**電場的散度**

在高斯定律啟發式的推導方式之中，我們先從一個點電荷出發，我們以點電荷為中心，計算了電場對於球面的面積分，結果會跟球的半徑無關，這純粹是計算的結果，跟場線無關，場線的必要性，在於從球面推廣至任意曲面，因為不管曲面是什麼，通過的場線數量都會一樣，而場線的數量又能代表面積分，我們據此斷言，面積分的結果無關於封閉曲面的形狀。

任何的封閉區面之中的點電荷，對該封閉曲面的通量，皆是點電荷的電荷量除以介電常數，然後根據重疊原理推廣至任意點電荷分布的情況，接著斷言連續電荷分布的情況亦同理，最後再利用散度定理把積分形式的高斯定律寫成微分形式的高斯定律。

確實就整個理論來說，場線確實不是必要的，但對於初學者而言，他還是能給予一個非常直觀的圖像，這個直觀的圖像也能給我們一些非常直觀的物理事實，比方說，任意封閉曲面的通量都是相同的，這件事如果有場線這個圖像，就是非常直觀的。而且在高斯定律的啟發式推導中，場線也是必要的概念，不過從庫倫定律直接去計算電場的散度，也能得到高斯定律，完全不需要場線的概念。

高斯定律就是庫倫定律+重疊原理，之後就會看到，他具有強大的魔力。高斯定律在電荷分布據有完美的對稱性時，對於計算電場非常快速簡單，也就是說，其實高斯定律在計算電場上沒有什麼用處，高斯定律永遠是正確的，但在計算電場上，就不是永遠都很有用。

**電場的旋度**

同理，我們先從點電荷出發，其實光看這個圖像就能直覺到旋度應該是零，這直覺是對的，但我們總要做些比較有深度的事，我們去計算電場的線積分，我們會發現線積分只跟端點有關，所以對任意閉迴路來說，線積分必為零。運用史托克定理，就得到電場的旋度必處處為零。

以上是點電荷的情形，而且對於原點的選擇並不會影響結果，如果有一個以上的電荷，重疊原理也告訴我們總電場的旋度仍處處為零，最後我們直接斷言，對於連續分布的電荷也一樣，結論就是 任意靜電場的旋度皆處處為零。

**電位**

靜電場是極為特殊的向量場，靜電場的旋度恆為零，也就是說如果我們先給定一個旋度不為零的向量場，我們同時能斷言，這個向量場不可能是靜電場。這是個極為特殊的性質，透過這個性質，我們可以把一個向量場的問題轉變成純量場的問題，這是極大的優勢，靜電學大多內容都是在思考如何徹底地運用這個優勢。

我們有個純數學的理論告訴我們，一個旋度為零的向量場，必為某個純量場的梯度場。以下我們要做的就是在靜電學的脈絡，去證明這個主張。

先稍微回顧一下，到目前為止我們用到的物理只有庫倫定律跟重疊原理，我們根據這兩者，推導出靜電場的散度和旋度。

Griffiths在介紹 electric potential 時，是從純數學的角度切入，並不急於闡述他的物理，因為實在是很微妙，儘管陳述上是可以很精簡，"抵抗保守力做功"。但這種說法正是誤會的根源。

Griffiths純數學定義電位的脈絡：

旋度為零 - > 任意封閉迴路線積分為零  - > 任兩點之間的路經積分將跟路徑無關  - > 可以定義一個函數，稱呼他為電位

這個函數的形式初見有點匪夷所思，首先積分起點是某個參考點，積到要計算電位的那個位置，然後積完分後前面還要加個負號。

以上皆跟物理無關，完全是數學的，作者並沒有像一般其他書籍，把那個積分的負號解釋成抵抗保守力做功，而是單純視之為一種純粹的數學構造，構造依據就是靜電場旋度為零這個前提條件。

利用路徑無關性，先針對某個參考點定義電位這個函數，再根據這個定義，計算電位的差，在計算途中，可以發現，參考點不見了，但作者並沒有急於解釋這其中代表了什麼物理，而是緊接著跟根據梯度基本定理，把電位差用另一種方式表示出來，最後得到了，電場是電位的負梯度。

