

求解给定初始条件的弦振动方程

问题：给定方程：

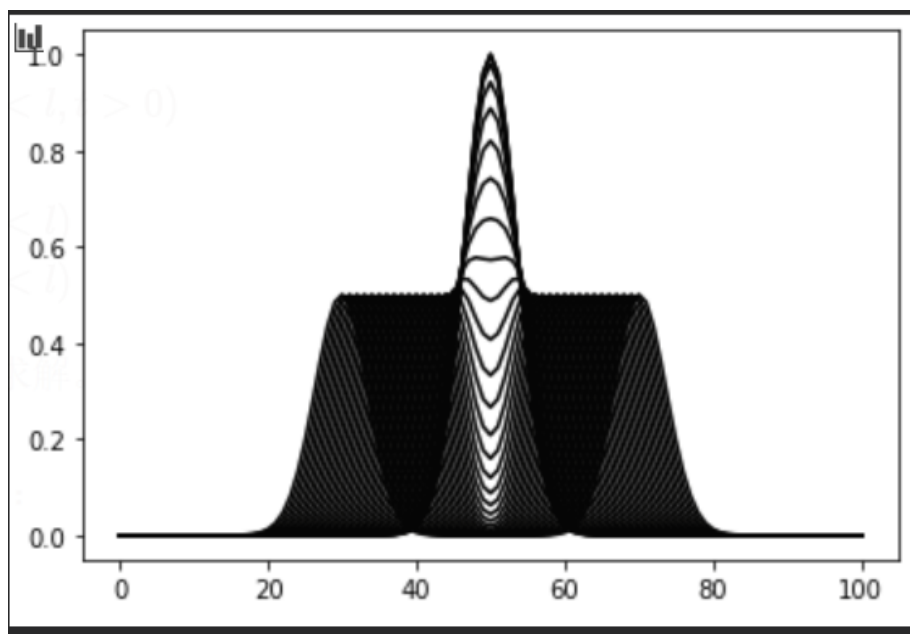
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & (t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & (0 < x < l) \\ u_t(x, 0) = \nu(x) & (0 < x < l) \end{cases}$$

我选取指数形式的初始条件位置以及0速度条件进行求解。

初始条件如下：

```
val = np.exp(-(x**2)/0.25)
```

采用差分法可以数值求解该微分方程，求解结果如下：



由于没法显示动画效果，我干脆将演化过程画在同一张图中。

可以看到其行为方式是逐渐扩散。

Python程序编写如下：

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 dx=0.1 #空间步长
5 dt=0.05 #时间步长
6 tmin=0.0 #初始时间
7 tmax=2.0 #终止时间
8 xmin=-5.0 #左边界
```

```

9  xmax=5.0 #右边边界
10 c=1.0 #声速
11 rsq=(c*dt/dx)**2
12
13 nx = int((xmax-xmin)/dx) + 1 #x轴上的点数
14 nt = int((tmax-tmin)/dt) + 2 #y轴上的点数
15 u = np.zeros((nt,nx)) #解
16
17 #设置初始波形
18 def init_fn(x):
19     val = np.exp(-(x**2)/0.25)
20     if val<.001:
21         return 0.0
22     else:
23         return val
24
25 for a in range(0,nx):
26     u[0,a]=init_fn(xmin+a*dx)
27     u[1,a]=u[0,a]
28
29 # 演化
30 for t in range(1,nt-1):
31     for a in range(1,nx-1):
32         u[t+1,a] = 2*(1-rsq)*u[t,a]-u[t-1,a]+rsq*
(u[t,a-1]+u[t,a+1])
33
34 #画图
35 fig = plt.figure()
36 plts = [] # get ready to populate this
list the Line artists to be plotted
37
38 for i in range(nt):
39     p, = plt.plot(u[i,:], 'k') # this is how you'd
plot a single line...
40     plts.append( [p] ) # ... but save the
line artist for the animation
41
42

```