狄拉克函数笔记

定义

$$\delta\left(x-x_0\right)=\begin{cases}0 & x\neq x_0\\ \infty & x=x_0\end{cases}$$
$$\int_a^b \delta\left(x-x_0\right)dx=\begin{cases}1 & x_0\in(a,b)\\ 0 & x_0\notin(a,b)\end{cases}$$

用极限来逼近

$$\begin{aligned}&1)\ \lim_{a\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}=\delta(x)\\ &2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}=\delta(x)\\ &3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(nx)}{\pi x}=\delta(x)\\ &=\lim\frac{1}{\pi}\int_0^n\cos kxdk\end{aligned}$$

性质

1) 存在任意连续函数`f(x)`,有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta\left(x-x_0\right)dx=f\left(x_0\right)$$

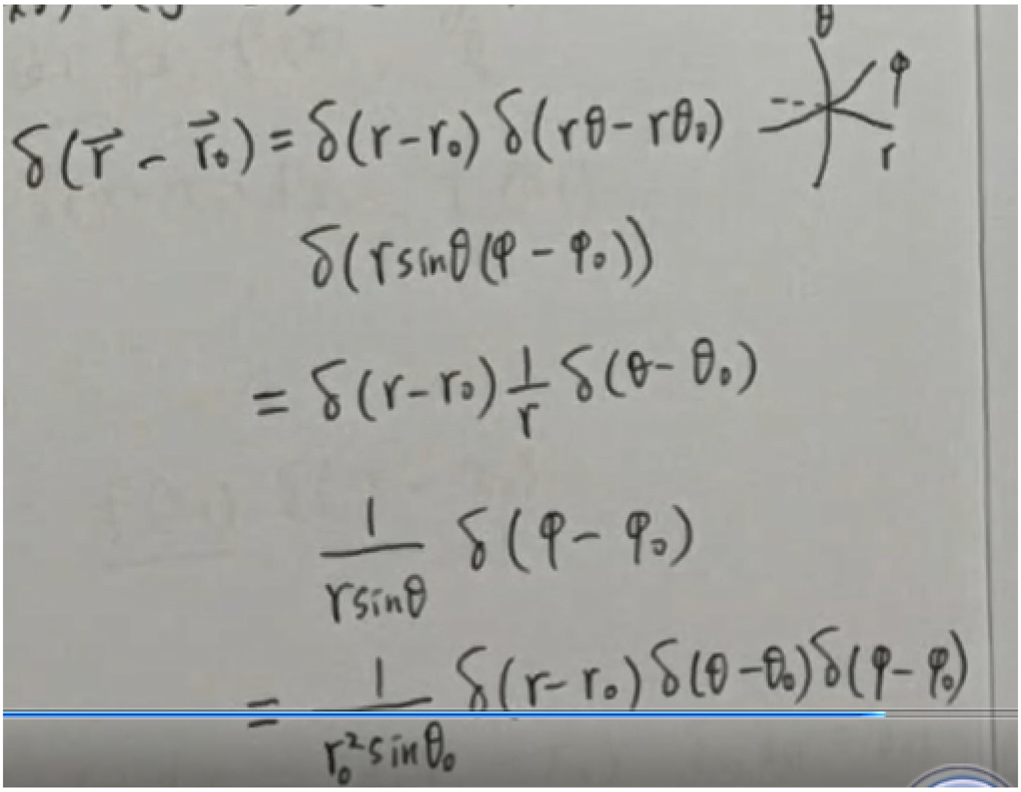
$$\begin{aligned}&2)\ \delta(-x)=\delta(x)\\ &3)\quad \underline{f}(x)\delta\left(x-x_0\right)=\underline{f\left(x_0\right)}\delta\left(x-x_0\right)\\ &4)\ x\delta(x)=0\\ &5)\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x-x_1\right)\delta\left(x-x_2\right)dx=\delta\left(x_1-x_2\right),\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}\end{aligned}$$

$$6)\delta(\varphi(x))=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\left|\varphi'\left(x_j\right)\right|}\delta\left(x-x_j\right)$$

高维狄拉克函数

$$\begin{gathered}\int_V\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0'\right)d\vec{r}=1\qquad \vec{r}_0\in V\\ \delta\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)=\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(y-y_0\right)\delta(z-z_0)\end{gathered}$$