儘管都到這裡了，作者還是沒有去挑明這個結論所代表的物理，只是重申了路徑無關性在這段推論中的關鍵腳色，這仍然是數學。

接著的下一小節，則是對於電位的一些註解，畢竟在上一小節，電位的定義感覺非常人為，好像一點都不自然，所以這裡花了一個小節去補充說明，此時才挑明了電位的物理意義--電位沒有物理意義。

補充的東西共有五點：

* 第一，電位不代表位能，作者還沒有提到電位代表什麼，而是先強調了電位不是什麼。
* 第二，電位是純量，為什麼一個純量函數能夠包含向量函數的資訊?這完全是因為電場的旋度為零所致。
* 第三，參考點不重要，因為電位差才有物理意義，電位本身沒有物理意義，**但電位差有什麼物理意義，看似沒說明，但其實有，電場是電位的負梯度**。其實這句話就能看出，有意義的始終是電場，電位差聯繫的其實也是電場，電位只是一種數學工具而已。 隨後，舉了測量高度的例子去類比，強調差值才有意義。在很多情況下，都把無限遠處當作零電位點，除非電荷分布延伸到無限遠處，這時不可以設定無限遠處為零電位點，否則，電位將處處為無限大。
* 第四，電位符合重疊原理。
* 第五，電位的單位。

也就是說，"電位"本身真的沒有物理意義，有意義的是電位差，電位真的可以是為一種純粹數學的構造。 電場是電位的負梯度。其實這句話就能看出，有意義的始終是電場，電位只是一種數學工具而已。

那麼 抵抗保守力做功 這句話是怎麼回事？ 他是對的，但這句話 正是電位差的概念，不是電位。

正是這種極度微妙的緣故，所以我弄清楚後，是非常佩服Griffiths 那種純數學的路線，有關電位、電位差、電位能，這些名詞的混淆程度，堪比陰極陽極的混亂程度，電流和電子流，這些是我目前所知人類發展電學的歷史中最為混亂的一些共業，只有完全從數學角度去探討 才能擺脫那些東西 。

另外有沒有注意到，我剛剛除了最後提到歷史混亂的時候，稍微提了一下電位能這個詞之外，通篇沒有提到能量的概念。這代表電位和能量沒有關係嗎，也不是，但這就很煩人。

這種數學脈絡可以完全迴避掉電位和電位能的關係。但這不代表電位和電位能沒有關係，他們關係其實還很密切，但正是這種密切，混淆了無數歷史和當代的學生甚至老師。

一個深刻的誤會，或者說是簡化的說法： 電位是單位電荷的電能。

* 按字面嚴格解釋，這是錯的。但這種說法太過普遍，甚至很多老師和教科書(DKCheng就是)都會這麼說。
* 如果要說他是對的，其實有個隱性的前置條件，無窮遠定義為電位零點。 這種說法，就是抵抗保守力做功，其實算的依然是電位差，而不是電位，只不過是"從無窮遠積分，然後把無窮遠定義為零電位"，這個過程的簡化說法而已。

電場是電位的負梯度，這個負號，只是個慣例，遵照這個慣例，將使得，正電荷產生的電位是正值(當然，這時的無窮遠處為零電位)。

在定義了電位，補充說明了電位，接著就是說明拉普拉斯方程式和帕松方程式。剛剛我們知道電場是電位的負梯度，把這件事帶入高斯定律，可以得到帕松方程式，電荷為零的情況，就是拉普拉斯方程式。

現在要講到一個點電荷產生的電位。剛剛已經說了電位是符合重疊原理的，所以如果能夠知道點電荷產生的電位，就可以知道任意電荷分布產生的電位。在這個地方，作者說明的是任意的局部電荷分布，所以這時作者是設定無限遠處為位能零點。

最後總結了，電位、電場、電荷，三者的關聯，並提到了邊界條件。

作者討論邊界條件的開場白還蠻有趣的，他先總結了電荷、電位以及電場的關聯，這些關聯就是我們從庫倫定律和重疊原理出發，推導出的所有公式。然後作者就說，如果讀者真的有去做例題和習題，就應該會注意到，當存在面電荷密度的時後，邊界兩側的電場會是不連續的，而且不連續量其實很好算，並分別運用電場的散度、旋度，推導出在邊界的兩側，電場垂直於邊界的分量、平行於邊界的分量。

**靜電能**

作者探討靜電能是從一個提問做為開場白:

How much work would it take to assemble an entire collection of point charges?

