乘法(全部乘以 $\frac{1}{6}$ )	除法	开方
普通卡尔曼	$9n^3 + 3n^2(3m+r-1) + n(15m+3r-6)$	$9n^3 + 3n^2(3m+r+3) + n(27m+9r)$	$m$	0
Joseph 方法	$18n^3 + 3n^2(5m+r-10) + n(9m^2+6m+3r) + 3m^3-6m^2+3m$	$18n^3 + 3n^2(5m+r+4) + n(9m^2+24m+9r) + 3m^3+9m^2-6m$	$2m-1$	0

续表

滤波器	加法(全部乘以 $\frac{1}{6}$ )	乘法(全部乘以 $\frac{1}{6}$ )	除法	开方
序列平方根 (Gram-Schmidt)	$12n^3 + 3n^2(6m + 2r - 1) + n(6m - 6) + 6m$	$12n^3 + 3n^2(6m + 2r + 2) + n(24m + 6r) + 12m$	$n + 2m$	$n + m$
序列平方根 (House holder)	$10n^3 + 3n^2(6m + 2r - 1) + n(6m + 5) + 6m$	$10n^3 + 3n^2(6m + 2r + 2) + n(24m + 6r + 8) + 12m$	$n + 2m$	$n + m$
协方差 平方根	$9n^3 + 3n^2(3m + r - 1) + 3n(3m + 3r - 8) + 2r^3 + 6r^2 + 4r$	$9n^3 + 3n^2(4m + r + 2) + 3n(10m + 5r - 7) + 2r^3 + 12r^2 + 4r$	$2mn + r$	$mm + r$
信息	$10n^3 + 3n^2(m + 3r + 2) + n(9m + 9r - 6)$	$10n^3 + 3n^2(m + 3r + 6) + n(15m + 21r - 10)$	$2r - 1$	0
信息平方根	$9n^3 + 3n^2(2m + 6r + 5) + n(12m + 6r - 6)$	$9n^3 + 3n^2(2m + 6r + 6) + n(12m + 2r + 3) + 6r$	$2n + 2r$	$n + r$
U-D 分解	$9n^3 + 3n^2(3m + 2r + 2) + 3n(3m + 1)$	$9n^3 + 3n^2(3m - 2r + 7) + 3n(m + 4r - 4) - 6r$	$n(m + 1) - 1$	0

一般情况下, U-D 分解方法计算量较少。

## 第七章 线性离散系统的平方根平滑估计方法

### 7.1 平滑估计的稳定性和计算效率

20 世纪 60 年代以来, 各类固定区间、固定点、固定滞后平滑算法相继出现, 其中最常用的是 Rauch-Tung-Streibel (R-T-S) 固定区间平滑器、Rauch 和 Miditch 固定点平滑器、Miditch 固定滞后平滑器。这些常用的平方估计方法, 已经在第四章做了详细的介绍。在实际应用中, 人们发现这些算法均有两个明显的缺点: 一是在协方差阵的传播矩阵计算中, 有两个正定矩阵的相减运算, 使算法的数值稳定性很差; 二是其增益矩阵计算式中, 存在着大量的  $n \times n$  矩阵相乘或求逆运算, 使得算法的计算效率很低。这样, 在小型机或微型机上使用平滑算法, 特别是在固定滞后平滑算法用于在线处理时, 不仅难以保证算法的数值稳定性, 而且计算效率太低, 有时还不能满足要求。为了解决这些问题, 不少学者采用了前向-后向滤波方法来保证平滑算法的稳定性, 但却使平滑算法的计算量变得更大。后来, 美国 M. I. T 的著名教授何毓琦提出了平方根固定点平滑算法, Anderson 教授提出了一种有效的固定滞后平滑算法, Bierman 提出了序列固定区间平滑算法, Keigo Watanabe 提出了 U-D 分解的前向固定区间平滑算法。这些方法在数值稳定和计算效率方面都有了改进, 但算法的计算量仍然很可观。为了进一步提高各类平滑算法的计算效率, 作者通过改进各类平滑算法的结构, 并应用 U-D 分解技术, 使数值稳定性和计算效率得到了大大提高。其中, 固定区间平滑算法的计算效率是 Bieman 方法的 1.8 倍以上, 固定点平滑算法的计算效率是何毓琦方法的 1.5 倍以上, 固定滞后平滑算法的计算效率是 Anderson 方法的 1.8 倍以上。本章将分别介绍固定区间、固定点、固定滞后平滑算法及其前向平滑方法、奇异值分解平滑方法等的实用平滑技术。

### 7.2 固定区间平滑估计的有效方法

#### 7.2.1 问题描述

本章所讨论的线性离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(j+1) = \Phi(j+1, j)\mathbf{x}(j) + \Gamma(j)\mathbf{w}(j) \quad (7.1)$$

观测方程为

$$\mathbf{z}(j+1) = H(j+1)\mathbf{x}(j+1) + \mathbf{v}(j+1) \quad (7.2)$$

若

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \\ E[\mathbf{v}(j)] &= 0, \quad E[\mathbf{w}(j)] = 0, \quad E[\mathbf{v}(j)\mathbf{v}^T(k)] = \delta_{jk}R(j) \\ E[\mathbf{w}(j)\mathbf{w}^T(k)] &= \delta_{jk}Q(j), \quad E[\mathbf{w}(j)\mathbf{v}^T(k)] = 0 \end{aligned}$$

由 4.3 节知, R-T-S 固定区间平滑公式为

$$\mathbf{x}(j|N) = \mathbf{x}(j|j) + G(j)[\mathbf{x}(j+1|N) - \mathbf{x}(j+1|j)]$$

$$G(j) = P(j|j)\Phi^T(j+1, j)P^{-1}(j+1|j)$$

$$P(j|N) = P(j|j) + G(j)[P(j+1|N) - P(j+1|j)]G^T(j)$$

式中

$$P(j+1|j) = \Phi(j+1, j)P(j|j)\Phi^T(j+1, j) + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) \quad (7.4)$$

且  $N > j$ 。

在(7.3)式中,  $P(j|N)$ 递推计算式有两个正定矩阵相减,不能保证  $P(j|N)$ 的计算正定性;另外,  $G(j)$ 的计算式中,有一个  $n \times n$  矩阵求逆运算及三个  $n \times n$  矩阵相乘的运算,所需计算量较大。这样,直接采用(7.3)式进行平滑估计时,不仅计算效率低,而且还会出现计算发散情况。

### 7.2.2 Bierman 序列平滑方法

为了提高数值稳定性和计算效率, Bierman 在 1983 年提出了一种序列方法,该方法的思想是将过程噪声按序列方法处理,以得到固定区间平滑估计的稳定形式。具体处理方法如下:

设

$$\mathbf{x}(j+1) = \Phi(j+1, j)\mathbf{x}(j) + \mathbf{b}_1 w_j(1) + \mathbf{b}_2 w_j(2) + \cdots + \mathbf{b}_p w_j(p) \quad (7.5)$$

其中

$$[w_j(1), w_j(2), \cdots, w_j(p)]^T = \mathbf{w}(j)$$

$$[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_p] = \Gamma(j)$$

令

$$\mathbf{x}^D(j) = \Phi(j+1, j)\mathbf{x}(j), Q(j) = \text{diag}[q_1, q_2, \cdots, q_p]$$

$$P^D(j|j) = \Phi(j+1, j)P(j|j)\Phi^T(j+1, j)$$

有

$$\mathbf{x}^{(w_j)}(i+1) = \mathbf{x}^{(w_j)}(i) + \mathbf{b}_i w_j(i); \quad i = 1, 2, \cdots, p \quad (7.6)$$

式中  $\mathbf{x}^{(w_j)}(1) = \mathbf{x}^D(j)$ 。

由 1.2 节卡尔曼滤波公式可得

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{(w_j)}(i+1) &= \hat{\mathbf{x}}^{(w_j)}(i) \\ P^{(w_j)}(i+1) &= P^{(w_j)}(i) + q_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T; \quad i = 1, 2, \cdots, p \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

其中

$$\hat{\mathbf{x}}^{(w_j)}(1) = \hat{\mathbf{x}}^D(j)$$

$$P^{(w_j)}(1) = P^D(j|j)$$

代入(7.3)式,可得平滑估计的增益阵

$$\begin{aligned} G^{(w_j)}(i+1) &= P^{(w_j)}(i)[P^{(w_j)}(i) + q_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T]^{-1} \\ &= P^{(w_j)}(i) \{ [P^{(w_j)}(i)]^{-1} - [P^{(w_j)}(i)]^{-1} q_i \mathbf{b}_i \\ &\quad \times [1 - \mathbf{b}_i^T [P^{(w_j)}(i)]^{-1} \mathbf{b}_i q_i]^{-1} \mathbf{b}_i^T [P^{(w_j)}(i)]^{-1} \} \\ &= I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T; \quad i = 1, 2, \cdots, p \end{aligned} \quad (7.8)$$



式中

$$\mathbf{v}_i = [\mathbf{p}^{(w)}(i)]^{-1} \mathbf{b}_i$$

$$\lambda_i = \frac{q_i}{1 + q_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{b}_i}$$

$$\mathbf{G}^{(w)}(1) = \Phi(j+1, j) \mathbf{G}(j)$$

状态向量的平滑估计为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(w)}(i|N) &= \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(i) + \mathbf{G}^{(w)}(i+1)[\mathbf{x}^{(w)}(i+1|N) - \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(i+1)] \\ &= \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(i) + (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T)[\mathbf{x}^{(w)}(i+1|N) - \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(i+1)] \\ &= \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(i) + \mathbf{x}^{(w)}(i+1|N) - \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(i+1) + \mathbf{b}_i \delta_i \\ &= \mathbf{x}^{(w)}(i+1|N) + \mathbf{b}_i \delta_i; \quad i = p, p-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (7.9)$$

其中

$$\delta_i = \lambda_i \mathbf{v}_i^T [\mathbf{x}(j+1|j) - \mathbf{x}^{(w)}(i+1|N)]$$

$$\mathbf{x}^{(w)}(p+1|N) = \mathbf{x}(j+1|N)$$

方差阵的传播为

$$\begin{aligned} P^{(w)}(i|N) &= P^{(w)}(i) + \mathbf{G}^{(w)}(i+1)[P^{(w)}(i+1|N) - P^{(w)}(i+1)][\mathbf{G}^{(w)}(i+1)]^T \\ &= (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T) P^{(w)}(i+1|N) (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T)^T + P^{(w)}(i) \\ &\quad - P^{(w)}(i) [P^{(w)}(i+1)]^{-1} P^{(w)}(i+1) [P^{(w)}(i+1)]^{-1} P^{(w)}(i) \\ &= (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T) P^{(w)}(i+1|N) (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T)^T + P^{(w)}(i) - (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T) P^{(w)}(i) \\ &= (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T) P^{(w)}(i+1|N) (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T)^T + \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \\ &\quad i = p, p-1, \dots, 1 \end{aligned} \quad (7.10)$$

其中

$$\mathbf{v}_i^T P^{(w)}(i) = \mathbf{b}_i^T$$

$$P^{(w)}(j+1|N) = P(j+1|N)$$

最后,平滑估计的结果为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j|N) &= \Phi^{-1}(j+1, j) \mathbf{x}^{(w)}(1|N) \\ P(j|N) &= \Phi^{-1}(j+1, j) P^{(w)}(1|N) \Phi^{-T}(j+1, j) \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Bierman 序列平滑算法可归纳如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{(w)}(i|N) &= \mathbf{x}^{(w)}(i+1|N) + \mathbf{b}_i \delta_i \\ P^{(w)}(i|N) &= (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T) P^{(w)}(i+1|N) (I - \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{v}_i^T)^T + \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \\ \delta_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i^T [\mathbf{x}(j+1|j) - \mathbf{x}^{(w)}(i+1|N)] \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

$$i = p, p-1, \dots, 1$$

式中

$$\mathbf{x}^{(w)}(p+1|N) = \mathbf{x}(j+1|N)$$

$$P^{(w)}(p+1|N) = P(j+1|N)$$

然后再考虑(7.11)式,就可完成平滑估计。

Bierman 序列方法所需滤波计算如下:

时间更新

第一步:计算

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(1) &= \Phi(j+1, j) \mathbf{x}(j|j) \\ P^{(w)}(1) &= \Phi(j+1, j) P(j|j) \Phi^T(j+1, j) \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

第二步:计算

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(i+1) &= \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(i) \\ P^{(w)}(i+1) &= P^{(w)}(i) + q_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \\ i &= 1, 2, \dots, p \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_i &= [P^{(w)}(i)]^{-1} \mathbf{b}_i \\ \lambda_i &= \frac{q_i}{1 + q_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{b}_i} \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j+1|j) &= \hat{\mathbf{x}}^{(w)}(p+1) \\ P(j+1|j) &= P^{(w)}(p+1) \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

测量更新:计算式与 1.2 节完全相同。

Bierman 序列方法中的误差协方差阵的传播计算可采用 U-D 分解实现。(7.12), (7.13)式均可用 MWG-S 即 Gran-Schmidt 的加权修正方法实现 U-D 分解,(7.14)式可用 Thornton-Jacobson 方法(见文献)进行 U-D 分解。至此,平滑算法的数值稳定性得到了保证。

### 7.2.3 后向平滑新算法

Bierman 平滑方法虽然解决了数值稳定性问题,但滤波公式中的  $\mathbf{v}_i$  计算、平滑公式中的误差协方差阵的迭代计算量均很大,使整个平滑算法的计算效率降低。为此,我们给出了一种有效的固定区间平滑方法。

由(7.3)式可得

$$\begin{aligned} P(j|N) &= G(j)P(j+1|N)G^T(j) + P(j|j) - G(j)P(j+1|j)G^T(j) \\ &= G(j)P(j+1|N)G^T(j) + P(j|j) \\ &\quad - P(j|j)\Phi^T(j+1,j)P^{-1}(j+1|j)\Phi(j+1,j)P(j|j) \end{aligned} \quad (7.17)$$

而

$$\begin{aligned} &\Phi^T(j+1,j)P^{-1}(j+1|j)\Phi(j+1,j) \\ &= [\Phi^{-1}(j+1,j)P(j+1|j)\Phi^{-T}(j+1,j)]^{-1} \\ &= [P(j|j) + F(j)Q(j)F^T(j)]^{-1} \end{aligned} \quad (7.18)$$

式中,  $F(j) = \Phi^{-1}(j+1,j)\Gamma(j)$ 。

根据矩阵反演公式,(7.18)式可写成

$$\begin{aligned} &\Phi^T(j+1,j)P^{-1}(j+1|j)\Phi(j+1,j) \\ &= P^{-1}(j|j) - P^{-1}(j|j)F(j)\Lambda(j)F^T(j)P^{-1}(j|j) \end{aligned} \quad (7.19)$$

其中,  $\Lambda(j) = [Q^{-1}(j) + F^T(j)P^{-1}(j|j)F(j)]^{-1}$ 。

将(7.19)式代入(7.17)式,可得

$$P(j|N) = G(j)P(j+1|N)G^T(j) + F(j)\Lambda(j)F^T(j) \quad (7.20)$$

在(7.20)式中已不存在矩阵的相减运算。为了减少增益阵的计算量,我们作如下变形:

$$G(j) = P(j|j)\Phi^T(j+1,j)P^{-1}(j+1|j)\Phi(j+1,j)\Phi^{-1}(j+1,j) \quad (7.21)$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

将(7.19)式代入(7.21)式,可得

$$G(j) = \Phi^{-1}(j+1, j) - F(j)\Lambda(j)\Gamma^T(j)[\Phi(j+1, j)P(j|j)\Phi^T(j+1, j)]^{-1} \quad (7.22)$$

新平滑算法可归纳为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j|N) &= \mathbf{x}(j|j) + G(j)[\mathbf{x}(j+1|N) - \mathbf{x}(j+1|j)] \\ P(j|N) &= G(j)P(j+1|N)G^T(j) + F(j)\Lambda(j)\Gamma^T(j) \end{aligned} \quad (7.23)$$

平滑所需的滤波计算式如下:时间更新分两步进行,测量更新与(2.22)式中的卡尔曼滤波公式一样。

时间更新

第一步:计算

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j+1|j) &= \Phi(j+1, j)\mathbf{x}(j|j) \\ P^{(1)}(j+1|j) &= \Phi(j+1, j)P(j|j)\Phi^T(j+1, j) \\ G(j) &= \Phi^{-1}(j+1, j) - F(j)\Lambda(j)\Gamma^T(j)[P^{(1)}(j+1|j)]^{-1} \\ F(j) &= \Phi^{-1}(j+1, j)\Gamma(j) \\ \Lambda(j) &= [Q^{-1}(j) + F^T(j)P^{-1}(j|j)F(j)]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

第二步:计算

$$P(j+1|j) = P^{(1)}(j+1|j) + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) \quad (7.25)$$

为了进一步提高数值稳定性和计算效率, (7.23)~(7.25)式中的估计误差协方差阵计算均可采用 U-D 分解。设

$$\left. \begin{aligned} P(j|N) &= U(j|N)D(j|N)U^T(j|N) \\ P(j|j) &= U(j|j)D(j|j)U^T(j|j) \\ \Lambda(j) &= U_{\Lambda}^{-T}(j)D_{\Lambda}^{-1}(j)U_{\Lambda}^{-1}(j) \\ P^{(1)}(j+1|j) &= \bar{U}(j+1|j)\bar{D}(j+1|j)\bar{U}^T(j+1|j) \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

$U(j|N), U_{\Lambda}(j), \bar{U}(j+1|j), D(j|N), D_{\Lambda}(j), \bar{D}(j+1|j)$  均可用 MWG-S 方法得到;  $U(j|j), D(j|j)$  用 Bierman 方法得到;  $P(j+1|j)$  的 U-D 分解采用 Thornton-Jacobson 方法得到。  $G(j)$  的具体算法如下:

$$\left. \begin{aligned} F(j) &\leftarrow \Phi^{-1}(j+1, j)\Gamma(j) \\ A_j &\leftarrow \bar{U}^{-1}(j+1|j)F(j) \\ B_j &\leftarrow F(j)U_{\Lambda}^{-T}(j) \\ A_j &\leftarrow \bar{D}^{-1}(j+1|j)A_j \\ A_j &\leftarrow \bar{U}^{-T}(j+1|j)A_j \\ A_j^T &\leftarrow D_{\Lambda}^{-1}(j)U_{\Lambda}^{-1}(j)A_j^T \\ G(j) &= \Phi^{-1}(j+1, j) - B(j)A_j^T \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

由(7.23)式可得

$$P(j|N) = G(j)P(j+1|N)G^T(j) + B_jD_{\Lambda}^{-1}(j)B_j^T \quad (7.28)$$

至此,平滑算法得到了简化, (7.24)式也可用序列方法处理。

#### 7.2.4 两种后向平滑算法的计算量与存储量

在分析平滑算法的计算效率时,需要统计一步平滑所需计算量及一步平滑所需滤波

计算量,然后才能定量分析计算效率。下面,分别给出 Bierman 序列平滑方法的计算量和新后向平滑算法的计算量。由表 7.1~表 7.4 可见,新方法具有较高的计算效率。

表 7.1 Bierman 方法一步平滑所需计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法	备 注
$\delta_i$	$2n-1$	$n+1$		$p$ 次
$b_i \delta_i$		$n$		$p$ 次
$x^{(w_j)}(i N)$	$n$			$p$ 次
$x(j N)$	$n^2-n$	$n^2$		
(7.10)式	$1.5n^3+0.5n^2+2n$	$1.5n^3+3n^2+2.5n$	$3n-3$	$p$ 次
$P(j N)$	$1.5n^3+0.5n$	$1.5n^3+2n^2-1.5n$	$n-1$	
总 计	$1.5n^3+n^2-0.5n$ $+(1.5n^3+0.5n^2+5n)p$	$1.5n^3+3n^2-1.5n$ $+(1.5n^3+3n^2+4.5n)p$	$n-1$ $+3(n-1)p$	复杂度 $1.5n^3(p+1)$

表 7.2 新平滑方法一步平滑所需计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法	备 注
$x(j N)$	$n(n+1)$	$n^2$		
(7.28)式	$1.5n^3-0.5n^2+n+n^2p$	$1.5n^3-n^2-0.5n$ $+p(n^2+2n-1)$	$n-1$ $+2(n-1)p$	
总 计	$1.5n^3+0.5n^2+2n+n^2p$	$1.5n^3+2n^2-0.5n$ $+p(n^2+2n-1)$	$n-1$ $+2(n-1)p$	复杂度 $1.5n^3$

两种方法所需滤波计算量如表 7.3、表 7.4 所示。

表 7.3 Bierman 方法一步平滑所需滤波计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法	备 注
测量更新	$(1.5n^2+1.5n)m$	$(1.5n^2+5.5n)m$	$nm$	
$\hat{x}^{(w_j)}(1)$	$n^2-n$	$n^2$		
$P^{(w_j)}(1)$	$1.5n^3-0.5n^2+n$	$1.5n^3+n^2-0.5n$	$n-1$	
$v_i$	$n(n-1)$	$n(n-1)+n$	$n$	$p$ 次
$\lambda_i$	$n$	$n+1$	$1$	$p$ 次
(7.14)式	$n^2$	$n^2+2n-1$	$2n-2$	$p$ 次
总 计	$1.5n^3+0.5n^2+2n^2p$ $+(1.5n^2+1.5n)m$	$1.5n^3+2n^2-0.5n$ $+(n^2+n) \cdot 2p+(1.5n^2+5.5n)m$	$n-1+nm$ $+(3n-1)p$	复杂度 $1.5n^3$

表 7.4 新平滑方法一步平滑所需滤波计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法	备 注
测量更新	$(1.5n^2 + 1.5n)m$	$(1.5n^2 + 5.5n)m$	$m$	
$\mathbf{x}(j+1 j)$	$n(n-1)$	$n^2$		
$P^{(1)}(j+1 j)$	$1.5n^3 - 0.5n^2 + n$	$1.5n^3 + n^2 - 0.5n$	$n-1$	
$F(j)$	$n(n-1)p$	$n^2p$		
$A(j)$	$0.5p^3 - 0.5p^2 + p$	$0.5p^3 + p^2 - 0.5p$	$p-1$	
$[P^{(1)}(j+1 j)]^{-1}F(j)$	$n(n-1)p$	$n^2p$		
$B_j$	$\frac{1}{2}np(p-1)$	$\frac{1}{2}np(p-1)$		
$A_j$	$\frac{1}{2}np(p-1)$	$\frac{1}{2}np(p-1)$		
$G(j)$	$n^2 + np(p-1)$	$n^2p$		
$P(j+1 j)$	$n^2$	$n^2 + 2n - 1$	$2n - 2$	$p$ 次
总 计	$(1.5n^2 + 1.5n)m + 1.5n^3$ $+ n^2(3p + 1.5)$ $+ n(4p + 2p^2)$ $+ 0.5p^3 - 0.5p^2 + p$	$(1.5n^2 + 5.5n)m + 1.5n^3$ $+ n^2(4p + 2)$ $+ n(p^2 - p - 0.5)$ $+ 0.5p^3 + p^2 - 1.5p$	$nm + n - 1$ $+ 2(n-1)p$ $+ p - 1$	复杂度 $1.5n^3$

为了进行平滑计算,需要存储某些滤波值。Bierman 序列平滑方法需要存储  $\mathbf{x}(j+1|j)$ ,  $\mathbf{v}_j$ ,  $\lambda_j$ ,  $F(j)$ ,  $\Phi(j+1, j)$ , 所需存储量共  $[n^2 + 2np + n + p]N$ 。后向平滑新方法只需存储  $G(j)$ ,  $F(j)$ ,  $D_A(j)$ ,  $\mathbf{x}(j|j)$ ,  $\mathbf{x}(j+1|j)$ , 所需存储量共  $[n^2 + np + 2n + p]N$ , 比 Bierman 方法节省  $n(p-1)N$  个存储单元。

### 7.3 固定点平滑估计的有效方法

#### 7.3.1 基本平滑估计器存在的问题

对于(7.1), (7.2)式所示的系统,如 4.2 节所述,基本的 Rauch 固定点平滑公式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k|j) &= \mathbf{x}(k|j-1) + G(j)[\mathbf{x}(j|j) - \mathbf{x}(j|j-1)] \\ P(k|j) &= P(k|j-1) + G(j)[P(j|j) - P(j|j-1)]G^T(j) \\ G(j) &= C(k)C(k+1)\cdots C(j-1) \\ C(i) &= P(i|i)\Phi^T(i+1, i)P^{-1}(i+1|i) \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

$j > k; \quad i = k, k+1, \dots, j-1$

由(7.29)式可知, Rauch 固定点平滑算法中,也有两正定矩阵的相减运算,使得算法的数值稳定性变差。此外,固定点平滑算法中的  $G(j)$ ,  $C(j)$  计算都相当复杂,需要计算的

量很大。如不提高  $G(j)$ ,  $C(i)$  的计算效率, 就会使整个固定点平滑计算变得非常缓慢。

### 7.3.2 Bryson-何毓琦固定点平滑器

为了改进固定点平滑算法的数值稳定性和计算效率, Bryson 及何毓琦提出了一种有效方法。该方法原理如下:

设测量序列为

$$Z_N = [z(0), z(1), \dots, z(N)]$$

平滑估计  $\mathbf{x}(k|N)$  就是条件概率分布密度  $p[\mathbf{x}(k)|Z_N]$  的极大值处的解。根据  $Z_N$  的定义, 有

$$p[\mathbf{x}(k)|Z_N] = p[\mathbf{x}(k)|Z_{N-1}, z(N)] \quad (7.30)$$

使用 Bayes 公式, 可得

$$p[\mathbf{x}(k)|Z_{N-1}, z(N)] = \frac{p[z(N)|\mathbf{x}(k), Z_{N-1}]p[\mathbf{x}(k)|Z_{N-1}]}{p[z(N)|Z_{N-1}]} \quad (7.31)$$

而

$$p[z(N)|\mathbf{x}(k), Z_{N-1}] = p[z(N)|\mathbf{x}(k), z(k+1), \dots, z(N-1)] \quad (7.32)$$

因此

$$p[\mathbf{x}(k)|Z_N] = \frac{p[z(N)|\mathbf{x}(k), z(k+1), \dots, z(N-1)]p[\mathbf{x}(k)|Z_{N-1}]}{p[z(N)|Z_{N-1}]} \quad (7.33)$$

将密度函数  $p[\mathbf{x}(k)|Z_{N-1}]$  与已得到的平滑估计联系起来, 可得

$$p[\mathbf{x}(k)|Z_{N-1}] = N[\mathbf{x}(k|N-1), p(k|N-1)] \quad (7.34)$$

由 (7.1), (7.2) 式可知

$$z(N) = H(N)[\Phi(N, N-1)\mathbf{x}(N-1) + \Gamma(N-1)W(N-1)] + v(N)$$

根据对  $w(N-1)$  和  $v(N)$  的假设, 可得

$$E[z(N)|\mathbf{x}(k), z(k+1), \dots, z(N-1)] = H(N)\Phi(N, N-1)\bar{\mathbf{x}}(N-1) \quad (7.35)$$

式中

$$\bar{\mathbf{x}}(N-1) \triangleq E[\mathbf{x}(N-1)|\mathbf{x}(k), z(k+1), \dots, z(N-1)]$$

设  $M^+(N)$  为  $\bar{\mathbf{x}}(N)$  误差协方差阵, 则  $M^+(N)$  可由下述的递推算法得到:

$$\left. \begin{aligned} M(i+1) &= \Phi(i+1, i)M^+(i)\Phi^T(i+1, i) + \Gamma(i)Q(i)\Gamma^T(i) \\ M^+(i) &= M(i) - K(i)H(i)M(i) \\ K(i) &= M(i)H^T(i)[R(i) + H(i)M(i)H^T(i)]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

$$i = k, k+1, \dots, N-1$$

且  $M^+(k) = 0$ 。

由 (7.32), (7.35) 式可得

$$\begin{aligned} & p[z(N)|\mathbf{x}(k), z(k+1), \dots, z(N-1)] \\ &= N[H(N)\Phi(N, N-1)\bar{\mathbf{x}}(N-1), H(N)M(N)H^T(N) + R(N)] \end{aligned} \quad (7.37)$$

于是可得

$$p[\mathbf{x}(k)|Z_N] = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}J\right) \quad (7.38)$$

其中

$$J = \| \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|N-1) \|_{\hat{P}^{-1}(k|N-1)}^2 + \| \mathbf{z}(N) - H(N)\Phi(N, N-1)\bar{\mathbf{x}}(N-1) \|_{[H(N)M(N)H^T(N)+R(N)]^{-1}}^2 \quad (7.39)$$

为了得到平滑估计,  $\bar{\mathbf{x}}(N-1)$  必须用  $\mathbf{x}(k)$  表示。由(7.36)式用 1.2 节中的卡尔曼滤波公式可得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(N-1) = & [I - K(N-1)H(N-1)]\Phi(N-1, N-2)[I - K(N-2)H(N-2)] \\ & \times \Phi(N-2, N-3)[I - K(N-3)H(N-3)]\Phi(N-3, N-4)\mathbf{x}(k) \\ & + \sum_{i=k+1}^{N-1} [I - K(N-1)H(N-1)]\Phi(N-1, N-2) \cdots \\ & \times [I - K(i+1)H(i+1)]\Phi(i+1, i)K(i)\mathbf{z}(i) \end{aligned} \quad (7.40)$$

将(7.40)式代入(7.39)式中, 就将最优固定点平滑问题化作了序列最小二乘问题。这样, 完整的平方根固定点平滑算法可总结如下:

时间更新

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(i) &= \Phi(i, i-1)\mathbf{y}^+(i-1) \\ C(i) &= \Phi(i, i-1)C^+(i-1) \\ [1D(i) \vdots 0] &= n \underbrace{[\Phi(i, i-1)D^+(i-1) \vdots \Gamma(i-1)\mathbf{w}(i-1)]^T}_p \end{aligned} \quad (7.41)$$

$i = k+1, k+2, \dots, N$

测量更新

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}^+(i) &= \mathbf{y}(i) + K(i)[\mathbf{Z}(i) - H(i)\mathbf{y}(i)] \\ C^+(i) &= C(i) - K(i)H(i)C(i) \\ \underbrace{\begin{bmatrix} F(i) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ G(i) & D^+(i) \end{bmatrix}}_{n \times m} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}(i) & -H(i)D(i) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & D(i) \end{bmatrix}}_p^T \\ K(i) &= -G(i)F^{-1}(i) \\ i &= k+1, k+2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (7.42)$$

平滑更新

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} F(k|i) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ G(k|i) & S(k|i) \end{bmatrix}}_{n \times m} &= \underbrace{\begin{bmatrix} F(i) & -H(i)C(i)S(k|i-1) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & S(k|i-1) \end{bmatrix}}_p^T \\ \mathbf{x}(k|i) &= \mathbf{x}(k|i-1) + K(k|i)[\mathbf{z}(i) - H(i)\mathbf{y}(i) - H(i)C(i)\mathbf{x}(k|i-1)] \\ K(k|i) &= -G(k|i)F^{-1}(k|i) \\ P(k|i) &= S(k|i)S^T(k|i) \\ i &= k+1, k+2, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (7.43)$$

式中  $F(i), F(k|i)$  为下三角阵;  $T$  为正交矩阵, 而且

$$D(i)D^T(i) = M(i) \quad (7.44)$$



### 7.3.3 固定点平滑新方法

为了改善 Rauch 固定点平滑器结构,得到平滑算法的 U-D 分解形式,作者提出了以下处理方法:

由(7.29)式可得

$$\begin{aligned} P(k|j) &= P(k|j-1) - G(j)P(j|j-1)G^T(j) + G(j)P(j|j)G^T(j) \\ &= G(j)P(j|j)G^T(j) + A(j) \end{aligned} \quad (7.45)$$

式中

$$\begin{aligned} A(j) &= P(k|j-1) - G(j)P(j|j-1)G^T(j) \\ &= P(k|j-2) + G(j-1)[P(j-1|j-1) - P(j-1|j-2)] \\ &\quad \times G^T(j-1) - G(j)P(j|j-1)G^T(j) \\ &= P(k|j-1) - G(j-1)P(j-1|j-2)G^T(j-1) + G(j-1) \\ &\quad \times [P(j-1|j-1) - C(j-1)P(j|j-1)C^T(j-1)]G^T(j-1) \\ &= A(j-1) + G(j-1)[P(j-1|j-1) - C(j-1) \\ &\quad \times P(j|j-1)C^T(j-1)]G^T(j-1) \end{aligned} \quad (7.46)$$

而

$$\begin{aligned} C(j-1)P(j|j-1)C^T(j-1) &= P(j-1|j-1)\Phi(j, j-1) \\ &\quad \times P^{-1}(j|j-1)\Phi(j, j-1)P(j-1|j-1) \\ &= P(j-1|j-1)[\Phi^{-1}(j, j-1)P(j|j-1) \\ &\quad \times \Phi^{-T}(j, j-1)]^{-1}P(j-1|j-1) \\ &= P(j-1|j-1)[P(j-1|j-1) + F(j-1) \\ &\quad \times Q(j-1)F^T(j-1)]^{-1}P(j-1|j-1) \\ &= P(j-1|j-1) - F(j-1)Q^*(j-1)F^T(j-1) \end{aligned} \quad (7.47)$$

将(7.47)式代入(7.46)式中,可得

$$A(j) = A(j-1) + B(j-1)Q^*(j-1)B^T(j-1) \quad (7.48)$$

在(7.47)~(7.48)式中:

$$\begin{aligned} F(j-1) &= \Phi^{-1}(j, j-1)F(j-1) \\ Q^*(j-1) &= [Q(j-1) + F^T(j-1)P(j-1|j-1)F(j-1)]^{-1} \\ B(j-1) &= G(j-1)F(j-1) \\ A(k) &= P(k|k-1) - G(k)P(k|k-1)G^T(k) = 0 \end{aligned}$$

显然, (7.45), (7.48)式给出的  $P(k|j)$  是结构稳定的, 并且,  $P(k|j)$  在  $P(k|j+1)$  的传播式中不出现, 这样, 算法的数值稳定性就得到了保证。为了减少整个固定点平滑算法的计算量, 还需要对  $G(j)$  的计算进一步简化。由(7.29)式可得

$$\begin{aligned} G(j) &= G(j-1)C(j-1) \\ &= G(j-1)P(j-1|j-1)\Phi^T(j, j-1)P^{-1}(j|j-1) \\ &= G(j-1)P(j-1|j-1)\Phi^T(j, j-1)[\Phi(j, j-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times P(j-1|j-1)\Phi^T(j,j-1) + \Gamma(j-1)Q(j-1)\Gamma^T(j-1)^{-1}] \\
& = G(j-1)P(j-1|j-1)[P(j-1|j-1) + F(j-1)Q(j-1) \\
& \quad \times F^T(j-1)]^{-1}\Phi^{-1}(j,j-1) \\
& = G(j-1)[I - F(j-1)Q^*(j-1)F^T(j-1)P^{-1}(j-1|j-1)] \\
& \quad \times \Phi^{-1}(j,j-1)
\end{aligned}$$

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

式中  $F(j-1), Q^*(j-1)$  定义同 (7.47) 式。

在 (7.49) 式中, 仍存在两个  $n \times n$  矩阵的相乘运算, 影响了算法的计算效率。为此, 我们作如下的变换, 令

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{x}(j) &= \Phi(j,k)\mathbf{x}^*(j) \\
P(j) &= \Phi(j,k)P^*(j|j)\Phi^T(j,k) \\
\mathbf{x}(j+1|j) &= \Phi(j+1,k)\mathbf{x}^*(j+1|j) \\
P(j+1|j) &= \Phi(j+1,k)P^*(j+1|j)\Phi^T(j+1,k)
\end{aligned} \right\} \quad (7.50)$$

根据 1.2 节中的卡尔曼滤波公式, 可得

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{x}^*(j+1|j) &= \mathbf{x}^*(j|j) \\
P^*(j+1|j) &= P^*(j|j) + E(j)Q(j)E^T(j)
\end{aligned} \right\} \quad (7.51)$$

式中

$$E(j) = \Phi^{-1}(j+1,k)\Gamma(j)$$

以及

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{x}^*(j+1|j+1) &= \mathbf{x}^*(j|j) + K^*(j+1) \\
&\quad \times [\mathbf{z}(j+1) - M(j+1)\mathbf{x}^*(j|j)] \\
K^*(j+1) &= P^*(j+1|j+1)M^T(j+1)R^{-1}(j+1) \\
P^*(j+1|j+1) &= P^*(j+1|j) - P^*(j+1|j)M^T(j+1) \\
&\quad \times S(j+1)M(j+1)P^*(j+1|j)
\end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$

其中

$$M(j+1) = H(j+1)\Phi(j+1,k)$$

$$S(j+1) = [R(j+1) + M(j+1)P^*(j+1|j)M^T(j+1)]^{-1}$$

令

$$G(j) = G^*(j)\Phi^{-1}(j,k)$$

并将 (7.51), (7.52) 式代入 (7.29), (7.45), (7.48), (7.49) 式中, 可得

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{x}(k|j) &= \mathbf{x}(k|j-1) + G^*(j)[\mathbf{x}^*(j|j) - \mathbf{x}^*(j-1|j-1)] \\
G^*(j) &= G^*(j-1)\{I - E(j-1)\Delta(j-1)E^T(j-1)[P^*(j-1|j-1)]^{-1}\} \\
P(k|j) &= G^*(j)P^*(j|j)[G^*(j)]^T + A(j) \\
A(j) &= A(j-1) + G^*(j-1)E(j-1)\Delta(j-1)E^T(j-1)[G^*(j-1)]^T
\end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

式中

$$\Delta(j-1) = \{Q^{-1}(j-1) + E^T(j-1)[P^*(j-1|j-1)]^{-1}E(j-1)\}^{-1}$$

根据 (7.51)~(7.53) 式, 可以有效地估计出某一固定点的状态值。为了使新固定点平滑方法具有良好的数值稳定性和较高的计算效率, (7.51)~(7.53) 式中的误差协方差阵

传播及  $A(j)$  阵均采用了 U-D 分解。(7.51) 式的 U-D 分解可直接使用 Thornton-Jacobson 方法;(7.52) 式可用 Bierman 测量更新算法。对 (7.53) 式中的  $A(j)$  而言,当  $j-k=n$  时,直接应用 MWG-S 方法就可得  $A(k+n)$  的 U-D 分解,当  $j>k+n$  时,再用 Thornton-Jacobson 方法进行迭代计算,(7.53) 式的  $P(k|j)$  不参与迭代计算。(7.53) 式可按序列方法进行估计。

超星浏览器提醒您  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

#### 7.3.4 固定点平滑方法的计算量分析

为了便于比较各类固定点平滑方法的计算效率,表 7.5 至表 7.7 给出了几种方法的计算量。

表 7.5 Rauch 平滑方法所需计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法	开 方
$P(i+1 i) \rightarrow \text{U-D}$	$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$	$\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	
$G(j)$	$2n^2(n-1)$	$n^3+n^2(n+1)$		
$P(k j)$	$n^2(n-1)$	$n^3$		
$x(k j)$	$\frac{3}{2}n^2(n-1)+\frac{1}{2}n(n+1)$	$n^3+\frac{1}{2}n^2(n+1)$		
$x(j j), P(j j)$	$n^2+n$	$n^2$	$m$	
总 计	$\frac{38}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2(3m+p-9)$ $+n(\frac{5}{2}m+\frac{1}{2}p-4)$	$\frac{38}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2(3m+p+7)$ $+\frac{1}{2}n(9m+3p-2)$	$\frac{1}{2}n(n-1)+m$	

表 7.5 中,  $P(i+1|i) \rightarrow \text{U-D}$ , 指将  $P(i+1|i)$  化为 U-D 分解形式。Rauch 平滑方法计算复杂度为  $\frac{38}{6}n^3$ 。

表 7.6 Bryson-何毓琦平滑器所需计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法	开 方
$y(i), D(i)$ $y^+(i), F(i)$ $D^+(i), G(i), K(i)$	$1.5n^3+0.5n^2(3m+p-1)$ $+0.5n(3m+3p-8)$ $+\frac{1}{3}p^3+p^2+\frac{2}{3}p$	$\frac{3}{2}n^3+\frac{1}{2}n^2(4m+p+2)$ $+\frac{1}{2}n(10m+5p-7)$ $+\frac{1}{3}p^3+2p^2+\frac{2}{3}p$	$2mn+p$	$mn+p$
$C(i)$	$n^2(n-1)$	$n^3$		
$C^+(i)$	$nm(n-1)+n^2(m-1)$	$2mn^2$		
$F(k i), S(k i)$ $G(k i)$	$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+$ $(1.5n^2+3.5n)m$	$\frac{1}{2}(n^2+n)+(2n^2+6n)m$	$2m$	$m$

续表

算式	加法	乘法	除法	开方
$x(k i)$	$2m(n-1)+m$	$2mn$		
$K(k i)$	$\frac{1}{2}nm^2$	$\frac{1}{2}nm(m+1)$		
$P(k i)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	$n(n-1)$		
总计	$2.5n^3+n^2(5m+0.5p-1.5)$ $+n(0.5m^2+5.5m+1.5p-4)$ $+\frac{1}{3}p^3+p^2+\frac{2}{3}p-m$	$2.5n^3+n^2(6m+0.5p+2.5)$ $+n(13.5m+0.5m^2+2.5p$ $-4)+\frac{1}{3}p^3+2p^2+\frac{2}{3}p$	$2m(n+1)$ $+p$	$m(n+1)$ $+p$

Bryson-何毓琦方法计算复杂度为  $2.5n^3$ 。

表 7.7 固定点平滑新方法所需计算量

算式	加法	乘法	除法	开方
$P^*(j+1 j)$	$n^2p$	$(n^2+2n-1)p$	$(2n-2)p$	
$E(j)$	$np(n-1)$	$n^2p$		
$M(j+1)$	$n(n-1)m$	$n^2m$		
(5.52)式	$(1.5n^2+1.5n)m$	$(1.5n^2+5.5n)m$	$nm$	
$G^*(j-1)$ $E(j-1)$	$np(n-1)$	$n^2p$		
$A(j)$	$n^2p+np$	$(n^2+2n-1)p+np$	$(2n-2)p$	
$G^*(j)$	$2n^2p+p^2n$	$2n^2p+p^2n$		
$P(k j)$	$\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{2}n^2-n$	$\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{2}n^2$		
总计	$\frac{1}{2}n^3+n^2(5p+2.5m+\frac{1}{2})$ $+n(p^2-p+0.5m-1)$	$\frac{1}{2}n^3+n^2(5p+2.5m+\frac{3}{2})$ $+n(p^2+5p+5.5m)-2p$	$4(n-1)p+mn$	

新方法的计算复杂度为  $\frac{1}{2}n^3$ 。

由表 7.5~表 7.7 可知,当  $n$  较大,  $p$  较小时,新平滑算法的计算效率最高。表 7.5~表 7.7 的计算量中包括了平滑所需滤波计算量。

## 7.4 固定滞后平滑估计的有效方法

第四章给出的 Meditch 固定滞后平滑算法中,估计误差的传播矩阵计算式有正定矩

阵的相减运算,增益矩阵计算十分复杂,而且对该平滑算法的研究结果表明,Meditch方法中不可控的不稳定部分还必须从算法中去除,否则可能引起计算发散。为了解决这一问题,Chirarattananon 与 Anderson 给出了一种改进方法,Bierman 根据固定区间平滑方法,导出了固定点平滑方法;Anderson 和 Moore 根据扩维的卡尔曼滤波方法,也给出了一种有效的计算方法。然而,这些方法在计算估计误差协方差阵时,均有正定矩阵的相减运算,而且,整个算法的计算量较大,无法保证算法的数值稳定性和计算效率。本节将先介绍 Chirarattananon-Anderson 方法、Bierman 方法、Anderson-Moore 方法,然后给出一种有效的 U-D 分解固定滞后平滑方法。

#### 7.4.1 Chirarattananon-Anderson 方法

设

$$D(j) = P(j+1|j)[P(j|j)\Phi^T(j+1,j)]^T \quad (7.54)$$

根据 Meditch 固定点平滑公式(4.62)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j-N+1|j+1) &= D(j-N)\mathbf{x}(j-N|j) \\ &\quad - \left[ \prod_{i=j-N+1}^j D^{-1}(i) \right] K(j+1)H^T(j+1)H^T(j+1) \\ &\quad \times \Phi(j+1,j)\mathbf{x}(j|j) - [D(j-N) \\ &\quad - \Phi(j-N+1,j-N)]\mathbf{x}(j-N|j-N) \\ &\quad + \left[ \prod_{i=j-N+1}^j D^{-1}(i) \right] K(j+1)\mathbf{z}(j+1) \end{aligned} \quad (7.55)$$

设

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_s &= \mathbf{x}(j-N|j), \quad \mathbf{x}_f = \mathbf{x}(j|j) \\ F_j &= [I - K(j+1)H^T(j+1)]\Phi(j+1,j) \end{aligned} \right\} \quad (7.56)$$

假如在估计稳态时, $P(j|j)$ ,  $P(j+1|j)$ ,  $K(j)$  都与  $j$  无关,  $F_j$ ,  $D(i)$  也与  $j$  无关,且卡尔曼滤波器与(7.55)式的  $z$  变换存在,则对(7.55)式作  $z$  变换可得

$$\begin{aligned} z\mathbf{x}_s(z) &= D\mathbf{x}_s(z) - D^{-N}KH^T\Phi\mathbf{x}_f(z) \\ &\quad - z^{-N}(D - \Phi)\mathbf{x}_f(z) + zD^{-N}K\mathbf{z}(z) \end{aligned} \quad (7.57)$$

对卡尔曼滤波器作  $z$  变换可得

$$z\mathbf{x}_f(z) = F\mathbf{x}_f(z) + zK\mathbf{z}(z) \quad (7.58)$$

消去  $\mathbf{x}_f(z)$  可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s(z) &= (zI - D)^{-1}[-D^{-N}KH^T\Phi - (D - \Phi)z^{-N} \\ &\quad + D^{-N}(zI - F)](zI - F)^{-1}Kz \cdot \mathbf{z}(z) \end{aligned} \quad (7.59)$$

根据  $F$  的定义及(7.59)式,可得希望的传递函数矩阵:

$$\Pi(z) = (zI - D)^{-1}[-Dz^{-N} + \Phi z^{-N} + D^{-N}z - D^{-N}\Phi](zI - F)^{-1}Kz \quad (7.60)$$

由(7.60)式可知, $\pi(z)$ 的极点依靠  $D$  和  $F$  的特征值来确定,而  $F$  的特征值均在单位圆内,但不能保证  $D$  的特征值均在单位圆内。当  $D$  的特征值不在单位圆内时,(7.60)式表示的系统不稳定。因此,必须对(7.60)式作进一步的处理。由于

$$\begin{aligned} -Dz^{-N} + \Phi z^{-N} + D^{-N}z - D^{-N}\Phi &= z^{-N}[(z^{N+1}I - D^{N+1})D^{-N} - (z^NI - D^N)D^{-N}\Phi] \\ &= z^{-N}(zI - D)[(z^NI + z^{N-1}D + \cdots + D^N)D^{-N}] \end{aligned}$$

$$-(z^{N-1}I + z^{N-2}D + \cdots + D^{N-1})D^{-N}\Phi] \quad (7.61)$$

将(7.61)式代入(7.60)式,可得

$$\begin{aligned} \Pi(z) = & [D^{-N} + z^{-1}D^{-N}(D - \Phi) + z^{-2}D^{-N+1}(D - \Phi) \\ & + \cdots + z^{-N}D^{-1}(D - \Phi)](zI - F)^{-1}Kz \end{aligned} \quad (7.62)$$

(7.60)式与(7.62)式的差别在于对消了 $(zI - D)$ ,即(7.60)式所示的系统含有不可控部分,并且,该不可控部分可能是不稳定的(若 $D$ 的特征值位于单位圆外)。相反,(7.62)式中无单位圆外极点,也不会出现零极点的对消。(7.60),(7.62)式的描述可用公式描述如下:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j - N + 1|j + 1) \\ \mathbf{x}(j + 1|j + 1) \\ \mathbf{x}(j|j) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(j - N + 1|j - N + 1) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} D & -D^{-N}KH^T\Phi & 0 & \cdots & 0 & -(D - \Phi) \\ 0 & F & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j - N|j) \\ \mathbf{x}(j|j) \\ \mathbf{x}(j - 1|j - 1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(j - N|j - N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D^{-N}K \\ K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(j + 1) \end{aligned} \quad (7.63)$$

以及

$$\mathbf{x}(j - N|j) = [I, 0, \cdots, 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j - N|j) \\ \mathbf{x}(j|j) \\ \mathbf{x}(j - 1|j - 1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(j - N|j - N) \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

将(7.63),(7.64)式写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(j + 1) &= A\mathbf{u}(j) + B\mathbf{z}(j + 1) \\ \mathbf{x}(j - N|j) &= C\mathbf{u}(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.65)$$

并进行线性变换  $\bar{\mathbf{u}}(j) = T\mathbf{u}(j)$ , 可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}(j + 1) &= TAT^{-1}\bar{\mathbf{u}}(j) + TB\mathbf{z}(j + 1) \\ \mathbf{x}(j - N|j) &= CT^{-1}\bar{\mathbf{u}}(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.66)$$

取

$$T = \begin{bmatrix} I & -D^{-N} & -D^{-N}(D - \Phi) & \cdots & -D^{-1}(D - \Phi) \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}$$

则

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad TB = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CT^{-1} = [I, D^{-N}, D^{-N}(D - \Phi), \dots, D^{-1}(D - \Phi)]$$

因此, (7.66)式可写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(j+1|j+1) \\ \mathbf{x}(j|j) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(j-N+1|j-N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & I & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j|j) \\ \mathbf{x}(j-1|j-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(j-N|j-N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(j+1) \quad (7.67)$$

以及

$$\mathbf{x}(j-N|j) = [D^{-N}, D^{-N}(D - \Phi), \dots, D^{-1}(D - \Phi)] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j|j) \\ \mathbf{x}(j-1|j-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(j-N|j-N) \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

(7.63), (7.64)式为(7.60)式的描述; (7.67), (7.68)式为系统(7.62)的描述。用类似的方法, 可将(7.55)式描述为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(j-N+1|j+1) \\ \mathbf{x}(j+1|j+1) \\ \mathbf{x}(j|j) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(j-N+1|j-N+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D(j-N) & -\left[\prod_{i=j-N+1}^j D^{-1}(i)\right] \cdot K(j+1) & 0 & \cdots & 0 & -[D(j-N) - \Phi(j-N+1, j-N)] \\ 0 & \times H^T(j+1)\Phi(j+1, j) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & F_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}$$



$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j-N|j) \\ \mathbf{x}(j|j) \\ \mathbf{x}(j-1|j-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(j-N|j-N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[ \prod_{i=j-N+1}^j D^{-1}(i) \right] K(j+1) \\ K(j+1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(j+1) \quad (7.69)$$

