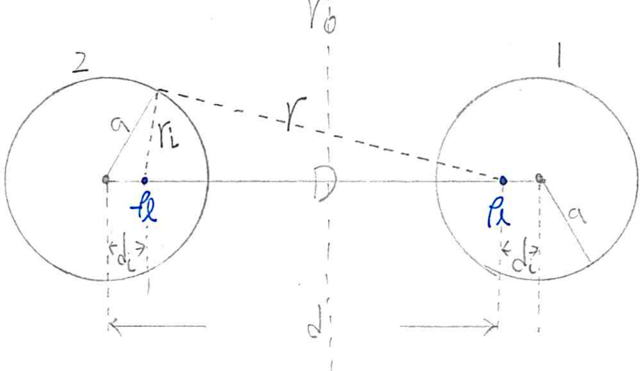
双線傳輸線，單位長度的電容，可以用影像法計算（精確）




令導体1帶正电荷，2負，這兩個導体可以用線电荷取代，而不影響導体外的电位分布，只要線电荷放在適當的位置

$$\boxed{d_i = a^2/d} \qquad \frac{r_i}{r} = \frac{d_i}{a} = \frac{a}{d}$$

電位參考點為兩導体的中間，$r_0$

無限長線電荷密度造成的電場為

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q/\epsilon_0$$

$$2\pi r\cdot L\cdot E = Q/\epsilon_0$$

$$\vec{E} = \hat{r}\,\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

$$V = -\int_{r_0}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{r_0}^{r}\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

一條無限長直線电荷密度造成的電位分布

$$V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} + \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_i}$$

這是 $\rho_l$ 和 $-\rho_l$ 在導体2造成的電位。

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_i}{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{a}{d}$$

$$V_1 = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{a}{d}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{-\cancel{2}\rho_l}{\cancel{2}\pi\epsilon_0}\ln\frac{a}{d}$$

$$C = \frac{\rho_l}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0\pi}{\ln\frac{d}{a}}$$

$$d = D - d_i = D - a^2/d \qquad d^2 - Dd + a^2 = 0$$

$$d = \frac{1}{2}\left(D \pm \sqrt{D^2 - 4a^2}\right) \quad \because D > d \;\therefore 負不合$$

$$= \frac{1}{2}\left(D + \sqrt{D^2 - 4a^2}\right)$$

$$\frac{d}{a} = \frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1}$$

$$\ln\frac{d}{a} = \ln\left[\frac{D}{2a} + \sqrt{\left(\frac{D}{2a}\right)^2 - 1}\right] \quad \text{if } D \gg a \;\; \simeq \ln\frac{D}{a}$$

$$= \cosh^{-1}\frac{D}{2a}$$

$$C = \epsilon_0\frac{\pi}{\ln\frac{d}{a}} = \epsilon_0\frac{\pi}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)}$$

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \cosh^{-1} x = y > 0$$

$$\cosh y = x > 1$$

$x-1>0$

$(x-1)(x+1) > (x-1)(x-1)$

$\sqrt{x^2-1} > x-1$

$x-\sqrt{x^2-1} < 1$

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2} = x$$

$$e^y + e^{-y} = 2x$$

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

$$e^y = \frac{1}{2}\left(2x \pm \sqrt{4x^2-4}\right)$$

$$= x \pm \sqrt{x^2-1}$$

負不合

$$= x + \sqrt{x^2-1}$$

$$y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

用影像法可精確算出
双線傳輸線
單位長度的電容

$$\boxed{C = \epsilon_0 \frac{\pi}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)}}$$

再利用 $\boxed{LC = \mu_0 \epsilon_0}$

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)}{\pi}}$$

現在的問題是：
以上的單位長度電感
有沒有包含進內電感
?

有另一個方式可以算出
双線傳輸線
單位長度電感

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I$$

$$\vec{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \ , \ d\vec{s} = \hat{\phi}\, dr \cdot 1$$

$$d\phi = \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r\, dr$$

$$d\Lambda = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4} r^3 dr$$

$$\Lambda = \int_0^a d\Lambda = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{a^4} \times \frac{a^4}{4} = \frac{\mu_0 I}{8\pi}$$

$$\boxed{\Lambda/I = \mu_0/8\pi \quad (\text{內電感})}$$

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$\vec{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \ , \ d\vec{s} = \hat{\phi}\, dr \cdot 1$$

$$d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dr}{r} = d\Lambda$$

$$\Lambda = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_a^{D-a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{D-a}{a} \cong \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{D}{a}$$

$$\boxed{\Lambda/I = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{a} \quad (\text{外電感})}$$

以上是單一條導線的計算
双線 即為

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

如果忽略內電感

$$\boxed{L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}}$$

而這恰好正是 $\frac{\mu_0}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)$ 的近似

$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\left(\frac{1}{4} + \ln \frac{D}{a}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{\pi}\left(\ln e^{1/4} + \ln \frac{D}{a}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a e^{-1/4}} = \mu_0 \frac{\ln \frac{D}{a'}}{\pi}$$

$$\boxed{a' = a e^{-1/4}}$$

只要將 $a$ 以 $a'$ 取代
即可考慮近內電感

我們把

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)}{\pi}}$$

當做是精確的

單位長度電感（~~包含內電感~~）

當 $D \gg a$ 時

$$\boxed{L \cong \mu_0 \frac{\ln\left(\frac{D}{a}\right)}{\pi}}$$

若要考慮內電感，要再加上

$\frac{\mu_0}{4\pi}$ 或把 $a$ 替換

成 $\boxed{a' = ae^{-1/4}}$

在用另一種計算方式時，

計算外電感時已經有

用到 $D \cong d$ 的近似

因此，

$$\frac{\mu_0}{4\pi} + \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{D}{a}$$

不會是精確值。

結論：

$$\boxed{\mu_0 \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)}{\pi}}$$ 精確值（不包含內電感）

$$\boxed{\mu_0 \frac{\ln\left(\frac{D}{a}\right)}{\pi}}$$ 近似值（不包含內電感）

$$\boxed{\frac{\mu_0}{4\pi} + \mu_0 \frac{\ln\left(\frac{D}{a}\right)}{\pi} = \mu_0 \frac{\ln\left(\frac{D}{a'}\right)}{\pi}}$$ 近似值（包含內電感）

剛剛用另一種方式
計算双線傳輸線
單位長度電感時

我是先考慮其中一條
貢獻的磁通，再乘2，
再除以 I ，

如果這時我不乘2
並且把D替換成 b ，
看作是同軸電纜的外徑

$\boxed{\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}}$ 即為同軸
電纜的外電感 。

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = Q/\epsilon_0$$

$$2\pi r L E = Q/\epsilon_0$$

$$\vec{E} = \hat{r}\frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, \quad d\vec{\ell} = \hat{r}\,dr$$

$$V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\int_b^a \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$\boxed{C = \frac{\rho_\ell}{V} = \epsilon_0\frac{2\pi}{\ln\frac{b}{a}}}$$

$$LC = \mu_0\epsilon_0$$

$$\boxed{L = \mu_0\frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi}}$$

$\boxed{\text{注意}}$ 利用 $LC = \mu_0\epsilon_0$
從 C 得到的 L
並不包括內電感 $\frac{\mu_0}{8\pi}$

這也是為何在双線傳輸線
從 $\boxed{\epsilon_0\frac{\pi}{\cosh^{-1}\frac{D}{2a}}}$ 得到的
$\boxed{\mu_0\frac{\cosh^{-1}\frac{D}{2a}}{\pi}}$
我當成是不包含內電感
的精確值 。