這個問題的結論就是一但我們算出那個功，我們可以把他當做整個系統的所儲存的能量，另外我們應該盡量避免去使用"電位能"這個詞彙。

為何我們應該盡量避免去使用"電位能"這個詞彙?這牽涉到基礎物理之中功與能量之間的微妙關係，功是種交互作用的概念，是一種過程的概念，而能量是一種狀態的概念。

我在前面的感想提到了，我們定義一個函數，這個函數是選定某個參考點之後，從該參考點至某個位置，電場線積分的負值，對於不同的位置，這個函數會形成一個純量場，再運用梯度的基本定理，我們推導出該純量場的負梯度就是電場。這個純量場我們稱呼他為電位場。

某一指定點上的電位值代表的就是功(Work)，The Work Done to Move(註) a unit Charge from 參考點 to 該點。現在，如果我們不從參考點開始積分，而是從某一點A到點B，則點B的電位減去點A的電位就是外力所做的功。而電位所對應到的其實是一個過程或交互作用，我們定義電位的公式，正是由參考點到某一指定點，電場的路徑積分的負值。而能量是一種屬於整個系統的狀態，不過我們算靜電能的時候，其實也是透過計算功的方式，這也正是觀念的微妙之處。

電位差 is 功，而功與能量也是不可分開來講的概念，所以我們必須同時說明能量，也就是靜電系統的能量，才能完整地說明電位的物理意義。電位沒有物理意義，電位差才有，這個意思就是電位的導數才有物理意義，也就是到頭來只有電場才有物理意義，電位只是一種輔助性的理論工具，單純從這種角度來看，電位的定義沒有任何物理意義，我們不需要把那個定義，解釋成抵抗保守力所做的功。當然，不需要不代表不對，他是對的。

但在本書中他不是定義，他是結論，他只是定義了電位之後，我們依據這個定義去計算兩點的電位差所得到的結論。

當然，也可以一開始就定義：電位差是抵抗保守力所作的功。

**The Work It Takes to Move a Charge**

* 其實這部分的內容，就是一般教科書介紹電位的方式，可以看到：抵抗靜電場，移動一個電荷從點a到點b，做的功，就是電荷乘以兩點的電位差。
* 所以那些教科書就會直接把電位差定義成：將單位電荷從A點移到B點抵抗電場力所做的功，並且強調電位沒有意義，差才有含義。
* 這種說法雖直觀，但隱含以下問題：電位差和功的概念，容易被混為一談。
  + 功的計算需要明確參考點而且針對具體的電荷
  + 電位差的計算無所謂參考點而且超脫於測試電荷
* 這裡的情況有點像從庫倫定律，引申出電場的概念一樣
  + 看似只是等號兩端做了個除法，同除測試電荷，電場似乎就是單位電荷上的力。
  + 沒錯，但更深一層的含義是，所謂的單位電荷上的力，想要刻劃的是，即使那邊沒有電荷存在，仍然存在於該處的物理實體。
  + 電荷先在周遭的空間中，產生一種影響，稱之為電場。
  + 測試電荷受到所在位置上的電場的作用，被施加了力。
  + 不是源電荷直接對測試電荷產生影響，源電荷透過電場間接對測試電荷造成影響。
  + 庫倫定律本身的形式是超距作用的，但我們透過把庫倫定律拆解成兩個階段，將它解釋成局部的作用。
  + 這單純從庫倫定律的數學表達是看不出來的，他是我們解釋庫倫定律的方式。
  + 庫倫定律的兩個階段：電荷如何造成場，場如何對電荷造成影響。
* 在抵抗靜電力做功的等式，兩端同除測試電荷，確實，電位差就是"單位電荷抵抗保守力做的功"。
* 但電位差刻劃的，也是即使沒有電荷存在，仍然散布在空間的某個東西。
* 我這次沒說他是物理實體了，因為電位本身並不是物理實體，至少在經典電磁學不是。
* 但是，萬惡的但是，當我們指定了無限遠處是零電位的參考，電位的分布就是一種物理實在。
* 當我們指定了無限遠處是零電位的參考，將單位正電荷從`無限遠`移到`某點(a point)`所需做的功，實際上是`該點(the point)`與`無限遠處`的電位差，但在陳述上，常常會被簡化為`該點(the point)`的電位。
* 這沒問題，但問題是，我們常常會忽略參考零點(在無限遠)的存在，然後把電位本身當成一種絕對量，而非相對量。
* 幸也是不幸的，電荷延伸至無限遠的情況都是基於想像的習題，實際情況電荷不可能延伸到無限遠，所以總是能將無限遠處當作零電位的參考點。
* 然後使用`某一點的電位`這種簡化敘述，而不是`該點至無限遠的電位差`這種精確敘述。
  + 幸的是即使觀念混淆，計算上也常不會出事。
  + 不幸的也是由於計算上不會出事，觀念混淆的問題很難徹底根除。

