Triple Products

1. $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$

$= \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}$

$= \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$

2. $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

$= \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$

Second Derivatives

1. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

2. $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = \vec{0}$

3. $\boxed{\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}}$

BAC-CAB rule

微積分基本定理

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{\nabla}f\cdot d\vec{l} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$ 梯度理論

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\, d\tau = \oint_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{a}$$ 散度理論

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{a} = \oint_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$ 旋度理論

三者的共同點就是都可以視為某函數的導數 $(\vec{\nabla}f、\vec{\nabla}\cdot\vec{A}、\vec{\nabla}\times\vec{A})$ 在某區域上的積分 $(V, S, \vec{a}\to\vec{b})$ 完全被該函數 $(f, \vec{A})$ 在區域邊界上 $(\partial V, \partial S, \vec{a}\cdot\vec{b})$ 的值所決定

Product Rules

1. $\vec{\nabla}(fg) = (\vec{\nabla}f)g + f(\vec{\nabla}g)$

2. $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{C}) = \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{C}) + \vec{C}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + (\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{C}$

可以用 BAC-CAB rule 啟發性地記憶，把 $\vec{\nabla}$ 看作是 $\vec{B}$，並且考慮到第2左邊 $\vec{\nabla}$ 作用在 $\vec{A}$ 和 $\vec{C}$ 上，第2右邊也必須湊出作用在2者的部份

3. $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{A} + f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$

4. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

可以用 scalar triple product 啟發性地記憶
第2左邊 $\vec{\nabla}$ 作用在 $\vec{A}$ $\vec{B}$ 上，右邊亦須湊出2部份

5. $\vec{\nabla}\times(f\vec{A}) = (\vec{\nabla}f)\times\vec{A} + f(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

6. $\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) + (\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{C}$

同2，第2左邊被作用到的 $\vec{B}$、$\vec{C}$，
－透過 BAC-CAB rule，在右邊
也都要被作用到