$P_B(n,p,N)$

$= \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$

$(p+q)^N$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$

对於一個 event
給定一個
positive real number between 0~1

$\left(\frac{1}{100}\right)^{10^{27}} = \frac{1}{10^{2\times10^{27}}}$

再來，這件事原本也和機率沒關係

常常我覺得"機率有固定模式"這句話

聽起來很矛盾。

有模式那還叫隨机嗎？

也許是，雖確實沒辦法

知道任一個 test 的 outcome

但這種 uncertainty 仍是一種

極端理想化的 uncertainty

這是不是代表著某种程度的必然

不知道，但反正就是那樣。

時間、時序上的連貫，

我們期待的規則總是應該可以讓我們預測下一個會怎麼樣

但隨机模式的規則沒有這種連貫性

這種規則以一種連貫性的方式呈現

就像我現在去猥褻一個女童

我就會被抓去關，這才是我們所認知的規則。

我們總是期待著規則意味必然

或者說是一種我們不習慣的規則

只是這個規則不是我們要的規則

有規則的隨機性反正就是

G

If the probability of success is p on each try,

then we can expect that in N tries the mean number of successes will be

$$\langle n \rangle = Np$$

所以這到底代表什麼？

首先 所謂期望 當然不是以為

再來 這件事对初學机率者

一些人來說 常常被當作

一種理解机率的方式，

或是甚至把他當作一個出發点

但其實不是這樣。

這個疑問或許能說他

彰顯了機率的主觀本質

期望值的概念我有時

會認為他会阻礙对機率

的了解。

每個人对機率都有一种

自認為有道理的說法

總之他就是個參數，要如何詮釋他

每個人可能都有自己的想法，

所以這可以不用太在意，嗯…應該說，对於

數學上的機率的認識不構成影響。

畢竟數學的機率說到底就跟理想的圓

或完美的立方体是同一种東西。

我們对於這种東西的

理解不取決於他

們真不真實

binomial 分佈的 expected value & Variance

$$\mu = \langle n \rangle_B$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n\, P_B(n, p, N)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} n \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p\, n p^{n-1} q^{N-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p \frac{\partial p^n}{\partial p} q^{N-n}$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$$

$$= p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N$$

$$= N p (p+q)^{N-1} \quad = N p$$

$$\boxed{\because\ p+q=1}$$

$$V_B = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle n^2 - 2n\mu + \mu^2 \rangle$$

$$= \langle n^2 \rangle + \mu^2 - \langle 2n\mu \rangle$$

$$= \langle n^2 \rangle + \mu^2 - 2\langle n \rangle \mu$$

$$= \langle n^2 \rangle - \mu^2$$

$$\langle n(n-1) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \qquad \frac{\partial^2 p^n}{\partial p}$$

$$= p^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} \underbrace{n(n-1)\, p^{n-2}} q^{N-n}$$

$$= p^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} (p+q)^N$$

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle = p^2 N(N-1)$$

所以 $\underline{\langle n^2 \rangle = p^2 N(N-1) + \mu}$

$$V_B = \langle n^2 \rangle - \mu^2$$

$$= p^2 N^2 - p^2 N + \mu - \mu^2$$

$$= \cancel{p^2 N^2} - p^2 N + pN - \cancel{p^2 N^2}$$

$$= p(1-p)N$$

Standard Deviation

$$\underline{\sigma_B = \sqrt{p(1-p)N}}$$

The ratio of the width to the mean

$$\frac{\sigma_B}{\langle n \rangle_B} = \frac{\sqrt{p(1-p)N}}{Np} = \sqrt{\frac{1-p}{Np}}$$

decreases with N as $1/\sqrt{N}$

$$P_B(n+1, p, N)$$

$$= \binom{N}{n+1} p^{n+1} q^{N-n-1}$$

$$= \frac{N!}{(n+1)!\,(N-n-1)!} p^{n+1} q^{N-n-1}$$

$$= \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \times \frac{N-n}{n+1} \times \frac{p}{q} \times p^n q^{N-n} \qquad = P_B(n,p,N)$$

$1-p$

$$= \frac{N-n}{n+1} \times \frac{p}{1-p} \times P_B(n, p, N)$$

$$P_B(n+1, p, N) = \frac{p}{1-p}\,\frac{N-n}{n+1}\,P_B(n, p, N)$$

is helpful when N is big.

$$N! \simeq \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + \frac{1}{2N} + \frac{1}{8N^2}\right)^{\frac{1}{6}}$$

for large N and larg $N-n$

Srinivasa Ramanujan's correction to Stirling's formula $N! \simeq \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$

所以我到底在算些什麼

一樣先回到原点看看

首先，數學的機率是客觀的

而這個客觀基於我們对於

機率的共識，這個共識

就是機率的公理，而這個

公理並沒有定義什麼是機率

反正，機率始於一些試驗

的出象是不確定的，這裡

每一種出象都是一個事件
(event)

每個事件都对應到一個機率

這個機率 屬於 事件本身
(belong to)

所以為了避免陷入哲學的領域

應該把心思放在 事件本身 而不是

機率本身， 機率是屬於事件

的性質 就好像一個物体

的重量、体積、密度、顏色。

二項分布的事件是什麼？

一連串的成功及失敗

一個特定的成功及失敗的次序

是一個 簡單事件

但是，不同的特定事件會有

相同的成功次數

所有有相同成功次數的特定次序

共同形成一個 複合事件 (dim event)

The probability of failure on each try

is $q = 1 - p$.

So the probability of a particular sequence of successes and failures, such as specific event

n successes followed by $N-n$ failures is $p^n q^{N-n}$

There are $\binom{N}{n}$ different sequences of n successes and $N-n$ failure, all with the same probability $p^n q^{N-n}$.

dim event

So the probability of n successes (and $N-n$ failures) in N tries

is $$P_B(n,p,N) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$$

我們所做所為總是在

$\boxed{\text{利用機率去計算機率}}$

那一開始的機率是哪來的？

這其實可以先不管，無論是先驗機率中基於對稱性或是後驗機率中基於統計資料或是主觀機率中憑感覺隨便給一個數字。反正總是有個開始。

$\boxed{P_B(n, p, N)}$ 機率

(n, p, N) → 事件

- N：總次數
- n：成功的次數
- p：機率

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + \frac{1}{2N} + \frac{1}{8N^2}\right)^{\frac{1}{6}}$$

When N and $N-n$ are BIG but not n

$$P_B(n, p, N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$P_B(n, p, N) \cong \frac{(pN)^n}{n!} q^{N-n} R_2(n, N)$$

$$R_2(n, N) = \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{n-N-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2N} + \frac{1}{8N^2}\right)^{\frac{1}{6}} \times \left(1 + \frac{1}{2(N-n)} + \frac{1}{8(N-n)^2}\right)^{\frac{-1}{6}}$$

$R_2 \to 1$ as $N \to \infty$ for fixed n