令

$$T_j = \begin{bmatrix} I - \left[ \prod_{i=j-N}^{j-1} D^{-1}(i) \right] & - \left[ \prod_{i=j-N}^{j-1} D^{-1}(i) \right] & & - D^{-1}(j-N)[D(j-N) - \Phi(j-N+1, j-N)] \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \times [D(j-1) - \Phi(j, j-1)] \dots$$

对(7.69)式进行线性变换可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j-N|j) &= \left[ \prod_{i=j-N}^{j-1} D^{-1}(i) \prod_{i=j-N}^{j-1} D^{-1}(i) [D(j-1) - \Phi(j, j-1)] \right. \\ &\quad \times \prod_{i=j-N}^{j-2} D^{-1}(i) [D(j-2) - \Phi(j-1, j-2)] \dots D^{-1}(j-N) \\ &\quad \left. \times [D(j-N) - \Phi(j-N+1, j-N)] \right] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j|j) \\ \mathbf{x}(j-1|j-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(j-N|j-N) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.70)$$

估计误差的协方差阵为

$$\begin{aligned} P(j-N|j) &= P(j-N|j-N) - \left[ \prod_{i=j-N}^{j-1} D^{-1}(i) \right] [P(j|j-1) - P(j|j)] \\ &\quad \times \left[ \prod_{i=j-N}^{j-1} D^{-1}(i) \right]^T - D^{-1}(j-N) [P(j-N+1|j-N) \\ &\quad - P(j-N+1|j-N+1)] [D^{-1}(j-N)]^T \end{aligned} \quad (7.71)$$

于是(7.70), (7.71)式就是 Chirarattananon-Anderson 固定滞后平滑算法。

#### 7.4.2 Bierman 方法

Bierman 固定滞后平滑方法是在以下的 Bryson-Frazier 固定区间平滑器的基础上推导出来的。Bryson-Frazier 固定区间平滑算法如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(j|N) &= \mathbf{x}(j|j) - P(j|j)\Phi^T(j+1, j)\lambda(j) \\
\lambda(j-1) &= C(j)[\Phi^T(j+1, j)]\lambda(j) - H^T(j)R^{-1}(j)[\mathbf{z}(j) - H(j)\mathbf{x}(j|j)] \\
P(j|N) &= P(j|j)[I - \Phi^T(j+1, j)A(j)\Phi(j+1, j)P(j|j)] \\
A(j-1) &= C^T(j)\Phi^T(j+1, j)A(j)\Phi(j+1, j)C(j) + H^T(j)R^{-1}(j)H(j)C(j) \\
C(j) &= I - P(j|j)H^T(j)R^{-1}(j)H(j) \\
j &= N-1, N-2, \dots, 0
\end{aligned}$$

(7.72)

式中的初始条件为

$$\lambda(N) = 0, A(N) = 0$$

将(7.72)式中  $\mathbf{x}(j|N)$  的  $N$  用  $j$  代替,  $j$  用  $j-N$  代替, 可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(j-N|j) &= \mathbf{x}(j-N|j-N) - P(j-N|j-N) \\
&\quad \times \Phi^T(j-N+1, j-N)\lambda(j-N)
\end{aligned} \tag{7.73}$$

$$\begin{aligned}
P(j-N|j) &= P(j-N|j-N)[I - \Phi^T(j-N+1, j-N) \\
&\quad \times A(j-N+1, j-N)P(j-N|j-N)]
\end{aligned} \tag{7.74}$$

(7.73), (7.74) 式中的  $\lambda(j-N)$  及  $A(j-N)$  必须进行迭代计算:

$$\left. \begin{aligned}
\lambda(i-1) &= C(i)\{\Phi^T(i+1, i)\lambda(i) - H^T(i) \\
&\quad - H^T(i)R^{-1}(i)[\mathbf{z}(i) - H(i)\mathbf{x}(i|i-1)]\} \\
A(i-1) &= C^T(i)\Phi^T(i+1, i)A(i)\Phi(i+1, i)C(i) \\
&\quad + H^T(i)R^{-1}(i)H(i)C(i) \\
C(i) &= I - P(i|i)H^T(i)R^{-1}(i)H(i) \\
i &= j-1, j-2, \dots, j-N
\end{aligned} \right\} \tag{7.75}$$

(7.75) 式的初始条件为

$$\lambda(j) = 0, A(j) = 0$$

(7.73)~(7.75) 式就是 Bierman 固定滞后平滑算法。

#### 7.4.3 Anderson-Moore 方法

固定滞后平滑问题可描述为

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{x}(j-N|j) &= E[\mathbf{x}(j-N)|Z_j] \\
P(j-N|j) &= E\{[\mathbf{x}(j-N) - \mathbf{x}(j-N|j)] \\
&\quad \times [\mathbf{x}(j-N) - \mathbf{x}(j-N|j)]^T | Z_j\}
\end{aligned} \right\} \tag{7.76}$$

式中

$$Z_j = [\mathbf{z}(0), \mathbf{z}(1), \dots, \mathbf{z}(j)]$$

令  $\mathbf{x}^{(1)}(j) = \mathbf{x}(j-1)$ ,  $\mathbf{x}^{(2)}(j) = \mathbf{x}(j-2)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{x}^{(N)}(j) = \mathbf{x}(j-N)$ ,  $\mathbf{x}^{(N+1)}(j) = \mathbf{x}(j-N-1)$ , 并根据(7.1), (7.2) 式建立如下状态方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(j+1) \\ \mathbf{x}^{(1)}(j+1) \\ \mathbf{x}^{(2)}(j+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(N+1)}(j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(j+1, j) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{x}(j) \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{x}^{(1)}(j) \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{x}^{(2)}(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 & \mathbf{x}^{(N+1)}(j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(j) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}(j) \quad (7.77)$$

以及

$$\mathbf{z}(j) = [H(j), 0, 0, \cdots, 0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j) \\ \mathbf{x}^{(1)}(j) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(N+1)}(j) \end{bmatrix} + \mathbf{v}(j) \quad (7.78)$$

应用卡尔曼滤波方法对(7.77), (7.78)式描述的增广系统进行估计, 可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j-i|j) &= \mathbf{x}(j-i|j-1) + K^{(i+1)}(j)[\mathbf{z}(j) - H(j)\mathbf{x}(j|j-1)] \\ K^{(i+1)}(j) &= P^{(i)}(j|j-1)H^T(j)[R(j) + H(j)P(j|j-1)H^T(j)^{-1}] \\ P^{(i+1)}(j+1|j) &= P^{(i)}(j|j-1)[\Phi(j+1, j) - K(j)H(j)]^T \\ P(j-i|j) &= P(j-i|j-1) - P^{(i)}(j|j-1)H^T(j)[K^{(i+1)}(j)]^T \end{aligned} \right\} \quad i = 0, 1, 2, \cdots, N \quad (7.79)$$

对(7.79)式进行迭代计算, 可得

$$\begin{aligned} P(j-N|j) &= P(j-N|j-N-1) - \sum_{l=j-N}^j P^{(q)}(l|l-1)H^T(l)[K^{(q+1)}(l)]^T \\ &= P(j-N|j-N-1) - \sum_{l=j-N}^j \{P^{(q)}(l|l-1)H^T(l) \\ &\quad \times [H(l)P(l|l-1)H^T(l) + R(l)]^{-1}H(l)[P^{(q)}(l|l-1)]^T\} \end{aligned} \quad (7.80)$$

(式中  $q=l-j+N$ )

以及

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j-N|j) &= \mathbf{x}(j-N|j-N) + P(j-N|j-N-1) \\ &\quad \times \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{e}^{(i+1)}(j-i-N) \right] \\ \mathbf{e}^{(i+1)}(j) &= [\Phi(j-i+1, j-i) - K(j-i)H(j-i)]\mathbf{e}^{(i)}(j) \\ &= [\Phi(j-i+1, j-i) - P(j-i|j-i)H^T(j-i) \\ &\quad \times R^{-1}(j-i)H(j-i)]\mathbf{e}^{(i)}(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.81)$$

而

$$\mathbf{e}^{(1)}(j) = H^T(j)[H(j)P(j|j-1)H^T(j) + R(j)]^{-1}[\mathbf{z}(j) - H(j)\mathbf{x}(j|j-1)]$$

为了得到  $P(j-N|j)$ , 必须求出  $P^{(i)}(l|l-1)$ 。由(7.79)式的迭代计算可得

$$P^{(i)}(l|l-1) = P(l-i|l-i-1) \prod_{q=l-i}^{l-1} [\Phi(q+1, q) - K(q)H(q)]^T$$

$$\begin{aligned}
&= P^{(l-1)}(l-1|l-2)[\Phi(l, l-1) - K(l-1)H(l-1)]^T \\
&= P^{(l-1)}(l-1|l-2)[\Phi(l, l-1) - P(l-1|l-1) \\
&\quad \times H^T(l-1)R^{-1}(l-1)H(l-1)]^T
\end{aligned} \quad (7.82)$$

(7.82)式的初值为

$$P^{(0)}(l|l-1)|_{l=j-N} = P(j-N|j-N-1)$$

(7.80)~(7.82)式即为 Anderson-Moore 固定滞后平滑方法。平滑估计所需的滤波值的计算式与普通卡尔曼滤波公式相同, 此处不再叙述。

超星浏览器提醒您:  
请尊重知识产权

#### 7.4.4 U-D 分解的固定滞后平滑新方法

通过分析 Chirarattananon-Anderson 方法、Bierman 方法、Anderson-Moore 方法, 我们可以看出这些方法的平滑误差协方差阵的计算式都含有两个正定(半正定)矩阵的相减运算, 算法的数值稳定性较差; 另外, 平滑估计的计算及其误差协方差阵的计算式也太复杂, 计算效率低。为了解决这些问题, 作者给出了一种 U-D 分解的固定滞后平滑方法。下面, 就将这一方法作一介绍。根据 7.2 节中(7.23)式给出的固定区间平滑算法可得

$$\left. \begin{aligned} P(j|N) &= G(j)P(j+1|N)G^T(j) + F(j)\Lambda(j)F^T(j) \\ \mathbf{x}(j|N) &= \mathbf{x}(j|j) + G(j)[\mathbf{x}(j+1|N) - \mathbf{x}(j+1|j)] \end{aligned} \right\} \quad (7.83)$$

式中

$$\begin{aligned} F(j) &= \Phi^{-1}(j+1, j)\Gamma(j) \\ \Lambda(j) &= [Q^{-1}(j) + F^T(j)P^{-1}(j|j)F(j)]^{-1} \\ G(j) &= [I - F(j)\Lambda(j)F^T(j)P^{-1}(j|j)]\Phi^{-1}(j+1, j) \end{aligned}$$

令

$$j \leftarrow j - N, \quad N = j$$

则(7.83)式可写为

$$\left. \begin{aligned} P(j-N|j) &= G(j-N)P(j-N+1|j)G^T(j-N) \\ &\quad + F(j-N)\Lambda(j-N)F^T(j-N) \\ \mathbf{x}(j-N|j) &= \mathbf{x}(j-N|j-N) + G(j-N) \\ &\quad \times [\mathbf{x}(j-N+1|j) - \mathbf{x}(j-N+1|j-N)] \end{aligned} \right\} \quad (7.84)$$

由(7.84)式可以建立如下的平滑计算式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j-N|j) &= [I - G(j-N)\Phi(j-N+1, j-N)] \\ &\quad \times \mathbf{x}(j-N|j-N) + G(j-N)\mathbf{x}(j-N+1|j) \\ &= \sum_{l=j-N}^{j-1} B(l-j+N)[I - G(l)\Phi(l+1, l)] \\ &\quad \times \mathbf{x}(l|l) + B(N)\mathbf{x}(j|j) \\ P(j-N|j) &= \sum_{l=j-N}^{j-1} B(l-j+N)F(l)\Lambda(l)F^T(l)B^T(l-j+N) \\ &\quad + B(N)P(j|j)B^T(N) \end{aligned} \right\} \quad (7.85)$$

式中,  $B(0) = I$ ;  $B(i+1) = B(i)G(i+j-N)$ ;  $i = 1, 2, \dots, N-1$ 。

根据(7.83), (7.85)式, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j-N|j) &= \sum_{l=j-N}^{j-1} B(l-j+N)F(l)\Delta(l)F^T(l)P^{-1}(l|l)\mathbf{x}(l|l) \\ &\quad + B(N)\mathbf{x}(j|j) \end{aligned} \quad (7.86)$$

(7.85)式中的  $P(j-N|j)$  计算式不再有两个正定矩阵的相减运算, 数值稳定性得到了改善。然而, 在  $B(i)$  的迭代计算中, 有两个  $n \times n$  矩阵的相乘运算, 计算量仍较大。为此, 我们还采用了如下的变换:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i|i) &= \Phi(i, 0)\mathbf{x}^*(i|i), \\ P(i|i) &= \Phi(i, 0)P^*(i|i)\Phi^T(i, 0) \\ \mathbf{x}(i+1|i) &= \Phi(i+1, 0)\mathbf{x}^*(i+1|i), \\ P(i+1|i) &= \Phi(i+1, 0)P^*(i+1|i)\Phi^T(i+1, 0) \end{aligned} \quad (7.87)$$

根据卡尔曼滤波公式, 可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^*(j|j-1) &= \mathbf{x}^*(j-1|j-1) \\ P^*(j|j-1) &= P^*(j-1|j-1) + W(j-1)Q(j-1)W^T(j-1) \\ \mathbf{x}^*(j|j) &= \mathbf{x}^*(j-1|j-1) + K^*(j)[\mathbf{z}(j) - M(j)\mathbf{x}^*(j|j-1)] \\ P^*(j|j) &= P^*(j|j-1) - P^*(j|j-1)M^T(j)[R(j) + M(j) \\ &\quad \times P^*(j|j-1)M^T(j)]^{-1}M(j)P^*(j|j-1) \\ K^*(j) &= P^*(j|j-1)M^T(j)[R(j) + M(j)P^*(j|j-1)M^T(j)]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.88)$$

式中  $W(j-1) = \Phi^{-1}(j, 0)\Gamma(j-1)$ ;  $M(j) = H(j)\Phi(j, 0)$ 。

此外, 平滑方法也可以简化, 因为

$$G(i) = \Phi(i, 0)\{I - W(i)\Delta(i)W^T(i)[P^*(i|i)]^{-1}\}\Phi(i+1, 0)$$

令

$$\left. \begin{aligned} B^*(i) &= B(i) \cdot \Phi(i+j-N, 0) \\ G^*(i+j-N) &= G(i+j-N)\Phi^{-1}(i+j-N+1, 0) \\ i &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \right\} \quad (7.89)$$

有

$$\begin{aligned} B^*(i+1) &= B^*(i)G^*(i+j-N) \\ &= B^*(i)\{I - W(i+j-N)\Delta(i+j-N)W^T(i+j-N) \\ &\quad \times [P^*(i+j-N|i+j-N)]^{-1}\} \end{aligned} \quad (7.90)$$

根据(7.87), (7.89), (7.90)式及(7.85)式, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j-N|j) &= \sum_{l=j-N}^{j-1} B^*(l-j+N)W(l)\Delta(l)W^T(l)[P^*(l|l)]^{-1}\mathbf{x}^*(l|l) \\ &\quad + B^*(N)\mathbf{x}^*(j|j) \end{aligned} \quad (7.91)$$

$$\begin{aligned} P(j-N|j) &= \sum_{l=j-N}^{j-1} B^*(l-j+N)W(l)W^T(l)[B^*(l-j+N)]^T \\ &\quad + B^*(N)P^*(j|j)[B^*(N)]^T \end{aligned} \quad (7.92)$$

$$\left. \begin{aligned} G^*(i+j-N) &= I - W(i+j-N)A(i+j-N)W^T(i+j-N) \\ &\quad \times [P^*(i+j-N|i+j-N)]^{-1} \\ A(l) &= \{Q^{-1}(l) + W^T(l)[P^*(l|l)]^{-1}W(l)\}^{-1} \\ B^*(i+1) &= B^*(i)G^*(i+j-N) \\ i &= 0, 1, \dots, N-1; \quad l = j-N, j-N+1, \dots, j-1 \end{aligned} \right\} (7.93)$$

以及

$$B^*(0) = \Phi(j-N, 0)$$

(7.91)~(7.93)式给出了新的固定滞后平滑公式。为了使新算法具有良好的数值稳定性和较高的计算效率,滤波误差协方差阵和  $A$  的计算采用了 U-D 分解。设

$$\begin{aligned} P^*(j|j) &= U(j)D(j)U^T(j) \\ P^*(j+1|j) &= U(j+1|j)D(j+1|j)U^T(j+1|j) \\ A(i) &= U_A^{-T}(i)D_A^{-1}(i)U_A^{-1}(i) \end{aligned}$$

因此,平滑方法可重新描述为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j-N|j) &= \sum_{l=j-N}^{j-1} [B^*(l-j+N) \\ &\quad - B^*(l-j+N+1)]\mathbf{x}^*(l|l) + B^*(N)\mathbf{x}^*(j|j) \\ P(j-N|j) &= \sum_{l=j-N}^{j-1} A(l)D_A^{-1}(l)A^T(l) + C(N)D(j)C^T(N) \\ B^*(i+1) &= B^*(i) - A(i+j-N)D_A^{-1}(i+j-N)S(i+j-N) \end{aligned} \right\} (7.94)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A(i) &= B^*(i-j+N)[W(i)U_A^{-T}(i)] \quad (i = j-N, j-N+1, \dots, j-1) \\ C(N) &= B^*(N)U(j) \\ S(i) &= U_A^{-1}(i)[W^T(i)U^{-T}(i)]D^{-1}(i)U^{-1}(i) \\ A^{-1}(i) &= Q^{-1}(i) + [W^T(i)U^{-1}(i)]D^{-1}(i)[U^{-1}(i)W(i)] \end{aligned} \right\} \\ i = j-N, j-N+1, \dots, j-1$$

(7.94)式就是新的 U-D 分解固定滞后平滑算法,平滑所需的滤波值根据(7.88)式求得。

#### 7.4.5 计算量比较

新的 U-D 分解固定滞后平滑算法一步滤波和一步平滑所需计算量分别如表 7.8 及表 7.9 所示。

表 7.8 一步滤波所需计算量

算式	加法	乘法	除法
$W(k)$	$np(n-1)$	$n^2p$	
$M(k)$	$nm(n-1)$	$n^2m$	
$P^*(k+1 k)$	$n^2p$	$n^2p+2np+p$	$2(n-1)p$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

续表

算式	加法	乘法	除法
测量更新	$(1.5n^2 + 1.5n)m$	$(1.5n^2 + 5.5n)m$	$nm$
$W \cdot U_{\bar{A}}^T$	$\frac{1}{2}np(p-1)$	$\frac{1}{2}np(p-1)$	
$A$	$np^2$	$np^2 + 2np + n$	$n$
$W^T \cdot U^{-T}$	$\frac{1}{2}np(n-1)$	$\frac{1}{2}np(n-1)$	
$D\bar{A}^{-1}S, S$	$\frac{1}{2}np(p-1) + \frac{1}{2}np(n-1)$	$\frac{1}{2}np(p-1) + \frac{1}{2}p(p-1) + \frac{1}{2}p(p-1) + np$	
总计	$n^2(3p+2.5m) + n(0.5m + 2p^2) - 3np$	$n^2(3p+2.5m) + \frac{1}{2}p(p+1) + n(2p^2+3p+5.5m+1)$	$n(2p+m+1) - 2p$

表 7.9 一步平滑所需计算量

算式	加法	乘法	除法
$A$	$Nnp(n-1)n^2p$	$Nn^2p - n^2p$	
$B$	$Nn^2p - n^2p$	$Nn^2p - n^2p$	
$x(k-N k)$	$2N(n-1)n - n^2$	$Nn^2 - n^2$	
$C$	$\frac{1}{2}n^2(n-1)$	$\frac{1}{2}n^2(n-1)$	
$P(k-N k)$	$Nn(n-1) + n^2$	$2Nn^2 + 2n^2$	
总计	$\frac{1}{2}n^3 + n^2(2Np+3N-0.5) - 2n^2p - Nn(p+3)$	$\frac{1}{2}n^3 + n^2(2Np+3N+0.5) - 2n^2p$	

本书涉及的五种固定滞后平滑方法所需计算量的比较如表 7.10 所示。

表 7.10 一步平滑所需计算量比较

算法	加法	乘法	除法
SFL	$\frac{1}{2}n^3 + n^2(2NP+3N-0.5) - 2n^2p - Nn(p+3)$	$\frac{1}{2}n^3 + n^2(2NP+3N+0.5) - 2n^2p$	
MFL	$n^3\left(\frac{13}{3}N+1\right) + n^2\left(3m - \frac{9}{2}N+8\right) + n\left(\frac{1}{6}N - 3m - 6\right)$	$n^3\left(\frac{13}{3}N+1\right) + 3n^2(m+2) - \frac{1}{3}Nn$	$Nn$



续表

算法	加法	乘法	除法
CAFL	$n^3(4N+3)-2Nn^2-Nn$	$n^3(4N+3)+n^2(2N+1)$	$Nn$
AMFL	$n^3N+n^3(nm+2N+2)+\frac{1}{3}mN$ $+\frac{2}{3}Nm^3-Nm^3+n(2Nm^2$ $+Nm-N-1)$	$n^3N+n^2(N+1+2nm)+\frac{2}{3}Nm^3$ $-\frac{2}{3}Nm+n(mN+Nm^2)$	
BFL	$[3n^2+n^2(5m+1)-n(2m+1)]$ $\times(N-1)+3n^3+n^2-2n$	$[3n^3+n^2(5m+2)](N-1)$ $+3n^3+2n^2$	

表 7.10 中, SFL 指新的 U-D 分解固定滞后平滑方法, MFL 指 Meditch 方法, CAFL 指 Chirarattananon-Anderson 方法, AMFL 指 Anderson-Moore 方法, BFL 指 Bierman 方法。

MFL, CAFL, AMFL, BFL 方法的平滑计算所需滤波值和协方差阵的计算量如下:

$$\text{加法: } \frac{3}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2(3m+p-1) + \frac{1}{6}n(15m+3p-6)$$

$$\text{乘法: } \frac{3}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2(3m+p+3) + \frac{1}{6}n(27m+9p)$$

除法:  $m$

为了进一步说明 SFL 方法的计算效率, 表 7.11 给出了一步滤波、一步平滑总计算量的数值例子。由表 7.11 可知, SFL 方法最有效。

表 7.11 一步滤波、一步平滑所需计算量的比较举例

算法	$n=10, p=m=N=2$			$n=10, p=m=N=5$			$n=30, p=m=N=10$		
	加法	乘法	除法	加法	乘法	除法	加法	乘法	除法
SFL	1750	1950	0	5950	6450	0	201750	220050	0
MFL	10050	10860	20	22515	24750	50	1189670	1179900	300
CAFL	10580	11500	20	21950	24100	50	1142700	499500	300
AMFL	3174	3288	8	11690	12500	25	448170	1314900	200
BFL	9030	8970	2	27670	30300	5	1268340	1314900	10

## 7.5 前向平滑估计方法

在数据处理中, 希望数据按时间的先后顺序排列, 否则处理起来不方便。如在飞行试验中, 飞行状态平滑估计的结果必须按时间次序排列好, 否则无法辨识气动导数并计算飞机性能。应用 7.2 节给出的固定区间平滑方法所得结果, 常常需要重新排序, 有时使用很不方便。为此, 本节给出两种有效的前向固定区间平滑方法。

### 7.5.1 Watanabe 前向平滑方法

平滑估计可看作是在(7.1)式的约束下求泛函

$$J_n = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(0|0)\|_{P(0|0)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \|\mathbf{z}(j) - H(j)\mathbf{x}(j)\|_{R^{-1}(j)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \|\mathbf{w}(j)\|_{Q^{-1}(j)}^2 \quad (7.95)$$

的极值问题。引入拉格朗日乘子向量  $\lambda(j|N)$ , 在该约束条件下的泛函极值问题可化为

$$I_n = J_n + \sum_{j=0}^{N-1} \lambda(j|N) [\mathbf{x}(j+1) - \Phi(j+1, j)\mathbf{x}(j) - \Gamma(j)\mathbf{w}(j)] \quad (7.96)$$

根据(7.96)式极值的必要条件, 可得出下述结果:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j+1|N) \\ \lambda(j+1|N) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi(j+1, j) & \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) \\ -H^T(j)R^{-1}(j)H(j) & \Phi^T(j+1, j) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \mathbf{x}(j|N) \\ \lambda(j|N) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H^T(j)R^{-1}(j) \end{bmatrix} \mathbf{z}(j) \end{aligned} \quad (7.97)$$

初始条件为

$$\mathbf{x}(0|N) = \mathbf{x}(0|0) + P(0|0)\lambda(-1|N), \quad \lambda(N|N) = 0$$

这是一个两点边值问题, 求解该问题就可给出平滑计算式。由 R-T-S 算法及(7.97)式可得

$$\mathbf{x}(j|N) = \mathbf{x}(j|j-1) + P(j|j-1)\lambda(j-1|N) \quad (7.98)$$

另一方面, 根据 Mayne B 型两个滤波器平滑算法, 有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j|N) &= P(j|N)[\mathbf{q}(j) + P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1)] \\ P(j|N) &= [S(j) + P^{-1}(j|j-1)]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.99)$$

比较(7.98), (7.99)式可得

$$\begin{aligned} &\lambda(j-1|N) + P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1) \\ &= P^{-1}(j|j-1)P(j|N)[\mathbf{q}(j) + P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1)] \\ &= [P^{-1}(j|N) - S(j)]P(j|N)[\mathbf{q}(j) + P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1)] \\ &= [I - S(j)P(j|N)][\mathbf{q}(j) + P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1)] \\ &= \mathbf{q}(j) + P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1) - S(j)P(j|N) \\ &\quad \times [\mathbf{q}(j) + P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1)] \\ &= \mathbf{q}(j) + P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1) - S(j)\mathbf{x}(j|N) \end{aligned}$$

两端消去  $P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1)$ , 可得

$$\lambda(j-1|N) = \mathbf{q}(j) - S(j)\mathbf{x}(j|N) \quad (7.100)$$

将(7.100)式代入(7.97)式, 可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j+1|N) &= [I + \Gamma(j)Q(j)S(j+1)]^{-1} [\Phi^*(j+1, j)\mathbf{x}(j|N) \\ &\quad + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)\mathbf{q}(j+1)] \\ \mathbf{x}(0|N) &= [I + P(0|0)S(0)]^{-1} [P(0|0)\mathbf{q}(0) + \mathbf{x}(0|0)] \end{aligned} \right\} \quad (7.101)$$

以及

$$\lambda(j-1|N) = \Phi^T(j+1, j)\mathbf{q}(j+1) - \Phi^T(j+1, j)S(j+1)\mathbf{x}(j+1|N)$$

$$-H^T(j)R^{-1}(j)H(j)\mathbf{x}(j|N) + H^T(j)R^{-1}(j)\mathbf{z}(j) \quad (7.102)$$

将(7.101)式代入(7.102)式,可得

$$\begin{aligned} \lambda(j-1|N) = & \Phi^T(j+1,j)\mathbf{q}(j+1) - \Phi^T(j+1,j)S(j+1) \\ & \times [I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]^{-1}\Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)\mathbf{q}(j+1) \\ & + H^T(j)R^{-1}(j)\mathbf{z}(j) - \{\Phi^T(j+1,j)S(j+1)[I - \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)]^{-1} \\ & \times \Phi(j+1,j) + H^T(j)R^{-1}(j)H(j)\}\mathbf{x}(j|N) \end{aligned} \quad (7.103)$$

比较(7.100),(7.103)式,可得后向信息滤波方程:

$$\left. \begin{aligned} S(j) &= \Phi^T(j+1,j)S(j+1)[I + \Gamma(j)Q(j)S(j+1)]^{-1} \\ &\quad \times \Phi(j+1,j) + H^T(j)R^{-1}(j)H(j) \\ S(N+1) &= 0 \\ \mathbf{q}(j) &= \Phi^T(j+1,j)\{I - S(j+1)[I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) \\ &\quad \times S(j+1)]^{-1}\Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)\}\mathbf{q}(j+1) \\ &\quad + H^T(j)R^{-1}(j)\mathbf{z}(j) \\ \mathbf{q}(N+1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.104)$$

根据(7.1)及(7.101)式可得

$$\begin{aligned} [I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]\tilde{\mathbf{x}}(j+1|N) + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)\tilde{\mathbf{q}}(j+1) \\ - \mathbf{x}(j+1) = -\Phi(j+1,j)\mathbf{x}(j|N) \end{aligned} \quad (7.105)$$

式中

$$\tilde{\mathbf{q}}(j) \triangleq \mathbf{q}(j) - S(j)\mathbf{x}(j)$$

或

$$\tilde{\mathbf{q}}(j) = \lambda(j-1|N) - S(j)\tilde{\mathbf{x}}(j|N)$$

及

$$\tilde{\mathbf{x}}(j|N) = \mathbf{x}(j) - \mathbf{x}(j|N)$$

由(7.105)式可得

$$\begin{aligned} & E\{[I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]\tilde{\mathbf{x}}(j+1|N) + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) \\ & \quad \times \tilde{\mathbf{q}}(j+1) - \mathbf{x}(j+1)\}\{[I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]\tilde{\mathbf{x}}(j+1|N) \\ & \quad + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)\tilde{\mathbf{q}}(j+1) - \mathbf{x}(j+1)\}^T\} \\ &= [I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]P(j+1|N)[I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]^T \\ & \quad - [I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]P(j+1|N)S(j+1) \\ & \quad \times \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) - [I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]P(j+1|N) \\ & \quad - \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)P(j+1|N)[I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]^T \\ & \quad + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)\Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) - P(j+1|N) \\ & \quad \times [I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]^T + E[\mathbf{x}(j+1)\mathbf{x}^T(j+1)] \\ &= -\Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)P(j+1|N) - P(j+1|N) - P(j+1|N)S(j+1) \\ & \quad \times \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) - \Gamma^T(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)P(j+1|N)S(j+1)\Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) \\ & \quad + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)\Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) + E[\mathbf{x}(j+1)\mathbf{x}^T(j+1)] \end{aligned} \quad (7.106)$$

而

$$E[\mathbf{x}(j+1)\mathbf{x}^T(j+1)] = \Phi(j+1,j)E[\mathbf{x}(j)\mathbf{x}^T(j)]\Phi^T(j+1,j) + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) \quad (7.107)$$

在平滑估计中,有如下关系式成立:

$$E[\mathbf{x}(j|j-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(j|N)] = E\{\mathbf{x}(j|j-1)E[\mathbf{x}^T(j) - \mathbf{x}(j|N)|\mathbf{z}_N]\} \\ = 0 \quad (7.108)$$

因为

$$E[\tilde{\mathbf{x}}(j|N)\mathbf{x}^T(j|N)] = 0$$

有

$$E[\tilde{\mathbf{x}}(j|N)\tilde{\mathbf{x}}^T(j|N)] = E\{[\mathbf{x}(j) - \mathbf{x}(j|j-1)]\tilde{\mathbf{x}}^T(j|N)\} \quad (7.109)$$

及

$$E[\tilde{\mathbf{x}}(j|j-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(j|N)] = P(j|N)$$

由(7.108)式,可得

$$E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j)] = E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j|N)] \quad (7.110)$$

且

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j|N)] &= E[\mathbf{x}(j)\mathbf{x}^T(j|N)] - E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j|N)] \\ &= E[\mathbf{x}(j)\mathbf{x}^T(j|N)] - E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j)] \\ &= E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j|j-1)] - E[\mathbf{x}(j|N)\mathbf{x}^T(j|N)] \\ &= P(j|j-1) - P(j|N) \end{aligned} \quad (7.111)$$

由(7.108)~(7.111)式,可以得到

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(j)\mathbf{x}^T(j)] &= E[\mathbf{x}(j|N)\mathbf{x}^T(j|N)] + P(j|N) \\ &= E[\mathbf{x}(j|j-1)\mathbf{x}^T(j|j-1)] + P(j|j-1) \end{aligned} \quad (7.112)$$

进而可得

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(j+1)\mathbf{x}^T(j+1)] &= \Phi(j+1, j)E[\mathbf{x}(j|N)\mathbf{x}^T(j|N)]\Phi^T(j+1, j) \\ &= \Phi(j+1, j)P(j|N)\Phi^T(j+1, j) + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) \end{aligned} \quad (7.113)$$

由(7.105)~(7.107), (7.113)式可得

$$\begin{aligned} &- [I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]P(j+1|N)[I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]^T \\ &+ \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)A(j+1)\Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) + \Phi(j+1, j)P(j|N)\Phi^T(j+1, j) \\ &+ \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) = 0 \end{aligned} \quad (7.114)$$

代入(7.106)式中,有

$$\begin{aligned} P(j+1|N) &= [I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]^{-1} \left\{ \begin{aligned} &[\Phi(j+1, j)P(j|N)\Phi^T(j+1, j) \\ &+ \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j) + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)\Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)] \\ &\times [I + \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)S(j+1)]^{-T} \end{aligned} \right\} \\ P(0|N) &= [I + P(0|0)S(0)]^{-1}P(0|0) \end{aligned} \quad (7.115)$$

根据矩阵反演公式及(7.103)~(7.106)式有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j+1|N) &= [I - G(j)\Delta(j)G^T(j)S(j+1)]\Phi(j+1, j)\mathbf{x}(j|N) \\ &\quad + G(j)\Delta(j)G^T(j)\mathbf{q}(j+1) \\ P(j+1|N) &= [I - G(j)\Delta(j)G^T(j)S(j+1)]\Phi(j+1, j)P(j|N)\Phi^T(j+1, j) \\ &\quad \times [I - G(j)\Delta(j)G^T(j)S(j+1)]^T + G(j)\Delta(j)G^T(j) \end{aligned} \quad (7.116)$$

式中

$$\mathbf{x}(0|N) = [I + P(0|0)S(0)]^{-1}[P(0|0)\mathbf{q}(0) + \mathbf{x}(0|0)]$$

$$P(0|N) = [I + P(0|0)S(0)]^{-1}P(0|0)$$

$$\Delta(j) \triangleq [I + G^T(j)S(j+1)G(j)]^{-1}$$

$$G(j)G^T(j) \triangleq \Gamma(j)Q(j)\Gamma^T(j)$$

$$S(j) = \Phi^T(j+1, j)S(j+1)[I - G(j)\Delta(j)G^T(j)S(j+1)]\Phi(j+1, j) + H^T(j)R^{-1}(j)H(j)$$

$$S(N+1) = 0$$

$$\mathbf{q}(j) = \Phi^T(j+1, j)[I - S(j+1)G(j)\Delta(j)G^T(j)]\mathbf{q}(j+1) + H^T(j)R^{-1}(j)\mathbf{z}(j)$$

因此(7.116)式给出了前向平滑算法。在推导(7.116)式时,应用了如下结果:

$$E[\tilde{\mathbf{q}}(j)\mathbf{x}^T(j)] = 0$$

$$E[\tilde{\mathbf{q}}(j)\tilde{\mathbf{x}}^T(j|j-1)] = 0$$

$$E[\lambda(j-1|N)\mathbf{x}^T(j)] = E[\lambda(j-1|N)\mathbf{x}^T(j|N)] = S(j)P(j|N)$$

$$E[\lambda(j-1|N)\mathbf{x}^T(j|j-1)] = 0$$

$$E[\lambda(j-1|N)\tilde{\mathbf{x}}^T(j|j-1)] = S(j)P(j|N)$$

$$E[\lambda(j-1|N)\tilde{\mathbf{x}}^T(j|N)] = 0$$

$$E[\lambda(j-1|N)\lambda^T(j|N)] = S(j) - S(j)P(j|N)S(j)$$

$$E[\tilde{\mathbf{q}}(j)\tilde{\mathbf{q}}^T(j)] = S(j)$$

$$E[\tilde{\mathbf{q}}(j)\tilde{\mathbf{x}}^T(j|N)] = -S(j)P(j|N)$$

为了便于计算,前向平滑算法可整理如下:

平滑估计

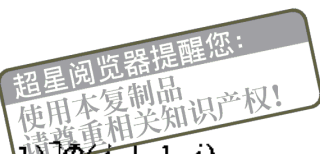
$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(j+1|N) &= \Phi(j+1, j)\mathbf{x}(j|N) \\ \mathbf{x}(0|N) &= [I + P(0|0)S(0)]^{-1}[P(0|0)\mathbf{q}(0) + \mathbf{x}(0|0)] \\ \mathbf{x}(j+1|N) &= [I - G(j)K^T(j+1)]\mathbf{x}(j+1|N) \\ &\quad + G(j)[I + G^T(j)S(j+1)G(j)]^{-1}\mathbf{y}(j+1) \end{aligned} \right\} \quad (7.117)$$

平滑估计误差的协方差阵

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}(j+1|N) &= \Phi(j+1, j)P(j|N)\Phi^T(j+1, j) \\ P(0|N) &= [I + P(0|0)S(0)]^{-1}P(0|0) \\ P(j+1|N) &= [I - G(j)K^T(j+1)]\bar{P}(j+1|N) \\ &\quad \times [I - G(j)K^T(j+1)]^T + G(j) \\ &\quad \times [I + G^T(j)S(j+1)G(j)]^{-1}G(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.118)$$

如果将(7.117)式中 $\mathbf{y}(j+1)$ 当作输入向量, $K(j+1)$ 当作增益矩阵, $\mathbf{q}(j)$ 当作状态向量,可得出如下的类似滤波公式:

测量更新



$$\begin{aligned}
 K(j+1) &= S(j+1)G(j)[I + G^T(j)S(j+1)G(j)]^{-1} \\
 S(N+1) &= 0 \\
 \bar{S}(j+1) &= [I - K(j+1)G^T(j)]S(j+1) \\
 \bar{q}(j+1) &= [I - K(j+1)G^T(j)]q(j+1) \\
 q(N+1) &= 0
 \end{aligned} \tag{7.119}$$

时间更新

$$\begin{aligned}
 S(j) &= \Phi^T(j+1, j)\bar{S}(j+1)\Phi(j+1, j) + H^T(j)R^{-1}(j)H(j) \\
 q(j) &= \Phi^T(j+1, j)\bar{q}(j+1) + H^T(j)R^{-1}(j)z(j) \\
 y(j) &= G^T(j)q(j)
 \end{aligned} \tag{7.120}$$

为了进一步提高计算效率,对(7.117)~(7.120)式采用 U-D 分解进行计算。设

$$\begin{aligned}
 G(j) &= [g_1, \dots, g_i, \dots, g_p] \\
 K^T(j+1) &= [f(1), f(2), \dots, f(p)] \\
 S(j+1) &= U(j+1)D(j+1)U^T(j+1) \\
 \bar{S}(j+1) &= \bar{U}(j+1)\bar{D}(j+1)\bar{U}^T(j+1)
 \end{aligned}$$

测量更新(7.119)式可用序列方法处理:

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha^*(i) &= 1 | \alpha^{(i)}(j+1) \\
 e(i) &= g_i^T \bar{q}(i-1) \\
 \bar{q}(i) &= \bar{q}(i-1) - f(i)e(i)
 \end{aligned} \right\} \tag{7.121}$$

$$i = 1, 2, \dots, p$$

式中  $\bar{q}(0) = q(j+1)$ ;  $\bar{U}^{(0)}(j+1)$ ,  $\bar{D}^{(0)}(j+1)$ ,  $f(i)$  均可按 Bierman-Thornton U-D 测量更新算法得到,且

$$\begin{aligned}
 \bar{U}^{(0)}(j+1) &= U(j+1), \bar{D}^{(0)}(j+1) = D(j+1) \\
 \bar{U}(j+1) &= \bar{U}^{(p)}(j+1), \bar{D}(j+1) = \bar{D}^{(p)}(j+1), \bar{q}(j+1) = \bar{q}(p)
 \end{aligned}$$

时间更新(7.120)式的 U-D 分解可由 MWG-S 方法得到。

平滑估计(7.117)式的序列方法如下:

$$\left. \begin{aligned}
 h(i) &= f^T(i)x^{(i-1)} \\
 \beta(0) &= y^{(0)}(j+1)\alpha^*(i) \\
 \gamma(i) &= \beta(i) - h(i) \\
 x^{(i)} &= x^{(i-1)} + \gamma(i)g_i
 \end{aligned} \right\} \tag{7.122}$$

$$i = 1, 2, \dots, p$$

(7.122)式的初值为

$$x^{(0)} = \bar{x}(j+1|N)$$

估计结果为

$$x(j+1|N) = x^{(p)}$$

平滑估计误差的协方差阵计算式(7.118)也可采用序列方法计算。设

$$P(j|N) = U(j|N)D(j|N)U^T(j|N), \quad W = [\Phi(j+1, j)U(j|N)]$$

于是有

$$\bar{U}(j+1|N)\bar{D}(j+1|N)\bar{U}^T(j+1|N) = \Phi(j+1, j)P(j|N)\Phi^T(j+1, j) \tag{7.123}$$

先用 MWG-S 方法对(7.123)式进行 U-D 分解,再计算

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}^{(0)}(j+1|N)\bar{D}^{(0)}(j+1|N)[\bar{U}^{(0)}(j+1|N)]^T &= W^{(0)}\tilde{D}^{(0)}[W^{(0)}]^T \\ W^{(0)} &= [(I - \mathbf{g}_i \mathbf{f}^T(i))\bar{U}^{(0-1)}(j+1|N)] \\ \tilde{D}^{(0)} &= \text{diag}[D^{(0-1)}(j+1|N)] \\ &\quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \right\} \quad (7.124)$$

式中  $\bar{U}^{(0)}(j+1|N) = \bar{U}(j+1|N)$ ,  $\tilde{D}^{(0)} = \bar{D}(j+1|N)$ 。

最后,应用 Thornton-Jacobson 时间更新算法计算,得

$$\begin{aligned} &U^{(0)}(j+1|N)D^{(0)}(j+1|N)[U^{(0)}(j+1|N)]^T \\ &= U^{(0-1)}(j+1|N)D^{(0-1)}(j+1|N)[U^{(0-1)}(j+1|N)]^T \\ &\quad + \alpha^*(i)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_i^T \end{aligned} \quad (7.125)$$

式中

$$\begin{aligned} U^{(0)}(j+1|N) &= \bar{U}^{(p)}(j+1|N), \quad D^{(0)}(j+1|N) = \bar{D}^{(p)}(j+1|N) \\ U(j+1|N) &= U^{(p)}(j+1|N), \quad D(j+1|N) = D^{(p)}(j+1|N) \end{aligned}$$

(7.124)式的 U-D 分解仍用 MWG-S 方法进行。至此,Watanabe 前向固定区间平滑算法的 U-D 分解形式已全部得到。

## 7.5.2 前向平滑新算法

为了提高计算效率,作者对 Watanabe 算法作了如下处理:

令

$$\Lambda(j) = [I + G^T(j)S(j+1)G(j)]^{-1}$$

由(7.119)式知

$$K(j+1) = S(j+1)G(j)\Lambda(j) \quad (7.126)$$

将(7.126)式代入(7.119)式中,可得

$$\begin{aligned} \bar{S}(j+1) &= [I - K(j+1)G^T(j)]S(j+1)[I - K(j+1)G^T(j)]^T \\ &\quad + K(j+1)K^T(j+1) \end{aligned} \quad (7.127)$$

$$\begin{aligned} A(j) &= \Phi^T(j+1, j)\bar{S}(j+1)\Phi(j+1, j) \\ &= M^T(j)S(j+1)M(j) + \Phi^T(j+1, j)K(j+1) \\ &\quad \times K^T(j+1)\Phi(j+1, j) \end{aligned} \quad (7.128)$$

式中

$$M(j) = [I - G(j)K^T(j+1)]\Phi(j+1, j)$$

将(7.127), (7.128)式代入(7.119), (1.120)式中,得

$$\left. \begin{aligned} S(j) &= A(j) + H^T(j)R^{-1}(j)H(j) \\ \mathbf{q}(j) &= M^T(j)\mathbf{q}(j+1) + H^T(j)R^{-1}(j)\mathbf{z}(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.129)$$

令

$$\Delta\mathbf{x}(j+1|N) = G(j)\Lambda(j)\mathbf{y}(j+1)$$

由(7.117), (7.120)式,可得

$$\Delta\mathbf{x}(j+1|N) = G(j)\Lambda(j)G^T(j+1)\mathbf{q}(j+1) \quad (7.130)$$

经上述处理,新的前向平滑算法为

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!



