$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \oint_C \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$= f(z_0)\oint_C \frac{dz}{z-z_0} + \underbrace{\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz}$$

$$= 2\pi i \times f(z_0)$$

以下兩点必須皆成立

①

此項積分，C是包含z_0的閉迴路

所以不為0，但藉由 principle of deformation

無論C如何變形，積分值都相同。

② 又f在C上及C內皆可解析

所以f在C上及C內任一点皆連續

這表示當 $z \to z_0$，$f(z) \to f(z_0)$

這同時意味著當C無限制地變小時

積分值也会無限制地趨近0

①和②的結論一個說 積分值不變，

另一個又說 積分值將任意趨近0，看似矛盾，

只有積分為0時兩者同時滿足。