对于曲线坐标系来说，我们可以使用拉梅系数，并且根据(5)式子来进行一些变换。例如：



傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
f(x) = & c(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
& f(x)=\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk \\
\varepsilon\left(x-x_0\right): & c(k)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x-x_0\right) e^{-ikx} dx \\
& =e^{-ikx_0}, \quad \delta(x) \rightarrow 1 \\
\delta\left(x-x_0\right) & =\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx_0} e^{ikx} dk \\
& =\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\left(x-x_0\right)} dk
\end{aligned}
$$

三维：

$$
c(\vec{k})=e^{-ik\cdot r_0}
$$

$$
c(\vec{k})=e^{-ik\cdot\gamma_0}
$$

$$
\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)=\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)} d\vec{k}
$$

广义傅里叶展开：

实际就是取定正交归一基进行操作：

$$
\begin{aligned}
\langle\varphi_i(x),\varphi_j(x)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i^*(x)\varphi_j(x)dx=\delta_{ij}\\
f(x) &= \frac{\sum_j c_j\phi_j(x)}{\underbrace{\langle\phi_j(x),f(x)\rangle}} = \left\langle\varphi_j(x),\sum_i c_i\varphi_i(x)\right\rangle\\
&= \sum_i c_i\,\langle\varphi_j(x),\varphi_i(x)\rangle = c_j\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_j^*(x)f(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(x-x'\right)=\textstyle\sum_j c_j\varphi_j(x)=\sum_j\varphi_j^x\left(x'\right)\varphi_j(x)\\
&c_j=\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}q_j^*(x)\delta\left(x-x'\right)dx=\varphi_j^*\left(x'\right)
\end{aligned}
$$

如果取定三角函数基的话，

$$
\delta\left(x-x'\right)=\frac{1}{2L}+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi x'}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}
$$

泊松求和公式（这部分我不懂）

格林函数

老师的视频里面讲格林函数是引入了一些在正交基上面展开的步骤，但是我认为这并不是必要步骤，视频内容我不懂；但是格林函数和狄拉克函数的关系我知道。我猜想正交基展开那些部分并不是关键（我还需再看视频）。所以这里的笔记就不按照视频，而是按照我从别的书上看的关于格林函数和狄拉克函数的关系来整理。

Green 函数方法简介

非齐次项 $f(t)$ 经常称为**源**. 上述非齐次的线性微分方程初值问题满足叠加原理, 设

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2}+k^2y_1(x)=f_1(x),\qquad x>0,\\
&y_1(0)=0,\qquad y_1'(0)=0
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2}+k^2y_2(x)=f_2(x),\qquad x>0,\\
&y_2(0)=0,\qquad y_2'(0)=0
\end{aligned}
$$

容易证明, 它们的线性组合 $y(x)=\alpha y_1(x)+\alpha_2y_2(x)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+k^2y(x)=\alpha_1f_1(x)+\alpha_2f_2(x),\qquad x>0,\\
&y(0)=0,\qquad y'(0)=0
\end{aligned}
$$

利用 δ 函数, 任意函数 $f(x)$ 都可以表示为 δ 函数的线性组合

$$
f(x)=\int f(x')\delta(x-x')\mathrm{d}x'
$$

如果我们能够对于每一个 $\delta(x-x')$, 求解初值问题

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2g(x;t)}{\mathrm{d}x^2}+k^2g(x;t)=\delta(x-t),\qquad x,t>0,\\
&g(0;t)=0,\qquad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0 \qquad (22)
\end{aligned}
$$

则线性叠加

$$
y(x)=\int f(t)g(x;t)\mathrm{d}t
$$

即定解问题(21)的解.

这就是 Green 函数方法. $g(x;t)$ 称为 Green 函数.

举个栗子，给定空间中电荷的分布，以及在边界上的电势，求解整个空间的电势场。

（这其实是来自于电动的内容）我们都知道镜像法，他能够求出给定点电荷以及边界电势决定的电势场。假定我们对于镜像法掌握得炉火纯青，使得只要点电荷的位置和电荷量给定，以及边界电势分布给定，就一定能求出对应的电势场。

这样的话我们其实还没有解决原问题。因为我们现在只能求出点电荷的情况；但是原问题是给定了一整片区域电荷分布。我们自然可以将区域电荷离散化成无数个点电荷，再将它们的解叠加即可。

点电荷就对应狄拉克函数，而万能镜像法实际上就是在求格林函数。将这个格林函数沿着区域积分即可。这就是大致思路。