$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j+1|N) &= M(j)\mathbf{x}(j|N) + \Delta\mathbf{x}(j+1|N) \\ P(j+1|N) &= M(j)P(j|N)M^T(j) + G(j)\Lambda(j)G^T(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.131)$$

平滑所需的滤波计算为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}(j) &= M^T(j)\mathbf{q}(j+1) + H^T(j)R^{-1}(j)\mathbf{z}(j) \\ S(j) &= A(j) + H^T(j)R^{-1}(j)H(j) \\ A(j) &= M^T(j)S(j+1)M(j) + \Phi^T(j+1,j) \\ &\quad \times K(j+1)K^T(j+1)\Phi(j+1,j) \\ K(j+1) &= S(j+1)G(j)\Lambda(j) \\ \Delta\mathbf{x}(j+1|N) &= G(j)\Lambda(j)G^T(j+1)\mathbf{q}(j+1) \\ M(j) &= [I - G(j)K^T(j+1)]\Phi(j+1,j) \\ \Lambda(j) &= [I + G^T(j)S(j+1)G(j)]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.132)$$

当  $\Phi(j+1,j)$  为  $j$  的函数时,滤波计算式(7.132)还可进一步改进。

令

$$\begin{aligned} K(j+1) &= \Phi^T(0,j+1)K(j+1), \quad W(j) = \Phi(0,j+1)G(j) \\ S(j+1) &= \Phi^T(0,j+1)A(j+1)\Phi(0,j+1), \quad \mathbf{q}(j+1) = \Phi^T(0,j+1)\mathbf{b}(j+1) \\ N(j) &= H(j)\Phi(j,0) \end{aligned}$$

代入(7.132)式中,可得到类似于卡尔曼滤波的计算公式:

测量更新

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{b}}(j+1) &= \mathbf{b}(j+1) - K^*(j+1)E^T(j)\mathbf{b}(j+1) \\ K^*(j+1) &= A(j+1)E(j)\Lambda(j) \\ \bar{A}(j+1) &= A(j+1) - A(j+1)W(j)\Lambda(j)E^T(j)A^T(j+1) \end{aligned} \right\} \quad (7.133)$$

时间更新

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}(j) &= \bar{\mathbf{b}}(j+1) + N^T(j)R^{-1}(j)\mathbf{z}(j) \\ A(j) &= \bar{A}(j+1) + N^T(j)R^{-1}(j)N(j) \\ \Delta\mathbf{x}(j+1|N) &= G(j)\Lambda(j)E^T(j+1)\mathbf{b}(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.134)$$

为了便于区分,我们将(7.131),(7.132)式组合成的算法称为前向新平滑算法 1,由(7.131),(7.133),(7.134)式组成的算法称为前向新平滑算法 2。算法 1 的滤波计算初值为

$$\mathbf{q}(N+1) = 0, S(N+1) = 0$$

算法 2 的滤波初值为

$$\mathbf{b}(N+1) = 0, A(N+1) = 0$$

两种新算法的平滑初值分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0|N) &= [I + P(0|0)S(0)]^{-1}[P(0|0)\mathbf{q}(0) + \mathbf{x}(0|0)] \\ P(0|N) &= [I + P(0|0)S(0)]^{-1}P(0|0) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0|N) &= [I + P(0|0)A(0)]^{-1}[P(0|0)\mathbf{b}(0) + \mathbf{x}(0|0)] \\ P(0|N) &= [I + P(0|0)A(0)]^{-1}P(0|0) \end{aligned}$$

为了进一步提高两种新平滑算法的计算效率和数值稳定性,在算法 1 和算法 2 中均

可采用 U-D 分解技术。平滑估计(7.131)式用 MWG-S 方法可以得到 U-D 分解计算式; 算法 2 中的测量更新(7.133)式可采用 Bierman 测量更新方法得到; 算法 2 中的时间更新(7.134)式可采用 Thorhnton-Jacobson U-D 分解方法处理。对于算法 1 的滤波计算可作如下处理:

将(7.132)式中的  $A(j)$  代入  $S(j)$  中, 得

$$S(j) = M^T(j)S(j+1)M(j) + \Phi^T(j+1,j)K(j+1) \times K^T(j+1)\Phi(j+1,j) + H^T(j)R^{-1}(j)H(j) \quad (7.135)$$

令  $S(j) = U(j)D(j)U^T(j)$ , 代入(7.135)式中, 得

$$U(j)D(j)U^T(j) = \tilde{Y}(j)\tilde{D}(j)\tilde{Y}^T(j) \quad (7.136)$$

式中

$$\tilde{Y}(j) = [M^T(j)U(j+1), \Phi^T(j+1,j)K(j+1), H^T(j)]$$

$$\tilde{D}(j) = \text{diag}[D(j+1), I, R^{-1}(j)]$$

应用 MWG-S 方法, 即可得到(7.136)式的 U-D 分解。

在平滑计算中, 若将  $A(j)$  分解成  $U_A(j)D_A(j)U_A^T(j)$ , 并在滤波计算式中计算  $G(j) \cdot U(j)$ , 平滑估计误差协方差阵计算式可变为

$$P(j+1|N) = M(j)P(j|N)M^T(j) + C(j)D_A(j)C^T(j) \quad (7.137)$$

式中

$$C(j) = G(j)U_A(j)$$

然后, 应用 MWG-S 方法即可对(7.137)进行 U-D 分解。至此, 两种新平滑算法的 U-D 分解形式均已经全部得到。

### 7.5.3 三种算法的计算量与存储量

Watanabe 前向固定区间平滑算法一步平滑所需计算量如表 7.12 所示, 一步平滑所需滤波计算量如表 7.13 所示。

表 7.12 Watanabe 方法一步平滑所需计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
$\bar{x}(j+1 N)$	$n^2 - n$	$n^2$	
$\bar{x}(j+1 N)$	$2np + p$	$2np + p$	
$\bar{U}(j+1 N)$ $\bar{D}(j+1 N)$	$1.5n^3 - 0.5n^2 + n$	$1.5n^3 + n^2 - 0.5n$	$n - 1$
$\bar{U}^{(p)}(j+1 N)$ $\bar{D}^{(p)}(j+1 N)$	$(1.5n^3 - 0.5n^2 + 2n)p$	$(1.5n^3 + 2n^2 - 0.5n)p$	$(n - 1)p$
$U^{(p)}(j+1 N)$ $D^{(p)}(j+1 N)$	$n^2p$	$(n^2 + 2n - 1)p$	$(2n - 2)p$
$P(j+1 N)$	$0.5n^2 - 0.5n$	$n^2 - n$	
总 计	$1.5n^3 - 0.5n + n^2 + p$ $+ (1.5n^3 + 0.5n^2 + 4n)p$	$1.5n^3 + 3n^2 - 1.5n$ $+ (1.5n^3 + 3n^2 + 3.5n)p$	$(n - 1)(1 + 3p)$

表 7.12 的计算复杂度为  $1.5n^3(p+1)$ 。

表 7.13 Watanabe 方法一步平滑所需滤波计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
测量更新	$(1.5n^2 + 1.5n)p$	$(1.5n^2 + 5.5n)p$	$(n+1)p$
$S(j)$	$1.5n^3 - 0.5n^2 + n + n^2m$	$1.5n^3 + n^2 - 0.5n + (n^2 + n)m$	$n-1$
$q(j)$	$n^2 + nm - n$	$n^2 + nm$	
$y(j)$	$np - p$	$np$	
总 计	$1.5n^3 + 0.5n^2(3p + 2m + 1) + n(m + 2.5p)$	$1.5n^3 + n^2(m + 1.5p + 2) + n(2m + 6.5p - 0.5)$	$n-1 + (n+1)p$

表 7.13 的计算复杂度为  $1.5n^3$ 。

前向平滑新算法 1、新算法 2 一步平滑所需计算量如表 7.14 所示；新算法 1 一步平滑所需滤波计算量如表 7.15 所示；新算法 2 一步平滑所需滤波计算量如表 7.16 所示。

表 7.14 新算法 1、新算法 2 一步平滑所需计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
$x(j+1 N)$	$n^2$	$n^2$	
$P(j+1 N)$	$1.5n^3 - 0.5n^2 + n^2p + n$	$1.5n^3 + n^2 - 0.5n + (n^2 + 2n - 1)p$	$2n - 2$
总 计	$1.5n^3 + 0.5n^3 + n^2p + n$	$1.5n^3 + 2n^2 - 0.5n + (n^2 + 2n - 1)p$	$2n - 2$

表 7.14 的计算复杂度为  $1.5n^3$ 。

表 7.15 新算法 1 一步平滑所需滤波计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
$K(j+1)$	$np(n-1)$	$n^2p$	$p$
$K^T(j+1)$ $\Phi(j+1, j)$	$np(n-1)$	$n^2p$	
$q(j)$	$n(n-1) + m(m-1)$	$n^2 + m^2$	$m$
$\Delta x(j+1 N)$	$2n(m-1)$	$2nm$	
$S(j)$	$1.5n^3 + n^2(p+m-1) + 0.5n$	$1.5n^3 - 0.5n^2 + n^2(p+m)$	$n-1$
总 计	$1.5n^3 + n^2(4p+m+1) - m + n(2m-3p-2.5) + m^2$	$1.5n^3 + n^2(4p+m+0.5) + 2nm$	$q+m+n-1$

表 7.15 的计算复杂度为  $1.5n^3$ 。

表 7.16 新算法 2 一步平滑所需滤波计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
测量更新	$(1.5n^2 + 1.5n)p$	$(1.5n^2 + 5.5n)p$	$np$
时间更新	$n^2m + 2nm + m^2 - 2m$	$n^2m + 4nm + m^2$	$m$
总 计	$n^2m + 2nm + m^2 - 2m + (1.5n^2 + 1.5n)p$	$(1.5n^2 + 5.5n)p + n^2m + 4nm + m^2$	$m + np$

表 7.16 的计算复杂度为  $n^2(m + 1.5p)$ 。

新算法 1 和新算法 2 的存储量为  $(n+1)(n+q)N$ ，Watanabe 方法的存储量为  $[n^2 + 2(2n+3)]N$ ，比新算法 1 和新算法 2 多  $[n(p-1) + 2p]N$  个存储单元。

## 7.6 信息平方根平滑估计方法

本节所讨论的平滑方法为平滑估计误差协方差阵或滤波估计误差的协方差阵以逆阵(或信息阵)形式传播,并对逆阵进行平方根分解。

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

### 7.6.1 Fraser 两个滤波器平滑方法

根据文献[43]给出的 Fraser 两个滤波器平滑算法,可得

$$\begin{aligned} P^{-1}(j|N) &= P^{-1}(j|j) + P_b^{-1}(j|j) \\ &= [I - S(j)P_b^{-1}(j|j-1)]P(j|j)[I - S(j)P_b^{-1}(j|j-1)]^T \\ &\quad + [I - S(j)P_b^{-1}(j|j-1)]P_b^{-1}(j|j-1) \\ &\quad \times [I - S(j)P_b^{-1}(j|j-1)]^T \end{aligned} \quad (7.138)$$

(式中  $S(j) = P(j|j)[I + P(j|j)P_b^{-1}(j|j-1)]^T$ )

以及

$$\mathbf{x}(j|N) = P(j|N)[\mathbf{y}(j|j) + \mathbf{y}_b(j|j-1)] \quad (7.139)$$

式中,  $\mathbf{y}(j|j) = P^{-1}(j|j)\mathbf{x}(j|j)$ ;  $\mathbf{y}_b(j|j-1) = P^{-1}(j|j-1)\mathbf{x}(j|j-1)$ ;  $P(j|j)P^{-1}(j|N) = [I + P(j|j)P_b^{-1}(j|j-1)]^{-1}$ 。

于是可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j|N) &= [I + P(j|j)P_b^{-1}(j|j-1)]^{-1}\mathbf{x}(j|j) \\ &\quad + P(j|N)\mathbf{y}_b(j|j-1) \end{aligned} \quad (7.140)$$

因此,整个平滑算法可写成

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j|N) &= A(j)\mathbf{x}(j|j) + P(j|N)\mathbf{y}_b(j|j-1) \\ P(j|N) &= B(j)P(j|j)B^T(j) + S(j)P_b^{-1}(j|j-1)S^T(j) \\ S(j) &= P(j|j)A^T(j) \\ A(j) &= [I + P(j|j)P_b^{-1}(j|j-1)]^{-1} \\ B(j) &= I - S(j)P_b^{-1}(j|j-1) \end{aligned} \right\} \quad (7.141)$$

平滑所需的滤波计算式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_b(j|j) &= \mathbf{y}_b(j|j-1) + H^T(j)R^{-1}(j)\mathbf{z}(j) \\ P_b^{-1}(j|j) &= P_b^{-1}(j|j-1) + H^T(j)R^{-1}(j)H(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.142)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}_b(N|N-1) &= 0, \quad P_b^{-1}(N|N-1) = 0 \\ \mathbf{y}_b(j-1|j-2) &= \Phi^T(j, j-1)L(j)\mathbf{y}_b(j|j) \\ P_b(j-1|j-2) &= \Phi^T(j, j-1)\{L(j)P_b^{-1}(j|j)L^T(j) \\ &\quad + J(j)Q^{-1}(j-1)J^T(j)\} \\ \Phi(j, j-1) &= 0 \\ L(j) &= I - J(j)\Gamma^T(j-1) \\ J(j) &= P_b(j|j)\Gamma(j-1)[\Gamma^T(j-1)P_b^{-1}(j|j) \\ &\quad \times \Gamma(j-1) + Q^{-1}(j-1)]^T \end{aligned} \right\} \quad (7.143)$$

令

$$\begin{aligned} P_b^{-1}(j|j) &= U_b(j|j)D_b(j|j)U_b^T(j|j) \\ P_b^{-1}(j|j-1) &= U_b(j|j-1)D_b(j|j-1)U_b^T(j|j-1) \\ P(j|N) &= U(j|N)D(j|N)U^T(j|N) \\ P(j|j) &= U(j|j)D(j|j)U^T(j|j) \end{aligned}$$

则(7.141)式可用 MWG-S 方法进行 U-D 分解计算; (7.142)式的 U-D 分解可用 Thorhton-Jacobson 方法实现; (7.143)式可用 MWG-S 方法进行序列处理。前向滤波公式与 Kalman 滤波公式相同。

Fraser 两个滤波平滑器也常用下述的平方根分解方法来实现。设

$$\begin{aligned} P(j|N) &= C^{-1}(j|N)C^{-T}(j|N) \\ P_b(j|j-1) &= C_b^{-1}(j|j-1)C_b^{-T}(j|j-1) \\ P(j|j) &= C^{-1}(j|j)C^{-T}(j|j) \end{aligned}$$

于是有

$$\left. \begin{aligned} C(j|N)\mathbf{x}(j|N) &= \mathbf{y}(j|N) \\ P(j|N) &= C^{-1}(j|N)C^{-T}(j|N) \\ \begin{bmatrix} C(j|N) & \mathbf{y}(j|N) \\ 0 & \mathbf{e}(j|N) \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} C(j|j) & \mathbf{y}(j|j) \\ C_b(j|j-1) & \mathbf{y}_b(j|j-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7.144)$$

式中,  $T$  为正交矩阵(推导参见 7.6.2 小节)。

后向滤波的时间更新(7.143)式可用下式实现:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A(j) & B(j) & \mathbf{e}(j) \\ 0 & C_b(j|j-1) & \mathbf{y}_b(j|j-1) \end{bmatrix} \\ &= T \begin{bmatrix} U^{-1}(j) & 0 & 0 \\ -C_b(j+1|j+1)\Gamma(j) & C_b(j+1|j+1)\Phi(j+1,j) & \mathbf{y}_b(j+1|j) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.145)$$

式中,  $\mathbf{y}_b(N|N-1)=0$ ;  $C_b(N|N-1)=0$ ;  $U(j)U^T(j)=Q(j)$ 。

## 7.6.2 Dyer-McReynolds 信息平方根平滑方法

该平滑器的基本原理如下:设初始指标为

$$J(0) = \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(0|0)\|_{P_0^{-1}}^2 = \|C(0|-1)\mathbf{x}(0) - \mathbf{y}(0|-1)\|^2$$

在第 0 级没有量测值,于是有

$$J^+(0) = J(0) = \|C(0|0)\mathbf{x}(0) - \mathbf{y}(0|0)\|^2 \quad (7.146)$$

时间更新的第 1 级为

$$J(1) = J^+(0) + \|\mathbf{w}(0)\|_{\hat{Q}_{00}^{-1}}^2 = \|C(0|0)\mathbf{x}(0) - \mathbf{y}(0|0)\|^2 + \|\mathbf{w}(0)\|_{\hat{Q}_{00}^{-1}}^2 \quad (7.147)$$

将(7.1)式代入(7.147)式,消去  $\mathbf{x}(0)$  得

$$J(1) = \|C(0|0)\Phi^{-1}(0, -1)[\mathbf{x}(1) - \Gamma(0)\mathbf{w}(0)] - \mathbf{y}(0|0)\|^2 + \|U^{-1}(0)\mathbf{w}(0)\|^2 \quad (7.148)$$

或

$$J(1) = \left\| \begin{bmatrix} U^{-1}(0) & 0 \\ -C(0|0)\Phi^{-1}(0, -1)\Gamma(0) & C(0|0)\Phi^{-1}(0, -1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(0) \\ \mathbf{x}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y}(0|0) \end{bmatrix} \right\|^2 \quad (7.149)$$

(7.146)~(7.149)式中,  $C(0|0)C^T(0|0)=P(0|0)$ ,  $U(0)U^T(0)=Q(0)$ 。

从而可得

$$T \begin{bmatrix} U^{-1}(0) & 0 \\ -C(0|0)\Phi^{-1}(0, -1)\Gamma(0) & C(0|0)\Phi^{-1}(0, -1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(0) \\ \mathbf{x}(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y}(0|0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1) & B(1) & \mathbf{e}(1) \\ 0 & C(1|0) & \mathbf{y}(1|0) \end{bmatrix} \quad (7.150)$$

式中,  $A(1)$ 为上三角阵;  $T$ 为正交矩阵(下同)。

将(7.150)式代入(7.149)式,可得

$$J(1) = \|C(1|0)\mathbf{x}(1) - \mathbf{y}(1|0)\|^2 + \|A(1)\mathbf{w}(0) + B(1)\mathbf{x}(1) - \mathbf{e}(1)\|^2 \quad (7.151)$$

(7.151)式中第二项范数可选定为0(当 $Q(0)$ 非奇异时 $A(1)$ 非奇异,  $\mathbf{w}(0)$ 选定),因此可得

$$C(1|0)\mathbf{x}(1|0) = \mathbf{y}(1|0) \quad (7.152)$$

测量更新的第1步为

$$\begin{aligned} J^+(1) &= J(1) + \|V(1)\|_{R^{-1}(1)}^2 \\ &= \|C(1|0)\mathbf{x}(1) - \mathbf{y}(1|0)\|^2 + \|V_R^{-1}(1)[H(1)\mathbf{x}(1) - \mathbf{z}(1)]\|^2 \\ &\quad + \|A(1)\mathbf{w}(0) + B(1)\mathbf{x}(1) - \mathbf{e}(1)\|^2 \end{aligned} \quad (7.153)$$

或

$$\begin{aligned} J^+(1) &= \left\| \begin{bmatrix} C(1|0) \\ V_R^{-1}(1)H(1) \end{bmatrix} \mathbf{x}(1) - \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1|0) \\ V_R^{-1}(1)\mathbf{z}(1) \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &\quad + \|A(1)\mathbf{w}(0) + B(1)\mathbf{x}(1) - \mathbf{e}(1)\|^2 \end{aligned} \quad (7.154)$$

进而可得

$$T \begin{bmatrix} C(1|0) & \mathbf{y}(1|0) \\ V_R^{-1}(1)H(1) & V_R^{-1}(1)\mathbf{z}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(1|1) & \mathbf{y}(1|1) \\ 0 & \mathbf{f}(1) \end{bmatrix} \quad (7.155)$$

将(7.155)式代入(7.154)式,得

$$\begin{aligned} J^+(1) &= \|C(1|1)\mathbf{x}(1) - \mathbf{y}(1|1)\|^2 + \|\mathbf{f}(1)\|^2 \\ &\quad + \|A(1)\mathbf{w}(0) + B(1)\mathbf{x}(1) - \mathbf{e}(1)\|^2 \end{aligned} \quad (7.156)$$

如此类推,对第 $N$ 步而言,有

$$J^+(N) = \|C(N|N)\mathbf{x}(N) - \mathbf{y}(N|N)\|^2 + \mathbf{r}(N) + M(N) \quad (7.157)$$

式中

$$M(N) = \sum_{k=1}^N \|A(k)\mathbf{w}(k-1) + B(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{e}(k)\|^2$$

$$\mathbf{r}(N) = \sum_{k=1}^N \|\mathbf{f}(k)\|^2$$

(7.157)式与平滑估计指标函数

$$J = \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}(0|0)\|_{P^{-1}(0|0)}^2 + \sum_{i=0}^{N-1} [\|\mathbf{w}(i)\|_{Q^{-1}(i)}^2 + \|\mathbf{v}(i+1)\|_{R^{-1}(i+1)}^2]$$

等同, 设  $A(j)\mathbf{w}(j-1|N) = \mathbf{e}(j) - B(j)\mathbf{x}(j|N)$ ,  $j=N, N-1, \dots, 1$ , 对(7.157)式在(7.1)式约束下求极值, 可得  $\mathbf{x}(N|N)$ , 然后再求得  $\mathbf{x}(N-1|N)$ ,  $\mathbf{x}(N-2|N)$  等等。由 Rauch 平滑器可得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(j) &= P(j|j)\Phi^T(j+1, j)P^{-1}(j+1|j) \\ &= \Phi^{-1}(j+1, j)[I + \Gamma(j)A^{-1}(j+1)B(j+1)] \end{aligned} \quad (7.158)$$

对  $\mathbf{x}(N-1|N)$  的求解叙述如下:

在(7.157)式中消去  $\mathbf{x}(N|N)$ , 有

$$\begin{aligned} J(N) &= \|C(N|N)[\Phi(N, N-1)\mathbf{x}(N-1) + \Gamma(N-1)\mathbf{w}(N-1)] \\ &\quad - \mathbf{y}(N|N)\|^2 + \|A(N)\mathbf{w}(N-1) + B(N)[\Phi(N, N-1)\mathbf{x}(N-1) \\ &\quad + \Gamma(N-1)\mathbf{w}(N-1)] - \mathbf{e}(N)\|^2 + M(N) + \mathbf{r}(N) \end{aligned} \quad (7.159)$$

或

$$\begin{aligned} J(N) &= \left\| \begin{bmatrix} A(N) + B(N)\Gamma(N-1) & B(N)\Phi(N, N-1) \\ C(N|N)\Gamma(N-1) & C(N|N)\Phi(N, N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(N-1) \\ \mathbf{x}(N-1) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} \mathbf{e}(N) \\ \mathbf{y}(N|N) \end{bmatrix} \right\|^2 + M(N-1) + \mathbf{r}(N) \end{aligned} \quad (7.160)$$

可得

$$\begin{aligned} &T \begin{bmatrix} A(N) + B(N)\Gamma(N-1) & B(N)\Phi(N, N-1) & \mathbf{e}(N) \\ C(N|N)\Gamma(N-1) & C(N|N)\Phi(N, N-1) & \mathbf{y}(N|N) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(N-1|N) & B(N-1|N) & \mathbf{e}(N-1|N) \\ 0 & C(N-1|N) & \mathbf{y}(N-1|N) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.161)$$

式中  $A(N-1|N)$ ,  $C(N-1|N)$  均为上三角阵。

将(7.161)式代入(7.160)式, 可得

$$\begin{aligned} J(N) &= \|C(N-1|N)\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{y}(N-1|N)\|^2 + \mathbf{r}(N) \\ &\quad + \|A(N-1|N)\mathbf{w}(N-1) + B(N-1|N) \\ &\quad \times \mathbf{x}(N-1) - \mathbf{e}(N-1|N)\|^2 + M(N) \end{aligned} \quad (7.162)$$

及

$$\left. \begin{aligned} C(N-1|N)\mathbf{x}(N-1|N) &= \mathbf{y}(N-1|N) \\ A(N-1|N)\mathbf{w}(N-1|N) &= \mathbf{e}(N-1|N) - B(N-1|N)\mathbf{x}(N-1|N) \end{aligned} \right\} \quad (7.163)$$

依此类推, 若已知  $\mathbf{y}(j|N)$ ,  $C(j|N)$ , 则有

$$\begin{aligned} &T \begin{bmatrix} A(j) + B(j)\Gamma(j-1) & B(j)\Phi(j, j-1) & \mathbf{e}(j) \\ C(j|N)\Gamma(j-1) & C(j|N)\Phi(j, j-1) & \mathbf{y}(j|N) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(j-1|N) & B(j-1|N) & \mathbf{e}(j-1|N) \\ 0 & C(j-1|N) & \mathbf{y}(j-1|N) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.164)$$



式中  $A(j-1|N), C(j-1|N)$  为上三角阵, 且有

$$\left. \begin{aligned} C(j-1|N)\mathbf{x}(j-1|N) &= \mathbf{y}(j-1|N) \\ A(j-1|N)\mathbf{w}(j-1|N) &= \mathbf{e}(j-1|N) - B(j-1|N)\mathbf{x}(j-1|N) \\ P(j-1|N) &= C^{-1}(j-1|N)C^{-T}(j-1|N) \end{aligned} \right\} \quad (7.165)$$

若需估计  $Q(j-1|N)$  时, 有

$$\begin{aligned} & T \begin{bmatrix} C(j)\Phi(j, j-1) & C(j|N)\Gamma(j-1) & \mathbf{y}(j|N) \\ B(j)\Phi(j, j-1) & A(j) + B(j)\Gamma(j-1) & \mathbf{e}(j) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B_1(j-1|N) & A_1(j-1|N) & \mathbf{y}_1(j-1|N) \\ 0 & U^{-1}(j-1|N) & \mathbf{e}_1^T(j-1|N) \end{bmatrix}^n \end{aligned} \quad (7.166)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} U^{-1}(j-1|N)\mathbf{w}(j-1|N) &= \mathbf{e}_1(j-1|N) \\ B_1(j-1|N)\mathbf{x}(j-1|N) &= \mathbf{y}_1(j-1|N) - A_1(j-1|N)\mathbf{w}(j-1|N) \\ Q(j-1|N) &= U(j-1|N)U^T(j-1|N) \end{aligned} \right\} \quad (7.167)$$

于是(7.164), (7.165)式就给出了后向平滑公式。 $\mathbf{x}(N|N)$ 由前向滤波器给出, 此处不再赘述。

### 7.6.3 信息滤波——后向定区间平滑新方法

根据 R-T-S 平滑公式(7.3)及后向平滑新算法(7.24)可知, 平滑估计的误差协方差阵及平滑估计的增益阵为

$$\left. \begin{aligned} P(j|N) &= G(j)P(j+1|N)G^T(j) + F(j)\Lambda(j)F^T(j) \\ G(j) &= [I - F(j)\Lambda(j)F^T(j)P^{-1}(j|j)]\Phi^{-1}(j+1, j) \end{aligned} \right\} \quad (7.168)$$

式中

$$\begin{aligned} F(j) &= \Phi^{-1}(j+1, j)\Gamma(j) \\ \Lambda(j) &= [Q^{-1}(j) + F^T(j)P^{-1}(j|j)F(j)]^{-1} \end{aligned}$$

由(7.168)式可见, 在平滑计算中只使用滤波信息阵而不使用滤波误差协方差阵。因此, 在滤波计算中宜采用信息滤波方法。为了减少信息滤波及  $G(j)$  的计算量, 避免出现两个  $n \times n$  矩阵相乘运算, 我们作如下处理: 令

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j|j) &= \Phi(j, 0)\mathbf{x}^*(j|j) \\ P(j|j) &= \Phi(j, 0)P^*(j|j)\Phi^T(j, 0) \\ \mathbf{x}(j|j-1) &= \Phi(j, 0)\mathbf{x}^*(j|j-1) \\ P(j|j-1) &= \Phi(j, 0)P^*(j|j-1)\Phi^T(j, 0) \end{aligned} \right\} \quad (7.169)$$

根据卡尔曼滤波公式可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^*(j|j-1) &= \mathbf{x}^*(j-1|j-1) \\ [P^*(j|j-1)]^{-1} &= [P^*(j-1|j)]^{-1} - [P(j-1|j-1)]^{-1}W(j-1) \\ &\quad \times \Lambda(j-1)W^T(j-1)[P(j-1|j-1)]^{-1} \\ \mathbf{x}^*(j|j) &= \mathbf{x}^*(j|j-1) + K^*(j)[\mathbf{z}(j) - M(j)\mathbf{x}^*(j|j-1)] \\ K^*(j) &= P^*(j|j)M^T(j)R^{-1}(j) \\ [P^*(j|j)]^{-1} &= [P^*(j|j-1)]^{-1} + M^T(j)R^{-1}(j)M(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.170)$$

式中

$$W(j-1) = \Phi^{-1}(j,0)F(j-1)$$

$$M(j) = H(j)\Phi(j,0)$$

$$A(j-1) = \{Q^{-1}(j-1) + W^T(j)[P^*(j|j)]^{-1}W(j)\}^{-1}$$

令

$$\left. \begin{aligned} y(j|j-1) &= [P^*(j|j-1)]^{-1}x^*(j|j-1) \\ y(j|j) &= [P^*(j|j)]^{-1}x^*(j|j) \\ A(j|j-1) &= [P^*(j|j-1)]^{-1} \\ A(j|j) &= [P^*(j|j+1)]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.171)$$

将(7.171)式代入(7.170)式中,可得

$$\left. \begin{aligned} y(j|j-1) &= [I - A(j-1|j-1)W(j-1)A(j-1|j-1)] \\ &\quad \times W^T(j-1)y(j-1|j-1) \\ A(j|j-1) &= A(j-1|j-1) - A(j-1|j-1)W(j-1) \\ &\quad \times A(j-1)W^T(j-1)A(j-1|j-1) \\ y(j|j) &= y(j|j-1) + B(j)z(j) \\ B(j) &= M^T(j)R^{-1}(j) \\ A(j|j) &= A(j|j-1) + M^T(j)R^{-1}(j)M(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.172)$$

将(7.172), (7.169)式代入(7.168), (7.24)式,得

$$\left. \begin{aligned} x(j|N) &= G(j)x(j+1|N) + F(j)A(j)W^T(j)y(j|j) \\ P(j|N) &= G(j)P(j+1|N)G^T(j) + F(j)A(j)F^T(j) \\ G(j) &= \Phi^{-1}(j+1, j) - F(j)A(j)W^T(j)A(j|j)\Phi^{-1}(j+1, 0) \end{aligned} \right\} \quad (7.173)$$

根据(7.173)式可得状态平滑估计和估计误差的协方差阵,平滑所需的滤波值可由(7.172)式得到。

设

$$\left. \begin{aligned} A(j|j-1) &= U(j|j-1)D(j|j-1)U^T(j|j-1) \\ A(j|j) &= U(j|j)D(j|j)U^T(j|j) \\ P(j|N) &= U(j|N)D(j|N)U^T(j|N) \\ A(j) &= U_A(j)D_A(j)U_A^T(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.174)$$

代入(7.172)式可得

$$\left. \begin{aligned} y(j|j-1) &= [I - C(j-1)W^T(j-1)]y(j-1|j-1) \\ U(j|j-1)D(j|j-1)U^T(j|j-1) &= U(j-1|j-1)D(j-1|j-1) \\ &\quad \times U^T(j-1|j-1) - U(j-1|j-1) \\ &\quad \times D(j-1|j-1)N(j-1)A(j-1)N^T(j-1) \\ &\quad \times D(j-1|j-1)U^T(j-1|j-1) \\ C(j-1) &= U(j-1|j-1)D(j-1|j-1)N(j-1)A(j-1) \\ N(j-1) &= U^T(j-1|j-1)W(j-1) \\ y(j|j) &= M^T(j)R^{-1}(j)z(j) + y(j|j-1) \\ U(j|j)D(j|j)U^T(j|j) &= U(j|j-1)D(j|j-1)U^T(j|j-1) \\ &\quad + M^T(j)R^{-1}(j)M(j) \end{aligned} \right\} \quad (7.175)$$

(7.175)式中的  $U(j|j-1), D(j|j-1)$  可应用 Thornton-Jacobson 方法得到。在滤波计算中, 还应计算出平滑的增益阵  $G(j), S(j)$  及  $\Delta \mathbf{x}(j|N)$ :

$$\left. \begin{aligned} G(j) &= \Phi^{-1}(j+1, j) - F(j)C^T(j)\Phi^{-1}(j+1, 0) \\ S(j) &= F(j)U_A(j) \\ \Delta \mathbf{x}(j|N) &= F(j)A(j)W^T(j)\mathbf{y}(j|j) \end{aligned} \right\} \quad (7.176)$$

将(7.174), (7.176)式代入(7.173)式, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(j|N) &= G(j)\mathbf{x}(j+1|N) + \Delta \mathbf{x}(j|N) \\ U(j|N)D(j|N)U^T(j|N) &= G(j)U(j+1|N)D(j+1|N)U^T(j+1|N) \\ &\quad \times G^T(j|N) + S(j)D_A(j)S^T(j) \end{aligned} \quad (7.177)$$

(7.177)式的 U-D 分解使用 MWG-S 方法便可得到。这样(7.175), (7.177)式就给出了信息滤波——后向平滑的 U-D 分解算法。

#### 7.6.4 三种方法的计算效率与存储量

Fraser 两个滤波器一步平滑所需计算量如表 7.17 所示, 一步平滑所需后向滤波计算量如表 7.18 所示。

表 7.17 Fraser 方法一步平滑所需计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
$\mathbf{x}(j N)$	$2n(n-1)+n$	$2n^2$	
$P(j N)$	$3n^3-n^2+n$	$3n^3+2.5n^2-1.5n$	
$S(j)$	$n^2(n-1)$	$n^3$	
$A(j)$	$1.5n^2(n-1)$	$n^3+\frac{1}{2}n^2(n-1)$	$n(n-1)$
$B(j)$	$\frac{1}{2}n^2(n-1)+n$	$\frac{1}{2}n^2(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$	
总 计	$6n^3-2n^2+n$	$6n^3+5n^2-n$	$n(n-1)$

表 7.18 Fraser 方法一步平滑所需滤波计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
$\mathbf{y}_s(j j)$	$n(m-1)+m(m-1)+n$	$m^2+nm$	
$P_F^{-1}(j j)$	$n^2m$	$n^2m+2nm-m$	
$\Phi^T(j, j-1)L(j)$	$n^2+2np(n-1)$	$2n^2p$	
$\mathbf{y}_s(j-1 j-2)$	$n(n-1)$	$n^2$	

续表

算 式	加 法	乘 法	除 法
$J(j)$	$\frac{3}{2}np(n-1)+np^2$	$\frac{3}{2}np(n-1)+n^2p$ $+np^2-n$	$2(p-1)n$
$P_b(j-1 j-2)$	$np(n-1)+n^2p$ $+1.5n^3-0.5n^2+n+n^2p$	$n^2p+2np-p+n^2p$ $1.5n^3+n^2-0.5n$	$2(n-1)p$
总 计	$1.5n^3+n^2(m+6.5p+1.5)$ $+n(m-2+p^2-2.5p-2)$ $+m^2-m$	$1.5n^3+n^2(m+7.5p+2)$ $-p+n(3m+2p-1.5)$ $+m^2-m$	$2(n-1)p$ $+2(p-1)n$

Fraser 两个滤波器平方根方法一步平滑所需计算量为

加法:  $6n^3-7n^2+2n$

乘法:  $6n^3-3n^2$

除法:  $4n^2+2n$

开方:  $2n$

Fraser 两个滤波器平方根方法一步所需后向滤波器计算量仍然同表 7.18。

Dyer-McReynolds 信息平方根方法一步平滑所需计算量如表 7.19 所示。

表 7.19 Dyer-McReynolds 方法一步平滑所需计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
$B(j)\Phi(j, j-1)$	$n^2(n-1)$	$n^3$	
$C(j N)\Phi(j, j-1)$	$\frac{1}{2}n(n^2-1)$	$\frac{1}{2}n^2(n+1)$	
$C(j N)\Gamma(j-1)$	$\frac{1}{2}n(n-1)p$	$\frac{1}{2}n(n+1)p$	
$A(j)+B(j)\Gamma(j-1)$	$\frac{1}{2}n(n+1)+np(n-1)$	$n^2p$	
$C(j-1 N), y(j-1 N)$	$6n^3-7n^2+2n$	$6n^3-3n^2$	$n(2n-1)$
$x(j-1 N)$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n$
总 计	$7.5n^3+n^2(1.5p-7)$ $+n(2.5-1.5p)$	$7.5n^3+n^2(1.5p-2)$ $+n(0.5p+0.5)$	$2n^2$

Dyer-McReynolds 一步平滑所需滤波计算量及 Fraser 一步平滑所需前向滤波计算量均如下:

加法:  $1.5n^3+\frac{1}{2}n^2(2m+6p+5)+n(2m+p-1)$

除法:  $2n+2p$

乘法:  $1.5n^3+\frac{1}{2}n^2(2m+6p+6)+n(2m+4p+\frac{1}{2})$

开方:  $n+p$

信息滤波——后向固定区间平滑新方法的一步平滑所需计算量如表 7.20 所示,一步平滑所需滤波计算量如表 7.21 所示。

表 7.20 新方法一步平滑所需计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
$\mathbf{x}(j N)$	$n^2$	$n^2$	
$U(j N)$ $D(j N)$	$1.5n^3 - 0.5n^2 + n + n^2p$	$1.5n^3 + n^2 - 0.5n + n^2p$ $+ 2np - p$	$3(n-1)p$
总 计	$1.5n^3 + 0.5n^2 + n + n^2p$	$1.5n^3 + 2n^2 - 0.5n + n^2p$ $+ 2np - p$	$3(n-1)p$

表 7.21 新方法一步平滑所需滤波计算量

算 式	加 法	乘 法	除 法
$W(j-1)$	$np(n-1)$	$n^2p$	
$y(j j-1), U(j j-1)$ $D(j j-1), C(j), N(j-1)$	$(1.5n^2 + 1.5n)p$	$(1.5n^2 + 5.5n)p$	$np$
$y(j j)$	$n + n(m-1)$	$n + mn$	
$M(j)$	$nm(n-1)$	$n^2m$	
$U(j j), D(j j)$	$n^2m$	$n^2m + 2nm - m$	$2(n-1)m$
$G(j)$	$n^2 + 2np(n-1)$	$2n^2p$	
$F(j)$	$np(n-1)$	$n^2p$	
$S(j)$	$\frac{1}{2}np(p-1)$	$\frac{1}{2}np(p-1)$	
$\Delta\mathbf{x}(j N)$	$n(p-1)$	$np$	
总 计	$n^2(5.5p + 2m + 1)$ $+ n\left(\frac{1}{2}p^2 - 2p - 1\right)$	$n^2(5.5p + m) +$ $n(5p + \frac{1}{2}p^2 + m + 1)$	$2(n-1)m$ $+ np$

由表 7.17~表 7.21 可知, Fraser 方法一步平滑所需计算量复杂度为  $6n^3$ , Dyer-McReynolds 方法一步平滑计算复杂度为  $7.5n^3$ , 新方法仅为  $1.5n^3$ 。三种方法一步平滑所需滤波计算复杂度, Fraser 方法为  $3n^3$ , Dyer-McReynolds 方法为  $1.5n^3$ , 新方法为  $n^2p$ 。

## 第八章 线性连续系统的滤波和平滑计算方法

对于线性连续系统,最优滤波估计误差的协方差阵计算式(2.47)是一个黎卡提方程。最优预测估计误差协方差阵计算式(2.53)、最优固定区间平滑估计中的误差协方差阵计算式(5.35)、最优固定滞后平滑估计误差协方差阵计算式(5.50)均为李亚普诺夫方程。最优固定点平滑估计误差协方差阵的计算式(5.42)仅为一个积分计算,相对比较简单。因此,本章将重点考虑黎卡提方程和李亚普诺夫方程的求解问题。

超星图书馆提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

### 8.1 黎卡提方程的求解方法

当线性连续系统(2.34)是定常系统时,黎卡提方程则是一个定常非线性矩阵微分方程。本节将分别讨论定常和时变黎卡提方程的求解问题。

#### 8.1.1 定常黎卡提方程求解

对于  $n$  阶非线性黎卡提方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{P} &= FP + PF^T + GQG^T - PH^TR^{-1}HP \\ P(t_0) &= P_0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

令

$$\Lambda = PY, \quad \dot{Y} = -F^TY + H^TR^{-1}HPY \quad (8.2)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \dot{P}Y + P\dot{Y} \\ &= EPY + PF^TY + GQG^TY - PH^TR^{-1}HPY \\ &\quad - PF^TY + PH^TR^{-1}HPY \end{aligned} \quad (8.3)$$

因此

$$\dot{\Lambda} = F\Lambda + GQG^T \quad (8.4)$$

联立(8.2),(8.4)式,有

$$\begin{bmatrix} \dot{Y} \\ \dot{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F^T & H^TR^{-1}H \\ GQG^T & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \Lambda \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

(8.5)式为线性矩阵微分方程,其解为

$$\begin{bmatrix} Y(t_0 + \tau) \\ \Lambda(t_0 + \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{yy}(\tau) & \Phi_{y\lambda}(\tau) \\ \Phi_{\lambda y}(\tau) & \Phi_{\lambda\lambda}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t_0) \\ \Lambda(t_0) \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

由(8.2),(8.6)式,可得

$$P(t_0 + \tau) = [\Phi_{\lambda y}(\tau) + \Phi_{\lambda\lambda}(\tau)P(t_0)][\Phi_{yy}(\tau) + \Phi_{y\lambda}(\tau)P(t_0)]^{-1} \quad (8.7)$$

#### 8.1.2 时变黎卡提方程求解

如果系统是时变的,则滤波的均方误差阵  $P(t|t)$  是时间  $t$  的函数,矩阵黎卡提方程

$$\begin{aligned}\dot{P}(t|t) &= F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t) + Q(t) \\ P(t_0|t_0) &= P_0\end{aligned}\quad (8.8)$$

的解为

$$P(t|t) = Y(t)Z^{-1}(t) \quad (8.9)$$

其中  $Y(t), Z(t)$  为线性矩阵微分方程组

$$\left. \begin{aligned}\dot{Y}(t) &= F(t)Y(t) + Q(t)Z(t) \\ \dot{Z}(t) &= H^T(t)R^{-1}(t)H(t)Y(t) - F^T(t)Z(t) \\ Y(t_0) &= P_0, \quad Z(t_0) = I\end{aligned}\right\} \quad (8.10)$$

的解。

**证明** 设

$$Y(t) = P(t|t)Z(t) \quad (8.11)$$

其中  $Y(t), Z(t)$  满足微分方程组 (8.9) 及 (8.10), 下面证明 (8.11) 式中的  $P(t|t)$  为黎卡提方程 (8.8) 的解。

将 (8.11) 式两边对  $t$  求导, 得

$$\dot{Y}(t) = \dot{P}(t|t)Z(t) + P(t|t)\dot{Z}(t) \quad (8.12)$$

将 (8.9), (8.10) 式代入 (8.12) 式, 有

$$F(t)Y(t) + Q(t)Z(t) = \dot{P}(t|t)Z(t) + P(t|t)[H^T(t)R^{-1}(t)H(t)Y(t) - F^T(t)Z(t)]$$

注意到 (8.11) 式, 上式又可写成

$$\begin{aligned}[\dot{P}(t|t) - F(t)P(t|t) - P(t|t)Z(t) + P(t|t)H^T(t) \\ \times R^{-1}(t)H(t)Y(t)P(t|t) - Q(t)]Z(t) = 0\end{aligned} \quad (8.13)$$

由于  $Z(t)$  是  $\dot{Z}(t) = [H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t) - F^T(t)]Z(t)$  在初始条件  $Z(t_0) = I$  下的解。因此  $Z(t)$  是一转移矩阵, 转移矩阵是非奇异的, 所以 (8.13) 式可以变为

$$\begin{aligned}\dot{P}(t|t) - F(t)P(t|t) - P(t|t)F^T(t) \\ + P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t) - Q(t) = 0\end{aligned} \quad (8.14)$$

这就是 (8.8) 式中的矩阵黎卡提方程, 于是证明了 (8.11) 式中  $P(t|t)$  为黎卡提方程 (8.8) 式的解

### 8.1.3 解的计算步骤

第一步: 将方程 (8.10) 写成向量-矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) & Q(t) \\ H^T(t)R^{-1}(t)H(t) & -F^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$$

初始条件为

$$\begin{bmatrix} Y(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ I \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

求出微分方程 (8.15) 式的转移矩阵为

$$\Theta(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Theta_{11}(t, t_0) & \Theta_{12}(t, t_0) \\ \Theta_{21}(t, t_0) & \Theta_{22}(t, t_0) \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

第二步: 根据转移矩阵 (8.16) 式, 计算微分方程 (8.15) 式的解:

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!



$$\begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ I \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

即

$$\begin{cases} Y(t) = \Theta_{11}P_0 + \Theta_{12} \\ Z(t) = \Theta_{21}P_0 + \Theta_{22} \end{cases} \quad (8.18)$$

第三步:再根据(8.9)式,计算出黎卡提方程的解:

$$P(t|t) = Y(t)Z^{-1}(t) = (\Theta_{11}P_0 + \Theta_{12})(\Theta_{21}P_0 + \Theta_{22})^{-1} \quad (8.19)$$

当  $Q(t)=0$  时,黎卡提方程可化为

$$\dot{P}(t|t) = F(t)P(t|t) + P(t|t)F^T(t) - P(t|t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t|t) \quad (8.20)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) & 0 \\ H^T(t)R^{-1}(t)H(t) & -F^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$$

初始条件为

$$\begin{bmatrix} Y(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ I \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

(8.21)式可写成

$$\dot{Y}(t) = F(t)Y(t), \quad Y(t_0) = P_0 \quad (8.22)$$

设微分方程(8.22)式的转移矩阵为  $\Phi(t, t_0)$ , 则得

$$Y(t) = \Phi(t, t_0)P_0 \quad (8.23)$$

类似于(8.16)式,得

$$\Theta_{11} = \Phi(t, t_0), \quad \Theta_{12} = 0$$

又由于

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= H^T(t)R^{-1}(t)H(t)Y(t) - F^T(t)Z(t) \\ &= -F^T(t)Z(t) + H^T(t)\Phi(t, t_0)P_0, \quad Z(t_0) = I \end{aligned}$$

为方程(8.22)式的伴随系统所构成的非齐次方程,故(8.23)式的转移矩阵为  $\Phi^T(t_0, t)$ 。于是得

$$Z(t) = \Phi^T(t_0, t) + \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t)H^T(\tau)R^{-1}(\tau)H(\tau)\Phi(\tau, t_0)d\tau \cdot P_0 \quad (8.24)$$

又由于

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t)M(\tau)d\tau &= \int_{t_0}^t [\Phi(\tau, t_0)\Phi(t_0, t)]^T M(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \Phi^T(t_0, t)\Phi^T(\tau, t_0)M(\tau)d\tau \\ &= \Phi^T(t_0, t) \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t_0)M(\tau)d\tau \end{aligned}$$

故(8.24)式又可写成

$$Z(t) = \Phi^T(t_0, t) + \Phi^T(t_0, t) \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t_0)H^T(\tau)R^{-1}(\tau)H(\tau)\Phi(\tau, t_0)d\tau \cdot P_0 \quad (8.25)$$

类似于(8.16)式,得

$$\Theta_{21} = \Phi^T(t_0, t) \int_{t_0}^t \Phi^T(\tau, t_0) H^T(\tau) R^{-1}(\tau) H(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau$$

$$\Theta_{22} = \Phi^T(t_0, t)$$

则误差协方差阵为

$$P(t|t) = (\Theta_{11}P_0 + \Theta_{12})(\Theta_{12}P_0 + \Theta_{22})^{-1}$$

## 8.2 李亚普诺夫方程求解方法

### 8.2.1 定常李亚普诺夫方程求解

对于线性协方差李亚普诺夫方程

$$\dot{P} = FP + PF^T + GQG^T \quad (8.26)$$

根据(8.6)式,考虑到  $H^T R^{-1} H = 0$ , 从而(8.7)式中

$$\Phi_{yy}(\tau) = (e^{-F\tau})^T, \quad \Phi_{\lambda}(\tau) = e^{F\tau}, \quad \Phi_{y\lambda}(\tau) = 0$$

于是可得

$$P(t_0 + \tau) = \Phi_{yy}(\tau) \Phi_{\lambda}^T(\tau) P(t_0) \Phi_{\lambda}^T(\tau) \quad (8.27)$$

(8.27)式中的  $\Phi_{\lambda}(\tau)$  可直接求解(8.5)式, 与(8.6)式比较可得

$$\Phi_{\lambda}(\tau) = \int_0^{\tau} \Phi_{\lambda}(\tau, t_1) G Q G^T \Phi_{\lambda}^T(t_1, \tau) dt_1 \quad (8.28)$$

### 8.2.2 时变李亚普诺夫方程求解

对于线性协方差李亚普诺夫方程

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q(t) \quad (8.29)$$

与(8.8)式类似处理, 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) & Q(t) \\ 0 & -F^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

求解(8.30)式, 可得

$$Z(t_0 + \tau) = \Phi_{yy}^T(t_0, t_0 + \tau) Z(t_0) \quad (8.31)$$

( $\Phi_{yy}(t, \tau)$  为  $\dot{X}(t) = F(t)X(t)$  的状态转移矩阵)

及

$$\begin{aligned} Y(t_0 + \tau) &= \Phi_{yy}(t_0 + \tau, t_0) Y(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \Phi_{yy}(t_0 + \tau, t_1) Q(t_1) \Phi_{yy}^T(t_0, t_1) Z(t_0) dt_1 \end{aligned} \quad (8.32)$$

因此

$$\begin{aligned} P(t_0 + \tau) &= Y(t_0 + \tau) Z^{-1}(t_0 + \tau) \\ &= [\Phi_{yy}(t_0 + \tau, t_0) P_0 + \Phi_{yx}(t_0 + \tau, t_0)] \Phi_{yy}^T(t_0 + \tau, t_0) \end{aligned} \quad (8.33)$$

式中

$$\Phi_{yx}(t_0 + \tau, t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \Phi_{yy}(t_0 + \tau, t_1) Q(t_1) \Phi_{yy}^T(t, t_1) dt_1 \quad (8.34)$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

将(8.34)式代入(8.33)式,得

$$P(t_0 + \tau) = \Phi_{yy}(t_0 + \tau, t_0) P_0 \Phi_{yy}^T(t_0 + \tau, t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \Phi_{yy}(t_0 + \tau, t_0) Q(t_1) \Phi_{yy}^T(t_0 + \tau, t_1) dt_1 \quad (8.35)$$

### 8.3 基于奇异值分解的黎卡提方程求解

线性时变系统估计协方差阵黎卡提方程

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + Q(t) - P(t)H^T(t)R^{-1}(t)H(t)P(t) \quad (8.36)$$

的求解比较困难。而且,在实际计算中可能会使 $P(t)$ 失去对称性和正定性。为了解决这一问题,本节给出一种基于奇异值分解的黎卡提方程的求解方法。

设

$$P(t) = V(t)\Lambda(t)V^T(t) \quad (8.37)$$

式中, $V(t)$ 为正交矩阵; $\Lambda(t)$ 为对角阵。为了书写方便本节后面将省去 $(t)$ 。

根据正交矩阵的性质,有

$$[P - \lambda_i I]v_i = 0 \quad (8.38)$$

式中, $\lambda_i$ 为 $\Lambda$ 的第 $i$ 行对角线元素; $v_i$ 为 $V$ 的第 $i$ 列向量。则

$$[P - \lambda_i I]\dot{v}_i + [\dot{P} - \dot{\lambda}_i I]v_i = 0 \quad (8.39)$$

$$v_i^T P v_i = v_i^T V \Lambda V^T v_i = 0 \quad (8.40)$$

由(8.39)式可得

$$v_i^T [P - \lambda_i I]\dot{v}_i + v_i^T [\dot{P} - \dot{\lambda}_i I]v_i = 0 \quad (8.41)$$

或写成

$$(\lambda_j - \lambda_i)v_i^T \dot{v}_i + v_i^T \dot{P} v_i = 0 \quad (8.42)$$

且

$$v_i^T [P - \lambda_i I]\dot{v}_i + v_i^T [\dot{P} - \dot{\lambda}_i I]v_i = v_i^T \dot{P} v_i - \dot{\lambda}_i = 0 \quad (8.43)$$

因此

$$\dot{\lambda}_i = v_i^T \dot{P} v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.44)$$

若 $\lambda_j \neq \lambda_i$ ,则

$$v_j^T \dot{v}_i = \frac{v_j^T \dot{P} v_i}{\lambda_i - \lambda_j} = a_j \quad (8.45)$$

若 $\lambda_j = \lambda_i$ ,则

$$v_j^T \dot{P} v_i = 0 \quad (8.46)$$

由(8.45)式,可得

$$v_j v_j^T \dot{v}_i = a_j v_j, \quad \forall \lambda_j \neq \lambda_i \quad (8.47)$$

由 $v_i^T v_i = 1$ ,可得

$$\dot{v}_i^T v_i + v_i^T \dot{v}_i = 0 \quad (8.48)$$

因此有

$$v_i v_j^T \dot{v}_i = 0 \quad (8.49)$$

综合考虑(8.47),(8.48)和(8.49)式,可得

$$\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j^T\right) \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1(j \neq i, \lambda_j \neq \lambda_i)}^n a_j \mathbf{v}_j \quad (8.50)$$

根据正交矩阵的性质,由(8.51)式可得

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1(j \neq i, \lambda_j \neq \lambda_i)}^n \frac{\mathbf{v}_j^T \dot{P} \mathbf{v}_i}{\lambda_i - \lambda_j} \cdot \mathbf{v}_j; \quad i = 1, \dots, n \quad (8.51)$$

综合(8.44),(8.52)式,有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= \mathbf{v}_i^T \dot{P} \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \sum_{j=1(j \neq i, \lambda_j \neq \lambda_i)}^n \left[ \frac{\mathbf{v}_j^T \dot{P} \mathbf{v}_i}{\lambda_i - \lambda_j} \cdot \mathbf{v}_j \right] \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n \quad (8.52)$$

将(8.36)式左乘  $\mathbf{v}_i^T$ 、右乘  $\mathbf{v}_i$ ,并将(8.53)式代入,得

$$\dot{\lambda}_i = \mathbf{v}_i^T [\lambda_i F + \lambda_i F^T + Q - \lambda_i^2 H^T R^{-1} H] \mathbf{v}_i \quad (8.53)$$

将(8.36)式左乘  $\mathbf{v}_j^T$ 、右乘  $\mathbf{v}_i$ ,并将(8.53)式代入,得

$$\mathbf{v}_j^T \dot{P} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j^T [\lambda_i F + \lambda_j F^T + Q - \lambda_i \lambda_j H^T R^{-1} H] \mathbf{v}_i \quad (8.54)$$

令

$$T_{ij} = \lambda_i F + \lambda_j F^T + Q - \lambda_i \lambda_j H^T R^{-1} H \quad (8.55)$$

代入(8.54),(8.55)式得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= \mathbf{v}_i^T T_{ii} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{v}_j^T \dot{P} \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_j^T T_{ij} \mathbf{v}_i \end{aligned} \right\} \quad (8.56)$$

由(8.56)式可知

$$T_{ij} = T_{ji}$$

令

$$d_{ji} = \mathbf{v}_j^T T_{ij} \mathbf{v}_i = d_{ij} \quad (8.57)$$

代入(8.53)式,可得

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \text{diag}[\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dots, \dot{\lambda}_n] \\ &= \text{diag}[d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}] \end{aligned} \quad (8.58)$$

及

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1(j \neq i, \lambda_j \neq \lambda_i)}^n \frac{d_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i} \mathbf{v}_j \quad (8.59)$$

令

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{d_{ji}}{\lambda_i - \lambda_j}, & \lambda_i \neq \lambda_j; \\ 0, & \lambda_i = \lambda_j \end{cases} \quad (8.60)$$

由(8.60),(8.61)及(8.46)式,可得

$$\dot{V} = V \pi \quad (8.61)$$

数值计算步骤如下:

第一步:给定  $\dot{P}(t_0)$ 。

第二步:求解  $d_{ij}, i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,n$ 。

第三步:积分求解  $\Lambda(t+\Delta t)$ ,并根据线性方程求解公式计算  $V(t+\Delta t)$ ;  $t=t_f$  时结束。

第四步:返回第二步。

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

## 第九章 非线性系统的最优估计

实际系统中总存在着不同程度的非线性,有些系统可以近似看成线性系统,但大多数系统则不能仅用线性微分方程描述,如飞机飞行状态等。因此,本章将讨论卡尔曼滤波向非线性系统推广的问题。

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

### 9.1 围绕标称轨道线性化方法

#### 9.1.1 非线性离散系统

考虑下述非线性仿射系统:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(k), k] + \boldsymbol{\Gamma}[\mathbf{x}(k), k]\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), k+1] + \mathbf{v}(k+1) \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

式中  $\mathbf{w}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  都是零均值白噪声序列,其统计特性如下:

$$E[\mathbf{w}(k)] = E[\mathbf{v}(k)] = 0$$

$$E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)] = \mathbf{Q}(k)\delta_{kj}$$

$$E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(j)] = \mathbf{R}(k)\delta_{kj}$$

$$E[\mathbf{w}(k)\mathbf{v}^T(j)] = 0$$

不考虑系统噪声,系统状态方程的解为

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}^*(k), k], \quad \mathbf{x}_0^* = E[\mathbf{x}_0] = \mathbf{m} \quad (9.2)$$

