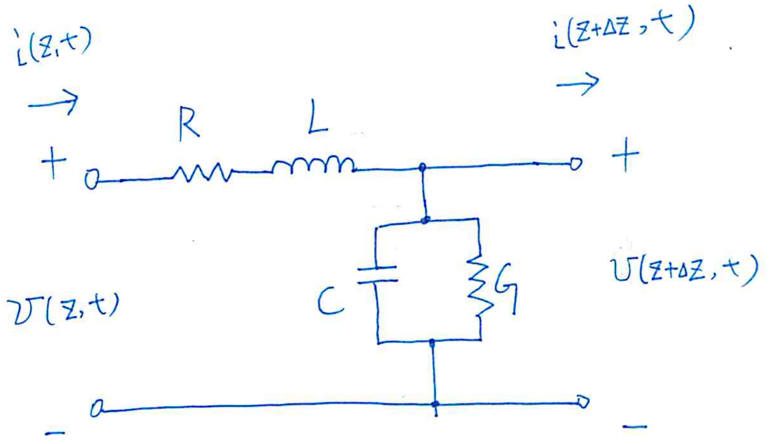

$$i(z,t) = v(z+\Delta z,t)\,G\Delta z + C\Delta z\frac{\partial v}{\partial t} + i(z+\Delta z,t)$$

$$\frac{i(z,t)-i(z+\Delta z,t)}{\Delta z} = G\,v(z+\Delta z,t) + C\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\boxed{-\frac{\partial i}{\partial z} = Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}}$$

$$v(z,t) = R\Delta z\, i + L\Delta z\frac{\partial i}{\partial t} + v(z+\Delta z,t)$$

$$\frac{v(z,t)-v(z+\Delta z,t)}{\Delta z} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\boxed{-\frac{\partial v}{\partial z} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}}$$

這是傳輸線上的一小段 Δz
事實上 可以把他當作一個桌
透過克希荷夫定律 及微分均值定理
可以推導出 2個方程式：

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial z} = Ri + L\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial z} = Gv + C\dfrac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

合稱為傳輸線方程式。

一般考慮單頻弦波，這時

$$v(z,t) = Re[V(z)e^{j\omega t}]$$

$$i(z,t) = Re[I(z)e^{j\omega t}]$$

$$\begin{cases} -\dfrac{dV}{dz} = (R+j\omega L)I \\ -\dfrac{dI}{dz} = (G+j\omega C)V \end{cases}$$

另一個方程式以此類推

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{dV}{dz}e^{j\omega t} \\ \dfrac{\partial i}{\partial t} = j\omega L\, I e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$-\frac{dV}{dz}\cancel{e^{j\omega t}} = RI\cancel{e^{j\omega t}} + j\omega L I\cancel{e^{j\omega t}}$$

$$-\frac{dV}{dz} = (R+j\omega L)I$$

單頻弦波是種很特別的情況，他雖然是種時變的東西，但對於一個線性系統來說，存在著一種視角，將使得他看起來會是靜止的。

從傳輸線方程式，可以很容易
得到2個波動方程式

$$-\frac{d^2V}{dz^2}=(R+j\omega L)\frac{dI}{dz}$$

$$\boxed{\frac{d^2V}{dz^2}=(R+j\omega L)(G+j\omega C)V}$$

$$-\frac{d^2I}{dz^2}=(G+j\omega C)\frac{dV}{dz}$$

$$\boxed{\frac{d^2I}{dz^2}=(G+j\omega C)(R+j\omega L)I}$$

令 $\gamma^2 \triangleq (R+j\omega L)(G+j\omega C)$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2V}{dz^2}-\gamma^2V=0\\[2mm] \dfrac{d^2I}{dz^2}-\gamma^2I=0\end{cases}$$

而且他的解一目瞭然。

$$\begin{cases}V(z)=V_{io}e^{-\gamma z}+V_{ro}e^{\gamma z}\\ I(z)=I_{io}e^{-\gamma z}+I_{ro}e^{\gamma z}\end{cases}$$

我們在上述過程中
似乎做了不少人為的步驟
首先是定義了 γ 這個參數
目前看起來似乎只是為了
減少書寫麻煩，但此外
他也確實有某種涵義。

再來是用了 V_{io} 等符號
來代表解的未定係數，
這是為了讓解看起來
有一目了瞭的物理涵義。
V代表電壓、I是電流
i 代表入射波、r是反射波
o代表在 $z=0$。

所以 V_{io} 代表入射的電壓波
在 $z=0$ 的 phasor。其餘類推

$V(z)$ 身為一個 phasor 也代表
著2個不同方向的行進波。
而 γ 代表著這個 phasor 的
phase 是如何隨位置變化
同時這個 phasor 又代表行進波
自然地，被稱 γ 為
傳播係數，他是個複數
當實部存在，代表這個傳輸線
有損耗。

