$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{E}_0(x,y)\, f(t - z/v_p)$$

$$= \vec{E}_0(x,y)\cos(\omega t - \beta_p z)$$

$$= Re\left\{\vec{E}_0(x,y)\, e^{j(\omega t - \beta_p z)}\right\}$$

$$= Re\left\{\underbrace{\vec{E}_0(x,y)\, e^{-j\beta_p z}}\; e^{j\omega t}\right\}$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_0(x,y)\, e^{-j\beta_p z}$$

再想一想 phase 是什麼，
首先單純講 phase 是沒意義的
2個以上的对象 隨時間變化
的節奏一樣 但有時間差的話，
（也就是其中一個達到MAX時
另一個不是在MAX） ←［在某個瞬間］
那我們就說這兩個東西的
phase 不同。

再看一看向量場是什麼，
場就是空間中每個位置
都有一個物理量，
當其為純量，則為純量場，
若為向量，則為向量場。

如果該物理量又會
隨時間變化，情況
乍看下似乎會很複雜，
實際上也的確沒錯，
但在一種情況之下，
倒是人類可以理解的：
$\boxed{\text{單頻弦波}}$

不過只要有 $\boxed{\text{[illegible]葉}}$ 的概念
我們也了解，光知道這
也就夠了，更複雜的就是
電腦應該做的事了。

相位常數 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

因為 π 是常數

所以給定 β

就等同於給了 λ

而 β 的意義在於

空間上的週期性

波動在空間上（某一瞬間）

phase 是每隔一個波長的

距離重複。

也就是說 β 可以告訴我們

phase 如何隨空間變化

（至於 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 就告訴我們

phase 如何隨時間變化）

頻率不變，波長變長

就會有相速變大（超過光速）

的表象。

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}_0(x,y)\,e^{-j\beta_p z}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(x,y,z,t) = Re\left\{\vec{E}(x,y,z)\,e^{j\omega t}\right\}$$

很容易理解，節奏固定的東西
跟靜止的沒什麼差別，
所以就不考慮時變部份了
這就有了 phasor 這東西冒出了

phasor 包含的資訊 ① amplitude
② phase

如果是 vector phasor 再多一個 ③ direction

以上的 $\vec{E}(x,y,z)$ 就是一個 phasor
(vector phasor)

這個 phasor 包含的資訊也
就只是剛剛提及的 ①②③

可以看出 phase 只會在 z 方向
改變，在 x-y 平面上 phase 都一樣

至於 amplitude 和 direction 就不一定了

雖然提到的例子是
波導的東西，但這裡
提到的概念很重要。
(基本)

$$\begin{cases} \vec{E}(x,y,z) = \vec{E_0}(x,y)\, e^{-j\beta_p z} \\ \vec{H}(x,y,z) = \vec{H_0}(x,y)\, e^{-j\beta_p z} \end{cases}$$

$$\vec{E_0}(x,y) \times e^{-j\beta_p z} = \left(E_{0x}(x,y)\,\hat{u_x} + E_{0y}(x,y)\,\hat{u_y} + E_{0z}(x,y)\,\hat{u_z} \right) \times e^{-j\beta_p z}$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x\,\hat{u_x} + E_y\,\hat{u_y} + E_z\,\hat{u_z}$$

代入

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} j\beta_p E_y + j\omega\mu H_x = -\dfrac{\partial E_z}{\partial y} \\ j\beta_p E_x - j\omega\mu H_y = -\dfrac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \hat{u_x}\left[\frac{\partial}{\partial y}E_z - \frac{\partial}{\partial z}E_y\right] + \hat{u_y}\left[\frac{\partial}{\partial z}E_x - \frac{\partial}{\partial x}E_z\right] + \hat{u_z}\left[\frac{\partial}{\partial x}E_y - \frac{\partial}{\partial y}E_x\right] \\ &= \hat{u_x}\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta_p E_y\right] + \hat{u_y}\left[-j\beta_p E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right] + \hat{u_z}\left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right] \\ &= -j\omega\mu H_x\,\hat{u_x} - j\omega\mu H_y\,\hat{u_y} - j\omega\mu H_z\,\hat{u_z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \hat{u_x}\left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right] + \hat{u_y}\left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right] + \hat{u_z}\left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right] \\ &= \hat{u_x}\left[\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta_p H_y\right] + \hat{u_y}\left[-j\beta_p H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right] + \hat{u_z}\left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right] \\ &= j\omega\epsilon E_x\,\hat{u_x} + j\omega\epsilon E_y\,\hat{u_y} + j\omega\epsilon E_z\,\hat{u_z} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} j\beta_p H_x + j\omega\epsilon E_y = -\dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ j\beta_p H_y - j\omega\epsilon E_x = -\dfrac{\partial H_z}{\partial y} \end{cases}$$

$$j\beta_p E_x - j\omega\mu H_y = -\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$j\beta_p H_y - j\omega\epsilon E_x = -\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$j\beta_p E_y + j\omega\mu H_x = -\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$j\beta_p H_x + j\omega\epsilon E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