式中  $\mathbf{x}^*(k)$  称为标称状态变量。

真实状态  $\mathbf{x}(k)$  与标称状态  $\mathbf{x}^*(k)$  之差

$$\boldsymbol{\delta}[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k) \quad (9.3)$$

称为状态偏差。

把状态方程(9.1)中的非线性函数  $\boldsymbol{\varphi}[\cdot]$  围绕标称状态  $\mathbf{x}^*(k)$  进行泰勒级数展开,略去二次以上项,可得

$$\mathbf{x}(k+1) \approx \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}^*(k), k] + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^*(k)}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)] + \boldsymbol{\Gamma}[\mathbf{x}(k), k]\mathbf{w}(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}^*(k+1) + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^*(k)}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)] + \boldsymbol{\Gamma}[\mathbf{x}(k), k]\mathbf{w}(k)$$

把上式的  $\mathbf{x}^*(k+1)$  移至等号左边,并以  $\boldsymbol{\Gamma}[\mathbf{x}^*(k), k]$  代替  $\boldsymbol{\Gamma}[\mathbf{x}(k), k]$ ,可得

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^*(k)}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*(k)] + \boldsymbol{\Gamma}[\mathbf{x}(k), k]\mathbf{w}(k)$$

考虑到(9.3)式,可得状态偏差的近似线性化方程

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(k+1) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^*(k)}\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\Gamma}[\mathbf{x}^*(k), k]\mathbf{w}(k) \quad (9.4)$$

式中

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}^*(k)} = \frac{\partial \Phi[\mathbf{x}(k), k]}{\partial \mathbf{x}(k)} \bigg|_{\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}^*(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x^{(1)}(k)} & \cdots & \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x^{(n)}(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial x^{(1)}(k)} & \cdots & \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial x^{(n)}(k)} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}^*(k)} \quad (9.5)$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}$  为  $n \times n$  矩阵, 称为向量函数  $\Phi[\cdot]$  的雅可比矩阵。下面把(9.1)式中的观测方程线性化, 在不考虑观测噪声  $\mathbf{v}(k+1)$  时, 可得标称观测值

$$\mathbf{z}^*(k+1) = \mathbf{h}[\mathbf{x}^*(k+1), k+1] \quad (9.6)$$

把观测方程的非线性函数  $\mathbf{h}[\cdot]$  围绕标称状态  $\mathbf{x}^*(k+1)$  进行泰勒级数展开, 略去二次以上项, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{h}[\mathbf{x}^*(k+1), k+1] + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1)] + \mathbf{v}(k+1) \\ \mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}^*(k+1) &= \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^*(k+1)] + \mathbf{v}(k+1) \end{aligned}$$

设  $\delta \mathbf{z}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}^*(k+1)$ , 则可得观测方程的线性化方程:

$$\delta \mathbf{z}(k+1) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} \delta \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{v}(k+1) \quad (9.7)$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} &= \frac{\partial \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), k+1]}{\partial \mathbf{x}(k+1)} \bigg|_{\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{x}^*(k+1)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x^{(1)}(k+1)} & \cdots & \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x^{(n)}(k+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^{(m)}}{\partial x^{(1)}(k+1)} & \cdots & \frac{\partial \Phi^{(m)}}{\partial x^{(n)}(k+1)} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{x}^*(k+1)} \end{aligned}$$

$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}$  为  $m \times n$  矩阵, 称为向量函数  $\mathbf{h}[\cdot]$  的雅可比矩阵。线性化方程(9.4)和(9.7)已成为卡尔曼滤波所需的控制系统模型和观测系统模型, 因此运用卡尔曼滤波的基本方程, 可得状态偏差的卡尔曼滤波的递推方程组如下:

$$\left. \begin{aligned} \delta[\mathbf{x}(k+1|k+1)] &= \delta[\mathbf{x}(k+1|k)] + K(k+1) [\delta[\mathbf{z}(k+1)] \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} \delta[\mathbf{x}(k+1|k)]] \\ \delta[\mathbf{x}(k+1|k)] &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}^*(k)} \delta[\mathbf{x}(k|k)] \\ K(k+1) &= P(k+1|k) \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} \right]^T \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} P(k+1|k) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} \right]^T + R_{k+1} \right\}^{-1} \\ P(k+1|k) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}^*(k)} P(k|k) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}^*(k)} \right]^T + \Gamma[\mathbf{x}^*(k), k] Q(k) \\ &\quad \times \Gamma^T[\mathbf{x}^*(k), k] \\ P(k+1|k+1) &= \left[ I - K(k+1) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}^*(k+1)} \right] P(k+1|k) \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$



式中滤波值和滤波误差方差阵的初值分别为

$$\delta(\mathbf{x}_0) = E[\delta(\mathbf{x}_0)] = 0, \quad P_0 = \text{Var}\delta(\mathbf{x}_0) = \text{Var}\mathbf{x}_0$$

系统状态的滤波值为

$$\mathbf{x}(k+1|k+1) = \mathbf{x}^*(k+1) + \delta[\mathbf{x}(k+1|k+1)] \quad (9.9)$$

这种线性化滤波方法只是在能够得到标称轨道,并且状态偏差  $\delta[\mathbf{x}(k)]$  较小时方能应用。

### 9.1.2 非线性连续系统

非线性系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(t), t] + G[\mathbf{x}(t), t]\mathbf{w}(t)$$

观测方程为

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t), t] + \mathbf{v}(t) \quad (9.11)$$

式中,  $\mathbf{x}(t)$  为  $n$  维状态向量;  $\mathbf{z}(t)$  为  $m$  维观测向量;  $\boldsymbol{\varphi}$  为  $n$  维向量函数;  $\mathbf{h}$  为  $m$  维向量函数;  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  都是零均值白噪声过程;  $E[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau)$ ,  $E[\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau)$ ,  $\mathbf{w}(t)$  与  $\mathbf{v}(t)$  互不相关。

如果不考虑系统噪声,可求得标称状态  $\mathbf{x}^*(t)$  为

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}^*(t), t] \quad (9.12)$$

初值  $\mathbf{x}^*(t) = E[\mathbf{x}(t_0)] = \mathbf{m}_0$ 。

把状态方程(9.10)的非线性函数  $\boldsymbol{\varphi}[\cdot]$  围绕标称状态  $\mathbf{x}^*(t)$  进行泰勒级数展开,略去二次以上项,可得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}^*(t), t] + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^*} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)] + G[\mathbf{x}(t), t]\mathbf{w}(t)$$

考虑到  $\boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}^*(t), t] = \dot{\mathbf{x}}^*(t)$ , 以  $G[\mathbf{x}^*(t), t]$  近似代替  $G[\mathbf{x}(t), t]$ , 可得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^*} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)] + G[\mathbf{x}^*(t), t]\mathbf{w}(t)$$

设真实轨道状态  $\mathbf{x}(t)$  与标称轨道状态  $\mathbf{x}^*(t)$  之状态偏差为

$$\delta[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$$

可得状态偏差方程

$$\dot{\delta}[\mathbf{x}(t)] = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^*} \delta[\mathbf{x}(t)] + G[\mathbf{x}^*(t), t]\mathbf{w}(t)$$

令式中

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^*} = A(t), \quad G[\mathbf{x}^*(t), t] = G(t)$$

则

$$\dot{\delta}[\mathbf{x}(t)] = A(t)\delta[\mathbf{x}(t)] + G(t)\mathbf{w}(t) \quad (9.13)$$

在不考虑噪声  $\mathbf{v}(t)$  时,可得标称观测值为

$$\mathbf{z}^*(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}^*(t), t]$$

真实观测值  $\mathbf{z}(t)$  与标称观测值  $\mathbf{z}^*(t)$  之差

$$\delta[\mathbf{z}(t)] = \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}^*(t)$$

为观测偏差。把(9.11)式围绕标称状态  $\mathbf{x}^*(t)$  线性化,可得

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识版权!

$$z(t) = h[x^*(t), t] + \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} [x(t) - x^*(t)] + v(t)$$

$$z(t) - z^*(t) = \frac{\partial h}{\partial x^*} [x(t) - x^*(t)] + v(t)$$

$$\delta[z(t)] = \frac{\partial h}{\partial x^*} \delta[x(t)] + v(t)$$

令  $\frac{\partial h}{\partial x^*} = H(t)$ , 则可得观测偏差的线性化方程

$$\delta[z(t)] = H(t)\delta[x(t)] + v(t) \quad (9.14)$$

利用卡尔曼滤波基本方程, 可求得  $\delta x(t)$  的估值  $\delta \hat{x}(t|t)$ , 最后得到滤波值

$$\hat{x}(t|t) = x^*(t) + \delta \hat{x}(t|t) \quad (9.15)$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

## 9.2 围绕滤波值 $\hat{x}(t|t)$ 线性化的滤波方法

围绕滤波值  $\hat{x}(t|t)$  线性化的滤波方法通常称为推广卡尔曼滤波方法, 简称为 EKF。

### 9.2.1 非线性离散系统

上节论述的线性化滤波方程是将非线性函数  $\varphi[\cdot]$  围绕标称状态  $x^*(k)$  展成泰勒级数, 略去二次以上项后, 得到非线性系统的线性化模型。推广的卡尔曼滤波是将非线性函数  $\varphi[\cdot]$  围绕滤波值  $\hat{x}(k|k)$  展成泰勒级数, 略去二次以上项后, 得到非线性系统的线性化模型。

由系统状态方程得

$$\begin{aligned} x(k+1) \approx & \varphi[x(k|k), k] + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x(k)=\hat{x}(k|k)} [x(k) - \hat{x}(k|k)] \\ & + \Gamma[x(k|k), k]w(k) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x(k)=\hat{x}(k|k)} &= \Phi(k+1, k) \\ \varphi[\hat{x}(k|k), k] - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} \right|_{x(k)=\hat{x}(k|k)} \hat{x}(k|k) &= f(k) \end{aligned}$$

则状态方程为

$$\hat{x}(k+1) = \Phi(k+1, k)\hat{x}(k) + \Gamma[\hat{x}(k|k), k]w(k) + f(k) \quad (9.16)$$

初始值为  $x_0 = E[x_0] = m_0$ 。

同基本卡尔曼滤波模型相比, 在已经求得前一步滤波值  $\hat{x}(k|k)$  的条件下, 状态方程 (9.16) 增加了非随机的外作用项  $f(k)$ 。

把观测方程的  $h[\cdot]$  围绕  $\hat{x}(k+1|k)$  进行泰勒级数展开, 略去二次以上项, 可得

$$z(k+1) = h[\hat{x}(k+1|k), k+1] + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x(k+1)=\hat{x}(k+1|k)} [x(k+1) - \hat{x}(k+1|k)] + v(k+1)$$

令

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x(k+1)=\hat{x}(k+1|k)} = H(k+1) - \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x(k+1)=\hat{x}(k+1|k)} \hat{x}(k+1|k)$$

$$+ \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1|k), k+1] = \mathbf{y}(k+1)$$

则观测方程为

$$\mathbf{z}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{y}(k+1) + \mathbf{v}(k+1) \quad (9.17)$$

应用卡尔曼滤波基本方程可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k+1) &= \mathbf{x}(k+1|k) + K(k+1)\{\mathbf{z}(k+1) \\ &\quad - \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1|k), k+1]\} \\ \mathbf{x}(k+1|k) &= \Phi[\mathbf{x}(k|k), k] \\ K(k+1) &= P(k+1|k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1|k) \\ &\quad \times H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \\ P(k+1|k) &= \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma[\mathbf{x}(k|k), k] \\ &\quad \times Q(k)\Gamma^T[\mathbf{x}(k|k), k] \\ P(k+1|k+1) &= [I - K(k+1)H(k+1)]P(k+1|k) \end{aligned} \quad (9.18)$$

式中滤波值与滤波误差方差阵的初始值分别为

$$\mathbf{x}_0 = E[\mathbf{x}_0] = \mathbf{m}_0, \quad P_0 = \text{Var}\mathbf{x}_0$$

推广卡尔曼滤波方法的优点是不必预先计算标称轨道,但它只有在滤波误差  $\tilde{\mathbf{x}}(k|k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)$  及一步预测误差  $\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)$  较小时方能适用。

### 9.2.2 非线性连续系统

先把非线性连续系统的状态方程和观测方程对时间离散化,转化为离散模型,然后再用非线性离散系统的推广卡尔曼滤波公式进行递推计算。

设非线性连续系统为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{w}(t) \quad (9.19)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(t)] + \mathbf{v}(t) \quad (9.20)$$

把  $\mathbf{x}(t+\Delta t)$  展成幂级数

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+\Delta t) &= \mathbf{x}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{\mathbf{x}}(t)(\Delta t)^2 + \dots \\ &= \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(\mathbf{x})\Delta t + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

把(9.19)式离散化,令  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(k)$ ,  $\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(k+1)$ , 并设

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(k)} = A[\mathbf{x}(k)]$$

则

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + A[\mathbf{x}(k)]\Delta t + A[\mathbf{x}(k)]f[\mathbf{x}(k)]\Delta t + \mathbf{w}(k) \quad (9.21)$$

这里的  $\mathbf{w}(k)$  表示离散化误差和动态系统不确定性的总和,而且假设  $\mathbf{w}(k)$  是零均值白噪声序列,  $E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)] = Q(k)\delta_{kj}$ .

把观测方程(9.20)离散化,得

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k)] + \mathbf{v}(k) \quad (9.22)$$

这里假设  $\mathbf{v}(k)$  是零均值白噪声序列,  $E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(k)] = R(k)\delta_{kj}$ .

于是(9.21), (9.22)式组成了非线性离散模型。

利用推广的卡尔曼滤波方法,把(9.21)式和(9.22)式围绕滤波值  $\mathbf{x}(k|k)$  线性化,再应用离散系统卡尔曼滤波基本公式,即可得滤波解。

### 9.3 近似条件均值滤波及二阶滤波

将第一章的最小方差估计理论用于非线性系统(9.1)式,我们可以推导出近似条件均值滤波以及二阶滤波方法。

设  $\mathbf{z}_1^{k+1}$  为观测值  $\mathbf{z}(1), \mathbf{z}(2), \dots, \mathbf{z}(k+1)$  的集合。一般说来,条件概率分布密度  $p[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^{k+1}]$  不完全是正态分布,因而  $\mathbf{x}(k+1)$  和  $\mathbf{z}_1^{k+1}$  的联合分布密度也不完全是正态的,但是它们接近正态分布。为了求得近似条件均值滤波,可近似地认为  $p[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^{k+1}]$  是正态的,因此可利用公式(1.49)和(1.50)来求非线性滤波。由于

$$p[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^{k+1}] = p[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}(k+1), \mathbf{z}_1^k] \quad (9.23)$$

我们把(1.49)式和(1.50)式中的  $\mathbf{x}, \mathbf{z}$  分别看成  $\mathbf{x}(k+1)$  和  $\mathbf{z}(k+1)$ , 同时把上式左右两边出现的均值、方差和协方差看作是给定  $\mathbf{z}_1^k$  时  $\mathbf{x}(k+1)$  和  $\mathbf{z}(k+1)$  的条件均值、条件方差及条件协方差,于是,得近似公式

$$\begin{aligned} E[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^{k+1}] &= E[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}(k+1), \mathbf{z}_1^k] \\ &= E[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^{k+1}] + \text{Cov}\{\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k\} \\ &\quad \times \{\text{Var}[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]\}^{-1} \{\mathbf{z}(k+1) - E[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]\} \end{aligned} \quad (9.24)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^{k+1}] &= \text{Var}[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}(k+1), \mathbf{z}_1^k] \\ &= \text{Var}[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^{k+1}] - \text{Cov}\{\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k\} \\ &\quad \times \{\text{Var}[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]\}^{-1} \text{Cov}^T\{\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k\} \end{aligned} \quad (9.25)$$

按卡尔曼滤波的习惯记法,有

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^{k+1}] &= \mathbf{x}(k+1|k+1) \\ E[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^k] &= \mathbf{x}(k+1|k) \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

则

$$\left. \begin{aligned} \text{Var}[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^{k+1}] &= P(k+1|k+1) \\ \text{Var}[\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{z}_1^k] &= P(k+1|k) \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

把(9.26)式代入(9.27)式,得近似的非线性滤波公式

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k+1) &= \mathbf{x}(k+1|k) + \text{Cov}\{\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k\} \\ &\quad \times \{\text{Var}[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]\}^{-1} \{\mathbf{z}(k+1) - E[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]\} \\ P(k+1|k+1) &= P(k+1|k) - \text{Cov}\{\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k\} \\ &\quad \times \{\text{Var}[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]\}^{-1} \text{Cov}^T\{\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k\} \end{aligned} \right\} \quad (9.28)$$

下面利用(9.28)式来求解非线性系统(9.11)式的滤波问题。在(9.28)式中要计算  $\text{Cov}\{\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k\}$ ,  $\text{Var}[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]$  和  $E[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]$ 。为此,必须对(9.1)式中的  $\phi$ ,  $\Gamma$  和  $\mathbf{h}$  分别围绕  $\mathbf{x}(k|k)$  和  $\mathbf{x}(k+1|k)$  展成泰勒级数,并取其一阶近似和二阶近似,从而可分别求出一阶或二阶的近似条件滤波公式。

### 9.3.1 一阶近似条件均值滤波(一阶滤波器)

首先把  $\phi$  围绕  $\mathbf{x}(k|k)$ ,  $\mathbf{h}$  围绕  $\mathbf{x}(k+1|k)$  展成泰勒级数,并取一阶近似,得

$$\phi[\mathbf{x}(k), k] = \phi[\mathbf{x}(k|k), k] + \frac{\partial \phi_k}{\partial \mathbf{x}(k|k)} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)] \quad (9.29)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \phi_k &= \phi[\mathbf{x}(k|k), k] \\ \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), k+1] &= \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1|k), k+1] + \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \\ &\quad \times [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)] \end{aligned} \right\} \quad (9.30)$$

式中

$$\mathbf{h}_{k+1} = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1|k), k+1]$$

然后把  $\Gamma$  中的  $\mathbf{x}(k)$  用  $\mathbf{x}(k|k)$  来代替,得

$$\Gamma[\mathbf{x}(k), k] = \Gamma[\mathbf{x}(k|k), k] \quad (9.31)$$

于是得到

$$\begin{aligned} E[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k] &= E\left\{\left[\mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), K+1] + \mathbf{v}(k+1)\right] \middle| \mathbf{z}_1^k\right\} \\ &= E\left\{\left[\mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1|k), k+1] + \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)]\right] \middle| \mathbf{z}_1^k\right\} \\ &= \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1|k), k+1] \\ \text{Var}[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k] &= E\left\{\left[\mathbf{z}(k+1) - E[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]\right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[\mathbf{z}(k+1) - E[\mathbf{z}(k+1)|\mathbf{z}_1^k]\right]^T \middle| \mathbf{z}_1^k\right\} \\ &= E\left\{\left[\frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)] + \mathbf{v}(k)\right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[\frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)] + \mathbf{v}(k)\right]^T \middle| \mathbf{z}_1^k\right\} \end{aligned} \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} P(k+1|k) \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \right]^T + R(k+1) \\
&= H(k+1)P(k+1|k)H(k+1) + R(k+1)
\end{aligned} \quad (9.33)$$

$$\begin{aligned}
&\text{Cov}\{\mathbf{x}(k+1), \mathbf{z}(k+1) | \mathbf{z}_1^k\} \\
&= E\left\{ [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)][\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{z}(k+1|k)]^T | \mathbf{z}_1^k \right\} \\
&= E\left\{ [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)] \left( \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)] + \mathbf{v}(k+1) \right)^T \middle| \mathbf{z}_1^k \right\} \\
&= P(k+1|k)H^T(k+1)
\end{aligned} \quad (9.34)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1|k) &= E\left\{ \left( \Phi[\mathbf{x}(k|k), k] + \Gamma[\mathbf{x}(k), k]\mathbf{w}(k) \right) \middle| \mathbf{z}_1^k \right\} \\
&= E\left\{ \left( \Phi[\mathbf{x}(k|k), k] + \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k|k)} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)] + \Gamma[\mathbf{x}(k|k), k]\mathbf{w}(k) \right) \middle| \mathbf{z}_1^k \right\} \\
&= \Phi[\mathbf{x}(k|k), k]
\end{aligned} \quad (9.35)$$

$$\begin{aligned}
P(k+1|k) &= E\left\{ [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)][\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k+1|k)]^T | \mathbf{z}_1^k \right\} \\
&= E\left\{ \left( \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k|k)} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)] + \Gamma[\mathbf{x}(k|k), k]\mathbf{w}(k) \right) \right. \\
&\quad \times \left. \left( \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k|k)} [\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k)] + \Gamma[\mathbf{x}(k|k), k]\mathbf{w}(k) \right)^T \middle| \mathbf{z}_1^k \right\}
\end{aligned}$$

因  $\frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k|k)} = \Phi(k+1, k)$ , 于是

$$\begin{aligned}
P(k+1|k) &= \Phi(k+1, k)P(k|k)\Phi^T(k+1, k) \\
&\quad + \Gamma[\mathbf{x}(k|k), k]Q(k)\Gamma^T[\mathbf{x}(k|k), k]
\end{aligned} \quad (9.36)$$

把(9.29)~(9.36)式代入(9.28)式中, 可得离散系统的一阶近似均值滤波公式。该公式与离散系统推广的卡尔曼滤波递推公式形式完全相同。

### 9.3.2 二阶近似条件均值滤波公式(二阶滤波器)

把  $\Phi, \Gamma, Q, \Gamma^T$  分别围绕  $\mathbf{x}(k|k), \mathbf{h}$  围绕  $\mathbf{x}(k+1|k)$  展成泰勒级数, 并取到二阶项为止, 即

$$\begin{aligned}
\Phi[\mathbf{x}(k), k] &= \Phi[\mathbf{x}(k|k), k] + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{x}(k|k)} \mathbf{x}(k|k) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{x}^T(k|k) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}(k|k)} \right]^2 \Phi_k
\end{aligned} \quad (9.37)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), k+1] &= \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1|k), k] + \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \mathbf{x}(k+1|k) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{x}^T(k+1|k) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \right]^2 \mathbf{h}_{k+1}
\end{aligned} \quad (9.38)$$

$$\begin{aligned}
& \Gamma[\mathbf{x}(k), k] Q(k) \Gamma^T[\mathbf{x}(k), k] \\
&= \Gamma[\mathbf{x}(k|k), k] Q(k) \Gamma^T[\mathbf{x}(k|k), k] \\
&+ \left[ \mathbf{x}^T(k|k) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(k|k)} \right] \Gamma(k) Q(k) \Gamma^T(k) \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \mathbf{x}^T(k|k) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(k|k)} \right]^2 \Gamma(k) Q(k) \Gamma^T(k)
\end{aligned}$$

式中,形如  $\left( \mathbf{x}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)$  和  $\left( \mathbf{x}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^2$  的记号,表示两个微分算子,它们作用于一个矩阵(或向量)函数  $A(\mathbf{x})$  上的意义分别是

$$\left. \begin{aligned} \left( \mathbf{x}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) A &= \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^i \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \\ \left( \mathbf{x}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 A &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{x}^i \mathbf{x}^j \frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} \end{aligned} \right\} \quad (9.40)$$

另外,如果  $P = (P_{ij})$  是以  $P_{ij}$  为元素的  $n$  阶方阵,则微分算子  $\left( \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{x}} P \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right)$  作用于  $A(\mathbf{x})$  上的意义是

$$\left( \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{x}} P \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ij} \frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} \quad (9.41)$$

利用(1.49)式和(1.50)式,并经过推导可得到二阶近似条件均值滤波公式。由于推导时需要知道正态分布的三阶和四阶矩,很复杂。因此下面我们不加推导地给出二阶近似条件均值滤波的递推公式:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1|k+1) &= \mathbf{x}(k+1|k) + K(k+1) \\
&\times \left\{ \mathbf{z}(k+1) - \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1|k), k+1] - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \right. \right. \\
&\times \left. \left. P(k+1|k) \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \right] \mathbf{h}_{k+1} \right\} \\
\mathbf{x}(k+1|k) &= \Phi[\mathbf{x}(k|k), k] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{x}(k|k)} P(k|k) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(k|k)} \right] \Phi_k \\
K(k+1) &= P(k+1|k) \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \right]^T \left\{ \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \right] P(k+1|k) \right. \\
&\times \left. \left[ \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \right]^T + R(k+1) + \Xi(k+1|k) \right]^{-1} \right\}^{-1}
\end{aligned} \quad (9.42)$$

式中

$$\begin{aligned}
\Xi(k+1|k) &= \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}(k+1|k) \partial \mathbf{x}^{(j)}(k+1|k)} \\
&\times P_{i,j}(k+1|k) P_{l,k}(k+1|k) \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}(k+1|k) \partial \mathbf{x}^{(j)}(k+1|k)} \right]^T
\end{aligned} \quad (9.43)$$

$P(k+1|k) = [P_{i,j}(k+1|k)]$  的递推公式为

$$\begin{aligned}
P(k+1|k) &= \frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{x}(k|k)} P(k|k) \left[ \frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{x}(k|k)} \right]^T \\
&+ \Gamma[\mathbf{x}(k|k), k] Q(k) \Gamma^T[\mathbf{x}(k|k), k] \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{x}(k|k)} P(k|k) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}(k|k)} \right] \Gamma(k) Q(k) \Gamma^T(k) \\
&+ \Theta(k|k)
\end{aligned} \quad (9.44)$$



$P(k+1|k+1)=[P_{i,j}(k+1|k+1)]$ 的递推公式为

$$P(k+1|k+1) = \left[ I - K(k+1) \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}(k+1|k)} \right] P(k+1|k)$$

而

$$\Theta(k|k) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,l,s=1}^n \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \mathbf{x}^{(i)}(k|k) \partial \mathbf{x}^{(j)}(k|k)}$$

$$\times P_{j,s}(k|k) P_{i,l}(k|k) \left[ \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \mathbf{x}^{(i)}(k|k) \partial \mathbf{x}^{(j)}(k|k)} \right]$$

超星浏览器提醒您：  
请勿复制  
请尊重相关知识产权！

## 9.4 迭代滤波

在前面讨论推广卡尔曼滤波和近似条件均值滤波,对非线性模型线性化时,曾把  $\Phi[\mathbf{x}(k), k]$  和  $\mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), k+1]$  分别围绕  $\mathbf{x}(k|k)$  和  $\mathbf{x}(k+1|k)$  作泰勒级数展开,而取其线性项,并把  $\Gamma[\mathbf{x}(k), k]$  中的  $\mathbf{x}(k)$  用  $\mathbf{x}(k|k)$  来代替,然后求第  $k+1$  时刻的滤波值。当第  $k+1$  时刻的量测值未取得时,  $\mathbf{x}(k|k)$  和  $\mathbf{x}(k+1|k)$  分别是  $\mathbf{x}(k)$  和  $\mathbf{x}(k+1)$  的最优估值。但当  $\mathbf{z}(k+1)$  到来后,根据估计理论可知  $\mathbf{x}(k|k+1)$  要优于  $\mathbf{x}(k|k)$ ,  $\mathbf{x}(k+1|k+1)$  要优于  $\mathbf{x}(k+1|k)$ 。所以,很自然地会想到,如果在线性化时,分别以平滑值  $\mathbf{x}(k|k+1)$  和滤波值  $\mathbf{x}(k+1|k+1)$  取代  $\mathbf{x}(k|k)$  和  $\mathbf{x}(k+1|k)$  的位置来展开  $\Phi, \mathbf{h}$  和  $\Gamma$ , 会使滤波的近似程度更好一些。这启发了我们,可以把系统模型围绕  $\mathbf{x}(k|k+1)$  和  $\mathbf{x}(k+1|k+1)$  进行重新线性化,然后再一次利用  $\mathbf{z}(k+1)$  来改善对  $\mathbf{x}(k+1)$  的估计,这种方法叫做迭代滤波。这种迭代计算可根据我们的需要反复进行。但应当指出,平滑值  $\mathbf{x}(k|k+1)$  和滤波值  $\mathbf{x}(k+1|k+1)$  都与新观测值  $\mathbf{z}(k+1)$  有关,而  $\mathbf{z}(k+1)$  所提供的信息有限,这限制了迭代的次数。

下面不加证明地给出迭代滤波的计算公式。假定已求得系统(9.1)式在第  $k$  时刻的迭代滤波值  $\mathbf{x}^d(k|k)$  及滤波误差的条件方差阵  $P^d(k|k)$ , 则在  $k+1$  时刻的第  $i$  次 ( $i > 0$ ) 迭代滤波值  $\mathbf{x}^i(k+1|k+1)$  的递推方程组为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^i(k+1|k+1) &= \mathbf{x}^i(k+1|k) + K^i(k+1) \left\{ \mathbf{z}(k+1) \right. \\ &\quad - \mathbf{h}[\mathbf{x}^{i-1}(k+1|k+1), k+1] \\ &\quad - \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}^{i-1}(k+1|k+1)} [\mathbf{x}^i(k+1|k) \\ &\quad - \mathbf{x}^{i-1}(k+1|k+1)] \} \\ \mathbf{x}^i(k+1|k) &= \Phi[\mathbf{x}^{i-1}(k|k+1), k] \\ &\quad + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{x}^{i-1}(k|k+1)} [\mathbf{x}^d(k|k) - \mathbf{x}^{i-1}(k|k+1)] \\ K^i(k+1) &= P^i(k+1|k) \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}^{i-1}(k+1|k+1)} \right]^T \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}^{i-1}(k+1|k+1)} P^i(k+1|k) \right. \\ &\quad \times \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}^{i-1}(k+1|k+1)} \right]^T + R(k+1) \}^{-1} \\ P^i(k+1|k) &= \frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{x}^{i-1}(k|k+1)} P^d(k|k) \left[ \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial \mathbf{x}^{i-1}(k|k+1)} \right]^T \\ &\quad + \Gamma[\mathbf{x}^{i-1}(k|k+1), k] Q(k) \Gamma^T[\mathbf{x}^{i-1}(k|k+1), k] \end{aligned} \right\} \quad (9.45)$$

为了计算  $i+1$  次迭代,需要的平滑值为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^i(k|k+1) &= \mathbf{x}^d(k|k) + P^d(k|k) \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}^{i-1}(k|k+1)} \right]^T [P^i(k+1|k)]^{-1} \\ &\quad \times [\mathbf{x}^i(k+1|k+1) - \mathbf{x}^i(k+1|k)] \end{aligned} \quad (9.46)$$

当  $i=d$ ,即最后一次迭代时,计算第  $i$  次迭代滤波误差的方差阵为

$$P^i(k+1|k+1) = \left[ I - K^i(k+1) \frac{\partial \mathbf{h}_{k+1}}{\partial \mathbf{x}^{i-1}(k+1|k+1)} \right] P^i(k+1|k)$$

迭代初始值为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0(k|k+1) &= \mathbf{x}^d(k|k) \\ \mathbf{x}^0(k+1|k+1) &= \Phi[\mathbf{x}^d(k|k), k] \end{aligned}$$

对于许多非线性模型,虽然迭代次数增多,但滤波精度并没有明显改进,因此通常取  $d=1$  即可。

温馨提醒:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

## 第十章 大系统估计理论

在求解高维卡尔曼滤波问题时,有时会出现滤波发散。为此,人们试图将滤波器阶次降低,这样,既可保证滤波收敛,又可以大大提高计算效率。本章将重点讨论递阶和分散估计理论。

### 10.1 极大验后估计方法

在大系统用多级结构进行参数辨识方面,Arafeh 和 Sage 是较早取得有实用结果的两们学者。他们提出的极大验后估计(maximum a posteriori approach)结合协方差拟合(covariance matching)和极大似然法,不仅能辨识已知噪声矩(指期望值和方差)的系统参数,还能对未知噪声矩的系统进行辨识。而且由于可以进行多种因素的多级分解,因此在大系统辨识中能显著地降低子问题维数,减轻计算工作量。

设  $n$  阶非线性离散系统为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{x}(k), k] + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{h}[\mathbf{x}(k), k] + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量(其中包括了所要辨识的参数);  $\boldsymbol{\varphi}$  是描述系统结构的非线性向量值函数,其中应包括任何已知的输入  $\mathbf{u}$ ;  $\mathbf{w}$  是  $n$  维模型噪声;  $\mathbf{z}$  为  $r$  维观测向量;  $\mathbf{h}$  为  $r$  维非线性向量值观测函数;  $\mathbf{v}$  为  $r$  维测量噪声。

模型和测量噪声都假设为不相关的高斯白噪声序列,其均值和协方差已知:

$$\left\{ \begin{aligned} E\{\mathbf{w}(k)\} &= \mathbf{q}(k), & \text{Cov}\{\mathbf{w}(k), \mathbf{w}(l)\} &= \mathbf{Q}(k)\delta_k(k-l) \\ E\{\mathbf{v}(k)\} &= \mathbf{r}(k), & \text{Cov}\{\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(l)\} &= \mathbf{R}(k)\delta_k(k-l) \end{aligned} \right. \quad (10.2)$$

其中,  $\delta_k(k-l)$  是 Kronecker delta 函数;  $\mathbf{Q}(k)$  和  $\mathbf{R}(k)$  分别为半正定和正定块对角协方差矩阵。初始条件是高斯随机向量

$$E\{\mathbf{x}(k_0)\} = \bar{\mathbf{x}}(k_0), \quad \text{Var}\{\mathbf{x}(k_0)\} = \mathbf{P}(k_0)$$

假设  $\mathbf{P}(k_0)$  也是分块对角阵。

对于这一问题,极大验后估计就是要使下述目标函数最小化:

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(k_0) - \bar{\mathbf{x}}(k_0)\|_{\mathbf{P}^{-1}(k_0)}^2 &+ \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \{ \|\mathbf{z}(k+1) - \mathbf{r}(k+1) \\ &- \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), k+1]\|_{\mathbf{R}^{-1}(k+1)}^2 + \|\mathbf{w}(k) - \mathbf{q}(k)\|_{\mathbf{Q}^{-1}(k)}^2 \} \end{aligned} \quad (10.3)$$

并以(10.1)式为其约束条件,且  $k_0, k_f$  固定。

为使目标函数最小,写出其哈密顿函数

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2} \|\mathbf{z}(k_0) - \mathbf{r}(k+1) - \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), k+1]\|_{\mathbf{R}^{-1}(k_0)}^2 \\ + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(k) - \mathbf{q}(k+1)\|_{\mathbf{Q}^{-1}(k_0)}^2 \end{aligned}$$

$$+ \lambda^T(k+1)\phi[\mathbf{x}(k), k] + \mathbf{w}(k) \quad (10.4)$$

及两点边值问题

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{w}(k)} = 0 &= Q^{-1}(k)[\mathbf{w}(k) - \mathbf{q}(k)] + \lambda(k+1) \\ &- \Phi^T(k)\Pi^T(k+1)R^{-1}(k+1)\mathbf{v}(k+1) \end{aligned}$$

于是有

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{q}(k) - Q(k)[\lambda(k+1) - \Phi^T(k)\Pi^T(k+1)R^{-1}(k+1)\mathbf{v}(k+1)]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \lambda(k+1)} = \mathbf{x}(k+1) &= \phi[\mathbf{x}(k), k] - \mathbf{q}(k) - Q(k)[\lambda(k+1) \\ &- \Phi^T(k)\Pi^T(k+1)R^{-1}(k+1)\mathbf{v}(k+1)] \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}(k)} = \lambda(k) &= -\Phi^T(k)\Pi^T(k+1)R^{-1}(k+1)\mathbf{v}(k+1) \\ &+ \Phi^T(k)\lambda(k+1) \end{aligned} \quad (10.6)$$

其中

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{z}(k+1) - \mathbf{r}(k+1) - \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), k+1]$$

$$\Phi(k) = \frac{\partial \phi[\mathbf{x}(k), k]}{\partial \mathbf{x}(k)}$$

$$\Pi(k+1) = \frac{\partial \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), k+1]}{\partial \mathbf{x}(k+1)}$$

边界条件为

$$\begin{aligned} \lambda(k_0) &= P^{-1}(k_0)[\mathbf{x}(k_0) - \bar{\mathbf{x}}(k_0)] \\ \lambda(k_f) &= 0 \end{aligned} \quad (10.7)$$

要得到固定时间间隔的平滑解  $\mathbf{x}(k|k_f)$ , 必须先有全部观测数据  $\{\mathbf{z}(k); k_0 \leq k \leq k_f\}$ , 而且作为总体求解, 对于大规模系统就一定会出现“维数灾”。为此, 我们将原问题分解成  $N$  个子问题

$$n = \sum_{i=1}^N n_i$$

并引入  $N$  个有关联的等式约束条件

$$\pi_i(k) = q_i(\mathbf{x}_i, k); \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j \quad (10.8)$$

再将目标函数进行分解

$$\begin{aligned} J = \sum_{i=1}^N J_i &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_i(k_0) - \bar{\mathbf{x}}_i(k_0)\|_{P_i^{-1}(k_0)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \|\mathbf{z}_i(k+1) \right. \\ &- \mathbf{r}_i(k+1) - \mathbf{h}_i[\mathbf{x}_i, \pi_i, (k+1)]\|_{R_i^{-1}(k+1)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{w}_i(k) \\ &- \mathbf{q}_i(k)\|_{Q_i^{-1}(k)}^2 \left. \right\} \end{aligned} \quad (10.9)$$

其中  $r_i$  表示各子问题测量噪声  $\mathbf{v}_i$  的期望值。

系统模型(约束条件)分解成

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_i(k+1) &= \phi_i(\mathbf{x}_i, \pi_i, k) + \mathbf{w}_i(k) \\ \mathbf{z}_i(k) &= \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i, \pi_i, k) + \mathbf{v}_i(k) \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

接着就可以用大系统理论中关联预报或罚函数法进行分解协调。这里我们只介绍关联预报法。写出子问题的哈密顿函数

$$H_i = \frac{1}{2} \|z_i(k+1) - r_i(k+1) - h_i(x_i, \pi_i, k+1)\|_{R_i^{-1}(k+1)}^2 \\ + \frac{1}{2} \|w_i(k) - q_i(k)\|_{Q_i^{-1}(k)}^2 + \beta_i^T(k)[\pi_i(k) - g_i(x_i, k)] \\ + \lambda_i^T(k+1)[\varphi_i(x_i, \pi_i, k) + w_i(k)]$$

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识版权 (10.11)

与前面一样,写出子问题的两点边值问题:

$$\frac{\partial H_i}{\partial \lambda_i(k+1)} = 0 = Q_i^{-1}(k)[w_i(k) - q_i(k)] + \lambda_i(k+1) \\ - \Pi_i^T(k+1)R_i^{-1}(k+1)v_i(k+1)$$

即有

$$w_i(k) = q_i(k) - Q_i(k)[\lambda_i(k+1) \\ - \Pi_i^T(k+1)R_i^{-1}(k+1)v_i(k+1)] \quad (10.12)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \lambda_i(k+1)} = x_i(k+1) = \varphi_i(x_i, \pi_i, k) + q_i(k) - Q_i(k) \\ \times [\lambda_i(k+1) - \Pi_i^T(k+1)R_i^{-1}(k+1)v_i(k+1)]$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_i(k)} = \lambda_i(k) = -\varphi_i^T(k)\Pi_i^T(k+1)R_i^{-1}(k+1)v_i(k+1) \\ + b_i(k) + \Phi_i^T(k)\lambda_i(k+1)$$

(10.10)式又可改写为

$$x_i(k+1) = \varphi_i(x_i, \pi_i, k) + q_i(k) - Q_i(k)\Phi_i^T(k)[\lambda_i(k) - b_i(k)] \quad (10.13)$$

$$\lambda_i(k+1) = \Phi_i^{-1}(k)[\lambda_i(k) - b_i(k)] + \Pi_i^T(k+1)R_i^{-1}(k+1)v_i(k+1) \quad (10.14)$$

其中

$$\Phi_i(k) \triangleq \frac{\partial \varphi_i(x_i, \pi_i, k)}{\partial x_i(k)}$$

$$\Pi_i(k+1) \triangleq \frac{\partial h_i(x_i, \pi_i, k)}{\partial x_i(k)}$$

$$v_i(k+1) \triangleq z_i(k+1) - r_i(k+1) - h_i(x_i, \pi_i, k+1)$$

$$b_i \triangleq \frac{\partial}{\partial x_i(k)}[\beta_i^T(k)(\pi_i(k) - g_i(x_i, k))]$$

根据斜截条件,可得边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i(k_0) &= P_i^{-1}(k_0)(x_i(k_0) - \bar{x}_i(k_0)) \\ \lambda_i(k_f) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Arafteh 和 Sage 用不变嵌入(invariant imbedding)原理推导了一套顺序估计算法,其基本思路是,将  $x(k_i)$  作为共态向量  $\lambda(k)$  在  $k=k_i$  时的值的一个函数,然后将  $k_f$  看作一个变

量,对新函数寻优,最后满足终端条件时就得到原问题的解。其递推公式为

$$\text{子系统模型: } \mathbf{x}_i(k+1) = \Phi_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\pi}_i, k) + \mathbf{w}_i(k)$$

$$\text{观测模型: } \mathbf{z}_i(k) = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\pi}_i, k) + \mathbf{v}_i(k)$$

预先知道的统计特性如下:

$$E\{\mathbf{x}_i(k_0)\} = \bar{\mathbf{x}}_i(k_0), \quad \text{Var}\{\mathbf{x}_i(k_0)\} = P_i(k_0)$$

$$E\{\mathbf{w}_i(k)\} = \mathbf{q}_i(k), \quad \text{Var}\{\mathbf{w}_i(k), \mathbf{w}_i(l)\} = Q_i(k)\delta_{k-l}$$

$$E\{\mathbf{v}_i(k)\} = \mathbf{r}_i(k), \quad \text{Cov}\{\mathbf{v}_i(k), \mathbf{v}_i(l)\} = R_i(k)\delta_{k-l}$$

定义  $\boldsymbol{\pi}(k)$  和  $\boldsymbol{\beta}(k)$  为协调向量,且

$$\boldsymbol{\pi}_i(k) \triangleq \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i(k), k)$$

$$\mathbf{b}_i(k) \triangleq \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i(k)} [\boldsymbol{\beta}_i^T(k) (\boldsymbol{\pi}_i(k) - \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_i(k), k))]$$

$$\Phi_i(k) \triangleq \frac{\partial \Phi_i[\mathbf{x}_i(k), \boldsymbol{\pi}_i(k), k]}{\partial \mathbf{x}_i(k)}$$

$$\Pi_i(k+1) \triangleq \frac{\partial \mathbf{h}_i[\mathbf{x}_i(k), \boldsymbol{\pi}_i(k+1), k+1]}{\partial \mathbf{x}_i(k+1|k)}$$

新息为

$$\mathbf{v}_i(k+1) = \mathbf{z}_i(k+1) - \mathbf{r}_i(k+1) - \mathbf{h}_i[\mathbf{x}_i(k+1|k), \boldsymbol{\pi}_i(k+1), k+1]$$

中间计算过程如下:

$$\mathbf{m}_i(k+1) = \Pi_i^T(k+1) R_i^{-1}(k+1) \mathbf{v}_i(k+1)$$

$$N_i(k+1) = - \left\{ P_i(k+1) \left[ I - \frac{\partial \mathbf{m}_i(k+1)}{\partial \mathbf{x}_i(k+1|k)} Q_i(k) \right] - Q_i(k) \right\} \Phi_i^{-T}(k)$$

$$C_i(k+1) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i(k|k)} \{ \Phi_i^{-T}(k) \mathbf{b}_i(k) \} \\ - \frac{\partial \mathbf{m}_i(k+1)}{\partial \mathbf{x}_i(k+1|k)} Q_i(k) \Phi_i^{-T}(k) \mathbf{b}_i(k) \{ P_i(k) \Phi_i^T(k) \}$$

$$D_i(k) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i(k+1|k)} \{ Q_i(k) \Phi_i^T(k) \mathbf{b}_i(k) \} P_i(k) \Phi_i^T(k)$$

第一级计算式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_i(k+1|k) &= \Phi_i(\mathbf{x}_i(k), \boldsymbol{\pi}_i(k), k) + \mathbf{q}_i(k) \\ \mathbf{x}_i(k+1|k+1) &= \mathbf{x}_i(k+1|k) + K_i(k+1) \mathbf{v}_i(k+1) \\ &\quad + N_i(k+1) \mathbf{b}_i(k) \\ K_i(k+1) &= P_i(k+1) \Pi_i^T(k+1) R_i^{-1}(k+1) \\ P_i(k+1|k) &= \Phi_i(k) P_i(k) \Phi_i^T(k) + Q_i(k) \\ P_i(k+1) &= [P_i(k+1|k) + D_i(k)] \\ &\quad \times \left[ I - \frac{\partial \mathbf{m}_i(k+1)}{\partial \mathbf{x}_i(k+1|k)} P_i(k+1|k) + C_i(k+1) \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

然后,对第二级协调器采用一种顺序预报-校正器的方案,对协调变量  $\boldsymbol{\pi}_i$  和  $\boldsymbol{\beta}_i$  先用线性外推进行预报:

$$\left. \begin{aligned} \beta_i(k+1|k) &= \beta_i(k) + \beta_i^*(k) \\ \pi_i(k+1|k) &= \pi_i(k) + \pi_i^*(k) \end{aligned} \right\} \quad (10.17)$$

其中

$$\beta_i^*(k) \triangleq \beta_i(k) - \beta_i(k-1); \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\pi_i^*(k) \triangleq \pi_i(k) - \pi_i(k-1)$$

进一步再对预报  $\beta_i(k+1|k)$  用梯度法校正:

$$\beta_i(k+1) = \beta_i(k+1|k) + \alpha[\pi_i(k) - g_i(x_i(k), k)] \quad (10.18)$$

其中,  $\alpha$  为步长;  $x_i$  由解第一级方程(10.16)后得到。模型协调变量  $\pi_i$  由其预报值和估计值的平均值校正:

$$\pi_i(k+1) = \frac{1}{2}[\pi_i(k+1|k) + g_i(x_i(k), k)]; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10.19)$$

亦可以用状态预报值来修正:

$$\pi_i(k+1) = g_i[x_i(k+1|k), k+1] \quad (10.20)$$

以上是对噪声的均值和方差都是已知的情况。当噪声矩未知时,可用协方差拟合法来求解,其计算公式如下:

测量噪声均值

$$\begin{aligned} r_i(k+1|k) &= \frac{1}{k} \{ (k-1)r_i(k|k-1) + z_i(k) \\ &\quad - h_i[x_i(k+1|k), \pi_i(k+1)] \} \end{aligned} \quad (10.21)$$

测量噪声方差

$$\begin{aligned} R_i(k+1|k) &= \frac{1}{k} \{ (k-1)R_i(k|k-1) + v_i(k)v_i^T(k) \\ &\quad - \Pi_i(k)P_i(k|k-1)\Pi_i^T(k) \} \end{aligned} \quad (10.22)$$

模型噪声均值

$$\begin{aligned} q_i(k) &= \frac{1}{k} \{ (k-1)q_i(k-1) + x_i(k|k) \\ &\quad - \phi_i[x_i(k-1|k-1), \pi_i(k-1), k-1] \} \end{aligned}$$

模型噪声方差

$$\begin{aligned} Q_i(k) &= \frac{1}{k} \{ (k-1)Q_i(k-1) + K_i(k)v_i(k)v_i^T(k)K_i^T(k) + P_i(k) \\ &\quad - \Phi_i(k-1)P_i(k-1)\Phi_i^T(k-1) \} \end{aligned} \quad (10.23)$$

其基本原理就是选取  $r, R, q, Q$  使概率密度函数  $p\{x(k_f), r, R, q, Q | z(k_f)\}$  最大, 然后就可以将所得  $r(k+1|k), R(k+1|k), q(k)$  和  $Q(k)$  替代前面按已知噪声矩阵进行计算时的  $r(k+1), R(k+1), q(k)$  和  $Q(k)$ 。

## 10.2 连续系统的分割滤波方法

考虑相互联系的两个子系统,其连续时间动态方程为



$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1(t) &= A_{11}(t)\mathbf{x}_1(t) + A_{12}(t)\mathbf{x}_2(t) + \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \mathbf{y}_1(t) &= C_{11}(t)\mathbf{x}_1(t) + \boldsymbol{\xi}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= A_{21}(t)\mathbf{x}_1(t) + A_{22}(t)\mathbf{x}_2(t) + \boldsymbol{\eta}_2(t) \\ \mathbf{y}_2(t) &= C_{22}(t)\mathbf{x}_2(t) + \boldsymbol{\xi}_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

式中,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  为  $n_1$  及  $n_2$  维状态向量;  $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$  为  $n_1$  及  $n_2$  维白噪声向量;  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$  为  $r_1$  及  $r_2$  维输出向量;  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  为  $r_1$  及  $r_2$  维测量噪声向量;  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, C_{11}, C_{22}$  为相应维数的矩阵;  $\boldsymbol{\eta}_i(t)$  和  $\boldsymbol{\xi}_i(t), t \geq t_0, i=1, 2$ , 都是零均值高斯白噪声过程, 其协方差为

$$E[\boldsymbol{\eta}_i(t)\boldsymbol{\eta}_i^T(\tau)] = Q_i(t)\delta(t-\tau); \quad i=1, 2 \quad (10.25)$$

$$E[\boldsymbol{\xi}_i(t)\boldsymbol{\xi}_i^T(\tau)] = R_i(t)\delta(t-\tau); \quad \forall t, \tau \geq t_0$$

其中,  $Q_i$  是半正定的 (对  $t, \tau \geq t_0$ );  $R_i$  是正定的 (对  $t \geq t_0$ )。设随机过程  $\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\xi}_i$  互不相关, 即

$$E[\boldsymbol{\eta}_i(t)\boldsymbol{\xi}_j^T(\tau)] = 0; \quad \forall t, \tau \geq t_0$$

又设初始状态  $\mathbf{x}_i(t_0); i=1, 2$  也是零均值高斯随机向量, 其方差阵  $E\{\mathbf{x}_i(t_0)\mathbf{x}_i^T(t_0)\} = P(t_0)$ , 是半正定的, 并与  $\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\xi}_i$  不相关。这里不假定整个系统的噪声协方差矩阵是分块对角矩阵, 即

$$E[\boldsymbol{\eta}_i(t)\boldsymbol{\eta}_j^T(\tau)] = 0; \quad i=1, 2; j=1, 2; i \neq j$$

这一假设是符合系统实际的。再定义估计误差为

$$\tilde{\mathbf{x}}_i(t_1|t) = \mathbf{x}_i(t_1) - \hat{\mathbf{x}}_i(t_1|t); \quad i=1, 2 \quad (10.26)$$

现在先看子系统 2, 利用 (10.26) 式可写出

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= A_{21}(t)\mathbf{x}_1(t|t) + A_{21}(t)\tilde{\mathbf{x}}_1(t|t) + A_{22}(t)\mathbf{x}_2(t) + \boldsymbol{\eta}_2(t) \\ \mathbf{y}_2(t) &= C_{22}(t)\mathbf{x}_2(t) + \boldsymbol{\xi}_2(t) \end{aligned}$$