事實上，我以前也是混淆的，從刪除線的文字就可以看出。

註:

這裡有個稍稍微妙的陳述，就是移動(Move)，這有沒有牴觸到我們討論"靜"電學這個前提?當然是沒有，但為什麼沒有?關鍵就在於我們對於這個外力的描述，在路徑積分的每一點上，我們指定這個外力皆為每一點上的電場的負值。當然你可能會納悶若合力為零，應該是不會動才對，但是你錯了，合力為零還是可以動，回憶一下，牛頓第一運動定律告訴我們，合力為零有兩種情況，一是靜止，二是等速直線運動。可是這裡很明顯不是等速直線運動，那又要怎麼說?在每一個點上皆是等速直線運動，移動的皆是一個無限小的距離，雖然這感覺很像在胡說八道，但的確是對的。如果施加的外力稍大於電場，做功的結果會使得這個電荷得到動能，這也沒什麼不好，但正如我們的前提是"靜"電學，我們目前還不想去管動能這個部份，所以我們要求的正是那個功(Work)的最小值，他就等於電場的路徑積分的負值分。

How much work would it take to assemble an entire collection of point charges?

…

For a volume charge density

…

Comments on Electrostatic Energy

1. A perplexing "inconsistency."

這個不一致在於，當用點電荷的電場去計算點電荷自身具有的能量，會得到，無限大。

對點電荷系統來講，某一點電荷，其上的電位，是由其他電荷造成的，除了自己以外的所有電荷。

但對連續電荷分布來說，某一點的電位，是所有電荷造成的(包含在那一點的電荷)，當然，對於連續電荷分布來說，一個點上的電荷為零。

但這個不一致在這個階段不需要在意，只能不去管它。

1. Where is the energy stored? At the present level, this is simply an unanswerable question: I can tell you what the total energy is, and I can provide you with several different ways to compute it, but it is unnecessary to worry about where the energy is located. In the context of radiation theory it is useful (and in General Relativity it is essential) to regard the energy as being stored in the field. But in electrostatics one could just as well say it is stored in the charge .The difference is purely a matter of bookkeeping.
2. The superposition principle. Because electrostatic energy is quadratic in the felds, it does not obey a superposition principle.

**導體**

為什麼要講這個? 物質是很複雜的，而且在根本上必然牽涉量子力學，但至少在古典電磁理論的觀點，導體是最簡單的物質，它的特性就是，具有**無限量**或**大量**，**完全**的**自由**電子，這個特性使得當一個導體放在靜電場，內部電場恆為零。

如果導體內部有推動電子的力，這個力會使得電子堆積，產生反向電場阻止進一步的堆積，由於電子是無限量的或大量的，這個堆積的過程會持續直到完全抵消那個力。

如果，推動電子的那個力，只有靜電場，此時導體內部的靜電場，為零。

但導體內部也是可以有靜電場的：

首先，如果，推動電子的力，不只靜電場，是那個**其他的力**與靜電場的合力，為零，也就是此時靜電場不為零，這就是電池內部的情境。

第二，如果，電荷沒有堆積起來，而是直接離開，靜電場就不會被抵消，這樣，導體內部也會有靜電場，這就是穩態載流導線內部的情境。

但是，這兩種，導體內有靜電場的情境，都不是純粹的靜電學的情境。

在靜電學，導體內靜電場為零。由這個性質衍生出的就是：

導體內部電荷密度為零。

電荷將堆積在導體表面。

導體處處等電位，邊界為等位面。

邊界的靜電場垂直於表面。