$$-\beta_p^2 E_x + \omega\mu\beta_p H_y = -j\beta_p \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$-\beta_p\omega\mu H_y + \omega^2\mu\epsilon E_x = -j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\beta^2 = \omega^2\mu\epsilon$$

$$(\beta_p^2 - \beta^2)E_x = j\left(\beta_p\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)$$

$$E_x = \frac{j}{\beta_p^2-\beta^2}\left[\beta_p\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right]$$

$$-\beta_p^2 H_y + \omega\epsilon\beta_p E_x = -j\beta_p\frac{\partial H_z}{\partial y}$$

$$-\omega\epsilon\beta_p E_x + \omega^2\mu\epsilon H_y = -j\omega\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$(\beta_p^2 - \beta^2) H_y = j\left(\beta_p\frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

$$H_y = \frac{j}{\beta_p^2-\beta^2}\left[\beta_p\frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right]$$

$$\nabla^2\vec{E} + \omega^2\mu\epsilon\vec{E} = 0$$

（1個向量方程式 = 3個純量方程式）

$$\vec{E} = \vec{E}(x,y,z) = \vec{E_0}(x,y)e^{-j\beta_p z}$$

or

$$\vec{E_0}(x,y)e^{-\gamma z}\ ,\quad \gamma = \alpha + j\beta_p$$

$\boxed{\text{只要 } E_z \text{ 分量}}$

$$\nabla^2 E_z + \omega^2\mu\epsilon E_z = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_z + \omega^2\mu\epsilon E_z = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{\nabla_{xy}^2}E_z + \underbrace{(\gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon)}_{h^2}E_z = 0$$

$$\nabla_{xy}^2 E_z + h^2 E_z = 0$$

這邊雖然引入了2個符號，但 ∇_{xy} 就只是個符號，沒其他特別意義，

h 就有特別的涵義

$\boxed{\text{若不考慮損耗，}\gamma\text{ 必須為純虛數}}$

$$h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$$

$$\gamma = \sqrt{h^2 - \omega^2\mu\epsilon}$$

可以看出為了使 γ 為虛數，頻率勢必有一個下限，超過才可以

而且這個下限取決於h，

h就是使得

$\nabla_{xy}^2 E_z + h^2 E_z = 0$

有解的數字，对。

所以它到底是什麼東西？

Maxwell eq 是討論電磁學的根本，
但不一定是具体上去討論某個
現象的出發点，我們總會
有個出發点，通常是基於經驗，
然後 Maxwell eq 是繼續討論
下去時一定要遵守的關係或限制

在討論波導時，我們是先湊出

$$\vec{E}(x,y,z,t) = Re\{\vec{E}_0(x,y)e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\}$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = Re\{\vec{H}_0(x,y)e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\}$$

① 代表了空間中每一個位置都有2個物理量，
他們都是向量，並且會隨時間的變化都有
相同的節奏。

② phase 只在z方向上改變

③ 在 x-y 平面上 phase 都一樣
amplitude 及 direction 不一樣
（如果一樣，那這個東西就
是均勻平面波。）

接下去，在滿足

$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$ 及 $\nabla\times\vec{H}=j\omega\epsilon\vec{E}$

的關係(relation)或者說是限制(constrain)

之下，我們發現，只要有

E_z 和 H_z，E_x，E_y，H_x，H_y

就也跟著被確定了。

再來，進一步要求那兩個東西

要滿足

$$\nabla^2\vec{E}+\omega^2\mu\epsilon\vec{E}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}+\omega^2\mu\epsilon\vec{E}=0$$

不過剛剛也說了，其實只要解出Z分量。

我們湊出的那兩個東西的形式

可以把波動方程以

$$\nabla_{xy}^2E_z+(\gamma^2+\omega^2\mu\epsilon)E_z=0$$

$$\nabla_{xy}^2H_z+(\gamma^2+\omega^2\mu\epsilon)H_z=0$$

這種形式表現，這意味著：

我們把注意力 focus on

物理量在截面上的情況

(E or H)

如果不考慮損耗，在行進方向

只有 phase 会變。

但截面上的情況就很多變了。

所以 $h^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu\epsilon$

可以說是針对截面上的物理量，衍生出的參數。

後面可以看到对於特定一種波導的边界條件，

$$\nabla_{xy}^2 E_z + h^2 E_z = 0$$

$$\nabla_{xy}^2 H_z + h^2 H_z = 0$$

只在某些離散的 h 值才存在解。

使之有解的 h 便叫做特徵值

而对應的解就叫做特徵函數

或者模態 (mode)

不考慮 loss，γ 為純虛數

$\gamma = \sqrt{h^2 - \omega^2\mu\epsilon}$，很明顯

為了使 γ 為純虛數，

不同的模態會有不同的頻率下限

只有高於該下限，該模態才

可以在波導內傳播。