再改写成

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = A_{21}(t)\mathbf{x}_1(t|t) + A_{22}(t)\mathbf{x}_2(t) + \boldsymbol{\eta}_2^*(t) \quad (10.27)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}_2^*(t) = A_{21}(t)\tilde{\mathbf{x}}_1(t|t) + \boldsymbol{\eta}_2(t) \quad (10.28)$$

同理, 子系统 1 可写成

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = A_{11}(t)\mathbf{x}_1(t) + A_{12}(t)\mathbf{x}_2(t|t) + A_{12}(t)\tilde{\mathbf{x}}_2(t|t) + \boldsymbol{\eta}_1(t)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = A_{11}(t)\mathbf{x}_1(t) + A_{12}(t)\mathbf{x}_2(t|t) + \boldsymbol{\eta}_1^*(t) \quad (10.29)$$

$$\boldsymbol{\eta}_1^*(t) = A_{12}(t)\tilde{\mathbf{x}}_2(t|t) + \boldsymbol{\eta}_1(t) \quad (10.30)$$

这时可对两个低维子系统采用简单的滤波器结构, 即

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_1(t|t) = A_{11}(t)\hat{\mathbf{x}}_1(t|t) + K_1[\mathbf{y}_1(t) - C_{11}(t)\hat{\mathbf{x}}_1(t|t)] + A_{12}(t)\hat{\mathbf{x}}_2(t|t) \quad (10.31)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_2(t|t) = A_{22}(t)\hat{\mathbf{x}}_2(t|t) + K_2[\mathbf{y}_2(t) - C_{22}(t)\hat{\mathbf{x}}_2(t|t)] + A_{21}(t)\hat{\mathbf{x}}_1(t|t) \quad (10.32)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= P_{11}C_{11}^TR_1^{-1} \\ K_2 &= P_{22}C_{22}^TR_2^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (10.33)$$

$P_{11}, P_{22}$  为子系统黎卡提方程的解:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_{11} &= A_{11}P_{11} + P_{11}A_{11}^T - P_{11}C_{11}^TR_1^{-1}C_{11}P_{11} + Q_1, P_{11}(0) = P_{110} \\ \dot{P}_{22} &= A_{22}P_{22} + P_{22}A_{22}^T - P_{22}C_{22}^TR_2^{-1}C_{22}P_{22} + Q_2, P_{22}(0) = P_{220} \end{aligned} \right\} \quad (10.34)$$

分割滤波的基本思想是把子系统的估计误差看作是白噪声的一部分,然后在子系统滤波器之间考虑对关联作用的估值,这就限制了把它用于多个子系统并具有复杂关联的情况。它的主要优点在于计算比较简单,在低维子系统的水平上,运算次数要比高维系统小得多。另外,由于这个算法没有考虑到协方差矩阵中的非对角线项,因此,不能认为这种滤波是最优的,故称为次优滤波。

使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

### 10.3 多级分解的卡尔曼滤波方法

由于10.1节提出的方法并不能保证算法的收敛性,在实际使用时还需谨慎。为此,著者给出了一种多级分解的大系统滤波方法。

设离散系统的状态方程为

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \Gamma(k)\mathbf{w}(k) \quad (10.35)$$

观测方程为

$$\mathbf{z}(k+1) = H(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{v}(k) \quad (10.36)$$

其中,  $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{z} \in R^m; \mathbf{w}(k), \mathbf{v}(k)$  为零均值高斯白噪声序列, 方差分别为  $Q(k)$  和  $R(k)$ 。

#### 10.3.1 二级分解

设

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]^T, \quad H = [H_1, H_2], \quad K = [K_1^T, K_2^T]^T \\ P_{ij} &= E[(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x}_j - \hat{\mathbf{x}}_j)^T]; \quad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

根据标准卡尔曼滤波公式(2.22), 可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1(k+1|k+1) &= \mathbf{x}_1(k+1|k) + K_1(k+1)[\mathbf{z}(k+1) \\ &\quad - H_1(k+1)\mathbf{x}_1(k+1|k) - H_2(k+1)\mathbf{x}_2(k+1|k)] \\ K_1(k+1) &= [P_{11}, P_{12}](k+1|k)H^T(k+1) \\ &\quad \times [H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \\ P_{11}(k+1|k+1) &= P_{11}(k+1|k) - [P_{11}, P_{12}](k+1|k)H^T(k+1) \\ &\quad \times [H(k+1)P(k+1|k)H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1} \\ &\quad \times H(k+1) \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix} (k+1|k) \end{aligned} \right\} \quad (10.37)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(k+1|k+1) &= \mathbf{x}_2(k+1|k) + K_2(k+1) \\ &\quad \times [\mathbf{z}(k+1) - H_1(k+1)\mathbf{x}_1(k+1|k+1) \\ &\quad - H_2(k+1)\mathbf{x}_2(k+1|k)] \end{aligned} \quad (10.38)$$

根据  $\frac{\partial \text{tr} P_{22}(k+1|k+1)}{\partial K_2(k+1)} = 0$ , 可得

$$\begin{aligned}
 P_{22}(k+1|k+1) &= P_{22}(k+1|k) - K_2(k+1)\bar{R}K_2^T(k+1) \\
 K_2(k+1) &= [\bar{P}_{21}H_1^T(k+1) + P_{22}(k+1|k)H_2^T(k+1)]\bar{R}^{-1} \\
 P_{21}(k+1|k+1) &= \bar{P}_{21} - K_2(k+1)[H_1(k+1)\bar{P}_{11} \\
 &\quad + H_2(k+1)\bar{P}_{21}]
 \end{aligned}$$

超星浏览器提醒  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{11} &= P_{11}(k+1|k+1) \\
 \bar{P}_{21} &= \bar{P}_{12}^T \\
 \bar{P}_{12} &= P_{12}(k+1|k) - K_1(k+1)[H_1(k+1)P_{12}(k+1|k) \\
 &\quad + H_2(k+1)P_{22}(k+1|k)] \\
 \bar{R} &= H_1(k+1)\bar{P}_{11}H_1^T(k+1) + H_1(k+1)\bar{P}_{21}H_1^T(k+1) \\
 &\quad + H_1(k+1)\bar{P}_{12}H_2^T(k+1) + H_2(k+1)P_{22}(k+1|k) \\
 &\quad \times H_2^T(k+1) + R(k+1)
 \end{aligned}$$

根据(10.37)~(10.39)式就可求得状态  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  的最优估计。

### 10.3.2 多级估计方法

设(10.35),(10.36)式中

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_r^T]^T, \quad H = [H_1, H_2, \dots, H_r]$$

根据两级估计方法,  $\mathbf{x}_i$  的最优估计为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_i(k+1|k+1) &= \mathbf{x}_i(k+1|k) + K_i(k+1) \\
 &\quad \times \left[ \mathbf{z}(k+1) - \sum_{j=1}^{i-1} H_j(k+1)\mathbf{x}_j(k+1|k+1) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=1}^r H_j(k+1)\mathbf{x}_j(k+1|k) \right]
 \end{aligned} \tag{10.40}$$

其估计误差的协方差阵为

$$\begin{aligned}
 P_{ii}(k+1|k+1) &= P_{ii}(k+1|k) - \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \bar{P}_{ij}H_j^T(k+1) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^r P_{ij}(k+1|k)H_j^T(k+1) \right] K_i^T(k+1) \\
 &\quad - K_i(k+1) \left[ \sum_{j=1}^{i-1} H_j(k+1)\bar{P}_{ji} + \sum_{j=1}^r H_j(k+1)P_{ji}(k+1|k) \right] \\
 &\quad + K_i(k+1)R_iK_i^T(k+1)
 \end{aligned} \tag{10.41}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_{il} &= P_{il}(k+1|k) - K_i(k+1) \left[ \sum_{j=1}^{i-1} H_j(k+1)\bar{P}_{jl} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^r H_j(k+1)P_{jl}(k+1|k) \right], \quad l > i
 \end{aligned}$$

$$P_{ii}(k+1|k+1) = \bar{P}_{ii} - K_i(k+1) \left[ \sum_{j=1}^{i-1} H_j(k+1) P_{ji}(k+1|k) + \sum_{j=1}^r H_j(k+1) \bar{P}_{ji} \right], \quad l < i$$

$$P_{jj} = P_{jj}(k+1|k+1); \quad j = 1, 2, \dots, i$$

$$R_o = H(k+1) \bar{P} H^T(k+1) + R(k+1)$$

其中,  $P_{ij}$  为  $P$  的第  $i$  行第  $j$  列分块元素;  $\bar{P}_{ij}$  为  $\bar{P}$  的第  $i$  行第  $j$  列分块元素, 且  $P_{ii} = P_{ii}(k+1|k), j=i+1, \dots, n$ 。

令  $\frac{\partial \text{tr} P_{ii}(k+1|k+1)}{\partial K_i(k+1)} = 0$ , 得

$$\left. \begin{aligned} P_{ii}(k+1|k+1) &= P_{ii}(k+1|k) - K_i(k+1) R_o K_i^T(k+1) \\ K_i(k+1) &= \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \bar{P}_{ij} H_j^T(k+1) + \sum_{j=1}^r P_{ij}(k+1|k) H_j^T(k+1) \right] R_o^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (10.42)$$

根据(10.40)~(10.42)式, 可得状态的多级最优估计和估计误差的协方差阵。



## 第十一章 卡尔曼滤波器应用中的有关问题

### 11.1 滤波的发散及其克服方法

在实际的滤波计算中,往往出现这样一种现象,当观测值的个数 $k$ 不断增大时,按模型计算的滤波误差阵可能趋于零或某一稳态值。而滤波的实际误差可能远远超过滤波误差的允许范围,甚至趋向无穷大,使得滤波器失去作用,这种现象叫做滤波的发散。下面讨论滤波发散产生的原因及其克服方法。

#### 11.1.1 滤波发散问题

产生滤波发散的现象主要有以下两个原因:

(1)系统的数学模型和噪声的统计模型不准确,这些模型不能反映真实物理过程,使得观测值与模型不相对应,这样就可能引起发散,这种发散叫做滤波发散。

(2)由于计算机字长有限,因而存在着计算误差,如舍入误差,这些误差积累起来,降低了滤波精度。严重时,会使计算误差的方差阵逐渐失去正定性,甚至失去对称性,致使增益矩阵 $K(k)$ 的计算值与理论值之间的偏差越来越大,造成发散。这种发散叫做计算发散。

关于计算发散问题,已在第六~第七章给予了解决,本章将重点解决滤波发散问题。

例 设一飞行器的飞行高度 $x(t)$ 以等速 $U$ 不断增加,即真实高度的变化方程为

$$x(t) = x(0) + U \cdot t$$

取采样间隔 $\Delta t = 1s, t_k = k \cdot \Delta t = k$ ,并记 $x(t_k) = x(k)$ ,则可把高度方程离散化为

$$x(k) = x(k-1) + U$$

高度的观测方程离散化为

$$z(k) = x(k) + v(k)$$

式中 $v(k)$ 是零均值白噪声序列,即 $E[v(k)] = 0, E[v(k) \cdot v(j)] = 1 \cdot \delta_{kj}$ 。

根据离散系统滤波公式(2.22)可直接得

$$\begin{aligned} x(k|k) &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z(i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [x(0) + iU + v(i)] \\ &= x(0) + \frac{k+1}{2}U + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v(i) \end{aligned}$$

滤波误差为

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k|k) &= x(k) - x(k|k) \\ &= [x(0) + kU] - \left[ x(0) + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v(i) \right] \\ &= \frac{k-1}{2}U - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k v(i) \end{aligned}$$

实际的滤波误差方差为

$$P(k|k) = E[\tilde{x}(k|k)\tilde{x}^T(k|k)] = \frac{(k-1)^2}{4}U^2 + \frac{1}{k}$$

显然,当  $k \rightarrow \infty$  时,  $P(k|k) \rightarrow \infty$ , 出现了滤波发散现象。从上面的计算可以看到, 上述滤波发散的原因虽然在于实际观测值  $z(k) = x(k) + v(k) = x(0) + kU + v(k)$  与模型中的观测值  $\bar{z}(k) = \bar{x}(k) + v(k) = x(0) + v(k)$  不一致, 但在滤波方程中,  $K(k) = \frac{1}{k} \rightarrow 0$ , 也是滤波发散的另一个因素。因为  $K(k) \rightarrow 0$ , 将使当前观测值  $z(k)$  对滤波值  $x(k|k)$  越来越不起作用, 最后由于错误的观测方程, 使得滤波值出现发散现象。事实上, 如果在上述问题中, 使  $K(k)$  下降到一定程度之后不再下降, 并改取增益为

$$K^*(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \leq M \\ \frac{1}{M}, & k > M \end{cases}$$

则可以计算出当  $k \rightarrow \infty$  时, 实际滤波误差的方差

$$P^*(k|k) \rightarrow (M-1)^2 U^2 + \frac{1}{2M-1}$$

这样就防止了滤波的发散。当然这样的滤波不是最优的, 只能成为次最优滤波。在实际中, 模型选得完全正确不大可能, 而且从上面例子可以看出, 模型选择稍有差错, 就有可能引起滤波发散。上面提出的改变后一段增益系数的办法, 尽管可以克服发散现象, 但牺牲了滤波的最优性, 然而必须这样处理才能避免滤波发散。

从上面的例子可知, 当滤波模型不准确时, 可以通过加大当前数据的权, 减少老数据的权来防止发散。一般地, 加大新数据的权, 相当于加大了增益阵  $K$  的范数。下面介绍几种常用的处理方法。

从上例中已经看到, 当状态方程和观测方程不准确时, 滤波值中的老数据比重太大, 新数据的比重太小, 这是引起滤波发散的一个重要原因。因此逐渐减小老数据的权, 相对地增加新数据的权, 是克服滤波发散的一个有效办法。根据这一观点设计的滤波器叫做衰减记忆滤波器, 这是一种次最优滤波器。衰减记忆滤波器可用指数  $e^C$  ( $C > 0$ ) 加权或用  $S^a$  ( $S > 1, a > 0$ ) 加权。下面先介绍指数加权的滤波, 然后介绍  $S^a$  加权的滤波。

### 11.1.2 指数加权衰减记忆滤波

系统状态方程和观测系统方程为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \Phi(k, k-1)\mathbf{x}(k-1) + \Gamma(k, k-1)\mathbf{w}(k-1) \\ \mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (11.1)$$

式中,  $\mathbf{w}(k), \mathbf{v}(k)$  都是零均值白噪声序列;  $E[\mathbf{w}(k)] = 0, E[\mathbf{v}(k)] = 0, E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)] = Q_k \delta_{kj}, E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(j)] = R(k) \delta_{kj}, E[\mathbf{w}(k)\mathbf{v}^T(j)] = 0$ ; 初值  $\mathbf{x}(0) = E[\mathbf{x}(0)], \text{Var}[\mathbf{x}(0)] = P(0)$ ;  $\mathbf{w}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  与  $\mathbf{x}(0)$  不相关。

由卡尔曼滤波的最优增益矩阵公式有

$$K(k) = P(k|k)H^T(k)R^{-1}(k) \quad (11.2)$$

取时刻  $k=N$ , 则

$$K(N) = P(N|N)H^T(N)R^{-1}(N) \quad (11.3)$$

为了克服滤波发散,应相对地突出  $K(N)$ ,而逐渐地减小时刻  $N$  前的  $K(k)$  值。由 (11.2) 式知,  $K(k)$  与  $R(k)$  成反比关系,因此为了达到上述目的,可使离  $N$  越来越远的  $R(k)$  逐渐变大。例如采取指数加权的办法,将  $P(0), R(1), \dots, R(N-1), R(N)$  分别变为下列矩阵:

$$e^{\sum_{i=0}^{N-1} C_i} P(0), e^{\sum_{i=1}^{N-1} C_i} R(1), e^{\sum_{i=2}^{N-1} C_i} R(2), \dots, e^{C_{N-1}} R(N-1), R(N) \quad (11.4)$$

式中的  $C_i (i=1, 2, \dots)$  是适当选取的正整数。

采用这种指数加权,就是把  $N$  以前的测量值的作用逐渐衰减。系统噪声也可按同样的方法给以指数加权。

根据卡尔曼滤波公式,可以推导出一组衰减记忆滤波方程:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^*(k|k) &= \Phi(k, k-1)\mathbf{x}^*(k-1|k-1) + K^*(k) \\ &\quad \times [\mathbf{z}(k) - H(k)\Phi(k, k-1)\mathbf{x}^*(k-1|k-1)] \\ K^*(k) &= P^*(k|k-1)H^T(k)[H(k)P^*(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \\ &= P^*(k|k)H^T(k)R^{-1}(k) \\ P^*(k|k-1) &= \Phi(k, k-1)P^*(k-1|k-1)\Phi^T(k|k-1)e^{C_{k-1}} \\ &\quad + \Gamma(k, k-1)Q(k-1)\Gamma^T(k, k-1) \\ P^*(k|k) &= [I - K^*(k)H(k)]P^*(k|k-1) \\ &= \{[P^*(k|k-1)]^{-1} + H^T(k)R^{-1}(k)H(k)\}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

初始值为

$$\mathbf{x}^*(0) = E[\mathbf{x}(0)], \quad P^*(0) = \text{Var}[\mathbf{x}(0)] = P(0)$$

我们再来研究前面讨论过的滤波发散的例 11-1。如果采用指数加权滤波,取  $C_k = C > 0$ , 令  $q = e^{-C}$  (小于 1), 则可以证明, 当  $k \rightarrow \infty$  时

$$E\{[x(k) - x^*(k|k)]^2\} \rightarrow \left(\frac{q}{1-q}\right)^2 U^2 + \frac{1-q}{1+q} R^2$$

### 11.1.3 $S^*$ 加权衰减记忆滤波

把  $P(0), R(k), Q(k-1)$  分别变为下列形式的矩阵:

$$P_0 = P_0 S^N, \quad Q(k-1) = Q(k-1) S^{N-k}, \quad R(k) = R(k) S^{N-k}$$

则可得下列滤波方程组:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^*(k|k) &= \Phi(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}^*(k-1|k-1) + K^*(k) \\ &\quad \times [\mathbf{z}(k) - H(k)\Phi(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}^*(k-1|k-1)] \\ K^*(k) &= P^*(k|k-1)H^T(k)[H(k)P^*(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \\ P^*(k|k-1) &= \Phi(k, k-1)P^*(k-1|k-1) \\ &\quad \times \Phi^T(k|k-1)S + Q(k-1) \\ P^*(k|k) &= [I - K^*(k)H(k)]P^*(k|k-1) \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$



与卡尔曼滤波基本方程相比,在(11.5)式中多了一个因子  $e^{C_{k-1}}$ ,而在(11.6)式中多了一个因子  $S$ 。由于  $e^{C_{k-1}} > 1$  和  $S > 1$ ,故有

$$P^*(k|k-1) > P(k|k-1)$$

$$K^*(k) > K(k)$$

加强了当前数据  $z(k)$  在滤波方程中的权。又由于

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k|k) &= [I - K^*(k)H(k)]\Phi(k, k-1)\mathbf{x}^*(k-1|k-1) + K^*(k)z(k) \\ &= [I - K^*(k)H(k)]\mathbf{x}^*(k|k-1) + K^*(k)z(k) \end{aligned}$$

相应地又减小了  $\mathbf{x}^*(k|k-1)$  的权,即减低了老数据对  $\mathbf{x}^*(k|k)$  的影响。

浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

#### 11.1.4 限定增益法

限定增益法实际上是规定增益阵  $K$  的范数最小值,即

$$K(k) = \begin{cases} P(k|k)H(k)R^{-1}(k), & \text{当 } \|K(k)\| > \|K_{\min}\| \\ K_{\min}, & \text{当 } \|K(k)\| \leq \|K_{\min}\| \end{cases}$$

#### 11.1.5 限定记忆的滤波方法

卡尔曼滤波的基本方程对观测数据的记忆是无限增长的,即计算  $\mathbf{x}(k|k)$  时要用到已有的全部观测值。而限定记忆滤波,在计算  $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$  时只用到离  $k$  最近的  $N-1$  个观测值 ( $N$  是事先确定的记忆长度)  $z(k-N+1), z(k-N+2), \dots, z(k)$ , 完全截断  $z(k-N+1)$  以前的老数据对滤波值的影响。

该方法的效果与衰减记忆的卡尔曼滤波方法相当,但计算式较为复杂,此处不再作详细介绍。

## 11.2 自适应滤波

在很多的实际情况中,系统噪声方差阵  $Q$  和测量噪声方差阵  $R$  事先都是不知道的。有时,状态转移阵  $\Phi$  或测量矩阵  $H$  也不能确切知道。如果根据不确切的模型进行滤波就会引起滤波的发散。有时即使开始模型选择得比较符合实际,但在运行过程中,模型起了变化。具体地说  $Q, R$  或  $\Phi, H$  起了变化。在这种情况下,首先要估计变化了的  $Q$  或  $R$ , 进而调整滤波增益矩阵  $K(k)$ 。自适应滤波是在利用测量数据进行滤波的同时,不断地对未知的或不确切知道的系统模型参数和噪声统计特性进行估计或修正,以便改进滤波。因此自适应滤波也是克服发散的重要途径。

我们在这里介绍的自适应滤波方法,是在  $\Phi$  和  $H$  已知的条件下,当  $Q$  或  $R$  未知或不确切知道时,如何在滤波过程中,对它们进行实时的估计和修正。因为  $Q$  或  $R$  对滤波的影响是通过增益矩阵  $K(k)$  反映出来的,所以也可以不去估计  $Q$  或  $R$ , 而直接对  $K(k)$  进行估计。

自适应滤波的方法很多,有贝叶斯法、极大似然法、相关法与协方差匹配法,这里我们仅讨论最基本的也是最重要的相关法。相关法又可分为输出相关法和新息相关法。现分别叙述如下。

### 11.2.1 输出相关法

设系统是完全可控和完全可观测的线性定常系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k) = \Phi \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) \\ \mathbf{z}(k) = H \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (11.7)$$

式中,  $\mathbf{w}(k), \mathbf{v}(k)$  都是零均值白噪声序列, 且都是平稳的;  $E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)] = Q\delta_{kj}$ ,  $E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(j)] = R\delta_{kj}$ 。由于  $\mathbf{x}(k)$  和  $\mathbf{z}(k)$  是  $\mathbf{w}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  的线性函数, 因而  $\mathbf{x}(k)$  和  $\mathbf{z}(k)$  也是平稳随机序列。另外, 假定卡尔曼滤波器已达稳态, 即增益阵  $K(k)$  也已趋于稳态值  $K$ 。

输出相关法自适应滤波的目的是: 由观测数据  $\{\mathbf{z}(j)\}$  估计输出相关函数  $C(i)$ , 再由  $C(i)$  确定出最优稳态增益阵  $K$ , 即使增益阵  $K$  自动适应于观测数据  $\{\mathbf{z}(j)\}$ 。

1. 观测数据(系统输出)的相关函数  $C(i) (i=1, 2, \dots, n)$  与  $\Gamma H^T$  阵

观测数据的相关函数为

$$C(i) = E[\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k-i)] \quad (11.8)$$

式中  $i$  表示序列时间之差。由于

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \Phi \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{w}(k-1) \\ &= \Phi^i \mathbf{x}(k-i) + \sum_{l=1}^i \Phi^{i-l} \mathbf{w}(k-l) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= H \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \\ &= H \Phi^i \mathbf{x}(k-i) + H \sum_{l=1}^i \Phi^{i-l} \mathbf{w}(k-l) + \mathbf{v}(k) \end{aligned}$$

设

$$\Gamma = E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)]$$

因为已假定  $\mathbf{x}(k)$  为平稳随机序列, 所以  $\Gamma$  与  $k$  无关。考虑到  $\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)$  与  $\mathbf{x}(0)$  相互间的不相关性, 可得  $\{\mathbf{z}(j)\}$  的相关函数

$$\left. \begin{aligned} C(0) &= E[\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k)] = E\{[H\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)][H\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)]^T\} \\ &= H\Gamma H^T + R \\ R &= C(0) - H\Gamma H^T \\ C(i) &= E[\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k-i)] = H\Phi^i \Gamma H^T \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

以上三式中的  $\Gamma H^T$  是沟通待求增益矩阵  $K(k)$  与  $C(i)$  之间关系的桥梁, 是输出相关自适应滤波中的一个重要矩阵。根据(11.9)式可得

$$\begin{bmatrix} C(1) \\ C(2) \\ \vdots \\ C(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H\Phi \Gamma H^T \\ H\Phi^2 \Gamma H^T \\ \vdots \\ H\Phi^n \Gamma H^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^n \end{bmatrix} \Gamma H^T = A \Gamma H^T \quad (11.10)$$

式中

$$A^T = [\Phi^T H^T, (\Phi^T)^2 H^T, \dots, (\Phi^T)^n H^T]$$

是系统的可观测阵, 因为假定系统是完全可观测的, 故有  $\text{rank } A = n$ 。  $A^T A$  为非奇异阵, 于

是由(11.10)式可解得

$$\Gamma H^T = (A^T A)^{-1} A^T \begin{bmatrix} C(1) \\ C(2) \\ \vdots \\ C(n) \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

2. 由  $\Gamma H^T$  求最优稳态增益阵  $K$

根据卡尔曼滤波基本方程, 最优增益阵为

$$K = P(k|k-1)H^T[HP(k|k-1)H^T + R]^{-1}$$

因为  $\mathbf{x}(k)$  为平稳随机序列, 所以有

$$P(k|k-1) = E[\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k-1)] = P$$

与  $K$  无关。故  $K$  又可写成

$$K = PH^T(HPH^T + R)^{-1} \quad (11.12)$$

为了把(11.12)式转化为  $\Gamma H^T$  的表达式, 考虑到  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k|k-1) + \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)$ , 且  $\mathbf{x}(k|k-1)$  与  $\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)$  正交, 于是有

$$\begin{aligned} \Gamma &= E[\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)] \\ &= E\{[\mathbf{x}(k|k-1) + \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)][\mathbf{x}(k|k-1) + \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)]^T\} \\ &= E[\mathbf{x}(k|k-1)\mathbf{x}^T(k|k-1)] + E[\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k-1)] \\ &= L + P \end{aligned} \quad (11.13)$$

式中

$$L = E[\mathbf{x}(k|k-1)\mathbf{x}^T(k|k-1)]$$

因为  $\mathbf{x}(k)$  为平稳随机序列, 所以  $L$  与  $K$  无关, 以  $P = \Gamma - L$  代入(11.12)式得

$$\begin{aligned} K &= (\Gamma - L)H^T[H(\Gamma - L)H^T + R]^{-1} \\ &= [\Gamma H^T - LH^T][H\Gamma H^T + R - HLH^T]^{-1} \end{aligned}$$

再将(11.9)式代入, 则得  $\Gamma H^T$  表示的  $K$  的表达式:

$$\begin{aligned} K &= (\Gamma - L)H^T[C(0) - HLH^T]^{-1} \\ &= [\Gamma H^T - LH^T][C(0) - HLH^T]^{-1} \end{aligned} \quad (11.14)$$

式中  $C(0)$  及  $\Gamma H^T$  在根据  $\{z(j)\}$  估计出  $C(j)$  之后, 都是已知阵, 剩下的只有  $L$  阵是未知的。但是, 我们注意到  $L$  是  $\mathbf{x}(k)$  的预测值的均方阵, 于是根据  $\mathbf{x}(k)$  的预测递推方程

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k) &= \Phi\mathbf{x}(k|k) \\ &= \Phi[\mathbf{x}(k|k-1) + K\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)] \\ &= \Phi\{\mathbf{x}(k|k-1) + K[H\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)]\} \end{aligned}$$

可确定出  $L$  的方程

$$\begin{aligned} L &= E[\mathbf{x}(k+1|k)\mathbf{x}^T(k+1|k)] \\ &= \Phi E\{[\mathbf{x}(k|k-1) + K[H\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)]] \\ &\quad \times [\mathbf{x}(k|k-1) + K[H\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)]]^T\} \Phi^T \\ &= \Phi[L + K(HPH^T + R)K^T]\Phi^T \end{aligned}$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

把  $K = PH^T(HPH^T + R)^{-1}$  代入上式得

$$\begin{aligned} L &= \Phi[L + PH^T(HPH^T + R)^{-1}(HPH^T + R)(HPH^T + R)^{-T}HP]\Phi^T \\ &= \Phi[L + PH^T(HPH^T + R)^{-1}HP]\Phi^T \\ &= \Phi[L + (\Gamma - L)H^T(H\Gamma H^T + R - HLH^T)^{-1}H(\Gamma - L)]\Phi^T \\ &= \Phi[L + (\Gamma - L)H^T[C(0) - HLH^T]^{-1}H(\Gamma - L)]\Phi^T \end{aligned} \quad (11.15)$$

在这里  $\Gamma$  是对称的,  $\Gamma^T = \Gamma$ 。(11.15)式是一个关于  $L$  的非线性矩阵方程, 其中  $\Gamma H^T$  是已知阵, 采用近似解法可得  $L$  阵。将  $L$  代入(11.14)式, 就解决了由  $\{C(i)\}$  确定  $K$  的问题。最后我们讨论怎样根据  $\{z(j)\}$  估计  $\{C(i)\}$  的问题。

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

### 3. 根据 $\{z(j)\}$ 估计 $\{C(i)\}$

设已获得系统的输出为  $z(1), z(2), \dots, z(j), \dots, z(k)$ 。如果进一步认为平稳随机序列  $\{z(j)\}$  具有各态历经性, 则  $z(1), z(2), \dots, z(j), \dots, z(k)$  的自相关函数  $\{C(i)\}$  的  $C_i^k$  (下标  $i$  表示时间间隔,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ; 上标  $k$  表示估计所依据的观测数据的个数) 是

$$\begin{aligned} C_i^k &= \frac{1}{k} \sum_{l=i+1}^k z(l)z^T(l-i) \\ &= \frac{1}{k} \left[ z(k)z^T(k-i) + \sum_{l=i+1}^{k-1} z(l)z^T(l-i) \right] \end{aligned}$$

在这里  $k$  应充分大。注意到  $\frac{k}{k-1} - \frac{1}{k-1} = 1$ , 上式又可写成递推的形式

$$\begin{aligned} C_i^k &= \left( \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k-1} \right) \frac{1}{k} \left[ z(k)z^T(k-i) + \sum_{l=i+1}^{k-1} z(l)z^T(l-i) \right] \\ &= \frac{1}{k-1} \sum_{l=i+1}^{k-1} z(l)z^T(l-i) + \frac{1}{k} \left[ z(k)z^T(k-i) - \frac{1}{k-1} \sum_{l=i+1}^{k-1} z(l)z^T(l-i) \right] \end{aligned}$$

于是可得

$$C_i^k = C_i^{k-1} + \frac{1}{k} [z(k)z^T(k-i) - C_i^{k-1}]; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (11.16)$$

由  $C_i^{k-1}$  及  $z(k), z^T(k-i)$  可得到  $C_i^k$ , 这就解决了  $C(i)$  的估计问题。

### 4. 输出相关法自适应滤波方程

综合(11.11), (11.14), (11.15)及(11.16)式, 就可得到完全可控和完全可观测的线性定常系统的稳态输出相关自适应滤波方程:

$$\begin{aligned} (1) \quad \mathbf{x}(k|k) &= \Phi \mathbf{x}(k-1|k-1) + K(k)[z(k) - H\Phi \mathbf{x}(k-1|k-1)] \\ \mathbf{x}(0|0) &= E[\mathbf{x}(0)] = 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad K(k) = (\Gamma^* H^T - L^* H^T)(C_0^* - HL^* H^T)^{-1}$$

$$(3) \quad \Gamma^* H^T = (A^T A)^{-1} A^T \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_n^* \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^n \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \hat{L}^k = \Phi[\hat{L}^k + (\hat{\Gamma}^k - \hat{L}^k)H^T(C_0^k - H\hat{L}^kH^T)^{-1}H(\Gamma^k - \hat{L}^k)]\Phi^T$$

$$(5) \quad \hat{C}_i^k = \hat{C}_i^{k-1} + \frac{1}{k}[z(k)z^T(k-i) - \hat{C}_i^{k-1}]$$

式中,  $i=0, 1, 2, \dots, n; \hat{K}(k), \hat{\Gamma}^k$  与  $\hat{L}^k$  中的  $k$  表示估计所依据的观测数据的个数。

## 11.2.2 新息相关法

对于离散过程

$$\begin{aligned}\tilde{z}(k|k-1) &= z(k) - H(k)x(k|k-1) \\ &= H(k)x(k|k-1) + v(k)\end{aligned}\quad (11.17)$$

和连续系统

$$\begin{aligned}\tilde{z}(t|t) &= z(t) - H(t)x(t|t) \\ &= H(t)x(t|t) + v(t)\end{aligned}\quad (11.18)$$

可以证明, 如果滤波系统是最优的, 则  $\tilde{z}(k|k-1)$  是白噪声序列,  $\tilde{z}(t|t)$  是白噪声过程; 如果滤波系统不是最优的, 则  $\tilde{z}(k|k-1)$  和  $\tilde{z}(t|t)$  都不是白噪声。现利用  $\tilde{z}(k|k-1)$  是否白噪声序列这一特性来建立与新息相关的自适应滤波。如果  $\tilde{z}(k|k-1)$  是白噪声序列, 则滤波已是最优的, 不必调整  $K(k)$ 。如果  $\tilde{z}(k|k-1)$  不是白噪声序列, 而是相关噪声, 则根据相关的程度调整  $K(k)$ , 可使  $\tilde{z}(k|k-1)$  变为白噪声, 也就是说使滤波为最优。所以, 在新息相关自适应滤波中, 根据对新息序列的检验结果, 调整  $K(k)$ , 可使  $\tilde{z}(k|k-1)$  变为白噪声序列, 即使滤波为最优。

设系统为定常系统:

$$\left. \begin{aligned}x(k) &= \Phi x(k-1) + \Gamma w(k-1) \\ z(k) &= Hx(k) + v(k)\end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

假定系统为一致完全可控和一致完全可观测, 且滤波已处于稳态, 于是对于稳态最优滤波

$$\begin{aligned}P(k|k-1) &= P \\ z(k|k-1) &= H[x(k) - x(k|k-1)] + v(k)\end{aligned}\quad (11.20)$$

有

$$\begin{aligned}C(0) &= E[\tilde{z}(k|k-1)\tilde{z}(k|k-1)] \\ &= HPH^T + R\end{aligned}\quad (11.21)$$

$$\begin{aligned}C(i) &= E\{H[x(k) - x(k|k-1)] + v(k) \\ &\quad \times [H[x(k-i) - x(k-i|k-i-1)] + v(k-i)]^T\} \\ &= HE\{[x(k) - x(k|k-1)][x(k-i) - x(k-i|k-i-1)]^T\}H^T \\ &\quad + HE\{[x(k) - x(k|k-1)]v^T(k-i)\}\end{aligned}\quad (11.22)$$

而由(11.19)式可得

$$\begin{aligned}x(k) - x(k|k-1) &= x(k) - \Phi x(k-1|k-1) \\ &= \Phi x(k-1) + \Gamma w(k-1) - \Phi\{x(k-1|k-2) \\ &\quad + KH[x(k-1) - x(k-1|k-2)] + v(k-1)\} \\ &= \Phi[I - KH][x(k-1) - x(k-1|k-2)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{w}(k-1) - \Phi K \mathbf{v}(k-1) \\
& = [\Phi(I - KH)]^i [\mathbf{x}(k-i) - \mathbf{x}(k-i|k-i-1)] \\
& + \sum_{j=1}^i [\Phi(I - KH)]^{j-1} \mathbf{w}(j-1) - \sum_{j=1}^i [\Phi(I - KH)]^{j-1} \\
& \quad \times \Phi K \mathbf{v}(k-j); \quad i = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{11.23}$$

可以算出

$$E\{[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k-1)][\mathbf{x}(k-i) - \mathbf{x}(k-i|k-i-1)]^T\} = [\Phi(I - KH)]^i P \tag{11.24}$$

$$E\{[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k-1)]\mathbf{v}^T(k-i)\} = -[\Phi(I - KH)]^{i-1} \Phi K R \tag{11.25}$$

把(11.24), (11.25)式代入(11.22)式, 得

$$C(i) = H[\Phi(I - KH)]^{i-1} \Phi [PH^T - K(HPH^T + R)] \tag{11.26}$$

当滤波为最优时

$$K = PH^T(HPH^T + R)^{-1}$$

则

$$C(i) = 0, \quad i > 0 \tag{11.27}$$

因此对于最优滤波,  $\mathbf{z}(k|k-1)$  具有白噪声的特性。

假定事先不确切知道  $Q$  与  $R$ , 而是通过采用某个不是最优的稳态增益矩阵  $\bar{K}$  分别得到  $\mathbf{x}(k)$  的一步预测  $\bar{\mathbf{x}}(k|k-1)$  和滤波估计  $\bar{\mathbf{x}}(k|k)$ , 令

$$\bar{P}(k|k-1) = E\{[\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k|k-1)][\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k|k-1)]^T\} = \bar{P} \tag{11.28}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}(i) &= E\{[H[\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k|k-1)] + \mathbf{v}(k)] \\
& \quad \times [H[\mathbf{x}(k-i) - \bar{\mathbf{x}}(k-i|k-i-1)] + \mathbf{v}(k-i)]^T\}; \quad i = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{11.29}$$

参照(11.22)~(11.26)式, 可得非最优滤波时的新息相关矩阵

$$\bar{C}(0) = H\bar{P}H^T + R \tag{11.30}$$

及

$$\bar{C}(i) = H[H\Phi(I - \bar{K}H)]^{i-1} \Phi [\bar{P}H^T - \bar{K}\bar{C}(0)] \tag{11.31}$$

对于非最优滤波, 增益矩阵为

$$\begin{aligned}
\bar{K} &\neq \bar{P}H^T(H\bar{P}H^T + R)^{-1} \\
\bar{C}(i) &\neq 0, \quad i > 0
\end{aligned} \tag{11.32}$$

因此

$$\bar{\mathbf{z}}(k|k-1) = \mathbf{z}(k) - \bar{\mathbf{z}}(k|k-1)$$

不是白噪声序列。

我们可把  $\bar{C}(i)$  表示为

$$\begin{aligned}
\bar{C}(i) &= H\Phi(I - \bar{K}H)[\Phi(I - \bar{K}H)]^{i-1} \Phi [\bar{P}H^T - \bar{K}\bar{C}(0)] \\
&= H\Phi[\Phi(I - \bar{K}H)]^{i-2} \Phi [\bar{P}H^T - \bar{K}\bar{C}(0)] \\
&\quad - H\Phi\bar{K}H[\Phi(I - \bar{K}H)]^{i-2} \Phi [\bar{P}H^T - \bar{K}\bar{C}(0)] \\
&= H\Phi[\Phi(I - \bar{K}H)]^{i-2} \Phi [\bar{P}H^T - \bar{K}\bar{C}(0)] - H\Phi\bar{K}\bar{C}(i-1)
\end{aligned}$$

$$= H\Phi\bar{P}H^T - \sum_{j=1}^i H\Phi\bar{K}\bar{C}(i-j) \quad (11.33)$$

移项得

$$H\Phi\bar{P}H^T = \bar{C}(i) + \sum_{j=1}^i H\Phi\bar{K}\bar{C}(i-j); \quad i=1,2,\dots \quad (11.34)$$

于是可以写出

$$H\Phi\bar{P}H^T = \bar{C}(1) + H\Phi\bar{K}\bar{C}(0)$$

$$H\Phi^2\bar{P}H^T = \bar{C}(2) + H\Phi\bar{K}\bar{C}(1) + H\Phi^2\bar{K}\bar{C}(0)$$

$\vdots$

$$H\Phi^n\bar{P}H^T = \bar{C}(n) + H\Phi\bar{K}\bar{C}(n-1) + \dots + H\Phi^n\bar{K}\bar{C}(0)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^n \end{bmatrix} \bar{P}H^T = \begin{bmatrix} \bar{C}(1) + H\Phi\bar{K}\bar{C}(0) \\ \bar{C}(2) + H\Phi\bar{K}\bar{C}(1) + H\Phi^2\bar{K}\bar{C}(0) \\ \vdots \\ \bar{C}(n) + H\Phi\bar{K}\bar{C}(n-1) + \dots + H\Phi^n\bar{K}\bar{C}(0) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} H\Phi \\ H\Phi^2 \\ \vdots \\ H\Phi^n \end{bmatrix} \quad (11.35)$$

因为系统完全可观测

$$\text{rank}A = n$$

因此  $A^T A$  为非奇异, 于是

$$\bar{P}H^T = (A^T A)^{-1} A^T \cdot \begin{bmatrix} \bar{C}(1) + H\Phi\bar{K}\bar{C}(0) \\ \bar{C}(2) + H\Phi\bar{K}\bar{C}(1) + H\Phi^2\bar{K}\bar{C}(0) \\ \vdots \\ \bar{C}(n) + H\Phi\bar{K}\bar{C}(n-1) + \dots + H\Phi^n\bar{K}\bar{C}(0) \end{bmatrix} \quad (11.36)$$

从(11.30)式可得  $R$  的估值

$$\hat{R} = \bar{C}(0) - H\bar{P}H^T \quad (11.37)$$

现在我们利用新息相关矩阵来改变  $K$ , 使  $z(k) - H\bar{x}(k|k)$  变为白噪声序列, 滤波接近最优滤波。根据(2.22)式, 可得  $P(k+1|k)$  与  $P(k|k-1)$  的递推关系式:

$$P(k+1|k) = \Phi(k+1, k)[P(k|k-1) - K(k)H(k)P(k|k-1)] \\ \times \Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k+1, k)Q_k\Gamma^T(k+1, k)$$

在稳态最优滤波时

$$P(k+1|k) = P(k|k-1) = P$$

于是

$$P = \Phi(P - KHP)\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T \quad (11.38)$$



下面计算非最优滤波  $\bar{P}(k+1|k)$  与  $\bar{P}(k|k-1)$  的递推关系式:

$$\bar{P} = E\{[\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k|k-1)][\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k|k-1)]^T\}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k) = \mathbf{x}(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1|k)$$

$$= \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{w}(k) - \Phi(\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \bar{\mathbf{K}}[H\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{v}(k)])$$

$$= \Phi \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) - \Phi \bar{\mathbf{K}} H \tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \Gamma \mathbf{w}(k) - \Phi \bar{\mathbf{K}} \mathbf{v}(k)$$

$$\bar{P}(k+1|k) = E[\tilde{\mathbf{x}}(k+1|k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k+1|k)]$$

$$= E\{[\Phi(I - \bar{\mathbf{K}}H)\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \Gamma \mathbf{w}(k) - \Phi \bar{\mathbf{K}} \mathbf{v}(k)]$$

$$\times [\Phi(I - \bar{\mathbf{K}}H)\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) + \Gamma \mathbf{w}(k) - \Phi \bar{\mathbf{K}} \mathbf{v}(k)]^T\}$$

$$= \Phi[I - \bar{\mathbf{K}}H]\bar{P}(k|k-1)[I - \bar{\mathbf{K}}H]^T\Phi^T + \Phi \bar{\mathbf{K}} R \bar{\mathbf{K}}^T + \Gamma Q \Gamma^T$$

在稳态时

$$\bar{P}(k+1|k) = \bar{P}(k|k-1) = \bar{P}$$

则

$$\bar{P} = \Phi[I - \bar{\mathbf{K}}H]\bar{P}[I - \bar{\mathbf{K}}H]^T\Phi^T + \Phi \bar{\mathbf{K}} R \bar{\mathbf{K}}^T\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T \quad (11.39)$$

把(11.37)式代入(11.39)式,整理后得

$$\bar{P} = \Phi[\bar{P} - \bar{\mathbf{K}}H\bar{P} - \bar{P}H^T\bar{\mathbf{K}}^T + \bar{\mathbf{K}}\bar{C}(0)\bar{\mathbf{K}}^T]\Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T \quad (11.40)$$

令

$$\delta P = P - \bar{P}$$

(11.38)式减(11.40)式得

$$\delta P = \Phi[\delta P - KHP + \bar{\mathbf{K}}H^T\bar{P} + \bar{P}H^T\bar{\mathbf{K}}^T - \bar{\mathbf{K}}\bar{C}(0)\bar{\mathbf{K}}^T]\Phi^T \quad (11.41)$$

又

$$\begin{aligned} K &= PH^T(HPH^T + R)^{-1} \\ &= [\bar{P}H^T + \delta PH^T][H\bar{P}H^T + R + H\delta PH^T]^{-1} \\ &= [\bar{P}H^T + \delta PH^T][\bar{C}(0) + H\delta PH^T]^{-1} \end{aligned} \quad (11.42)$$

把  $K$  代入(11.41)式,整理后得  $\delta P$  的方程:

$$\begin{aligned} \delta P &= \Phi\{\delta P - [\bar{P}H^T + \delta PH^T][\bar{C}(0) + H\delta PH^T]^{-1} \\ &\quad \times [H\bar{P} + H\delta P] + \bar{\mathbf{K}}H\bar{P} + \bar{P}H^T\bar{\mathbf{K}}^T - \bar{\mathbf{K}}\bar{C}(0)\bar{\mathbf{K}}^T\}\Phi^T \end{aligned} \quad (11.43)$$

式中  $H\bar{P}$  和  $\bar{P}H^T$  的值由前面给出。(11.43)式是一个非线性矩阵方程,一般只能用近似方法来求解。我们从增益阵为  $\bar{K}$  的非最优滤波新息相关矩阵  $\bar{C}(0), \bar{C}(1), \dots, \bar{C}(n)$  出发,导出了计算测量噪声方差阵  $R$  和最佳增益矩阵  $K$  所需的全部方程(11.36), (11.37), (11.42)和(11.43)。所以要估算  $K$ , 只要估算  $\bar{C}(0), \bar{C}(1), \dots, \bar{C}(n)$  即可。平稳随机序列  $\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1)$  的相关矩阵  $\bar{C}(0), \bar{C}(1), \dots, \bar{C}(n)$  可以由相应的时间平均值进行估计, 当  $k$  充分大时,  $\tilde{\mathbf{z}}(1|0), \tilde{\mathbf{z}}(2|1), \dots, \tilde{\mathbf{z}}(k|k-1)$  的自相关函数  $C(i)$  的  $C_i^k$  (下标  $i$  表示时间间隔,  $i=0, 1, 2, \dots$ ; 上标  $k$  表示估计所依据的  $\tilde{\mathbf{z}}$  的个数)是

$$\begin{aligned} \bar{C}_i^k &= \frac{1}{k} \sum_{l=i+1}^k \tilde{\mathbf{z}}(l|l-1)\tilde{\mathbf{z}}^T(l-i|l-i-1) \\ &= \bar{C}_i^{k-1} + \frac{1}{k} [\tilde{\mathbf{z}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{z}}^T(k-i|k-i-1) - \bar{C}_i^{k-1}] \end{aligned} \quad (11.44)$$



$\hat{C}_i^*$  即为递推计算式。

综上所述,新息相关法的计算步骤如下:

第一步:按(11.44)式计算  $\hat{C}_i^*$ ;

第二步:按(11.36)式计算  $\bar{P}H^T$ ,按(11.37)式计算  $R$  的估值  $\hat{R}$ ;

第三步:按(11.43)式计算  $\delta P$  的估值  $\delta \hat{P}$ ;

第四步:按(11.42)式计算最优增益矩阵  $K$  的估值  $\hat{K}$ 。

由于新息序列相关性比较弱,输出序列的相关性比较强,容易从新息序列中得到调整  $K(k)$  的信息,因此新息相关法比输出相关法有效。

### 11.3 次优滤波器

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

为了实现最优滤波,需要准确地知道系统的数学模型和系统的所有误差源,这往往是很困难的事。有时即使能准确地知道系统的数学模型,但所得的模型往往是一个很复杂的数学模型,这无疑要增大计算量,因而增加了对计算机的计算速度和存储量的要求。卡尔曼滤波器的计算量很大,作为在线控制器的单片机系统(如 8031,80196 等)的计算速度和存储容量往往满足不了要求。因此从现实角度看,由于单片机的容量和速度受到限制,所以存在着研究简化卡尔曼滤波器的必要性。另一方面,在许多实际系统的描述中,存在着简化描述的可能性。通常在一个系统中,只有几个状态变量和误差源起主导作用而其余的状态变量只不过使系统的描述更加细致罢了。这就促使卡尔曼滤波器设计者去寻找一组简化的系统状态方程,使状态变量的维数大大减少,从而促使计算量大幅度地下降。但我们同时还希望几个主要状态变量的估值精度不致损失太大,我们把这样得到的卡尔曼滤波器叫做次优滤波器。常用的方法有以下两种。

#### 11.3.1 状态分组解耦法

卡尔曼滤波的计算量为  $kn^3$ ,如果能把一个  $n$  维的大系统分解成几个维数较低的独立小系统,则计算量可大大减少。例如把一个  $n$  维的系统分解成两个  $\frac{n}{2}$  维的独立小系统,则计算量为  $k\left(\frac{n}{2}\right)^3 + k\left(\frac{n}{2}\right)^3 = k\frac{n^3}{4}$ ,为原来计算量的四分之一,从这一思路出发,根据系统各部分耦合的强弱,将其分解成几个独立的小系统,可以大大提高计算效率。

#### 11.3.2 删减状态变量法

在删减状态变量时,首先对系统的物理本质要有深刻的了解,这样才能决定删去哪些状态变量和保留哪些状态变量。次优滤波器的状态变量选定之后,还要进行灵敏度分析。如果次优滤波器的性能指标不能满足要求,则要重新选定那些对误差起重要作用的状态变量,并重新进行灵敏度分析,直到获得满意的次优滤波器为止。

在删减状态变量时,首先要把原来的系统分成主要系统和次要系统,保留主要系统的状态变量,忽略次要系统的状态变量,以构成次优滤波器。可参照大系统理论中的模型集结法和模态法等选取主导状态变量。

## 第十二章 鲁棒估计理论

卡尔曼滤波器是在假定系统模型和噪声统计特性准确知道的前提下推导出来的。然而在实际中,无论采用哪一种建模方法,均无法得到准确的模型结构和模型中的参数。退一步讲,即使建立了准确的模型,但由于器件的老化,制造容差和使用环境不同等等问题,也可能出现模型的不确定性。对于噪声统计特性而言,本身就受到试验样本等各方面的限制,通常不可能得到准确的噪声统计特性。因此,人们在具体应用卡尔曼滤波器时,必须对模型和噪声统计特性作了种种假定之后,才能得到近似的估计结果。这样,就产生了一些问题,即模型误差和噪声统计特性不准确时会给滤波结果带来多大的影响?用什么样的方法可以将这些误差限制在工程要求的精度以内?为此,本章就鲁棒估计问题展开讨论。为了便于讨论,我们先对传统的处理方法进行回顾,然后再给出鲁棒估计的有关算法。

### 12.1 噪声统计特性问题

在卡尔曼滤波方程推导时,假定系统的噪声  $w(k)$  和量测噪声  $v(k)$  都是零均值高斯白噪声序列,如果不满足这一条件,卡尔曼滤波器公式应该作相应的修改。下面我们按不同情况进行讨论。

#### 12.1.1 噪声均值不为零

设

$$E\{w(k)\} = \bar{w}, \quad E\{v(k)\} = \bar{v}$$

令

$$\xi(k) = w(k) - \bar{w}, \quad \eta(k) = v(k) - \bar{v}$$

代入离散系统(2.1)式,得

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k)[\xi(k) + \bar{w}] \\ &= \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k)\bar{w} + \Gamma(k)\xi(k) \end{aligned} \quad (12.1)$$

及

$$z(k+1) = H(k+1)x(k+1) + \bar{v} + \eta(k) \quad (12.2)$$

将  $\bar{w}$  作为输入项,  $\bar{v}$  作为观测量的系统偏差,然后对卡尔曼滤波方程作如下的简单修改即可。

时间更新

$$x(k+1|k) = \Phi(k+1, k)x(k|k) + \Gamma(k)\bar{w} \quad (12.3)$$

测量更新

$$\begin{aligned} x(k+1|k+1) &= x(k+1|k) + K(k+1)[z(k+1) - \bar{v}] \\ &\quad - H(k+1)x(k+1|k) \end{aligned} \quad (12.4)$$

协方差矩阵的传播计算与标准卡尔曼滤波公式完全相同。

### 12.1.2 有色噪声问题

在推导连续系统卡尔曼滤波方程时,我们假定  $w(t)$  和  $v(t)$  都是白噪声过程。实际上,  $w(t)$  和  $v(t)$  可能是有色噪声。所谓白噪声就是不同时刻的噪声都是互不相关的,而有色噪声就是不同时刻的噪声都是相关的。对于某些特定的有色噪声,可用单位强度白噪声通过成形滤波器来表示,这样就可直接应用卡尔曼滤波方程。

如果有色噪声的相关函数是指数函数,则在谱密度中  $\omega$  的最高次项为  $\omega^2$ ,因而成形滤波器可用一阶微分方程来表示。对于多维的有色噪声,如其相关函数为指数函数,则其成形滤波器方程可用下述一阶向量微分方程来表示:

$$\dot{y}(t) = D(t)y(t) + n(t) \quad (12.5)$$

式中,  $y(t)$  为有色噪声;  $n(t)$  为零均值白噪声过程,其统计特性为

$$E[n(t)] = 0, \quad E[n(t)n^T(\tau)] = S(t)\delta(t-\tau)$$

对于一般的平稳随机过程  $x(t)$ ,如其谱密度  $S_x(\omega)$  为  $\omega^2$  的有理函数,且能分解成

$$S_x(\omega) = \frac{H(j\omega)H(-j\omega)}{F(j\omega)F(-j\omega)}$$

式中  $H(j\omega)$  和  $F(j\omega)$  是  $\omega$  的多项式,它们的根都在上半复数平面内,即  $H(s)$  和  $F(s)$  的根在复平面的左半部,则随机变量  $x(t)$  相当于单位强度的零均值白噪声过程,长时间作用于频率特性为

$$\Phi_s(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{F(j\omega)}$$

的线性系统的结果,因此

$$\Phi_s(s) = \frac{H(s)}{F(s)}$$

为成形滤波器的传递函数。

类似于连续系统,原离散时间系统中的  $w(k)$ ,  $v(k)$  不是高斯白噪声序列时,我们可以用下述一阶差分方程组来描述,即

$$y(k+1) = M(k)y(k) + \epsilon(k) \quad (12.6)$$

式中,  $\epsilon(k)$  为高斯白噪声序列。

对于连续系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t)x(t) + \Gamma(t)w(t) \\ z(t) &= H(t)x(t) + v(t) \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

若  $w(t)$ ,  $v(t)$  为有色噪声,并可用成形滤波器构造,即

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}(t) &= N(t)w(t) + \xi(t) \\ \dot{v}(t) &= M(t)v(t) + \eta(t) \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

式中  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  为零均值高斯白噪声过程。

联立(12.7), (12.8)式,可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) & \Gamma(t) & 0 \\ 0 & N(t) & 0 \\ 0 & 0 & M(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

及

$$z(t) = [H(t), 0, I] \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

根据连续系统的卡尔曼滤波公式,可以对(12.9),(12.10)式表示的系统进行状态估计。

若  $N(t), M(t)$  可以预先估计时,(12.9),(12.10)式的估计可以进一步解耦简化。若  $N(t), M(t)$  未知,则需涉及本书第十三章的状态和参数联合估计内容。

对于离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi(k+1, k)x(k) + \Gamma(k)w(k) \\ z(k+1) &= H(k+1)x(k+1) + v(k) \end{aligned} \quad (12.11)$$

用成形滤波器构造时,即

$$\begin{aligned} w(k+1) &= N(k)w(k) + \xi(k) \\ v(k+1) &= M(k)v(k) + \eta(k) \end{aligned} \quad (12.12)$$

式中  $\xi(k), \eta(k)$  为零均值高斯白噪声序列。

联立(12.11),(12.12)式,可得

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ w(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(k+1, k) & \Gamma(k) & 0 \\ 0 & N(k) & 0 \\ 0 & 0 & M(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(k) \\ \eta(k) \end{bmatrix} \quad (12.13)$$

及

$$z(k+1) = [H(k+1), 0, I] \begin{bmatrix} x(k+1) \\ w(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} \quad (12.14)$$

根据离散系统的卡尔曼滤波公式,可以对(12.13),(12.14)式描述的系统进行状态估计。

同样,  $M(t), N(t)$  已知时,滤波器可以进一步解耦简化;如果  $N(t), M(t)$  未知,也要涉及参数与状态的联合估计问题。

## 12.2 模型不确定问题

### 12.2.1 连续系统

设连续系统模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Fw \\ z = Hx + v \end{cases} \quad (12.15)$$

式中  $A, H, F$  表示实际系统的系数矩阵。滤波器的形式采用卡尔曼滤波器的形式:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{K}(z - \bar{H}\bar{x}) \quad (12.16)$$

式中  $\bar{A}, \bar{H}$  和  $\bar{K}$  表示用于滤波器中的系数矩阵和增益矩阵,设估计误差为

$$\bar{x} = x - \hat{x}$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品 (12.11)  
请尊重相关知识产权!