$\gamma=\alpha+j\beta$

α：衰減係數

β：相位常數

到這边，我們從傳輸線方程式出發，中途推出波动方程，最後解出來波动方程的解。我們分别有電壓波和電流波。

現在為了看出傳輸線上電壓和電流的關係，我們要把解代回傳輸線方程式。

$$\begin{cases} V(z) = V_{i0}e^{-\gamma z} + V_{r0}e^{\gamma z} \\ I(z) = I_{i0}e^{-\gamma z} + I_{r0}e^{\gamma z} \end{cases}$$

$\Downarrow$ 代入

$$\begin{cases} -\dfrac{dV}{dz} = (R+j\omega L)I \\ -\dfrac{dI}{dz} = (G+j\omega C)V \end{cases}$$

$$-\frac{d}{dz}\left[V_{i0}e^{-\gamma z} + V_{r0}e^{\gamma z}\right] = (R+j\omega L)\left[I_{i0}e^{-\gamma z} + I_{r0}e^{\gamma z}\right]$$

$$\gamma V_{i0}e^{-\gamma z} - \gamma V_{r0}e^{\gamma z} = (R+j\omega L)I_{i0}e^{-\gamma z} + (R+j\omega L)I_{r0}e^{\gamma z}$$

$$\left[\gamma V_{i0} - (R+j\omega L)I_{i0}\right]e^{-\gamma z} + \left[-\gamma V_{r0} - (R+j\omega L)I_{r0}\right]e^{\gamma z} = 0$$

$$\therefore \quad \gamma V_{i0} = (R+j\omega L)I_{i0}$$

$$\gamma V_{r0} = -(R+j\omega L)I_{r0}$$

$$\boxed{\frac{R+j\omega L}{\gamma} = \frac{V_{i0}}{I_{i0}} = -\frac{V_{r0}}{I_{r0}}}$$

$$-\frac{d}{dz}\left[I_{i0}e^{-\gamma z} + I_{r0}e^{\gamma z}\right] = (G+j\omega C)\left[V_{i0}e^{-\gamma z} + V_{r0}e^{\gamma z}\right]$$

$$\gamma I_{i0}e^{-\gamma z} - \gamma I_{r0}e^{\gamma z} = (G+j\omega C)\left[V_{i0}e^{-\gamma z} + V_{r0}e^{\gamma z}\right]$$

$$\gamma I_{i0} = (G+j\omega C)V_{i0}$$

$$-\gamma I_{r0} = (G+j\omega C)V_{r0}$$

$$\boxed{\frac{\gamma}{G+j\omega C} = \frac{V_{i0}}{I_{i0}} = -\frac{V_{r0}}{I_{r0}}}$$

$$Z_0 \triangleq \frac{V_{i0}}{I_{i0}}$$

$$Z_0^2 = \frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$$

要知道 Z_0 代表什麼，就要先知道 V_{i0} 和 I_{i0} 代表什麼。

首先他們全都是複數，

再來 $Z_0 = \frac{V_{i0}}{I_{i0}}$ 或許看成

$$Z_0 = \frac{V_{i0} e^{-\gamma z}}{I_{i0} e^{-\gamma z}}$$ 更合適

因為這樣能看出，即使傳輸線有衰減，Z_0 仍代表著這條線的和位置無關的本質。
(而不只是在 $z=0$ 的參數)

所以 Z_0 就是入射電壓波的 phasor 除以入射電流波的 phasor

他叫做 $\boxed{\text{特性阻抗}}$

1、如果 Z_0 是純實數(正)
代表電壓波和電流流同相

2、如果是負純實數
代表兩者反相

3、純虛數代表相位差為 $\pi/2$

4、一般複數代表兩者相位有錯開

其中一方到達 MAX 時另一方不是 MAX。

也許

$$Z_0 = \frac{V_{i0}}{I_{i0}} = -\frac{V_{r0}}{I_{r0}}$$

這個關係式後方的負号讓人有點不舒服，但他就是那樣。也許這是和电與磁"近乎"完美的对稱性中，"近乎"這個形容的事實相互呼應。

藉由引入 Z_0，我們可以把波动方程式的解寫成：

$$\begin{cases} V(z) = V_{i0} e^{-\gamma z} + V_{r0} e^{\gamma z} \\ I(z) = \frac{V_{i0}}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_{r0}}{Z_0} e^{\gamma z} \end{cases}$$

特性阻抗 $Z_0=\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}$

在某一特定的頻率 可以

告訴我們，傳輸線上

電壓的 phaor 和電流的

phasor 的關聯，這种

關連是一條傳輸線的本質。

我們還有另一個參數

$\gamma=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$

這也是個本質。

藉由這2者，可以

介紹兩種重要的特例

(1) 無損：$R=0$
$G=0$

(2) 無失真：$\frac{R}{L}=\frac{G}{C}$

而且他們的相速

都是 $1/\sqrt{LC}$

並且若我們知道傳輸線

中介質的參數 ϵ、μ

也有速度 $1/\sqrt{\epsilon\mu}$

所以 $\epsilon\mu=LC$

再來，我們早就有

$\frac{G}{C}=\frac{\sigma}{\epsilon}$

這代表，當有了介質的

ϵ、μ、σ

傳輸線的 G、C，L

知道其中一個，另兩個

就会跟著知道。

至於 R，就有点複雜了