则由(12.15)式可得

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -(\bar{A} - \bar{K}\bar{H})\tilde{\mathbf{x}} + (A - \bar{K}H)\mathbf{x} + F\mathbf{w} - \bar{K}\mathbf{v} \quad (12.17)$$

令  $\Delta A = A - \bar{A}$ ,  $\Delta H = H - \bar{H}$ , 则  $A = \bar{A} + \Delta A$ ,  $H = \bar{H} + \Delta H$ , 把  $A$  和  $H$  代入上式得

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\bar{A} - \bar{K}\bar{H})\tilde{\mathbf{x}} + (\Delta A - \bar{K}\Delta H)\mathbf{x} + F\mathbf{w} - \bar{K}\mathbf{v} \quad (12.18)$$

定义新的向量

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}' = \begin{bmatrix} F\mathbf{w} - \bar{K}\mathbf{v} \\ F\mathbf{w} \end{bmatrix}$$

且令

$$A' = \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{K}\bar{H} & \Delta A - \bar{K}\Delta H \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

则可得

$$\dot{\mathbf{x}}' = A'\mathbf{x}' + \mathbf{w}' \quad (12.20)$$

(12.20)式是由白噪声所驱动的线性系统, 经过推导可知  $\mathbf{x}'$  的协方差满足

$$\frac{d\{[\mathbf{x}' \mathbf{x}'^T]\}}{dt} = A'E[\mathbf{x}'\mathbf{x}'^T] + E[\mathbf{x}'\mathbf{x}'^T]A'^T + E[\mathbf{w}'\mathbf{x}'^T] + E[\mathbf{x}'\mathbf{w}'^T] \quad (12.21)$$

我们感兴趣的量是  $\tilde{\mathbf{x}}$  的方差阵  $P$ , 它包含在下式中:

$$E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = E\left\{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^T & \mathbf{x}^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} P & V^T \\ V & U \end{bmatrix} \quad (12.22)$$

式中

$$P = E[\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^T] = P(t|t), \quad V = E[\mathbf{x}\tilde{\mathbf{x}}^T], \quad U = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$$

把(12.22)式代入(12.21)式, 并用谱密度矩阵  $Q$  和  $R$  来表示  $E[\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}')^T]$ , 可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{P} & \dot{V}^T \\ \dot{V} & \dot{U} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A} - \bar{K}\bar{H} & \Delta A - \bar{K}\Delta H \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & V^T \\ V & U \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} P & V^T \\ V & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{A} - \bar{K}\bar{H})^T & 0 \\ (\Delta A - \bar{K}\Delta H)^T & A^T \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} FQF^T + \bar{K}R\bar{K}^T & FQF^T \\ FQF^T & FQF^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12.23)$$

把(12.23)式写成分量形式, 则得误差灵敏度方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{P} &= (\bar{A} - \bar{K}\bar{H})P + P(\bar{A} - \bar{K}\bar{H})^T + (\Delta A - \bar{K}\Delta H)V \\ &\quad + V^T(\Delta A - \bar{K}\Delta H)^T + FQF^T + \bar{K}R\bar{K}^T \\ \dot{V} &= AV + V(\bar{A} - \bar{K}\bar{H})^T + U(\Delta A - \bar{K}\Delta H)^T + FQF^T \\ \dot{U} &= AU + UA^T + FQF^T \end{aligned} \right\} \quad (12.24)$$

因为初始值的不确定性与初始状态的不确定性是相同的, 故取

$$P(0) = V(0) = U(0) = E[\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)]$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

如果所使用的系统模型是正确的,则  $\Delta A=0, \Delta H=0$ 。

如果次优滤波器状态向量的维数比真实系统状态向量的维数低,即  $\bar{A}$  和  $A$ ,以及  $\bar{H}$  与  $H$  的维数不一致,为了利用上述灵敏度公式,应选用一个相应的选择矩阵,使它们一致起来,下面举例说明。若真实系统有 6 个状态变量,次优滤波器所用的模型有 4 个状态变量,由真实系统的前 4 个状态变量所组成,则  $A$  为  $6 \times 6$  矩阵,而  $\bar{A}$  为  $A$  的左方的  $4 \times 4$  分块矩阵所组成,此时差分矩阵  $\Delta A$  可定义为

$$\Delta A = \bar{W}^T \bar{A} \bar{W} - A$$

式中

$$\bar{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

$\bar{W}$  是真实系统和次优滤波所选用模型之间的一个转换矩阵,设  $x_r$  为真实系统的状态向量,  $x_{im}$  为所选用模型的状态向量,则

$$x_{im} = \bar{W} x_r$$

用相应的转换,可使  $\bar{H}$  与  $H$  一致起来

$$\Delta H = \bar{H} \bar{W} - H$$

此时相应于(12.24)式的灵敏度方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{P} &= \bar{W}^T (\bar{A} - \bar{K} \bar{H}) \bar{W} P + P \bar{W}^T (\bar{A} - \bar{K} \bar{H})^T \bar{W} \\ &\quad + (\Delta A - \bar{W}^T \bar{K} \Delta H) V + V^T (\Delta A - \bar{W}^T \bar{K} \Delta H)^T + F Q F^T + \bar{K} R \bar{K}^T \\ \dot{V} &= A V + V \bar{W}^T (\bar{A} - \bar{K} \bar{H})^T \bar{W} + U (\Delta A - \bar{W}^T \bar{K} \Delta H)^T + F Q F^T \\ \dot{U} &= A U + U A^T + F Q F^T \end{aligned} \right\} \quad (12.25)$$

## 12.2.2 离散系统

在两次测量之间,相应于连续系统的灵敏度方程(12.24)式的离散滤波器灵敏度方程为

$$\left. \begin{aligned} P(k|k-1) &= \Phi(k, k-1) P(k-1|k-1) \Phi^T(k, k-1) \\ &\quad + \Phi(k, k-1) V(k-1|k-1) \Delta \Phi^T(k, k-1) \\ &\quad + \Delta \Phi(k, k-1) V(k-1|k-1) \Phi^T(k, k-1) \\ &\quad + \Delta \Phi(k, k-1) U(k-1|k-1) \Delta \Phi^T(k, k-1) \\ &\quad + \Gamma(k, k-1) Q(k-1) \Gamma^T(k, k-1) \\ V(k|k-1) &= \Phi(k, k-1) V(k-1|k-1) \Phi^T(k, k-1) \\ &\quad + \Phi(k, k-1) U(k-1|k-1) \Delta \Phi^T(k, k-1) \\ &\quad - \Gamma(k, k-1) Q(k-1) \Gamma^T(k, k-1) \\ U(k|k-1) &= \Phi(k, k-1) U(k-1|k-1) \Phi^T(k, k-1) \\ &\quad + \Gamma(k, k-1) Q(k-1) \Gamma^T(k, k-1) \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

经过测量后,则为

$$\begin{aligned}
 P(k|k) &= [I - K(k)\bar{H}(k)]P(k|k-1)[I - \bar{K}(k) \\
 &\quad \times \bar{H}(k)]^T - [I - \bar{K}(k)\bar{H}(k)]V^T(k|k-1) \\
 &\quad \times \Delta H^T(k)\bar{K}^T(k) - \bar{K}(k)\Delta H(k)V(k|k-1) \\
 &\quad \times [I - \bar{K}(k)\bar{H}(k)]^T + \bar{K}(k)\Delta H(k) \\
 &\quad \times U(k|k)\Delta H^T(k)\bar{K}^T(k) + \bar{K}(k)R(k)\bar{K}^T(k) \\
 V(k|k) &= V(k|k-1)[I - \bar{K}(k)\bar{H}(k)]^T - U(k|k)\Delta H^T(k)\bar{K}^T(k) \\
 U(k|k) &= U(k|k-1)
 \end{aligned} \tag{12.27}$$

式中

$$\Delta\Phi = \Phi - \bar{\Phi}$$

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

### 12.2.3 参数化方法

当系统的模型不确定时, (12.24)~(12.27)式中均出现了未知量, 较准确的滤波结果无法得到。对于定常系统, 人们可以把这些未知量看成是一些未知参数, 然后可以用第十三章所描述的状态和参数的联合估计方法来处理。对于时变系统, 模型不确定部分也可用时间的多项式, 或可用一阶定常微分(连续系统)或差分(离散系统)方程组来描述, 这样, 也可以按状态和参数的联合估计问题来处理。具体方法如下:

设

$$\Delta A = [\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n], \quad \Delta H = [\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_n]$$

对于连续系统, 有

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\pi}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A} + \Delta\hat{A} & f(\hat{\mathbf{x}}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\pi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\
 \mathbf{y} &= \bar{H}\mathbf{x} + \Delta\hat{H}\mathbf{x} + \varphi(\hat{\mathbf{x}})\boldsymbol{\pi} + \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{12.28}$$

式中

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^T & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{x}}^T & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\mathbf{x}}^T & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \vdots \\ \tilde{A}_n \\ \tilde{H}_1 \\ \vdots \\ \tilde{H}_n \end{bmatrix} \tag{12.29}$$

$$\varphi(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{x}}^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\mathbf{x}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 \\ \vdots \\ \tilde{A}_n \\ \tilde{H}_1 \\ \vdots \\ \tilde{H}_n \end{bmatrix} \tag{12.30}$$

令



$$M_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^T & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{x}}^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\mathbf{x}}^T \end{bmatrix}_i; \quad i = n, m \quad (12.31)$$

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i \\ \vdots \\ \tilde{A}_n \end{bmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 \\ \vdots \\ \tilde{H}_n \end{bmatrix} \quad (12.32)$$

则有

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}$$

将(12.31)~(12.33)式代入(12.28)式中,得

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\pi}_1 \\ \dot{\pi}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A} + \Delta \hat{A} & M_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ y &= [\bar{H} + \Delta \hat{H}, 0, M_m] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} + \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (12.34)$$

根据(12.34)式,可以对状态  $\mathbf{x}$ , 建模误差  $\pi$  进行估计。

如果模型中的不确定是能够用一些特定的形式描述还可以使用本章后面的  $H_\infty$  估计方法。

## 12.3 $H_\infty$ 滤波方法

### 12.3.1 离散系统

设离散系统的状态方程和观测方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{w}(k) \\ y(k) &= C(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

根据(2.22)式,无模型误差时(12.35)式的卡尔曼滤波方程可写成

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1|k+1) &= A(k)\bar{\mathbf{x}}(k|k) + K_0(k+1)[y(k+1) - C(k+1)\bar{\mathbf{x}}(k+1|k)] \\ &= A(k)\bar{\mathbf{x}}(k|k) + K_0(k+1)\{C(k+1)[\mathbf{x}(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1|k)] \\ &\quad + \mathbf{v}(k+1)\} \\ &= A(k)\bar{\mathbf{x}}(k|k) + K_0(k+1)C(k+1)A(k)[\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k|k)] \\ &\quad + K_0(k+1)\mathbf{v}(k+1) \end{aligned} \quad (12.36)$$

(12.35)式减(12.36)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k+1) &= [A(k) - K_0(k+1)C(k+1)A(k)]\mathbf{e}(k) \\ &\quad + B(k)\mathbf{w}(k) - K_0(k+1)\mathbf{v}(k+1) \end{aligned} \quad (12.37)$$

式中  $\mathbf{e}(k) \triangleq \mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k|k)$ 。



令

$$\xi(k) = C_1(k)x(k) \quad (12.38)$$

当  $A(k), B(k), C(k), C_1(k)$  均为常值时, (12.37), (12.38) 式所示系统的误差传递函数为

$$T(e, w, v) = C_1(zI - A + K_0CA)^{-1}M \quad (12.39)$$

式中  $M = [B - K_0]$ 。若希望

$$\|T(e, w, v)\|_{\infty} < 1 \quad (12.40)$$

则根据  $H_{\infty}$  控制理论(参见文献[45]), 可直接得出下述定理。

**定理 12.1** 满足(12.40)式并使  $A - K_0CA$  为稳定矩阵的充分必要条件是下述方程:

$$\begin{cases} P^{-1} = S^{-1} - C_1^T C_1 + C^T C \\ S = APA^T + BB^T \end{cases} \quad (12.41)$$

之解  $P > 0$ 。

此时增益阵为

$$\begin{aligned} K_0 &= [I + PC_1^T C_1]^{-1} PC^T \\ &= S(I + C^T C P)^{-1} C^T \end{aligned} \quad (12.42)$$

### 12.3.2 连续系统

设系统的状态方程和观测方程为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)w(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t) \end{cases} \quad (12.43)$$

定义

$$z(t) = L(t)x(t) \quad (12.44)$$

$$J_1 = \sup_{0 \neq (x_0, w) \in L_2} \frac{\|z - \hat{z}\|_2^2}{\|w\|_2^2}, \quad x(0) = 0 \quad (12.45)$$

$$J_2 = \sup_{0 \neq (x_0, w) \in R^n \times L_2} \frac{\|z - \hat{z}\|_2^2}{\|w\|_2^2 + x_0^T P_0 x_0} \quad (12.46)$$

**定理 12.2** 已知(12.43)式的  $x(0) = 0$ , 若  $T < \infty$ , 则满足  $J_1 < \gamma^2$  的充分必要条件是存在正定矩阵  $P(t), t \in [0, T]$ , 并满足下述方程:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)C(t)P(t) \\ &\quad + \gamma^{-2}P(t)L^T(t)L(t)P(t) + B(t)B^T(t) \end{aligned} \quad (12.47)$$

如果(12.47)式满足, 则有

$$\begin{cases} \dot{x}(t|t) = A(t)x(t|t) + P(t)C^T(t)[y(t) - C(t)x(t|t)] \\ z(t|t) = L(t)x(t|t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (12.48)$$

**定理 12.3** 在定理 12.2 的条件下, 若  $T = \infty, t \in [0, \infty)$ , 则系统(12.43)式满足  $J_1 < \gamma^2$  的充分必要条件是存在正定矩阵  $P$ , 并满足

$$AP + PA^T - P[C^T C - \gamma^{-2}L^T L]P + BB^T = 0 \quad (12.49)$$

且  $A - P[C^T C - \gamma^{-2}L^T L]$  是稳定的。

对于  $x(0) \neq 0$  的情形, 有下述定理:

**定理 12.4** 满足(12.43)式且  $J_2 < \gamma^2$  的充分必要条件是存在对称正定矩阵  $P(t), t \in [0, T]$ , 并满足

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)C(t)P(t) \\ & + \gamma^{-2}P(t)L^T(t)L(t)P(t) + B(t)B^T(t) \end{aligned} \quad (12.50)$$

以上的滤波方法虽然保证了误差指标,但在实际使用时常常会发生  $\gamma$  太大或超出工程要求的精度。

## 12.4 连续系统的最小方差鲁棒滤波

考虑系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (A + \Delta A)\mathbf{x} + B\mathbf{w} \\ \mathbf{y} &= (C + \Delta C)\mathbf{x} + \mathbf{v} \\ \mathbf{z} &= L\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (12.51)$$

式中,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  为状态向量;  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^r$  为估计状态的线性组合;  $A, B, C, L$  为已知的常数矩阵;  $\Delta A, \Delta C$  为表示参数不确定的未知矩阵。

假定

$$\left. \begin{aligned} \Delta A &= H_1 F E, \quad \Delta C = H_2 F E \\ \|F\| &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (12.52)$$

式中,  $H_1, H_2, E$  为已知矩阵。

首先,我们讨论  $\mathbf{x}(0)=0$  或  $E[\mathbf{x}(0)]=0$  的情况。

设

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = A_c \hat{\mathbf{x}} + K\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}(0) = 0 \quad (12.53)$$

$$\hat{\mathbf{z}} = L\hat{\mathbf{x}} \quad (12.54)$$

由(12.51)式减去(12.53), (12.54)式可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= (A_c + H_c F E_c)\boldsymbol{\xi} + B_c \mathbf{w}_c, \quad \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 \\ \mathbf{e} &= L_c \boldsymbol{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (12.55)$$

式中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \\ A_c &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ KC & A_c \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}, \quad H_c = \begin{bmatrix} H_1 \\ KH_2 \end{bmatrix} \\ E_c &= [E, 0], \quad L_c = [L, -L_c] \end{aligned} \quad (12.56)$$

而

$$HFE + E^T F^T H^T \leq \epsilon^{-1} H H^T + \epsilon E^T E \quad (12.57)$$

因此,方差阵的黎卡提方程为

$$\dot{P} = A_c P + P A_c^T + \epsilon P E_c^T E_c P + B_c B_c^T + \epsilon^{-1} H_c H_c^T \quad (12.58)$$

$$P(0) = \text{diag}[\bar{X}_0, 0], \quad P = E[\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^T], \quad P_x = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T], \quad P_x(0) \leq \bar{P}_{x0}$$

对于  $\|F\| < 1$ , 有

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

$$\left. \begin{aligned} E[\xi(t) \xi^T(t)] &\leq P(t) \\ E[e^T(\tau)e(t)] &\leq \text{tr}[L_e P(t) L_e^T], \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \right\} \quad (12.59)$$

求  $\text{tr}[L_e P(t) L_e^T]$  极小值, 可得黎卡提方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y} &= AY + YA^T + \epsilon Y E^T E Y + BB^T + \epsilon^{-1} H_1 H_1^T \\ Y(0) &= P_{x0} \end{aligned} \right\} \quad (12.60)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_x &= AP_x + P_x A^T - (P_x C^T + \epsilon^{-1} H_1 H_2^T) V^{-1} (P_x C^T + \epsilon^{-1} H_1 H_2^T)^T \\ &\quad + \epsilon P_x E^T E P_x + BB^T + \epsilon^{-1} H_1 H_1^T \\ P_x(0) &= \bar{P}_{x0} \end{aligned} \right\} \quad (12.61)$$

式中

$$V = I + \epsilon^{-1} H_2 H_2^T$$

(12.60) 式之解  $Y(t) = Y^T(t) > 0, \forall t \in [0, T]$  是保证系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + \left[ B \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} H_1 \right] \bar{w}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \\ \bar{z} &= \sqrt{\epsilon} E \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (12.62)$$

满足

$$\sup \left\{ \frac{\|\bar{z}\|_{[0,T]}}{\|\bar{w}\|_{[0,T]} + \bar{x}_0^T \bar{P}_{x0}^{-1} \bar{x}_0} \right\}^{\frac{1}{2}} < 1 \quad (12.63)$$

其中

$$\|f\|_{[0,T]} = \left[ \int_0^T f^T(t) f(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}, \quad f(t) \in L_2[0, T] \quad (12.64)$$

的充分必要条件。

(12.61) 式还可写成

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_x &= (A - \epsilon^{-1} H_1 H_2^T V^{-1} C) P_x + P_x (A - \epsilon^{-1} H_1 H_2^T V^{-1} C)^T \\ &\quad + P_x (\epsilon E^T E - C^T V^{-1} C) P_x + BB^T \\ &\quad + \epsilon^{-1} H_1 (I - \epsilon^{-1} H_2^T V B^{-1} H_2) H_1^T \\ P_x(0) &= \bar{P}_{x0} \end{aligned} \right\} \quad (12.65)$$

(12.65) 式之解是保证系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A\bar{x} + \left[ B \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} H_1 \right] \bar{w}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \\ \bar{y} &= C\bar{x} + \left[ 0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} H_2 \right] \bar{w} + \bar{v} \\ \bar{z} &= \sqrt{\epsilon} E \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (12.66)$$

满足

$$\left\{ \sup \frac{\|\bar{z} - \hat{\bar{z}}_e\|_{[0,T]}}{\|\bar{w}\|_{[0,T]} + \|\bar{v}\|_{[0,T]} + \bar{x}_0^T \bar{P}_{x0}^{-1} \bar{x}_0} \right\}^{\frac{1}{2}} < 1 \quad (12.67)$$

(式中  $\hat{\bar{z}}_e$  为  $\bar{z}$  的估计值) 的充分必要条件。

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

综上所述,我们可得如下定理:

**定理 12.5** 对(12.53)~(12.56)式描述的系统,若误差约束(12.59)式成立的充分必要条件是存在一正数  $\epsilon$  使(12.61)式有解,则(12.53)式的最优估计为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A + \epsilon \tilde{P} E^T E) \hat{x} + K(y - C\hat{x}), \quad \hat{x} = 0 = x_0 \\ \dot{\hat{z}} &= L\hat{x} \end{aligned} \right\} \quad (12.68)$$

式中

$$K = (P_x C^T + \epsilon^{-1} H_1 H_2^T) (I + \epsilon^{-1} H_2 H_2^T)^{-1} \quad (12.69)$$

(12.55)式的协方差阵为

$$P(t) = \begin{bmatrix} Y(t) & Y(t) - P_x(t) \\ Y(t) - P_x(t) & Y(t) - P_x(t) \end{bmatrix} \quad (12.70)$$

因此(12.61),(12.68)和(12.69)式给出了最小方差鲁棒滤波的解。

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

## 12.5 离散系统的最小方差鲁棒滤波

考虑如下离散时间不确定系统:

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= (A + \Delta A)x(k) + Bw(k) \\ x(0) &= x_0 \\ y(k) &= (C + \Delta C)x(k) + v(k) \end{aligned} \right\} (0 \leq k \leq N-1) \quad (12.71)$$

式中  $x \in R^n$  为系统的状态向量;  $y \in R^r$  为系统的观测向量;  $w, v$  分别为系统和测量噪声向量,并假定为是与系统状态无关的零均值白噪声序列,其统计特性如下:

$$E\{x_0\} = 0, \quad E\{w(k)\} = 0, \quad E\{v(k)\} = 0 \quad (12.72a)$$

$$E\{x_0 x_0^T\} = R_0, \quad E\left\{ \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(l) & v^T(l) \end{bmatrix} \right\} = \begin{cases} I_{n+r}, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (12.72b)$$

$\Delta A$  和  $\Delta C$  分别表示系统状态转移阵和观测矩阵的不确定参数,并具有如下的结构:

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F E \quad (12.73)$$

其中  $F \in R^{i \times j}$  是未知参数矩阵,满足限制条件:

$$F^T F \leq I \quad (12.74)$$

$A, B, C, H_1, H_2, E$  都为适当维数的矩阵,它们可以随时间而变。现在需要寻找关于系统状态向量  $x(k)$  的估计值  $\hat{x}(k)$  和一个正定的矩阵序列  $\{Q(k)\}$ ,使得对所有可允许的不确定参数  $F$ ,系统状态估计误差的方差阵满足下式:

$$E\{[x(k) - \hat{x}(k)][x(k) - \hat{x}(k)]^T\} \leq Q(k), \quad \forall F^T F \leq I \quad (12.75)$$

张勇和本书著者给出了如下的方法:

参照标准的卡尔曼滤波方程(2.22),可以假定系统鲁棒滤波方程的形式如下:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A_e(k) \hat{x}(k) + K_e(k)[y(k) - C\hat{x}(k)] \\ \hat{x}_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.76)$$

这里  $A_e(k), K_e(k)$  分别为滤波的状态矩阵和增益矩阵。

定义状态的估计误差  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ ,则由(12.71)和(12.75)式得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(k+1) &= [A - K_e(k)C]\mathbf{e}(k) + [A - A_e(k) \\ &\quad + \Delta A - K_e(k)\Delta C]\mathbf{x}(k) + B\mathbf{w}(k) - K_e(k)\mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (12.77)$$

扩展系统的状态  $\boldsymbol{\eta}(k) = [\mathbf{x}^T(k) \ \mathbf{e}^T(k)]^T$ , 则有

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(k+1) &= (\hat{A} + \hat{H}F\hat{E})\boldsymbol{\eta}(k) + \hat{B}\hat{\mathbf{w}}(k) \\ \mathbf{e}(k) &= [0, I]\boldsymbol{\eta}(k) \end{aligned} \right\} \quad (12.78)$$

其中

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - A_e(k) & A_e(k) - K_e(k)C \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B & 0 \\ B & -K_e(k) \end{bmatrix} \quad (12.79a)$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 - K_e(k)H_2 \end{bmatrix}, \quad E = [E, 0], \quad \hat{\mathbf{w}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix} \quad (12.79b)$$

令扩展状态估计误差的协方差阵  $E\{\boldsymbol{\eta}(k)\boldsymbol{\eta}^T(k)\} = X(k)$ , 由(12.78)式知

$$E\{[\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)][\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)]^T\} = E\{\mathbf{e}(k)\mathbf{e}^T(k)\} = [0, I]X(k) \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (12.80)$$

本节的问题是如何选择滤波方程(12.76)式中的  $A_e(k)$  和  $K_e(k)$ , 使得系统对所有可允许的不确定参数, 都可保证滤波误差的方差不超过一定的范围。

### 12.5.1 鲁棒滤波算法

为了求得(12.71)式的滤波误差上界, 首先考虑扩展系统(12.78)式的状态估计误差上界。

**定理 12.6** 系统(12.78)的状态估计误差的协方差阵  $X(k)$  满足

$$X(k) \leq \tilde{X}(k) \quad (12.81)$$

其中  $\tilde{X}(k)$  是满足如下修正离散系统黎卡提方程的正定解:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}(k+1) &= (1 + \lambda^{-2})\hat{A}\tilde{X}(k)\hat{A}^T + (1 + \lambda^2)\sigma(\hat{E}\tilde{X}(k)\hat{E}^T)\hat{H}\hat{H}^T + \hat{B}\hat{B}^T \\ \tilde{X}_0 &= \begin{bmatrix} P_{x0} & P_{e0} \\ P_{e0} & P_{e0} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (12.82)$$

这里,  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{H}, \hat{E}$  的定义见(12.79)式;  $\lambda > 0$  为任意实数;  $\sigma(P)$  表示矩阵  $P$  的最大奇异值;  $\tilde{X}_0 > 0$  为迭代初值。

**证明** 由于  $\hat{\mathbf{w}}(k)$  与  $\boldsymbol{\eta}(k)$  线性无关,  $E\{\hat{\mathbf{w}}(k)\} = 0$ ,  $E\{\hat{\mathbf{w}}(k)\hat{\mathbf{w}}^T(k)\} = I$ , 对任意半正定阵  $\tilde{X}(k) \geq 0$  和任意实数  $\lambda > 0$  有

$$(\lambda^{-1}\hat{A} - \lambda\hat{H}F\hat{E})\tilde{X}(k)(\lambda^{-1}\hat{A} - \lambda\hat{H}F\hat{E})^T \geq 0$$

故

$$\begin{aligned} (\hat{H}F\hat{E})\tilde{X}(k)\hat{A}^T + \hat{A}\tilde{X}(k)(\hat{H}F\hat{E})^T &\leq \lambda^{-2}\hat{A}\tilde{X}(k)\hat{A}^T + \lambda^2(\hat{H}F\hat{E})\tilde{X}(k)(\hat{H}F\hat{E})^T \\ &\leq \lambda^{-2}\hat{A}\tilde{X}(k)\hat{A}^T + \lambda^2\sigma(\hat{E}\tilde{X}(k)\hat{E}^T)\hat{H}\hat{H}^T \end{aligned} \quad (12.83)$$

根据系统(12.78)知

$$X(k+1) = E\{\eta(k+1)\eta^T(k+1)\} = E\{[(\hat{A} + \hat{H}F\hat{E})\eta(k) + \hat{B}\hat{w}(k)][(\hat{A} + \hat{H}F\hat{E})\eta(k) + \hat{B}\hat{w}(k)]^T\} \quad (12.84)$$

展开上式有

$$X(k+1) = (\hat{A} + \hat{H}F\hat{E})X(k)(\hat{A} + \hat{H}F\hat{E})^T + \hat{B}\hat{B}^T$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} P_{x0} & P_{e0} \\ P_{e0} & P_{e0} \end{bmatrix} \quad (12.85)$$

下面采用归纳法来证明定理 12.5。

当  $k=0$  时,  $\tilde{X}_0 = X_0$ , 可得

$$X_1 = \hat{A}X_0\hat{A}^T + (\hat{H}F\hat{E})X_0\hat{A}^T + \hat{A}X_0(\hat{H}F\hat{E})^T + (\hat{H}F\hat{E})X_0(\hat{H}F\hat{E})^T + \hat{B}\hat{B}^T$$

$$\leq (1 + \lambda^{-2})\hat{A}\tilde{X}_0\hat{A}^T + (1 + \lambda^2)\bar{\sigma}(\hat{E}\tilde{X}_0\hat{E}^T)\hat{H}\hat{H}^T + \hat{B}\hat{B}^T = \tilde{X}(1)$$

现假定在  $k$  时刻  $X(k) \leq \tilde{X}(k)$  成立, 则

$$X(k+1) = \hat{A}X(k)\hat{A}^T + (\hat{H}F\hat{E})X(k)\hat{A}^T$$

$$+ \hat{A}X(k)(\hat{H}F\hat{E})^T + (\hat{H}F\hat{E})X(k)(\hat{H}F\hat{E})^T + \hat{B}\hat{B}^T$$

$$\leq (1 + \lambda^{-2})\hat{A}\tilde{X}(k)\hat{A}^T + (1 + \lambda^2)\bar{\sigma}(\hat{E}\tilde{X}(k)\hat{E}^T)\hat{H}\hat{H}^T + \hat{B}\hat{B}^T = \tilde{X}(k+1)$$

将  $\tilde{X}$  按  $x$  和  $e$  的维数分解成如下四块子矩阵:

$$\tilde{X}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{11}(k) & \tilde{X}_{12}(k) \\ \tilde{X}_{21}(k) & \tilde{X}_{22}(k) \end{bmatrix} \quad (12.86a)$$

其中  $\tilde{X}_{11}(k), \tilde{X}_{12}(k), \tilde{X}_{21}(k), \tilde{X}_{22}(k)$  都是  $n \times n$  维矩阵, 显然有

$$\tilde{X}_{11}^T(k) = \tilde{X}_{11}(k), \quad \tilde{X}_{12}^T(k) = \tilde{X}_{21}(k), \quad \tilde{X}_{22}^T(k) = \tilde{X}_{22}(k) \quad (12.86b)$$

成立。

由 (12.80) 式和定理 12.5 知, 对任意可允许的不确定参数  $F$ , 滤波误差的方差满足

$$E\{[x(k) - \hat{x}(k)][x(k) - \hat{x}(k)]^T\} \leq [0 \quad I]\tilde{X}(k)\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \tilde{X}_{22}(k) \triangleq Q_k \quad (12.87)$$

于是可得如下结果:

**定理 12.7** 对于系统 (12.71) 的滤波方程 (12.76), 选择

$$\left. \begin{aligned} A_e(k) &= A \\ K_e(k) &= P_e(k)\Delta^{-1}(k) \\ P_e(k) &= [(1 + \lambda^{-2})AQ(k)C^T + (1 + \lambda^2)\bar{\sigma}(k)H_1H_2^T] \\ \Delta(k) &= [I + (1 + \lambda^{-2})CQ(k)C^T + (1 + \lambda^2)\bar{\sigma}(k)H_2H_2^T] \end{aligned} \right\} \quad (12.88a)$$

当  $Q(k)$  满足如下离散黎长提方程

$$Q(k+1) = (1 + \lambda^{-2})AQ(k)A^T + (1 + \lambda^2)\bar{\sigma}(k)H_1H_1^T + BB^T - P_e(k)\Delta^{-1}(k)P_e(k)$$

$$Q_0 = R_0 \quad (12.88b)$$

时, 能保证滤波误差上界  $Q(k)$  达到极小。其中  $\bar{\sigma}(k) = \bar{\sigma}[EQ(k)E^T]$  为矩阵  $EQ(k)E^T$  的最

大奇异值。

证明 将定理 12.5 中的  $\tilde{X}$  按(12.86)式分解后展开,有

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{22}(k+1) = & (1 + \lambda^{-2})\{[(A - A_e(k))\tilde{X}_{11}(k) \\ & + (A_e(k) - K_e(k)C)\tilde{X}_{21}(k)](A - A_e(k))^T \\ & + [(A - A_e(k))\tilde{X}_{12}(k) + (A_e(k) - K_e(k)C)\tilde{X}_{22}(k)](A_e(k) - K_e(k)C)^T\} \\ & + (1 + \lambda^2)\bar{\sigma}(k)(H_1 - K_e(k)H_2)(H_1 - K_e(k)H_2)^T + BB^T + K_e(k)K_e^T(k)\end{aligned}\quad (12.89)$$

当  $\tilde{X}_{22}(k)$  已知时,可求得使  $\tilde{X}_{22}(k+1)$  达到极小的  $K_e(k)$  和  $A_e(k)$ 。

令  $\frac{\partial \text{tr}[\tilde{X}_{22}(k)]}{\partial K_e(k)} = 0$  得

$$\begin{aligned}K_e(k) = & \{(1 + \lambda^{-2})[(A - A_e(k))\tilde{X}_{12}(k)C^T + A_e(k)\tilde{X}_{22}(k)C^T] \\ & + (1 + \lambda^2)\bar{\sigma}(k)H(1)H^T(k)\}\Delta^{-1}(k)\end{aligned}\quad (12.90)$$

式中  $\bar{\sigma}(k)$  和  $\Delta(k)$  的定义参见(12.88)式。同理

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{tr}[\tilde{X}_{22}(k)]}{\partial A_e^T(k)} = & (1 + \lambda^{-2})\{2[\tilde{X}_{21}(k) - \tilde{X}_{11}(k)][A - A_e(k)]^T \\ & + [2\tilde{X}_{22}(k) - \tilde{X}_{12}(k) - \tilde{X}_{21}(k)]A_e^T(k) - K_e^T(k)C[\tilde{X}_{22}(k) - \tilde{X}_{12}(k)]^T\}\end{aligned}\quad (12.91)$$

取  $A_e(k) = A$ , 如果  $\tilde{X}_{12}(k) = \tilde{X}_{22}(k)$  成立,则由(12.86b)式可知(12.91)式右端为 0,从而  $\tilde{X}_{22}(k+1)$  取极小值。

下面证明当  $A_e(k) = A$  时,  $\tilde{X}_{12}(k) = \tilde{X}_{22}(k)$  成立。展开(12.82)式中的  $\tilde{X}_{12}(k)$  块,减去(12.89)式,考虑到  $A_e(k) = A$ ,化简得

$$\tilde{X}_{12}(k+1) - \tilde{X}_{22}(k+1) = (1 + \lambda^{-2})A[\tilde{X}_{12}(k) - \tilde{X}_{22}(k)][A^T - C^TK_e^T(k)]\quad (12.92)$$

而  $\tilde{X}_{12}(0) - \tilde{X}_{22}(0) = 0$ , 因此  $\tilde{X}_{12}(k) = \tilde{X}_{22}(k)$ 。

将  $A_e(k) = A$  代入(12.90)和(12.89)式,取迭代初值为  $R_0$ ,即可得(12.88a)和(12.88b)两式。

当系统不存在不确定因素,即  $H_1 = 0, H_2 = 0$  时,取  $\lambda \rightarrow \infty (\lambda^{-2} = 0)$ , 方程(12.88a), (12.88b)即转化为标准的卡尔曼滤波算法。

## 12.5.2 计算实例

系统方程如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) = & \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 + \delta_k \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = & [-100 \quad 10] \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k)\end{aligned}\quad (12.93)$$

式中,  $\delta_k$  为不确定参数且  $|\delta_k| < 0.3$ ;  $\mathbf{w}(k), \mathbf{v}(k)$  的统计特性满足(12.71)式的假定,现需要

计算状态变量  $\mathbf{x}(k)$  第一个分量的滤波结果。取

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad H_2 = 0, \quad E = [0 \ 0.03] \quad (12.94)$$

根据(12.88)式计算鲁棒滤波器,迭代收敛后的稳态滤波方程如下:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} -0.0066 \\ 0.0045 \end{bmatrix} [y(k) - C\hat{\mathbf{x}}(k)] \quad (12.95)$$

稳态滤波误差的方差上界为 85.9。在计算过程中,我们考虑了不确定参数的三种情况:

①  $\delta_k=0$ ; ②  $\delta_k=0.3$ ; ③  $\delta_k=-0.3$ 。各种情况下状态估计方差的真实值比较结果列于下表:

表 12.1  $E\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^2\}$  的真实值比较

滤波算法	$\delta_k=0$	$\delta_k=0.3$	$\delta_k=-0.3$
卡尔曼滤波	36.0	8352.8	551.2
鲁棒滤波	48.2	55.5	49.1

结果表明,在  $\delta_k$  存在的情况下,卡尔曼滤波的性能下降很快,而鲁棒滤波的结果要好得多。



## 第十三章 状态和未知参数的联合估计

### 13.1 适应性分割估计方法

#### 13.1.1 适应估计问题

最优估计问题同最优化问题一样,一般由三个基础部分组成,即①数学模型,被估计对象的数学抽象;②成本函数,估计目标的数学描述;③最优约束。其中模型是最基本的部分,然而,大多数场合中,模型不可能完全确定。因此人们就希望在模型知识不完全知道的情况下能够设计一种估计器,而且进一步实时地进行状态估计和未知参数辨识,这就构成了适应估计问题。

以连续系统为例,假定基本适应估计问题的模型方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= F(t, \theta) \mathbf{x}(t) + G(t, \theta) \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= H(t, \theta) \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

式中,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{z}(t)$  分别是  $n$  维状态和  $m$  维测量过程;  $\mathbf{w}(t)$  和  $\mathbf{v}(t)$  分别是以  $\theta$  作为条件的过程噪声和测量噪声,假定为是相互独立的零均值高斯白噪声过程,其协方差阵分别为  $Q(t, \theta)$  和  $R(t)$ ; 初始状态向量  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , 对于  $\forall t \geq t_0$ ,  $\mathbf{x}_0$  独立于  $\{\mathbf{w}(t)\}$  和  $\{\mathbf{v}(t)\}$ , 并具有以  $\theta$  为条件的高斯密度  $p(t_0 | \theta)$ , 其均值为  $\mathbf{x}(t_0 | t_0, \theta)$ , 协方差为  $P(t_0 | t_0, \theta)$ 。 $\theta$  是参数向量,如果  $\theta$  已知,则模型就完全确定了。我们这里考虑  $\theta$  已知,并假定其先验概率密度分布函数为  $p(\theta | t_0) = p(\theta)$ 。

我们面临的问题是在测量纪录  $\lambda(t_0, t) = [\mathbf{z}(\sigma), \sigma \in (t_0, t)]$  已知时,求得在均方误差意义上的  $\mathbf{x}(t)$  的最优滤波估计  $\mathbf{x}(t | t, t_0)$ 。

上述适应估计问题可以看作状态和参数估计问题。解上述问题的一个很显然的方法是将  $\theta$  作为增广状态向量,即令  $\mathbf{x}_a(t) = [\mathbf{x}^T(t), \theta^T]^T$ , 于是模型方程成了非线性方程:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_a(t) &= f_a[\mathbf{x}_a(t), t] + g_a[\mathbf{x}_a(t), t] \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= h_a[\mathbf{x}_a(t), t] + \mathbf{v}(t) \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

式中

$$\begin{aligned} f_a[\mathbf{x}_a(t), t] &\equiv [\mathbf{x}^T(t) F^T(t, \theta) \ 0]^T \\ g_a[\mathbf{x}_a(t), t] &\equiv [G^T(t, \theta) \ 0]^T \\ h_a[\mathbf{x}_a(t), t] &\equiv H(t, \theta) \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

所要求的状态向量估计由  $\mathbf{x}(t | t, t_0) = [I, 0] \mathbf{x}_a(t | t, t_0)$  给出。可看出这个适应估计问题构成了一类非线性估计问题,如果用通常的微分方程方法来实现此最优估计,模型结构形式及参数的多寡则使问题变得非常复杂。利用分割方法,适应估计器可以用一种计算较简单而且互相去耦的并行处理形式来描述,因此容易近似实现及评价。

适应估计问题中,模型的性质和模型所包含的不确定性是很复杂的,这些问题可以

有:①具有参数和状态向量维数不确定的线性模型;②具有参数不确定及已知或未知状态向量维数的非线性模型;③具有函数不确定的非线性模型;④具有时变参数不确定及已知或未知状态向量维数的线性或非线性模型等等。对于具有线性模型参数不确定的基本适应估计器,目前已经得到了研究结果,但是对于复杂的估计问题只能用适应滤波进行有效近似。

### 13.1.2 连续系统分割适应滤波

对于连续定常系统的参数不确定性问题,(13.1)式的适应估计器可以通过以下的分割定理给出。

**定理 13.1**  $\lambda(t, t_0)$  已知时,最优均方误差估计  $\mathbf{x}(t|t, t_0)$  及相应的误差协方差阵  $P(t, t_0)$  由下式给出:

$$\mathbf{x}(t|t, t_0) = \int \mathbf{x}(t|t, t_0; \theta) p(\theta|t, t_0) d\theta \quad (13.3)$$

$$P(t, t_0) = \int \{P(t, t_0|\theta) + [\mathbf{x}(t|t, t_0) - \mathbf{x}(t, t_0; \theta)][\mathbf{x}(t|t, t_0) - \mathbf{x}(t, t_0; \theta)]^T\} \\ \times p(\theta|t, t_0) d\theta \quad (13.4)$$

积分范围是  $\theta$  可能的取值范围。

这里  $\mathbf{x}(t|t, t_0; \theta)$  和  $P(t, t_0|\theta)$  分别是  $\theta$  条件均方误差状态向量估计及相应的  $\theta$  条件误差协方差阵,其定义为

$$\mathbf{x}(t|t, t_0; \theta) \equiv E[\mathbf{x}(t)|\lambda(t, t_0); \theta] \quad (13.5)$$

$$P(t, t_0|\theta) \equiv E\{[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t|t, t_0; \theta)][\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t|t, t_0; \theta)]^T | \lambda(t, t_0); \theta\} \quad (13.6)$$

相应的模型条件可由卡尔曼滤波器得到,即

$$\dot{\mathbf{x}}(t|t, t_0; \theta) = F(t, \theta)\mathbf{x}(t|t, t_0; \theta) + K(t, t_0; \theta)\bar{\mathbf{z}}(t, t_0; \theta) \quad (13.7)$$

初始条件为  $\mathbf{x}(t_0|t_0; \theta)$ 。

(13.7)式中

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}(t, t_0; \theta) &\equiv \mathbf{z}(t) - H(t, \theta)\mathbf{x}(t|t, t_0; \theta) \\ K(t, t_0; \theta) &\equiv P(t, t_0|\theta)H^T(t, \theta)R^{-1}(t) \\ \dot{P}(t, t_0|\theta) &= F(t, \theta)P(t, t_0|\theta) + P(t, t_0|\theta)F^T(t, \theta) + Q(t, \theta) \\ &\quad - P(t, t_0|\theta)H^T(t, \theta)R^{-1}(t)H(t, \theta)P(t, t_0|\theta) \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

且具有初始条件  $P(t_0, t_0|\theta)$ 。

验后概率密度由下式给出:

$$p(\theta|t, t_0) = \frac{\Lambda(t, t_0|\theta)}{\int \Lambda(t, t_0|\theta) p(\theta) d\theta} p(\theta) \quad (13.9)$$

式中  $\Lambda(t, t_0|\theta)$  是似然比,由下式给出:

$$\Lambda(t, t_0|\theta) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t \mathbf{x}^T(\sigma|\sigma, t_0; \theta) H^T(\sigma, \theta) R^{-1}(\sigma) \mathbf{z}(\sigma) d\sigma \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \| H(\sigma, \theta) \mathbf{x}(\sigma|\sigma, t_0; \theta) \|_{R^{-1}(\sigma)}^2 d\sigma \right\} \quad (13.10)$$

或等价地,  $p(\theta|t, t_0)$  由下式给出:

$$p(\theta|t, t_0) = \frac{L(t, t_0|\theta)}{\int L(t, t_0|\theta)p(\theta)d\theta} p(\theta) \quad (13.11)$$

这里  $L(t, t_0|\theta)$  定义为

$$L(t, t_0|\theta) \equiv \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \| \mathbf{z}(\sigma, t_0; \theta) \|_{\mathbf{K}^{-1}(\sigma)}^2 d\sigma \right\} \quad (13.12)$$

下面我们来说明上述定理的意义:

(1) 从(13.3)式可以看到, 最优非线性估计的适应实现根据模型(参数  $\theta$ ) 的条件估计  $\mathbf{x}(t|t, t_0; \theta)$  及协方差矩阵的验后概率密度  $p(\theta|t, t_0)$  给出; 模型条件估计  $\mathbf{x}(t|t, t_0; \theta)$  由基本的卡尔曼滤波器给出。(13.3)式的最优非线性适应滤波可以看成由一组线性卡尔曼滤波器(彼此是完全去耦的)的加权和组成, 权系数即为验后概率密度。所以, 非线性适应滤波器可以“分割”成一组简单的彼此去耦的卡尔曼滤波器的加权和来构成, 可以用并行实现的形式计算。通常,  $p(\theta)$  不为零,  $p(\theta|t, t_0)$  由一组卡尔曼滤波器求得。

(2) 验后概率密度是通过两个似然比, 即模型条件似然比  $\Lambda(t, t_0|\theta)$  和无条件似然比  $\int \Lambda(t, t_0|\theta)p(\theta)d\theta$  的比值给出的。

$\Lambda(t, t_0|\theta)$  是下面一组检测问题的似然比:

$$\begin{aligned} H: \mathbf{z}(t) &= H(t, \theta)\mathbf{x}(t|\theta) + \mathbf{v}(t) \\ H_0: \mathbf{z}(t) &= \mathbf{v}(t) \end{aligned}$$

即输出是否仅含有噪声, 而不含有模型信息。

$\int \Lambda(t, t_0|\theta)p(\theta)d\theta$  是下面一组检测问题的似然比

$$\begin{aligned} H: \mathbf{z}(t) &= \mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t) \\ H_0: \mathbf{z}(t) &= \mathbf{v}(t) \end{aligned}$$

式中  $\mathbf{y}(t)$  是由候选模型所得到的计算观测值。

检测问题、估计问题和辨识问题三者有本质上的联系, 是同一个问题的不同表示。

(3) 定理 13.1 的理论意义在于它把一组可数无限多的耦合非线性随机偏微分方程转化为一组完全解耦的具有相同结构的成对普通微分方程。即利用分割定理可以把大规模复杂的非线性系统分割为一组较小规模的线性去耦系统。

另外, 分割定理也提供了精确的误差协方差阵表达式(13.4), 并可以直接计算, 这是目前为止较为精确的表达式。

(4) 在定理中假定状态维数是已知的, 只存在参数不确定。我们也可以假定状态维数也不确定, 根据先验知识假定状态向量维数小于或等于  $n$ , 则通过模型结构辨识可以确定状态的维数。

(5) 分割算法具有错误检测和校正的功能。如果某一个模型条件估计使  $\mathbf{x}(t|t, t_0; \theta)$  发散, 则相应的条件新息  $\tilde{\mathbf{z}}(t, t_0; \theta)$  将很大, 这样就使相应的  $p(\theta|t, t_0)$  趋于零, 从而通过调节加权中止发散。

### 13.1.3 离散系统分割适应滤波

设离散适应估计问题由下列模型描述：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \Phi(k+1, k; \theta) \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k) = H(k, \theta) \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (13.13)$$

式中,  $\mathbf{x}(k)$  和  $\mathbf{z}(k)$  分别是  $n$  维状态向量和  $m$  维测量序列;  $\mathbf{w}(k)$  和  $\mathbf{v}(k)$  分别是以  $\theta$  作为条件的系统噪声和测量噪声, 假定为独立的零均值高斯白噪声序列, 其协方差阵分别为  $Q(k, \theta)$  和  $R(k)$ ; 初始状态向量  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , 独立于  $\{\mathbf{w}(k)\}$  和  $\{\mathbf{v}(k)\}$ , 其均值和方差分别是  $\mathbf{x}(0|0, \theta)$  及  $P(0|0, \theta)$ 。如果参数向量  $\theta$  已知, 则完全描述系统。通常,  $\theta$  被假定为具有已知的或假定的先验概率密度函数  $p(\theta|0) = p(\theta)$ 。

若已知测量值  $\lambda(k, 0) = [\mathbf{z}(j), j=1, 2, \dots, k]$ ,  $\mathbf{x}(k)$  的最优均方差估计  $\mathbf{x}(k|k, 0)$  及相应的误差协方差阵  $P(k, \theta)$  如下：

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k|k, \theta) = \int \mathbf{x}(k|k, 0; \theta) p(\theta|k, 0) d\theta \\ P(k, \theta) = \int \{P(k, 0|\theta) + [\mathbf{x}(k|k, 0) - \mathbf{x}(k|k, 0; \theta)] \\ \times [\mathbf{x}(k|k, 0) - \mathbf{x}(k|k, 0; \theta)]^T\} p(\theta|k, 0) d\theta \end{cases} \quad (13.14)$$

这里  $\mathbf{x}(k|k, 0; \theta)$  和  $P(k, 0|\theta)$  是  $\theta$  条件下的状态向量估计及相应  $\theta$  条件下的误差协方差阵, 且被定义为

$$\mathbf{x}(k|k, 0; \theta) \equiv E[\mathbf{x}(k) | \lambda(k, 0); \theta]$$

及

$$P(k, 0|\theta) \equiv E\{[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k, 0; \theta)][\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k|k, 0; \theta)]^T | \lambda(k, 0); \theta\} \quad (13.15)$$

并由具有参数  $\theta$  及初始条件  $\mathbf{x}(0|0, \theta)$  和  $P(0|0, \theta)$  的模型及相应的卡尔曼滤波器而得到。

$\theta$  的验后概率密度函数  $p(\theta|k, 0)$  由下列递推公式给出：

$$p(\theta|k, 0) = \frac{L(k|k, 0; \theta)}{\int L(k|k, 0; \theta) p(\theta|k-1, 0) d\theta} p(\theta|k-1, 0) \quad (13.16)$$

式中

$$L(k|k, 0; \theta) \equiv |P_z(k|k-1; \theta)|^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \|\mathbf{z}(k|k-1; \theta)\|_{P_z^{-1}(k|k-1; \theta)}^2\right] \quad (13.17)$$

式中模型条件新息过程  $\mathbf{z}(k|k-1; \theta)$  定义为

$$\mathbf{z}(k|k-1, \theta) \equiv \mathbf{z}(k) - H(k, \theta) \mathbf{x}(k|k-1, 0; \theta)$$

它是以  $\theta$  为条件的白噪声过程, 并具有条件协方差阵

$$P_z(k|k-1; \theta) = H(k, \theta) P(k, 0; \theta) H^T(k, \theta) + R(k) \quad (13.18)$$

由此可见, 离散情况下的分割估计也有一个与连续分割估计相同的结构：

(1) 最优非线性滤波估计也是一个模型条件下的离散卡尔曼滤波估计的加权和, 而且模型条件估计是完全去耦的, 适于并行处理。

(2) 由于解耦的并行计算, 某部分计算不正确时不影响其它部分, 也就是说这种算法具有某种意义下的鲁棒性。

其它几点说明和连续情况类似,不再赘述。

超星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

## 13.2 线性系统的状态和参数分离算法

卡尔曼滤波器在实际使用时,由于系统的准确模型难以求解,在状态方程和观测方程中,常常有未知偏差存在,这些偏差即使很小,也有可能引起滤波发散。因此,人们常常把这些偏差看作常数,并用增广状态的方法解决这一问题,但增广状态方法计算量太大,有时甚至出现较大的估计误差。为此,Friedland 提出了一种状态估计和偏差分离的估计方法。把状态估计器分为三个部分:①零偏差状态估计器;②偏差估计器;③合成器。零偏差状态估计器是假定偏差为零时对状态的估计,其新息作为偏差估计变量,最后,根据合成器中的校正矩阵把偏差估计和状态估计合成得到最优估计。以下,我们对这种方法进行研究。

### 13.2.1 线性连续系统

系统的状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{b} + \xi(t) \\ \dot{\mathbf{b}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.19)$$

观测方程为

$$\mathbf{y}(t) = H(t)\mathbf{x}(t) + C(t)\mathbf{b} + \eta(t) \quad (13.20)$$

式中,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  为状态向量;  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^r$  为偏差向量;  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  为观测向量;  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  分别为过程噪声和观测噪声,其统计特性为

$$\begin{aligned} E\{\xi(t)\xi^T(\tau)\} &= Q(t)\delta(t-\tau) \\ E\{\eta(t)\eta^T(\tau)\} &= R(t)\delta(t-\tau) \\ E\{\xi(t)\} &= 0, \quad E\{\eta(t)\} = 0, \quad E\{\eta(t)\xi^T(\tau)\} = 0 \end{aligned}$$

将(13.19), (13.20)式改写为增广状态的形式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= F(t)\mathbf{z}(t) + G(t)\xi(t) \\ \mathbf{y}(t) &= L(t)\mathbf{z}(t) + \eta(t) \end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

式中

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = [H \quad C]$$

为了简化书写,我们将  $\mathbf{y}(t)$  记为  $\mathbf{y}$  等等。

根据(2.44), (2.47)式的连续系统卡尔曼滤波公式,可得

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}(t|t) &= F\mathbf{z}(t|t) + P(t|t)L^TR^{-1}[\mathbf{y} - L\mathbf{z}(t|t)] \\ \dot{P}(t|t) &= FP(t|t) + P(t|t)F^T + GQG^T - P(t|t)L^TR^{-1}LP(t|t) \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

将  $P(t|t)$  分块为

$$P(t|t) = \begin{bmatrix} P_{\mathbf{x}} & P_{\mathbf{x}\mathbf{b}} \\ P_{\mathbf{b}\mathbf{x}}^T & P_{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (13.23)$$

代入(13.22)式中,可得

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= AP_x + P_x A^T + BP_x^T + P_x B^T - (P_x H^T + P_x C^T)R^{-1}(HP_x + CP_x) \\ &\quad \times (HP_x + CP_x) + Q \end{aligned} \quad (13.24a)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= AP_x + BP_x - (P_x H^T + P_x C^T)R^{-1}(HP_x + CP_x) \\ &= [A - (P_x H^T + P_x C^T)R^{-1}H]P_x \\ &\quad + [B - (P_x H^T + P_x C^T)R^{-1}C]P_x \end{aligned} \quad (13.24b)$$

$$\dot{P}_b = -(P_x^T H^T + P_x C^T)R^{-1}(HP_x + CP_x) \quad (13.24c)$$

对于偏差估计器,若

$$P_x(0) = 0, \quad P_b(0) = 0$$

则有

$$P_x \equiv 0, \quad P_b \equiv 0$$

当  $t > 0$  时

$$\dot{P}_x = AP_x + P_x A^T - P_x H^T R^{-1} H P_x + Q \quad (13.25)$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式中  $\tilde{P}_x$  为(13.25)式之解。

当  $P_b(0) \neq 0$  时

$$P(0) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_x(0) & P_b(0) \\ P_x^T(0) & P_b(0) \end{bmatrix} \quad (13.26)$$

$$P = \tilde{P} + VMV^T \quad (13.27)$$

式中

$$\dot{V} = (F - \tilde{P} L^T R^{-1} L)V \quad (13.28)$$

$$\dot{M} = -MV^T L^T R^{-1} LVM \quad (13.29)$$

$$V = [V_x^T, V_b^T]^T \quad (13.30)$$

根据(13.24), (13.26)~(13.30)式,可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_x &= (A - \tilde{P}_x H^T R^{-1} H)V_x + (B - \tilde{P}_x H^T R^{-1} C)V_b \\ \dot{V}_b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.31)$$

及

$$\dot{M} = -M(V_x^T H^T + V_b^T C^T)R^{-1}(HV_x + CV_b)M \quad (13.32)$$

进而可得

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \tilde{P}_x + V_x M V_x^T \\ P_x &= V_x M V_b^T \\ P_b &= V_b M V_b^T \end{aligned} \right\}$$

于是

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t|t) &= A\hat{x}(t|t) + B\hat{b}(t|t) + (P_x H^T + P_x C^T)R^{-1}[y - H\hat{x}(t|t) - C\hat{b}(t|t)] \\ \dot{\hat{b}}(t|t) &= (P_x^T H^T + P_x C^T)R^{-1}[y - H\hat{x}(t|t) - C\hat{b}(t|t)] \end{aligned} \right\} \quad (13.33)$$



当初始条件中不修正  $\mathbf{b}$  时, 即  $P_{\mathbf{b}}(0|0)=0$  时,  $P_{\mathbf{b}}=V_{\mathbf{b}}M, P_{\mathbf{b}}=M$ , 从而得状态和偏差估计式:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t|t) &= A\mathbf{x}(t|t) + B\mathbf{b}(t|t) + [\tilde{P}_x H + V_x M(V_x^T H^T + C)]R^{-1} \\ &\quad \times [\mathbf{y} - H\mathbf{x}(t|t) - C\mathbf{b}(t|t)] \\ \dot{\mathbf{b}}(t|t) &= M(V_x^T H^T + C^T)R^{-1}[\mathbf{y} - H\mathbf{x}(t|t) - C\mathbf{b}(t|t)] \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

### 13.2.2 线性离散系统

系统的状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= A(k-1)\mathbf{x}(k-1) + B(k-1)\mathbf{b}(k-1) + \xi(k-1) \\ \mathbf{b}(k+1) &= \mathbf{b}(k) \end{aligned} \right\} \quad (13.35)$$

观测方程为

$$\mathbf{y}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + C(k)\mathbf{b}(k) + \eta(k) \quad (13.36)$$

式中,  $\xi(k), \eta(k)$  为零均值高斯白噪声序列; 方差分别为  $Q(k), R(k)$ 。

令

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= [\mathbf{x}^T(k), \mathbf{b}^T(k)]^T, \quad F(k) = \begin{bmatrix} A(k) & B(k) \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ G &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(k) = [H(k), C(k)], \quad \tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_x \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这样, 状态方程(13.35)、观测方程(13.36)可写成

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= F(k)\mathbf{z}(k) + G\xi(k) \\ \mathbf{y}(k) &= L(k)\mathbf{z}(k) + \eta(k) \end{aligned} \right\} \quad (13.37)$$

(13.37)式的卡尔曼滤波公式为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z}(k|k) &= F(k-1)\mathbf{z}(k-1|k-1) + K(k)[\mathbf{y}(k) \\ &\quad - L(k)F(k-1)\mathbf{z}(k-1|k-1)] \\ K(k) &= P(k|k-1)L^T(k)[L(k)P(k|k-1)L^T(k) + R(k)]^{-1} \\ P(k+1|k+1) &= F(k)[I - K(k)L(k)]P(k|k)F^T(k) + GQ(k)G^T \end{aligned} \right\} \quad (13.38)$$

类似连续系统, 有

$$P(k|k) = \tilde{P}(k|k) + U(k)M(k)U^T(k) \quad (13.39)$$

$$\begin{aligned} U(k+1) &= F(k)\{I - \tilde{P}(k|k)L^T(k)[L(k)\tilde{P}(k|k)L^T(k) \\ &\quad + R(k)]^{-1}L(k)\}U(k) \end{aligned} \quad (13.40)$$

$$\begin{aligned} M(k+1) &= M(k) - M(k)U^T(k)L^T(k)[L(k)\tilde{P}(k|k)L^T(k) + R(k)]^{-1} \\ &\quad \times L(k)U(k)M(k)U^T(k)L^T(k) \end{aligned} \quad (13.41)$$

式中  $\tilde{P}(k|k)$  为零偏差状态估计误差的协方差阵。

由(13.39)式, 可得

$$\begin{aligned} P(k+1|k+1) &= \tilde{P}(k+1|k+1) + F(k)[I - \tilde{K}(k)L(k)]U(k)M(k+1) \\ &\quad \times U^T(k)[I - \tilde{K}(k)L(k)]^T F^T(k) \end{aligned} \quad (13.42)$$

式中,  $\tilde{K}(k) = \tilde{P}(k|k)L^T(k)R^{-1}(k)$ 。

令

$$P(k|k) = \begin{bmatrix} P_x(k) & P_{xb}(k) \\ P_{xb}^T(k) & P_b(k) \end{bmatrix}, U(k) = \begin{bmatrix} U_x(k) \\ U_b(k) \end{bmatrix}, V(k) = \begin{bmatrix} V_x(k) \\ V_b(k) \end{bmatrix} \quad (13.43)$$

$$V(k) = [I - \tilde{K}(k)L(k)]U(k) \quad (13.44)$$

将(13.43), (13.44)式代入(13.38)~(13.41)式得

$$\left. \begin{aligned} V_x(k) &= [I - \tilde{K}_x(k)H(k)]U_x(k) - \tilde{K}_x(k)C(k)U_b(k) \\ V_b(k) &= U_b(k) \\ U_x(k+1) &= A(k)V_x(k) + B(k)V_b(k) \\ U_b(k+1) &= V_b(k) = U_b(k) \end{aligned} \right\} \quad (13.45)$$

因此可得

$$\left. \begin{aligned} P_x(k) &= \tilde{P}_x(k) + U_x(k)M(k)U_x^T(k) \\ P_{xb}(k) &= U_x(k)M(k)U_b^T(k) \\ P_b(k) &= U_b(k)M(k)U_b^T(k) \end{aligned} \right\} \quad (13.46)$$

通常, 可以取  $U_b(0) = I$ , 这样(13.39)~(13.46)式还可以进一步简化, 从而得状态和偏差的估计式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k|k) &= A(k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) + B(k-1)\mathbf{b}(k-1|k-1) + K_x(k) \\ &\quad \times \{\mathbf{y}(k) - H(k)[A(k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) + B(k-1)\mathbf{b}(k-1|k-1)] \\ &\quad - C(k)\mathbf{b}(k-1|k-1)\} \end{aligned} \quad (13.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(k|k) &= \mathbf{b}(k-1|k-1) + K_b(k)\{\mathbf{y}(k) - H(k)[A(k-1)\mathbf{x}(k-1|k-1) \\ &\quad + B(k-1)\mathbf{b}(k-1|k-1)] - C(k)\mathbf{b}(k-1|k-1)\} \end{aligned} \quad (13.48)$$

### 13.3 非线性系统的分离算法

设非线性离散系统的状态方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{b}(k), k] + \Gamma[\mathbf{x}(k), k]\eta(k) \\ \mathbf{b}(k+1) &= \mathbf{b}(k) \end{aligned} \right\} \quad (13.49)$$

式中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量;  $\mathbf{f}$  为  $n$  维函数向量;  $\mathbf{b}$  为  $r$  维偏差向量;  $\eta(k)$  为零均值高斯白噪声序列, 协方差阵为  $Q(k)$ 。

观测方程为

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{h}[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{b}(k+1), k+1] + \mathbf{v}(k+1) \quad (13.50)$$

式中,  $\mathbf{y}(k)$  为  $m$  维观测向量;  $\mathbf{v}(k)$  为零均值高斯白噪声序列; 方差阵为  $R(k)$ 。

将(13.49), (13.50)式按泰勒级数展开并保留余项, 有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{b}(k) + R_x(k) + \Gamma(k)\eta(k) \\ \mathbf{y}(k+1) &= H(k+1)\mathbf{x}(k+1) + D(k+1)\mathbf{b}(k+1) + R_y(k+1) + \mathbf{v}(k+1) \end{aligned} \right\} \quad (13.51)$$

式中



$$A(k) = \left. \frac{\partial f[\mathbf{x}(k), \mathbf{b}, k]}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}(k|k), \mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(k|k)}$$

$$B(k) = \left. \frac{\partial f[\mathbf{x}(k), \mathbf{b}, k]}{\partial \mathbf{b}} \right|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}(k|k), \mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(k|k)}$$

$$H(k+1) = \left. \frac{\partial h[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{b}, k+1]}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}(k|k), \mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(k+1|k)}$$

$$D(k+1) = \left. \frac{\partial h[\mathbf{x}(k+1), \mathbf{b}, k+1]}{\partial \mathbf{b}} \right|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}(k|k), \mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(k+1|k)}$$

$$R_w(k) = f[\mathbf{x}(k|k), \mathbf{b}(k|k), k] - A(k)\mathbf{x}(k|k) - B(k)\mathbf{b}(k|k)$$

$$R_y(k) = h[\mathbf{x}(k+1|k), \mathbf{b}(k|k), k+1] - H(k+1)\mathbf{x}(k+1|k) - D(k+1)\mathbf{b}(k|k)$$

类似于 13.2 节, 可得如下非线性系统状态估计和偏差辨识的分离算法:

时间更新

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k) &= f[\mathbf{x}(k|k), \mathbf{b}(k|k), k] \\ \tilde{P}_x(k+1|k) &= A(k)\tilde{P}_x(k|k)A^T(k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \end{aligned} \right\} \quad (13.52)$$

式中,  $\tilde{P}$  表示 0 偏差估计误差的协方差阵。

状态测量更新

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k+1|k+1) &= f[\mathbf{x}(k|k), \mathbf{b}(k|k), k] + \{\tilde{K}_x(k+1) + V_b(k+1)K_b(k+1)\} \\ &\quad \times \{y(k+1) - h[\mathbf{x}(k+1|k), \mathbf{b}(k|k), k+1]\} \\ \tilde{K}_x(k+1) &= \tilde{P}_x(k+1|k+1)H^T(k+1)R^{-1}(k+1) \\ \tilde{P}_x(k+1|k+1) &= [I - \tilde{K}_x(k+1)H(k+1)]\tilde{P}_x(k+1|k) \end{aligned} \right\} \quad (13.53)$$

偏差辨识的测量更新

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}(k+1|k+1) &= \mathbf{b}(k|k) + K_b(k+1)\{y(k+1) - h[\mathbf{x}(k+1|k), \mathbf{b}(k|k), k+1]\} \\ K_b(k+1) &= P_b(k+1|k+1)[H(k+1)V_b(k+1) + D(k+1)]^T R^{-1}(k+1) \\ P_b(k+1|k+1) &= P_b(k|k) + C^T(k+1)[H(k+1)\tilde{P}_x(k+1|k)H^T(k+1) \\ &\quad + R(k+1)]^{-1}C(k+1) \end{aligned} \right\} \quad (13.54)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C(k+1) &= H(k+1)U(k) + D(k+1) \\ V_b(k+1) &= U(k) - \tilde{K}_x(k+1)C(k+1) \\ U(k) &= A(k)V_b(k) + B(k) \end{aligned} \right\} \quad (13.55)$$

(13.53)~(13.55) 式就构成了完整的非线性离散系统的分离算法。

## 13.4 状态和参数同时估计的极大似然方法

### 13.4.1 连续系统的极大似然法

设连续系统的状态方程和观测方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\xi}, \mathbf{b}] \\ \mathbf{y}_c(t) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{b}] \\ \mathbf{z}(t_k) &= \mathbf{y}_c(t_k) + \boldsymbol{\eta}(t_k) \end{aligned} \right\}$$

其中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量;  $\mathbf{u}$  为  $p$  维控制向量;  $\mathbf{b}$  为  $r$  维未知参数(含状态初值)向量;  $\boldsymbol{\xi}$  为系统噪声;  $\mathbf{y}_c$  为  $m$  维计算观测值;  $\mathbf{z}$  为实际观测量;  $\boldsymbol{\eta}$  为测量噪声, 假定为零均值高斯白噪声过程, 且

$$E\{\boldsymbol{\eta}(t_k)\} = 0, \quad E\{\boldsymbol{\eta}(t_k)\boldsymbol{\eta}^T(t_l)\} = \delta_{kl}R$$

根据假设, 对数似然函数可写成

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\eta}^T(t_k) R^{-1} \boldsymbol{\eta}(t_k) - \frac{N}{2} \ln |R| - \text{const} \quad (13.57)$$

求其最大值, 可得参数的迭代估计表达式

$$\Delta \mathbf{b} = \left[ \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{b}} \right)^T R^{-1} \frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{b}} \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{b}} \right)^T R^{-1} [\mathbf{z}(t_k) - \mathbf{y}_c(t_k)] \quad (13.58)$$

和参数估计误差的协方差阵

$$E[(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}})^T] = \left[ \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{b}} \right)^T R^{-1} \frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{b}} \right]^{-1} \quad (13.59)$$

参数的变化改变了计算测量值和实际测量值的拟合程度, 参数的方差阵给出了各个参数之间的独立或相关程度。

对  $L$  求最大值也可得到测量噪声协方差阵  $R$  的估计:

$$\hat{R} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\mathbf{z}(t_k) - \mathbf{y}_c(t_k)][\mathbf{z}(t_k) - \mathbf{y}_c(t_k)]^T \quad (13.60)$$

灵敏度矩阵  $\partial \mathbf{y}_c^T / \partial \mathbf{b}$  的求法如下:

$$\frac{\partial \mathbf{y}_c^T}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \quad (13.61)$$

若  $\mathbf{x}$  关于  $\mathbf{b}$  和  $t$  的偏导数连续, 有

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}_i} \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \quad (13.62)$$

由此可得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{b}_i} \right) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{b}_i} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}_i} + \sum_{k=1}^r \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\xi}_k} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_k}{\partial \mathbf{b}_i} \quad (13.63)$$

若  $\sum_{k=1}^r \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\xi}_k} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_k}{\partial \mathbf{b}_i} = 0$ , 对(13.63)式进行积分并代入(13.61)式中, 即可得灵敏度矩阵  $\frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{b}}$ 。

由(13.63)式可知, 系统噪声直接影响了灵敏度矩阵计算的准确性, 而灵敏度矩阵的准确与否直接关系到参数辨识的结果, 因此必须限制系统噪声的大小, 才可得到满意的结果。

如果系统噪声为零, 则当  $\mathbf{x}(0|0)$  准确确定时, 由极大似然法所得状态和参数均是准确的。

### 13.4.2 离散系统的极大似然法

设离散系统的状态方程和观测方程为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}[\mathbf{x}_k, \mathbf{u}(t), \mathbf{b}_1] + \mathbf{G}[\mathbf{x}_k, \mathbf{u}(t), \mathbf{b}_1]\xi \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{g}[\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}(t), \mathbf{b}_1] \\ \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{y}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (13.64)$$

其中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量;  $\mathbf{u}(t)$  为  $p$  维控制向量;  $\mathbf{b}_1$  为未知参数向量;  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  为未知初值向量;  $\xi$  为系统噪声,  $\mathbf{v}$  为测量噪声序列, 假定均为零均值高斯白噪声序列, 协方差阵分别为  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 。

当  $\mathbf{Q} = 0$  时, 根据假设, 对数似然函数可写成

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{v}_k^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{v}_k - \frac{1}{2} N \ln |\mathbf{R}| - \text{const} \quad (13.65)$$

灵敏度矩阵求法如下:

$$\frac{\partial y_c}{\partial \mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}} \quad (13.66)$$

其余算法与连续系统极大似然法完全相同。

## 第十四章 飞行状态估计与监视

飞机的正常起飞和安全着陆是提高民航运输能力的关键。由于地面的各种干扰因素，使得飞行数据测量、数据通信等存在较大的误差，难以准确测量飞行状态。因此，必须研究状态飞行估计和数据融合问题。

根据飞行试验数据准确确定飞机运动状态，对分析飞行试验的结果和确定飞机性能具有极为重要的意义。通常，测量量含有较大的偏差，这些偏差必须在辨识气动导数、分析飞机操纵稳定性之前确定出来，否则就无法使飞行数据和运动参数具有一致性的结果。尤其是飞机大迎角机动时，测量数据的误差会更大，运动参数一致性的问题将更严重。因此，用最优估计理论解决运动参数一致性的问题就尤为突出。

利用最优估计理论，根据有噪声的或不完全的测量数据可以检验测试仪器的精度，给予仪器测量偏差的准确估计，并可用来估计不能直接测量和测量误差很大的重要动态变量（如迎角、侧滑角、三个速度分量等）。运用估计理论准确确定飞机运动，又是准确确定气动导数辨识的前提。人们可以根据运动方程，把飞机的三维运动分解成纵向运动和横侧运动，分别计算飞机纵向运动的气动参数和横侧运动的气动参数。经过准确地进行数据相容性检验，可大大提高气动导数辨识的精度。这样通过少量的飞行试验，就可以确定出飞机操纵稳定性，大大减少飞行次数、缩短试飞周期和飞机的研制周期。

### 14.1 飞机运动方程和估计模型

运动着的飞机是一个极其复杂的动力学系统，飞机本身又是一弹性体，消耗性载荷的使用和乘务员的移动使得飞机是一个变质量体，而质心位置也在随时变化。飞机内部还有动力系统、操纵系统等相对飞机的活动部件。这些因素都会使得运动方程中的惯性项变得很复杂。而外力项（包括重力、空气动力和发动机推力及其力矩）则是气动外形、飞机姿态和运动参数的复杂函数。如果同时考虑这些因素，就会使运动方程极为复杂，以致无法进行解析处理。因此，在推导运动方程时必须针对所解决的主要问题，作出必要的、经实践证明是合理的简化假定，从而得到所需的相似结果。

首先是对地球进行假设，把固连于地球的地轴系视作惯性坐标轴系，即忽略地球的旋转运动和地球质心的曲线运动；并且忽略地球的曲率，视地面为平面而非球面，这样就能略去飞机运动对地球产生的离心加速度，以及地球旋转和飞机线速度合成的哥氏加速度。此外，由于飞机的飞行高度一般远小于地球半径，这里还忽略了飞行高度变化时所引起的重力加速度的变化。数字分析表明，对目前的一般飞机，关于地球的假设是合理的。但对马赫数大于 3 和飞行高度超过 30 公里的飞行器，这些简化假定会带来较大的误差。

其次是关于飞机方面的假定。先假设飞机上的旋转部件（如螺旋桨或喷气发动机转子）在飞机运动时所产生的陀螺力矩与飞机的惯性力矩相比较小，因而可以忽略不计。同时，还忽略飞机的弹性变形，机体内活动部件（如操纵系统）的运动，从进气道进入机体内

直到由喷口喷出的气流效应(即所谓的“喷流效应”),以及燃料的流动和晃动等对飞机运动方程的影响。综上所述,就是把飞机视作刚体。实践证明,对大多数飞机,刚体的假设是合理的。在推导方程时,还假定了飞机重量是不变的,即  $dm/dt=0$ 。

选择原点  $O$  和飞机质心重合而固连于飞机机体坐标系的动坐标系(广义的体轴系)  $OXYZ$ , 设  $u, v, w$  分别为质心沿动坐标系轴  $OX, OY, OZ$  的速度分量;  $p, q, r$  分别为飞机对上述三根轴系的角速度分量(按英美坐标系)。于是整个飞机的运动方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= -qw + rv - g\sin\vartheta + gn_x \\ \dot{v} &= -ru + pw + g\cos\vartheta\sin\varphi + gn_y \\ \dot{w} &= -pu + qv + g\cos\vartheta\cos\varphi + gn_z \\ \dot{\psi} &= (q\sin\varphi + r\cos\varphi)/\cos\vartheta \\ \dot{\vartheta} &= q\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \dot{\varphi} &= p + (q\sin\varphi + r\cos\varphi)\tan\vartheta \\ \dot{h} &= u\sin\vartheta - v\sin\varphi\cos\vartheta - w\cos\varphi\cos\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

其中,  $n_x, n_y, n_z$  为过载分量, 且

$$n_x = A_x/g, \quad n_y = A_y/g, \quad n_z = A_z/g$$

$g$  为重力加速度;  $A_x, A_y, A_z$  为沿各轴的加速度分量;  $\vartheta$  为俯仰角;  $\psi$  为偏航角;  $\varphi$  为滚转角。设

$$\mathbf{u} = [n_x, n_y, n_z, p, q, r]^T$$

输入向量  $\mathbf{u}$  的准确值无法知道, 只能得到其测量值, 考虑到测量值中的系统偏差和尺度因子偏差, 可得

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda_r \end{bmatrix} \mathbf{u}_m + \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b}_u \quad (14.2)$$

式中,  $\mathbf{u}_m$  为  $\mathbf{u}$  的测量值;  $\boldsymbol{\omega}$  为系统噪声( $\mathbf{u}$  的测量噪声);  $\mathbf{b}_u$  为系统误差, 且

$$\mathbf{b}_u = [b_x, b_y, b_z, b_p, b_q, b_r]^T$$

飞机全面运动的观测方程为

$$\mathbf{y}_m = H_y \mathbf{y} + \mathbf{b}_y + \boldsymbol{\eta} \quad (14.3)$$

式中

$$\mathbf{y}_m = [h_m, V_{0m}, \beta_m, \alpha_m, \varphi_m, \vartheta_m]^T$$

$$H_y = \text{diag}[(1 + \lambda_h), (1 + \lambda_{V_0}), (1 + \lambda_\beta), (1 + \lambda_\alpha), 1, 1]$$

$$\mathbf{b}_y = [b_h, b_{V_0}, b_\beta, b_\alpha, b_\varphi, b_\vartheta]^T$$

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_h, \eta_{V_0}, \eta_\beta, \eta_\alpha, \eta_\varphi, \eta_\vartheta]^T$$

$$\mathbf{y} = \left[ h, V_0, \tan^{-1} \left( \frac{v + rX_\beta - pZ_\beta}{u} \right), \tan^{-1} \left( \frac{w - qX_\alpha + pY_\alpha}{u} \right), \varphi, \vartheta \right]^T$$

将输入向量和输出向量测量的尺度因子偏差、系统偏差作为增广状态来考虑,则有

$$\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{b}^T]^T \quad (14.4)$$

其中

$$\mathbf{x} = [u, v, w, \phi, \vartheta, \varphi, h]^T$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1^T, \mathbf{b}_2^T]^T$$

$\mathbf{x}$  为 7 维状态向量,  $\mathbf{b}$  为 22 维偏差向量, 且

$$\mathbf{b}_2 = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_p, \lambda_q, \lambda_r, b_x^T]^T$$

$$\mathbf{b}_1 = [\lambda_h, \lambda_{v_0}, \lambda_a, \lambda_\beta, b_y^T]^T$$

将(14.2)式代入(14.1)式得

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{b}_2, \mathbf{u}_m, \omega) \quad (14.5)$$

输出方程可写成

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{b}_1, \mathbf{u}_m) + \eta \quad (14.6)$$

因为(14.5)式为非线性状态方程, (14.6)式为非线性观测方程, 难以直接用估计理论进行状态估计和偏差辨识。因此, 先将(14.5), (14.6)式进行线性化、离散化处理, 然后再应用估计理论进行状态和偏差估计。

(14.5)式绕标称状态线性化后可得

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_{\text{nom}} \approx \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{nom}}) + \mathbf{B}\mathbf{b}_2 + \mathbf{D}\omega \quad (14.7)$$

其中

$$\mathbf{x}_{\text{nom}} = \int_{t_k}^t \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{b}}_2, \mathbf{u}_m) dt$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & r_c & -q_c & 0 & -g\cos\vartheta & 0 & 0 \\ -r_c & 0 & p_c & 0 & -g\sin\vartheta\sin\varphi & g\cos\vartheta\cos\varphi & 0 \\ q_c & -p_c & 0 & 0 & -g\sin\vartheta\sin\varphi & -g\cos\vartheta\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{45} & f_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{65} & f_{66} & 0 \\ \sin\vartheta & -\sin\varphi\cos\vartheta & -\cos\varphi\cos\vartheta & 0 & f_{75} & f_{76} & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{45} = [q_c\sin\varphi + r_c\cos\varphi] \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta}$$

$$f_{46} = [q_c\cos\varphi + r_c\sin\varphi] \frac{1}{\cos\vartheta}$$

$$f_{56} = -q_c\sin\varphi + r_c\cos\varphi$$

$$f_{65} = [q_c\sin\varphi + r_c\cos\varphi] \frac{1}{\cos^2\vartheta}$$

$$f_{66} = [q_c\sin\varphi - r_c\cos\varphi] \tan\vartheta$$

$$f_{75} = u\cos\vartheta + v\sin\vartheta\sin\varphi + w\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$f_{76} = -v\cos\vartheta\cos\varphi + w\cos\vartheta\sin\varphi$$

$$p_c = (1 + \lambda_p)p_m + b_p$$

$$q_c = (1 + \lambda_q)q_m + b_q$$

$$r_c = (1 + \lambda_r)r_m + b_r$$

$$B = [B_1, B_2]$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} gn_{xm} & 0 & 0 & 0 & -q_m w & r_m v \\ 0 & gn_{ym} & 0 & p_m w & 0 & -r_m u \\ 0 & 0 & gn_{zm} & -p_m v & q_m u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_m \frac{\sin \varphi}{\cos \vartheta} & r_m \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_m \cos \varphi & -r_m \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & p_m & q_m \sin \varphi \tan \vartheta & r_m \cos \varphi \tan \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 & 0 & -w & v \\ 0 & g & 0 & w & 0 & -u \\ 0 & 0 & g & -v & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sin \varphi}{\cos \vartheta} & \frac{\cos \varphi}{\cos \vartheta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sin \varphi \tan \vartheta & \cos \varphi \tan \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = B_2$$

下标  $m$  表示测量值。

(14.6)式绕标称状态线性化可得

$$y_m - y_c = H_x(x - x_{nom}) + H_b b_1 + \eta \quad (14.8)$$

其中

$$y_c = g(x_{nom}, \hat{b}_1, u_m)$$

$$H_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \lambda_k \\ (1 + \lambda_{v_0}) \frac{u}{V_0} & (1 + \lambda_{v_0}) \frac{v}{V_0} & (1 + \lambda_{v_0}) \frac{w}{V_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_{41} & 0 & h_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_b = [H_{b^1}, I]$$

$$H_{b^1} = \text{diag}[h, V_0, \beta, \alpha, \varphi, \vartheta]$$

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{w - qX_s + pY_s}{u} \right)$$

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{v + rX_\beta - pZ_\beta}{u} \right)$$

$$h_{31} = \frac{-c_1/u^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$h_{32} = \frac{1}{u(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)}$$

$$c_1 = v + rX_\beta - pZ_\beta$$

$$h_{41} = \frac{-c_2/u^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$h_{43} = \frac{1}{u(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}$$

$$c_2 = w - qX_\alpha + pY_\alpha$$

对(14.7)式进行离散化可得

$$\Delta \mathbf{x}(k+1) = \Phi(k+1, k)\Delta \mathbf{x}(k) + G(k)\mathbf{b}_2 + \Gamma(k)\xi(k) \quad (14.9)$$

式中

$$\Phi(k+1, k) = \exp(FT)$$

$$G(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(k+1, \tau)B(k)d\tau$$

$$\approx [\Phi(k+1, k) - I]F^{-1}TB(k) = TB(k) + \frac{1}{2}FB(k)T^2 + \dots$$

$$\Gamma(k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(k+1, \tau)Dd\tau$$

$\xi(k)$ 为系统噪声序列。

假定

$$E\{\xi(k)\} = 0, \quad E\{\xi(k)\xi^T(j)\} = \delta_{kj}Q(k)$$

$$E\{\eta(k)\} = 0, \quad E\{\eta(k)\eta^T(j)\} = \delta_{kj}R(k), \quad E\{\xi(k)\eta^T(j)\} = 0$$

直接应用推广卡尔曼滤波估计状态  $\mathbf{x}$  和偏差  $\mathbf{b}$  时,只需将  $\mathbf{b}$  作为增广状态即可。

## 14.2 两段序列滤波方法

如果将偏差向量  $\mathbf{b}$  作为增广状态与状态  $\mathbf{x}$  同时进行估计,所考虑的状态向量就变成了 29 维。这样处理,不仅计算量相当大,而且状态和偏差估计的数值误差会相互影响,使得估计算法对初值和噪声统计特性过于敏感。为了解决这一问题,我们采用了下述的两段序列滤波方法。

将(14.9)式代入(14.8)式中可得

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y}(k) &= H_x(k)\Delta \mathbf{x}(k) + H_b(k)\mathbf{b}_1 + \eta(k) \\ &= H_x(k)\Phi(k, k-1)\Delta \mathbf{x}(k-1) + H_x(k)G(k-1)\mathbf{b}_2 \\ &\quad + H_x(k)\Gamma(k-1)\xi(k-1) - H_b(k)\mathbf{b}_1 + \eta(k) \\ &= H_x(k)\Phi(k, k-1)\Delta \mathbf{x}(k-1) + H_B(k)\mathbf{b} + H_\zeta(k)\zeta(k) \end{aligned} \quad (14.10)$$

其中

$$H_B(k) = [H_b(k), H_x(k)G(k-1)]$$



$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= [\mathbf{b}_1^T, \mathbf{b}_2^T]^T \\ H_c(k) &= [H_x(k)\Gamma(k-1), I] \\ \zeta(k) &= [\xi^T(k-1), \eta^T(k)]^T \\ \Delta \mathbf{y}(k) &= \mathbf{y}_m(k) - \mathbf{y}_c(k)\end{aligned}$$

若将偏差向量作为增广状态, 则由(14.9), (14.10)式构成的系统是状态完全可观测的, 可以得到偏差和状态估计的较准确的结果。然而, 在(14.9), (14.10)式中, 由于系统噪声和输出方程中的观测噪声是相关的, 因此计算量增大, 特别是输出方程中的噪声维数增大了一倍, 更使计算测量更新的计算量增加一倍, 处理数据时需花费大量的计算时间。为了解决这一问题, 我们作如下处理。在时间更新和状态测量更新中, 采用以下观测方程:

$$\left. \begin{aligned}\Delta \mathbf{x}(k+1) &= \Phi(k+1, k)\Delta \mathbf{x}(k) + G(k)\mathbf{b}_2 + \Gamma(k)\xi(k) \\ \Delta \mathbf{y}(k+1) &= H_x(k+1)\Delta \mathbf{x}(k+1) + H_b(k+1)\mathbf{b}_2 + \eta(k)\end{aligned} \right\} \quad (14.11)$$

在进行偏差测量更新时采用(14.10)式作为观测方程, 就构成了两段序列测量更新算法:

时间更新

$$\left. \begin{aligned}\Delta \mathbf{x}(k+1|k) &= 0 \\ P(k+1|k) &= \Omega(k+1, k)P(k|k)\Omega^T(k+1, k) + E(k)Q(k)E^T(k) \\ \mathbf{b}(k+1|k) &= \hat{\mathbf{b}}(k)\end{aligned} \right\} \quad (14.12)$$

其中,  $P$  为增广状态向量  $\mathbf{z} = [\mathbf{x}^T, \mathbf{b}^T]^T$  的估计协方差;

$$\Omega(k+1, k) = \begin{bmatrix} \Phi(k+1, k) & M(k+1) \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad E(k) = \begin{bmatrix} \Gamma(k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M(k+1) = [0, G(k)]$$

状态测量更新(第一段)

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}(k+1|k+1) &= \Delta \mathbf{x}(k+1|k) + K_x(k+1)[\mathbf{y}_m(k+1) - \hat{\mathbf{y}}_c(k+1)] \\ K_x(k+1) &= [P_{11}, P_{12}](k+1|k)[H_x, \bar{H}_b]^T(k+1) \\ &\quad \times [H_a P(k+1|k)H_a^T + R(k+1)]^{-1} \\ P_{11}(k+1|k+1) &= P_{11}(k+1|k) - [P_{11}, P_{12}](k+1|k)H_a^T \\ &\quad \times [H_a P(k+1|k)H_a^T + R(k+1)]^{-1} \\ &\quad \times H_a \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix}(k+1|k)\end{aligned} \quad (14.13)$$

其中

$$\begin{aligned}H_a &= [H_x, \bar{H}_b](k+1), \quad \bar{H}_b = [H_b, 0] \\ \hat{\mathbf{y}}_c(k+1) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(k+1|k), \mathbf{u}_m, \mathbf{b}(k)]\end{aligned}$$

偏差测量更新(第二段)

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(k+1) &= \mathbf{b}(k) + K_b(k+1)[\mathbf{y}_m(k+1) - H_x(k+1)\Phi(k+1, k) \\ &\quad \times \Delta \mathbf{x}(k|k) - H_b(k+1)\mathbf{b}(k)] \\ K_b(k+1) &= [P_{21}, P_{22}](k+1|k)H_a^T[H_a P(k+1|k)H_a^T + R(k+1)]^{-1}\end{aligned}$$

$$P_b(k+1|k+1) = P_b(k|k) - K_b(k+1)[H_a P(k+1|k)H_a^T + R(k+1)]^{-1} \\ \times K_b^T(k+1) + \Delta P_b$$

$$P_{22}(k+1|k+1) = P_{22}(k+1|k) - K_b(k+1)H_a \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{22} \end{bmatrix} (k+1|k) \quad (14.14)$$

式中,  $P_b = P_{22}$ ;  $\Delta P_b$  为模型线性化引起的误差, 根据实际飞行数据处理经验, 可用最小二乘法估计  $\Delta P_b$  的取值。

### 14.3 U-D 分解的两段序列滤波方法

星浏览器提醒您:  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权!

如第五、第六章所述, 由于计算机的舍入误差等原因常常造成数值不稳定, 使  $P$  阵失去对称性和正定性。为了改善数值稳定性, 提出了一系列的平方根算法, U-D 分解是其中最稳定、最有效的方法。

设

$$P(k|k) = U(k)D(k)U^T(k)$$

$$P(k+1|k) = U(k+1|k)D(k+1|k)U^T(k+1|k)$$

式中,  $U$  为单位上三角阵;  $D$  为对角阵。

时间更新(14.12)式中的方差阵的传播为

$$U(k+1|k)D(k+1|k)U^T(k+1|k) \\ = \Omega(k+1, k)U(k)D(k)U^T(k)\Omega^T(k+1, k) + E(k)Q(k)E^T(k) \quad (14.15)$$

式中  $\Omega(k+1, k)$  为上三角阵, (14.15) 式可以进一步简化。

设

$$U(k) = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} (k), \quad D(k) = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} (k)$$

$$U(k+1|k) = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} (k+1|k), \quad D(k+1|k) = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} (k+1|k)$$

因此有

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} (k+1|k) \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} (k+1|k) \begin{bmatrix} U_{11}^T & 0 \\ U_{12}^T & U_{22}^T \end{bmatrix} (k+1|k) \\ = \begin{bmatrix} \Phi(k+1, k) & M(k+1) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} (k) \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} (k) \\ \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}^T (k) \begin{bmatrix} \Phi^T(k+1, k) & 0 \\ M^T(k+1) & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma(k) \\ 0 \end{bmatrix} Q(k) [\Gamma^T(k) \quad 0] \\ = \tilde{A} \tilde{D} \tilde{A}^T + \tilde{Q} \quad (14.16)$$

其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \Phi(k+1, k)U_{11}(k) & \Phi(k+1, k)U_{12}(k) + M(k+1)U_{22}(k) \\ 0 & U_{22}(k) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = \text{diag}[D_1(k), D_2(k)]$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由(14.16)式可得

$$U_{12}(k+1|k) = \Phi(k+1, k)U_{12}(k) + M(k+1)U_{22}(k)$$

$$U_{22}(k+1|k) = U_{22}(k)$$

$$D_2(k+1|k) = D_2(k)$$

$$(U_{11}D_1U_{11}^T)(k+1|k) = \Phi(k+1, k)(U_{11}D_1U_{11}^T)(k)\Phi^T(k+1, k) + \Gamma(k)Q(k)\Gamma^T(k) \quad (14.17)$$

根据 MWG-S 方法就可求出  $U_{11}(k+1|k), D_1(k+1|k)$ 。

通过以上处理,将 29 维问题简化成了 7 维的正交化问题,计算量显著减少。

为了简化测量更新的计算量,我们采用了序列算法。设

$$R(k+1) = \text{diag}[R_1, R_2, \dots, R_6](k+1)$$

$$K(k+1) = [K_1, K_2, \dots, K_6](k+1)$$

$$y_m = [y_{1m}, y_{2m}, \dots, y_{6m}]^T$$

$$H_a^T = [H_1, H_2, \dots, H_6]$$

综合(14.13), (14.14)式,可得两段序列测量更新算法:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^{(i)}(k+1) &= \mathbf{x}^{(i-1)}(k+1) + K_{\mathbf{x}}^{(i)}(\mathbf{y}_m^{(i)} - \mathbf{y}_c^{(i)}) \\ K^{(i)}(k+1) &= U^{(i)}(k+1)D^{(i)}(k+1)[U^{(i)}(k+1)]^T \\ &\quad \times H_i^T \{R_i + H_i[U^{(i-1)}D^{(i-1)}(U^{(i-1)})^T](k+1)H_i^T\}^{-1} \\ K^{(i)}(k+1) &= \begin{bmatrix} K_{\mathbf{x}}^{(i)} \\ K_{\mathbf{b}}^{(i)} \end{bmatrix} \\ \{U^{(i)}D^{(i)}[U^{(i)}]^T\}(k+1) &= [I - K^{(i)}(k+1)H_i] \\ &\quad \times \{U^{(i-1)}D^{(i-1)}D^{(i-1)}[U^{(i-1)}]^T\}(k+1) \\ \mathbf{b}^{(i)}(k+1) &= \mathbf{b}^{(i-1)}(k+1) + K_{\mathbf{b}}^{(i)}[\mathbf{y}_m^{(i)} - H_{\mathbf{x}}^{(i)}(k+1) \\ &\quad \times \Phi(k+1, k)\Delta\mathbf{x}(k|k) - H_{\mathbf{b}}^{(i)}(k+1)\mathbf{b}^{(i-1)}(k+1)] \end{aligned} \right\} \quad (14.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, 6$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1|k), & \mathbf{b}^{(0)}(k+1) &= \mathbf{b}(k) \\ D^{(0)}(k+1) &= D(k+1|k), & U^{(0)}(k+1) &= U(k+1|k) \\ \mathbf{x}(k+1|k) &= \mathbf{x}^{(6)}(k+1|k), & U(k+1) &= U^{(6)}(k+1) \\ D(k+1) &= D^{(6)}(k+1) \end{aligned}$$

因为  $H_i$  矩阵中有大量的零元素,所以在测量更新时作了必要的简化。

## 14.4 U-D 分解的序列平滑算法

为了提高数据处理的精度,除了采用滤波算法外,还采用了固定区间平滑技术估计飞行状态和偏差。

根据增广状态方程和输出方程

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{z}(k+1) &= \Omega(k+1, k) \Delta \mathbf{z}(k) + E(k) \xi(k) \\ \Delta \mathbf{y}(k+1) &= H_a(k+1) \Delta \mathbf{z}(k+1) + \eta(k+1) \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

可对状态和偏差进行平滑。因(14.19)式中

$$\Delta \mathbf{z}(k+1) = [\Delta \mathbf{x}^T(k+1), \mathbf{b}^T]^T$$

由 R-T-S 固定区间平滑器方程, 可设

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}^{(D)}(j) &= \Phi(j+1, j) \Delta \mathbf{x}(j|j) \\ P^{(D)}(j) &= \Phi(j+1, j) P(j|j) \Phi^T(j+1, j) \end{aligned} \quad (14.20)$$

于是有

$$\Delta \mathbf{x}_{i+1}^{(\omega_j)} = \Delta \mathbf{x}_i^{(\omega_j)} + \Gamma_{i,j} \xi_{i,j}; \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

其中

$$\Delta \mathbf{x}_i^{(\omega_j)} = \Delta \mathbf{x}^{(D)}(j)$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{i+1}^{(\omega_j)} &= \Delta \mathbf{x}_i^{(\omega_j)} \\ P_{i+1}^{(\omega_j)} &= P_i^{(\omega_j)} + q_i \Gamma_{i,j} \Gamma_{i,j}^T \end{aligned} \quad (14.21)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_1^{(\omega_j)} &= \Phi(j+1, j) \mathbf{x}(j|j) \\ \hat{P}_1^{(\omega_j)} &= P^{(D)}(j) \end{aligned}$$

增益阵为

$$\begin{aligned} A_{i+1}^{(\omega_j)} &= P_i^{(\omega_j)} (P_i^{(\omega_j)} + q_i \Gamma_{i,j} \Gamma_{i,j}^T)^{-1} \\ &= I - \lambda_i \Gamma_{i,j} \mu_i^T \end{aligned} \quad (14.22)$$

式中

$$\begin{aligned} \mu_i &= [P_i^{(\omega_j)}]^{-1} \Gamma_{i,j} \\ \lambda_i &= \frac{q_i}{1 + q_i \mu_i^T \Gamma_{i,j}} \end{aligned}$$

因此, 状态的平滑方程为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}^{(\omega_j)}(i|N) &= \Delta \mathbf{x}_i^{(\omega_j)} + A_{i+1}^{(\omega_j)} [\Delta \mathbf{x}^{(\omega_j)}(j+1|N) - \Delta \mathbf{x}_{i+1}^{(\omega_j)}] \\ &= \Delta \mathbf{x}_i^{(\omega_j)} + (I - \lambda_i \Gamma_{i,j} \mu_i^T) [\Delta \mathbf{x}^{(\omega_j)}(i+1|N) - \Delta \mathbf{x}_{i+1}^{(\omega_j)}] \\ &= \Delta \mathbf{x}^{(\omega_j)}(i+1|N) + \Gamma_{i,j} \delta_i; \quad i = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (14.23)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta_i &= \lambda_i \mu_i^T [\Delta \mathbf{x}(j+1|j) - \Delta \mathbf{x}^{(\omega_j)}(i+1|N)] \\ \Delta \mathbf{x}^{(\omega_j)}(7|N) &= \Delta \mathbf{x}(j+1|N) \end{aligned}$$

状态估计误差的协方差阵传播为

$$\begin{aligned} P^{(\omega_j)}(i|N) &= P_i^{(\omega_j)} + A_{i+1}^{(\omega_j)} [P^{(\omega_j)}(i+1|N) - P_{i+1}^{(\omega_j)}] [A_{i+1}^{(\omega_j)}]^T \\ &= (I - \lambda_i \Gamma_{i,j} \mu_i^T) P^{(\omega_j)}(i+1|N) (I - \lambda_i \Gamma_{i,j} \mu_i^T)^T + P_i^{(\omega_j)} \\ &\quad - P_i^{(\omega_j)} [P_{i+1}^{(\omega_j)}]^{-1} P_{i+1}^{(\omega_j)} [P_{i+1}^{(\omega_j)}]^{-1} P_i^{(\omega_j)} \\ &= (I - \lambda_i \Gamma_{i,j} \mu_i^T) P^{(\omega_j)}(i+1|N) (I - \lambda_i \Gamma_{i,j} \mu_i^T)^T + P_i^{(\omega_j)} \\ &\quad - (I - \lambda_i \Gamma_{i,j} \mu_i^T) P_i^{(\omega_j)} \end{aligned}$$

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

$$= (I - \lambda_i \Gamma_{i,j} \mu_i^T) P^{(\omega_j)}(i+1|N) (I - \lambda_i \Gamma_{i,j} \mu_i^T)^T + \lambda_i \Gamma_{i,j} \Gamma_{i,j}^T \quad (14.24)$$

式中

$$\mu_i^T P^{(\omega_j)} = \Gamma_{i,j}^T$$

$$P^{(\omega_j)}(j+1|N) = P(j+1|N)$$

因为在平滑开始时使用了(14.25)式,因此

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(j|N) &= \Phi^{-1}(j+1, j) \mathbf{x}^{(\omega_j)}(1|N) - G(j) \hat{\mathbf{b}}_2 \\ P(j|N) &= \Phi^{-1}(j+1, j) P^{(\omega_j)}(1|N) \Phi^{-T}(j+1, j) \end{aligned} \right\} \quad (14.25)$$

(14.20)~(14.25)式就构成了序列平滑算法,协方差传播阵  $P(j|j)$ ,  $P(j+1|j)$ ,  $P(j+1|N)$ ,  $P(j|N)$  等均采用了 U-D 分解技术。

为了提高偏差的估计精度,利用(14.10)式对  $\mathbf{b}$  作进一步辨识。由(14.10)式可得

$$\Delta \mathbf{y}(k) = H_x(k) \Phi(k, k-1) \Delta \mathbf{x}(k-1|N) + H_B(k) \hat{\mathbf{b}} + H_\zeta(k) \zeta(k) \quad (14.26)$$

在(14.26)式中,状态已用其平滑值代替。

至此,估计飞行状态和仪器误差的模型及方法已经全部给出。

## 14.5 结果分析

### 14.5.1 飞机纵向状态估计

为了对本章的滤波算法进行测试,我们给出如下仿真计算。首先,给飞行仿真数据加上尺度因子误差、系统偏差和噪声,然后进行测试。加入噪声和偏差的强度如表 14.1 所示。

表 14.1 数据误差表

H=5km, M=0.4	误差强度 1			误差强度 2		
参 数	$\lambda$	$b$	$\sigma$	$\lambda$	$b$	$\sigma$
$a$	1.8	0	0	1.5	0	0
$\vartheta$	0.5	0	0	0.8	0	0.01
$q$	1	-0.5	0	1	0.5	0
$n_z$	1	0.2	0	1	-0.1	0.01

表中  $\lambda$  代表尺度因子误差,  $b$  代表常值偏差(零偏),  $\sigma$  表示所加噪声的方差。

图 14.1 为加入偏差后的数据(误差强度 1)与原飞行仿真数据的比较。图 14.1 中实线为原仿真数据,虚线代表加入偏差后的数据。

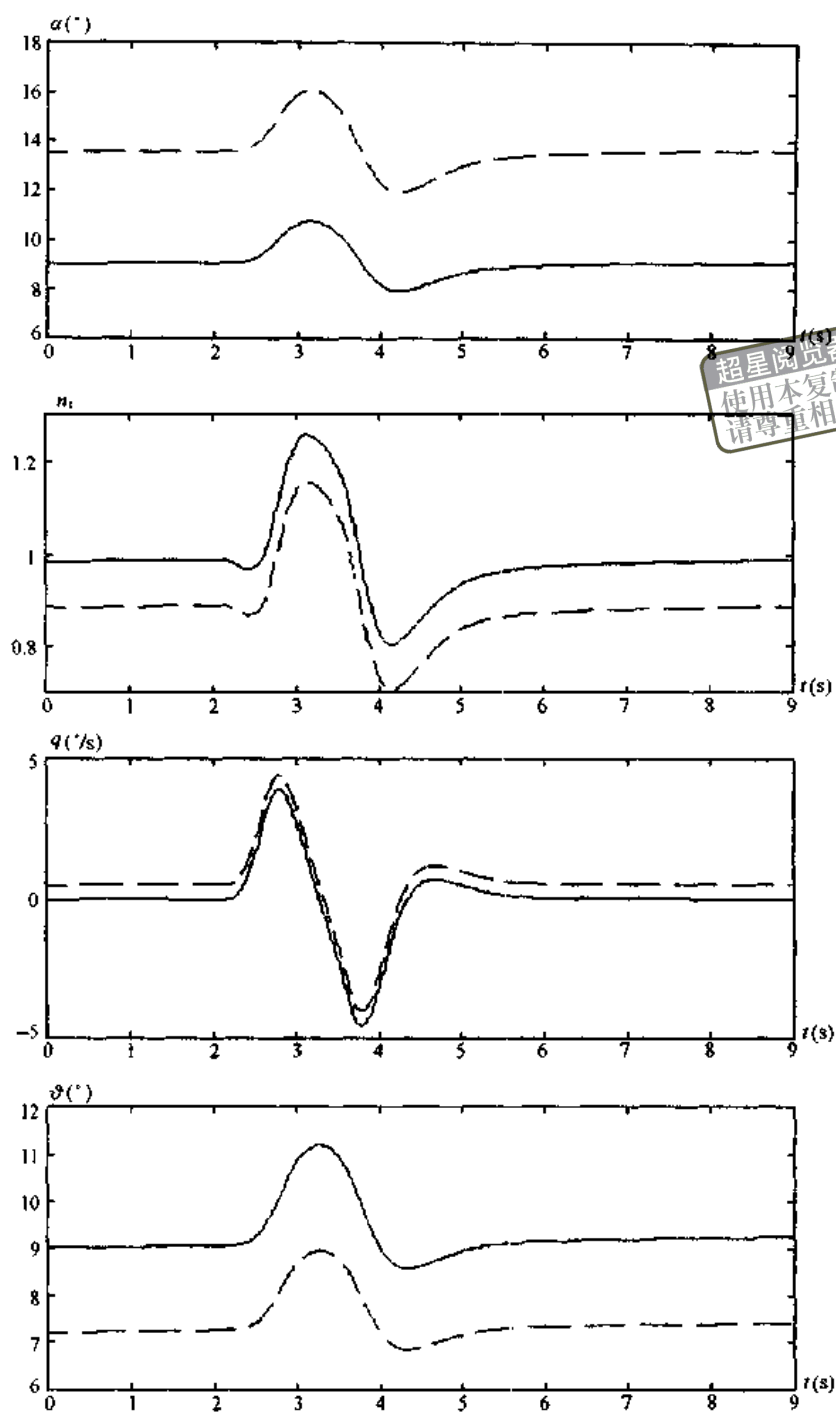


图 14.1 加入偏差后的数据(误差强度 1)与原飞行仿真数据的比较

图 14.2 为根据加入偏差后的数据(误差强度 1)所得飞行状态估计结果与原飞行仿真数据的比较。图 14.2 中实线为原飞行仿真数据,虚线为状态估计结果。由此可见状态估计的结果与原飞行仿真数据拟合得很好。

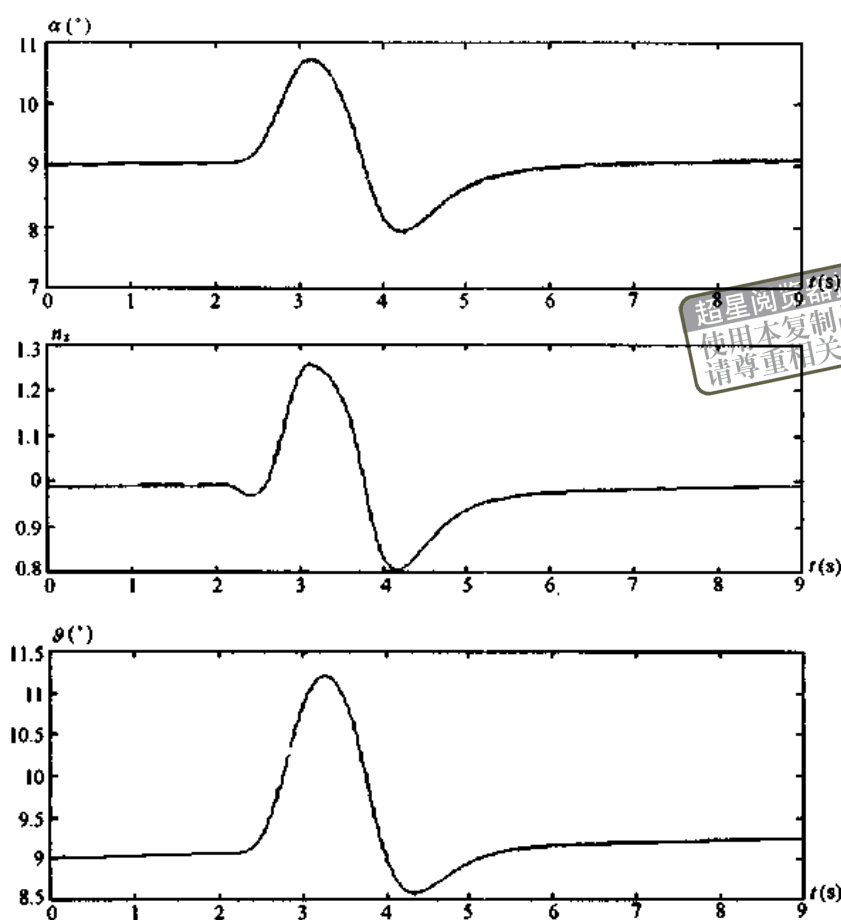


图 14.2 飞行状态估计结果(误差强度 1)与原飞行仿真数据的比较

图 14.3 给出了加入误差强度 2 之后的数据与原飞行仿真数据的比较。图 14.3 中实线为原数据,虚线分别表示加入偏差后的结果。

图 14.4 给出了加入误差强度 2 之后的数据经过飞行状态估计所得结果与原飞行仿真数据的比较。图 14.4 中实线为原数据,虚线表示状态估计的结果。

### 14.5.2 飞机横向状态估计

加入噪声和偏差的强度如表 14.2 所示。

表 14.2 数据误差表

H=5km, M=0.4 参 数	误差强度 1			误差强度 2		
	$\lambda$	$b$	$\sigma$	$\lambda$	$b$	$\sigma$
$\beta$	1.5	0	0	1.8	0	0
$\varphi$	0.8	0	0	0.5	0	0
$p$	1	0.5	0	1	-0.5	0
$r$	1	-0.5	0	1	0.2	0

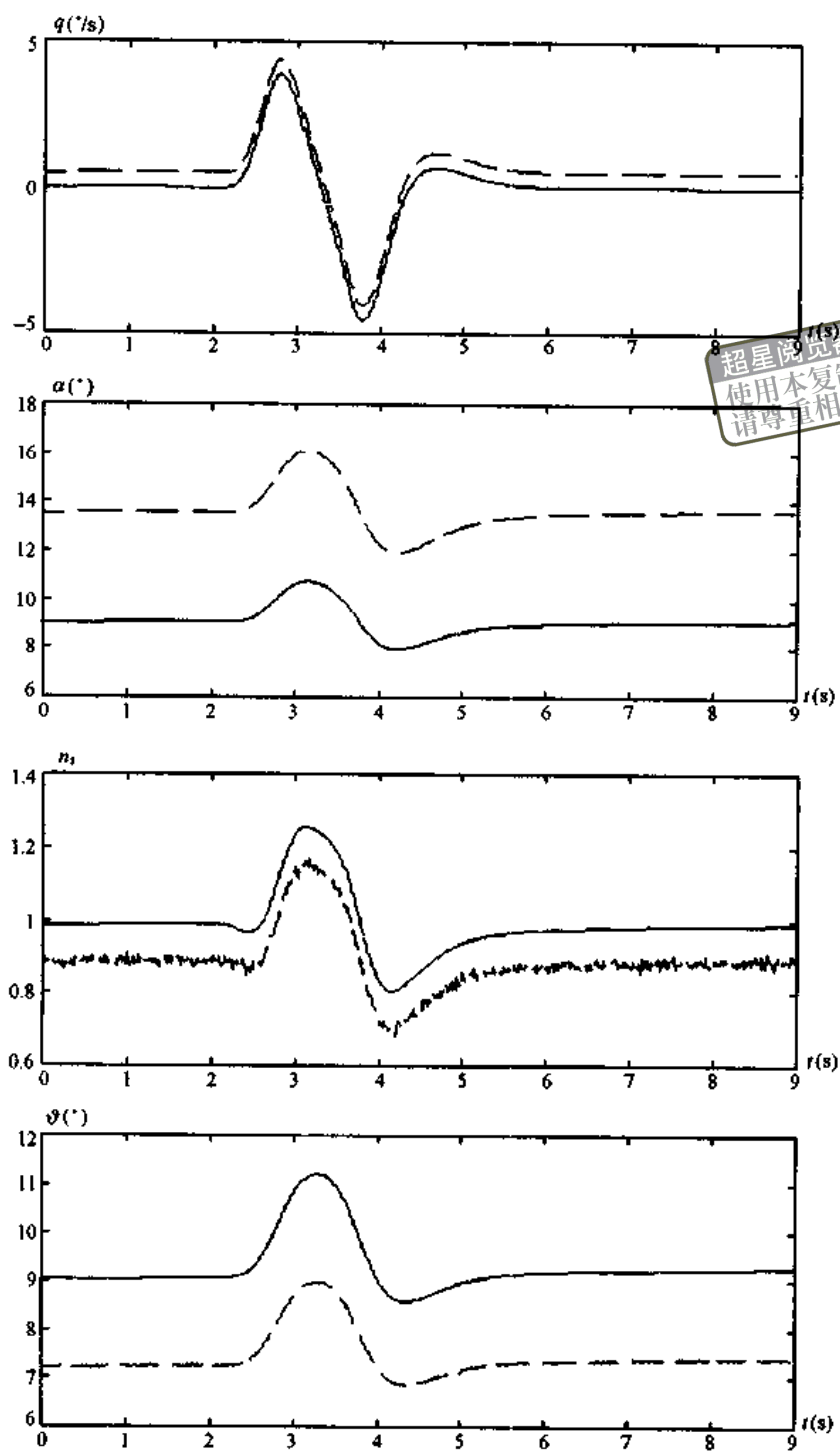


图 14.3 加入误差强度 2 之后的数据与原飞行仿真数据的比较



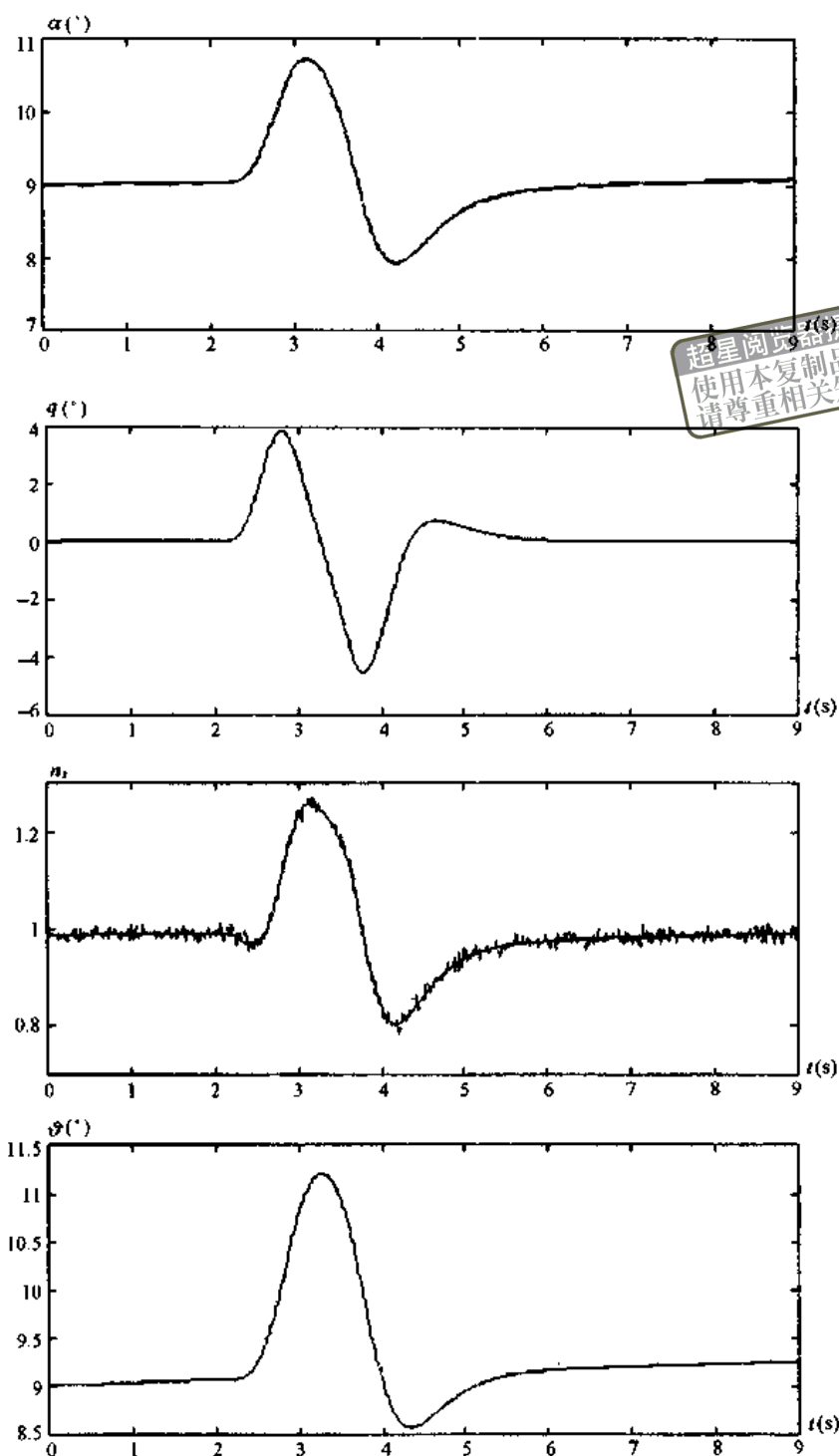


图 14.4 飞行状态估计所得结果(误差强度 2)与原飞行仿真数据的比较

图 14.5 为加入偏差后的数据(误差强度 1)与原飞行仿真数据的比较。图 14.5 中实线为原仿真数据,虚线代表加入偏差后的数据。

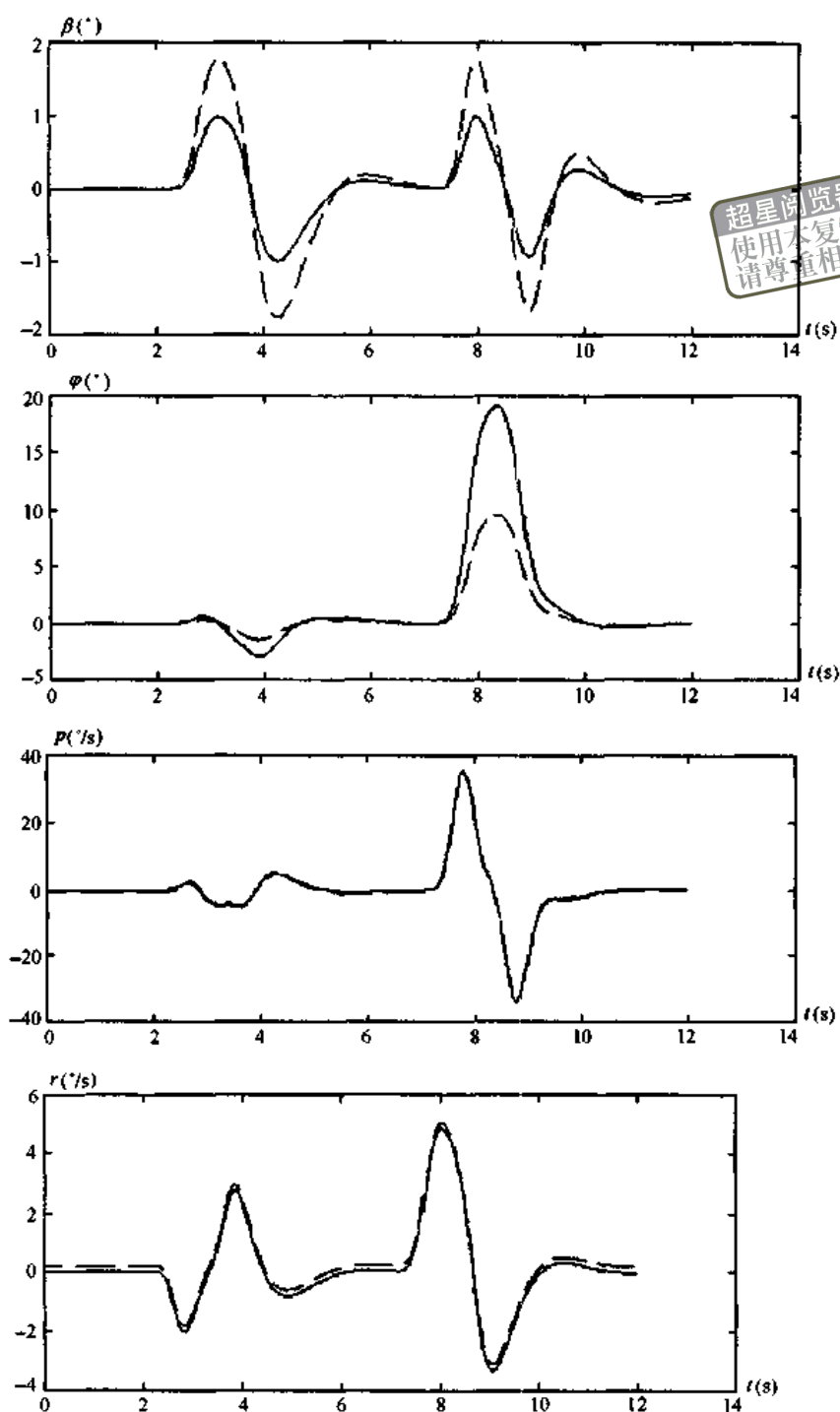


图 14.5 加入偏差后的数据(误差强度 1)与原飞行仿真数据的比较

图 14.6 为根据加入偏差后的数据(误差强度 1)所得飞行状态估计结果与原飞行仿真数据的比较。图 14.6 中实线为原飞行仿真数据,虚线为状态估计结果。由此可见状态估计方法可以减小偏差。

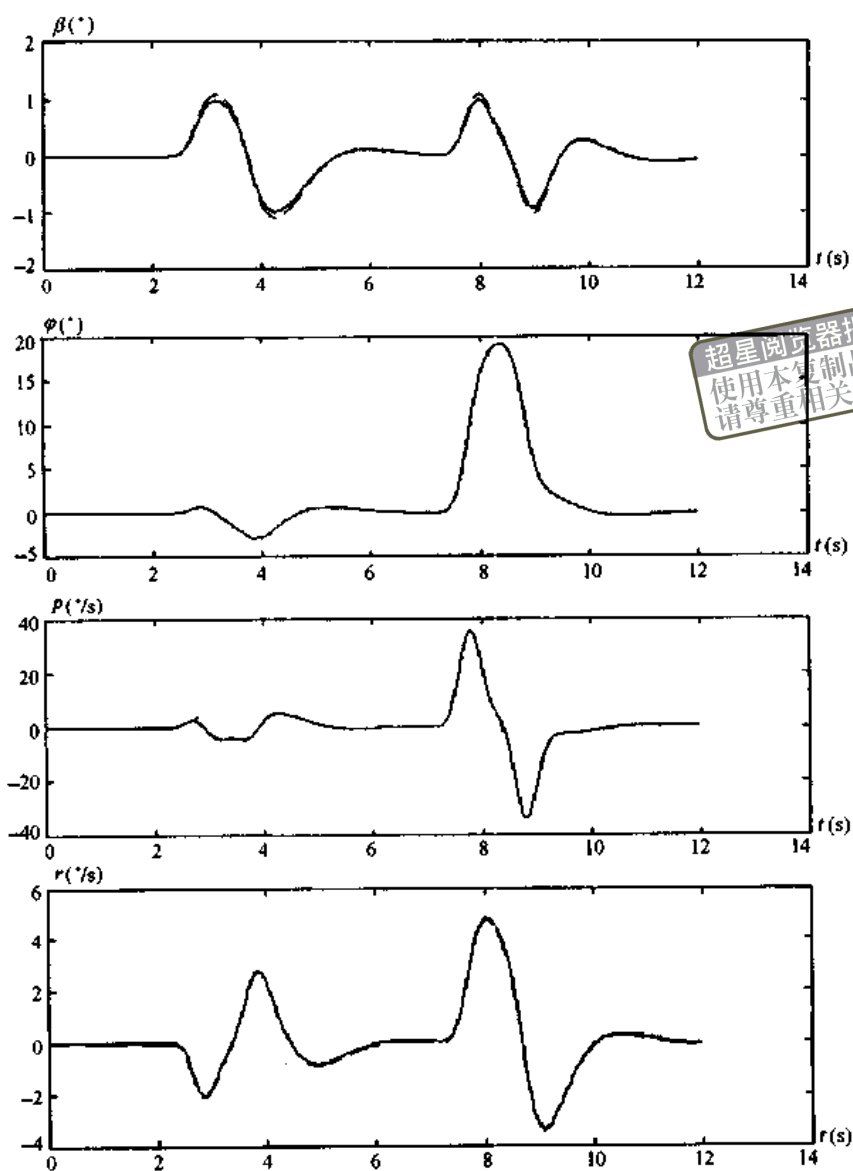


图 14.6 飞行状态估计结果(误差强度 1)与原飞行仿真数据的比较

加入误差强度 2 之后的数据经过飞行状态估计所得结果与原飞行仿真数据也非常接近。

## 附录 A 矩阵运算的一些公式

### A.1 矩阵代数的一些常用性质公式

- (1)  $A(BC) = (AB)C$
- (2)  $A(B+C) = AB+AC$
- (3)  $(AB)^T = B^T A^T$
- (4)  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$  ( $\lambda$ ——标量,  $A$ —— $n$  阶方阵)
- (5)  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- (6)  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- (7)  $\det(A^{-1}) = 1/\det A$
- (8)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- (9)  $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$  ( $\lambda$ ——标量)

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

### A.2 方阵的分块求逆公式

#### 1. 分块三角阵求逆

如果  $A$  是一个  $m+n$  阶的分块三角阵：

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} \overset{\leftarrow m \text{列} \rightarrow \leftarrow n \text{列} \rightarrow}{A_{11} & A_{12}} \\ \overset{\leftarrow m \text{列} \rightarrow \leftarrow n \text{列} \rightarrow}{0 & A_{22}} \end{bmatrix} \quad (A-1)$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (A-2)$$

其中  $A_{11}$  及  $A_{22}$  分别为  $m$  阶及  $n$  阶的可逆阵, 则  $A$  也是可逆阵, 且

$$(1) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (A-3)$$

$$(2) \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (A-4)$$

**证明** (1) 由于

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = I_{m+n}$$

其中  $I_m, I_n, I_{m+n}$  分别为  $m$  阶、 $n$  阶、 $m+n$  阶单位阵, 故 (A-3) 式为 (A-1) 式的逆阵。

(2) 同理可证明 (A-4) 式为 (A-2) 式的逆阵。

此外, 如果  $A$  为非三角的  $m+n$  阶分块阵:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

其中  $A_{11}$  为  $m$  阶可逆阵,  $A_{22}$  为  $n$  阶可逆阵, 则  $A$  可以分解为两个分块三角阵之积:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

由(A-6)式可得  $A$  的行列式

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) = \det A_{22} \cdot \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$$

将方阵(A-5)改为

$$A = \begin{bmatrix} I_m & B \\ -C & I_n \end{bmatrix}$$

则可得

$$\det(I_m + BC) = \det(I_n + CB) \quad (\text{A-7})$$

## 2. 矩阵反演分式

如果(A-5)式中的  $A_{11}$  是  $m$  阶可逆阵,  $A_{22}$  是  $n$  阶可逆阵, 且  $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$  与  $(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$  也是可逆阵, 则有

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \quad (\text{A-8})$$

(A-8)式是滤波计算中的一个常用求逆公式, 利用这个公式, 可以把一些复杂的矩阵算式化成简单的形式。

**证明** 根据(A-6)式, 有

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_n \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ 0 & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

或

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_m & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

比较(A-9), (A-10)两式左上角子块, 均可得到(A-8)式。

这里我们顺便得到了两个计算非三角分块方阵(A-5)逆方阵的有用公式(A-9),(A-10),通过这两个公式可以把一个求高阶方阵的逆方阵问题,转化为计算低阶子块阵方阵的问题。

## A.3 向量与矩阵的微分运算

### 1. 向量与矩阵值函数对标量的微分运算

设向量值函数

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

则  $\mathbf{z}(t)$  对  $t$  的导数

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{dz_1(t)}{dt} \\ \frac{dz_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dz_n(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad (\text{A-11})$$

设矩阵值函数

$$F(t) = (f_{ij}(t))_{m \times n}$$

则  $F(t)$  对  $t$  的导数

$$\frac{dF(t)}{dt} \triangleq \left( \frac{df_{ij}(t)}{dt} \right)_{m \times n} \quad (\text{A-12})$$

$F(t)$  在  $[t_1, t_2]$  上的积分为

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt \triangleq \left( \int_{t_1}^{t_2} f_{ij}(t) dt \right)_{m \times n} \quad (\text{A-13})$$

由(A-11)及(A-12)式容易推出

$$\frac{d}{dt}[A(t) \cdot B(t)] = A(t) \frac{dB(t)}{dt} + \frac{dA(t)}{dt} B(t) \quad (\text{A-14})$$

### 2. 矩阵值函数之逆对标量的微分运算

设  $A(t)$  为  $n$  阶可逆阵, 则  $A$  的逆对标量  $t$  的导数为

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1} \frac{dA}{dt} A^{-1} \quad (\text{A-15})$$

**证明** 根据(A-14)式, 有

$$0 = \frac{dAA^{-1}}{dt} = \frac{dA}{dt} A^{-1} + A \frac{dA^{-1}}{dt}$$

移项, 并以  $A^{-1}$  左乘两边, 则得

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1} \frac{dA}{dt} A^{-1}$$

### 3. 标量值函数对向量与矩阵的微分运算

设  $n$  维向量  $\mathbf{x}$  的标量值函数为

$$y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

于是  $y=f(\mathbf{x})$  对  $\mathbf{x}$  的导数为

$$\frac{dy}{d\mathbf{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{dy}{dx_1} \\ \frac{dy}{dx_2} \\ \vdots \\ \frac{dy}{dx_n} \end{bmatrix}$$

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

(A-16)

通常称为  $y=f(\mathbf{x})$  的梯度。

设  $A$  为  $m \times n$  阶矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

其标量值函数为

$$y = f(A) = f(x_{11}, \dots, x_{1n}; x_{21}, \dots, x_{2n}; \dots; x_{m1}, \dots, x_{mn})$$

于是  $y=f(A)$  对  $A$  的导数为

$$\frac{dy}{dA} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{df}{dx_{11}} & \frac{df}{dx_{12}} & \cdots & \frac{df}{dx_{1n}} \\ \frac{df}{dx_{21}} & \frac{df}{dx_{22}} & \cdots & \frac{df}{dx_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{df}{dx_{m1}} & \frac{df}{dx_{m2}} & \cdots & \frac{df}{dx_{mn}} \end{bmatrix} \quad (\text{A-17})$$

### 4. 二次型及双线性对向量的微分运算

在随机控制问题中应用滤波方法时，常常要考虑到二次型及双线性对向量的微分运算。

(1) 二次型对向量的微分运算

设有二次型  $Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ ，其中  $A$  为  $n$  阶对称方阵， $\mathbf{x}$  为  $n$  维向量，则  $Q$  对  $\mathbf{x}$  的偏导数为

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x} \quad (\text{A-18})$$

证明 由于

$$Q = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

对  $x_k$  求偏导,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ a_{kk}x_k^2 + x_k \left( \sum_{i=1, i \neq k}^n a_{ki}x_i + \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{jk}x_j \right) \right] \\ &= 2a_{kk}x_k + \sum_{i=1, i \neq k}^n a_{ki}x_i + \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{jk}x_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i + \sum_{j=1}^n a_{jk}x_j \\ &= (A\mathbf{x})_k + (A^T\mathbf{x})_k\end{aligned}$$

上式说明,  $Q$  对  $x_k$  的导数等于矩阵  $A\mathbf{x}$  及  $A^T\mathbf{x}$  的第  $k$  行之和。再根据 (A-14) 式,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial x_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial Q}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\mathbf{x})_1 + (A^T\mathbf{x})_1 \\ A(\mathbf{x})_2 + (A^T\mathbf{x})_2 \\ \vdots \\ A(\mathbf{x})_n + (A^T\mathbf{x})_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A\mathbf{x})_1 \\ (A\mathbf{x})_2 \\ \vdots \\ (A\mathbf{x})_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^T\mathbf{x})_1 \\ (A^T\mathbf{x})_2 \\ \vdots \\ (A^T\mathbf{x})_n \end{bmatrix} \\ &= A\mathbf{x} + A^T\mathbf{x}\end{aligned}$$

又由于  $Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  中的  $A$  阵为对称阵(即  $A^T = A$ ),故有

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x}$$

## (2) 双线性型对向量的微分运算

通过类似的推算,可以证明,对于双线性型  $Q = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ ,其中  $A$  为  $n$  阶方阵,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  都是  $n$  维向量,有

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{y}} = (\mathbf{x}^T A)^T = A^T \mathbf{x} \quad (\text{A-19})$$

## 5. 向量与矩阵值函数对向量的微分运算

设向量值函数

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ z_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ z_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}$$

当  $\mathbf{x}$  为列向量时,通常规定矩阵

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_m}{\partial x_1} & \frac{\partial z_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A-20})$$



为  $z(x)$  对  $x$  的偏导数, 并简记为  $\frac{\partial z}{\partial x}$ 。

设矩阵值函数  $F(x) = [a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)]_{m \times n}$ , 其中  $x$  为  $n$  维向量, 于是  $F(x)$  对  $x$  的偏导数为

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

## 附录 B 矩阵求逆引理

**矩阵求逆引理** 如果对任一  $n \times n$  阶非奇异矩阵  $A$  与任意两个  $n \times m$  阶矩阵  $B$  和  $C$ , 矩阵  $(A + BC^T)$  与  $(I + C^T A^{-1} B)$  是非奇异的, 则矩阵恒等式

$$(A + BC^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (I + C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1} \quad (B-1)$$

成立。

**证明** 定义下列  $n \times n$  阶矩阵:

$$D = A + BC^T \quad (B-2)$$

根据假定,  $D$  是非奇异的。因此, 可用  $D^{-1}$  左乘 (B-2) 式, 得

$$D^{-1} D = I = D^{-1} A + D^{-1} BC^T$$

再用  $A^{-1}$  右乘上式得

$$A^{-1} = D^{-1} + D^{-1} BC^T A^{-1} \quad (B-3)$$

或

$$D^{-1} BC^T A^{-1} = A^{-1} - D^{-1} \quad (B-4)$$

然后, 用  $B$  右乘 (B-3) 式两边, 得

$$A^{-1} B = D^{-1} B + D^{-1} BC^T A^{-1} B = D^{-1} B (I + C^T A^{-1} B)$$

因为矩阵  $(I + C^T A^{-1} B)$  是非奇异的, 用  $(I + C^T A^{-1} B)^{-1}$  右乘上式, 得

$$D^{-1} B = A^{-1} B (I + C^T A^{-1} B)^{-1} \quad (B-5)$$

最后用  $C^T A^{-1}$  右乘上式, 得

$$D^{-1} BC^T A^{-1} = A^{-1} B (I + C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1}$$

把 (B-4) 式代入上式, 得

$$A^{-1} - D^{-1} = A^{-1} B (I + C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1}$$

或

$$D^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (I + C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1} \quad (B-6)$$

因为  $D = A + BC^T$ , 因此 (B-6) 式成为 (B-1) 式:

$$(A + BC^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (I + C^T A^{-1} B)^{-1} C^T A^{-1}$$

于是(B-1)式得证。

如果令  $A=P^{-1}, B=H^T R^{-1}, C^T=H$ , 代入上式后, 可得

$$P = PH^T R^{-1} (I + HPH^T R^{-1})^{-1} HP = (P^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1}$$

或

$$P - PH^T (HPH^T + R)^{-1} HP = (P^{-1} + H^T R^{-1} H)^{-1} \quad (B-7)$$

## 附录 C 矩阵许瓦茨不等式

设  $A, B$  为  $m \times n$  阶矩阵,  $m > n$ ,  $B$  的秩为  $n$ , 则下列许瓦茨不等式成立:

$$A^T A \geq (A^T B)(B^T B)^{-1}(B^T A) \quad (C-1)$$

**证明** 设有两个  $n$  维向量  $\lambda$  与  $\gamma$ :

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

考虑下面的向量乘积:

$$(B\lambda + A\gamma)^T (B\lambda + A\gamma) \geq 0 \quad (C-2)$$

只有  $B\lambda + A\gamma = 0$  时, 上式的等式才成立。

将上式展开, 可得

$$\lambda^T B^T B \lambda + \gamma^T A^T B \lambda + \lambda^T B^T A \gamma + \gamma^T A^T A \gamma \geq 0$$

因为  $B$  是满秩的, 则  $(B^T B)^{-1}$  存在, 可将上式写成

$$\begin{aligned} & [\lambda + (B^T B)^{-1} B^T A \gamma]^T B^T B [\lambda + (B^T B)^{-1} B^T A \gamma] \\ & + \gamma^T [A^T A - (A^T B)^T (B^T B)^{-1} (B^T A)] \gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (C-3)$$

(C-3)式对任意  $\lambda$  与  $\gamma$  都应成立, 我们选  $\lambda$  为

$$\lambda = - (B^T B)^{-1} B^T A \gamma$$

则(C-3)式变成

$$\gamma^T [A^T A - (A^T B)^T (B^T B)^{-1} (B^T A)] \gamma \geq 0 \quad (C-4)$$

因为  $\gamma$  是任意的, 只有当  $[A^T A - (A^T B)^T (B^T B)^{-1} (B^T A)]$  是非负定时, 这个二次型才是非负定的, 这就证明了下述不等式成立:

$$A^T A \geq (A^T B)(B^T B)^{-1}(B^T A)$$

## 附录 D 正交定理

在推导维纳滤波和卡尔曼滤波方程时, 都要用到正交定理, 因此这里对这一定理作较详细的讨论。

在讨论线性最小方差估计时,我们曾用观测值  $z$  的线性函数来表示  $\hat{x}$  的估值,即

$$\hat{x} = az + b \quad (D-1)$$

式中  $a$  和  $b$  为待定的常数。根据估计误差方差

$$J = E[(x - \hat{x})^2] = E\{[x - (az + b)]^2\} = \min \quad (D-2)$$

来确定  $a$  和  $b$ 。求  $J$  对  $a$  的偏导数,令偏导数等于零,可得

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -2E\{[x - (az + b)]z\} = 0 \quad (D-3)$$

上式中的

$$x - (az + b) = \tilde{x}$$

为估计误差。根据(D-3)式可得

$$E[\tilde{x}z] = 0 \quad (D-4)$$

从上式可以看出,估计误差  $\tilde{x}$  与观测值  $z$  的乘积的数学期望为零。如果两个随机变量乘积的数学期望为零,则称这两个随机变量正交。所以估计误差  $\tilde{x}$  与观测值  $z$  正交,这就是正交定理。

(D-4)式是使  $J$  为最小的必要条件,这一条件是否充分呢? 还需要进一步证明。对于任意常数  $A$  和  $B$ ,可得

$$\begin{aligned} E\{[x - Az - B]^2\} &= E\{[x - az - b + (a - A)z + (b - B)]^2\} \\ &= E\{[x - az - b]^2\} + E\{[(a - A)z + (b - B)]^2\} \\ &\quad + 2E\{(x - az - b)[(a - A)z + (b - B)]\} \\ &= E\{[x - az - b]^2\} + E\{[(a - A)z + (b - B)]^2\} \\ &\quad + 2(a - A)E\{(x - az - b)z\} + 2(b - B)E\{(x - az - b)\} \end{aligned}$$

上式右边第三项与第四项都为零,第二项是非负的,因此

$$E\{[x - Az - B]^2\} \geq E\{(x - az - b)^2\}$$

所以如果  $a, b$  满足正交条件  $E\{[x - az - b]z\} = 0$ , 则估计误差的方差  $E\{[x - az - b]^2\}$  为最小。因此条件(D-4)是充分的。由于线性最小方差估计是无偏估计,即

$$E[\tilde{x}] = 0$$

可以证明  $\tilde{x}$  与  $\hat{x}$  正交,即

$$E[\tilde{x}\hat{x}] = E\{\tilde{x}(az + b)\} = aE[\tilde{x}z] + bE[\tilde{x}] = 0 \quad (D-5)$$

最小的  $J$  为

$$\begin{aligned} J &= E[(x - \hat{x})^2] = E[x^2] - 2E[x\hat{x}] + E[\hat{x}^2] \\ &= E[x^2] - 2E[(\hat{x} + \tilde{x})\hat{x}] + E[\hat{x}^2] \\ &= E[x^2] - 2E[\hat{x}^2] - 2E[\hat{x}\tilde{x}] + E[\hat{x}^2] \\ &= E[x^2] - E[\hat{x}^2] = E[x^2] - E[(az + b)^2] \end{aligned} \quad (D-6)$$

## 参 考 文 献

超星浏览器提醒您：  
使用本复制品  
请尊重相关知识产权！

- [1] 王培德、史忠科、张友民、张洪才,非线性滤波与辨识的应用研究,控制理论与应用,Vol. 10, No. 2, 1993.
- [2] 史忠科, Kalman 滤波新结构及其在目标跟踪中的应用,自动化学报, Vol. 20, No. 5, 1994.
- [3] 史忠科, U-D 分解的固定点平滑算法及其在飞行试验中的应用,航空学报, Vol. 12, No. 9, 1991.
- [4] 史忠科, U-D 分解的固定滞后平滑新算法及其在飞行状态实时估计中的应用,控制与决策, Vol. 5, Spp1. 1, 1990.
- [5] 史忠科, U-D 分解的前向固定区间平滑新算法,自动化学报, Vol. 20, No. 1, 1994.
- [6] 史忠科, 多级卡尔曼滤波及其在飞行试验中的应用,控制与决策, Vol. 5, No. 2, 1990.
- [7] 史忠科, 飞行数据相容性检验的极大似然法,航空学报, Vol. 11, No. 8, 1990.
- [8] 史忠科, 非线性规划 U-D 分解方法及其在神经网络训练中的应用,自动化学报, Vol. 21, No. 6, 1995.
- [9] 史忠科, 固定区间平滑新算法及其在飞行试验中的应用,自动化学报, Vol. 17, No. 3, 1991.
- [10] 史忠科, 离散系统参数估计的极大似然法及其在飞行数据处理中的应用,西北工业大学学报, Vol. 12, No. 2, 1994.
- [11] 史忠科, 模型辨识的新方法及应用,控制理论与应用, Vol. 12, No. 4, 1995.
- [12] 史忠科, 模型在线辨识方法及其应用,控制理论与应用, Vol. 12, No. 6, 1995.
- [13] 史忠科, 梯度解耦的极大似然法及其在飞行试验中的应用,西北工业大学学报, Vol. 13, No. 4, 1995.
- [14] 史忠科, 一类有效的固定点平滑方法及其应用,自动化学报, Vol. 21, No. 1, 1995.
- [15] 史忠科, 状态和参数联合估计方法及其在飞行试验中的应用,自动化学报, Vol. 19, No. 2, 1993.
- [16] 史忠科、王培德, U-D 分解的固定区间平滑新算法及其在飞行状态估计中的应用,控制理论与应用, Vol. 8, No. 1, 1991.
- [17] 史忠科, 王培德, 非线性分离算法及其在飞行试验中的应用,航空学报, Vol. 10, No. 10, 1989.
- [18] 史忠科, 神经网络控制理论, 西北工业大学出版社, 1996.
- [19] 史忠科、郑永安、周桓、王晋霞、胡至微, 控制系统的分析与设计, 西北工业大学出版社, 1995.
- [20] 张勇、史忠科, 区间系统的离散鲁棒 Kalman 滤波, 自动化学报, Vol. 26, No. 3, 2000.
- [21] 陆恺、田蔚风, 最优估计理论及其在导航中的应用, 上海交通大学出版社, 1990.
- [22] 杨建军、樊恩齐、史忠科, 改进的扩展 kalman 滤波在航空发动机估计中的应用, 航空动力学报, Vol. 11, No. 5, 1996.
- [23] 袁天鑫, 最优估计原理, 国防工业出版社, 1980.
- [24] Batterson, J. G., Partitioning of flight data for aerodynamic modeling of aircraft at high angles of attack, J. Aircraft, Vol. 26, No. 4, 1989.
- [25] Bierman, G. J., A new computationally efficient fixed-interval discrete-time smoothers, Automatica, Vol. 19, No. 3, 1983.
- [26] Bierman, D. J., Factorized Methods for Discrete Sequential Estimation, Academic Press, 1977.
- [27] Caglayan, A. K. and Lancraft, R. E., A separated bias identification and state estimation algorithm for nonlinear system, Automatica, Vol. 22, No. 1, 1983.
- [28] Carlson, M. A. and Berarducci, M. p., Federated Kalman filter simulation results, Navigation Journal of the Institute of Navigation, Vol. 41, No. 3, 1994.
- [29] Eulrich, B. J., Andrisani, D. and Lainiotis, D. G., Partitioning identification algorithms, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AC-25, No. 3, 1980.
- [30] Fleming, W. H. and Rishel, R. W., Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, 1975.
- [31] Friedland, B., Notes on separate-bias estimation, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AC-23, No. 4, 1978.
- [32] Friedland, B., Treatment of bias in recursive filtering, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AC-14, No. 4, 1978.
- [33] Friedland, B., Separated-bias estimation and some applications, Control and Dynamic System, Vol. 20, 1983.
- [34] Jazwinsky, A. H., Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970.

- [35] Jonkers, H. L. , Application of the Kalman filter to flight-path reconstruction from flight test data including estimation of instrumental bias error correction, Ph. d. Thesis VTH-162, 1976.
- [36] Kozin, F. , A survey of stability of stochastic system, Automatica, Vol. 5, No. 1, 1969.
- [37] Ljung, Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter for linear systems, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AC-24, No. 1, 1979.
- [38] Milanse, M. and Vicino, A. , Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty; an overview, Automatica, Vol. 27, No. 6, 1991.
- [39] Michael, C. F. and Jian-Qiang, Hu, Extension and generalizations of smoothed perturbation analysis in a generalized semi-Markov process framework, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AC-37, No. 10, 1992.
- [40] Stoica, P. , Comments on the range error test in the structural identification of linear multivariable systems, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AC-29, No. 4, 1984.
- [41] Pertti, M. M. and Hannu, T. T. , Computational methods for parametric LQ problems—a survey, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AC-32, No. 8, 1987.
- [42] Peter C. D. , Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering problems, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. AC-44, No. 8, 1995.
- [43] Peter, S. M. , Stochastic Models, Estimation, and Control, Vol. 3, Academic Press, 1982.
- [44] Raymond R. , A nonlinear discrete time stochastic adaptive control problem, Theory and Applications of Nonlinear Control System, Eds. Christopher I. Byrnes and Anders Lindquist, North-Holland, 1986.
- [45] Shaked, U. and Berman, N. , Nonlinear filtering of discrete-time process, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 43, No. 9, 1995.
- [46] Shi Zhongke and Wang Peide, A separated algorithm and application to flight test, NPU, Collected Trans of Selected Paper, 西北工业大学学报英文版, ET-37, 1991.
- [47] Shi Zhongke, Expert system for sensor failure detection of aircraft, Proceedings of 2nd IFAC Workshop on AIRTC, 1989, Pergamon Press.
- [48] Shi Zhongke, A new fixed-lag identification smoother & application to time-varying model identification, Proceedings of SCSC, 1990, Calgary.
- [49] Shi Zhongke, A new fixed-lag identification-smoother and application to the signal process of aircraft spin test , Proceedings of ICSP'90, 1990, Beijing.
- [50] Shi Zhongke, A new recursive maximum likelihood method and application to buffeting characteristic identification of aircraft, Proceedings of ICSP'90, 1990, Beijing.
- [51] Shi Zhongke, A maximum likelihood method for flight test data compatibility check 西北工业大学学报英文版, ET-45, 1992.
- [52] Song, T. L. and Speyer, J. L. , The modified gain extended Kalman filter and parameter identification in linear system, Automatica, Vol. 22, No. 1, 1986.
- [53] Uri Shaked and Carlos E. de Souza, Robust minimum variance filtering, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 43, No. 11, 1995.
- [54] Watanabe, K. and Meng, D. , New computationally efficient formula for backward-pass fixed-interval smoother and its U-D factorization algorithm, IEE Proceedings Pt. D, Vol. 136, No. 2, 1989.
- [55] Watanabe, K. , A new forward-pass computationally efficient fixed-interval discrete-time smoothers by using U-D factorization, Automatica, Vol. 22, No. 4, 1986.
- [56] Yahali Theoder and Uri Shaked, Robust minimum variance filtering, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 44, No. 2, 1996.