

# 一维波动方程的数值解模拟波的反射

本文除了探究初始条件的影响，还探究

已知一维的波动方程为：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

其中  $y(x,t)$  是坐标和时间的函数。上学期的计算物理课上我们已经学会有限差分法。主要思想是划分网格求解。

有了网格以后，我们可以用有限差分表示二阶导数

## 边界条件

如果令网格边界处  $y=0$ （Dirichlet 边界条件）则会发生全反射且有半波损失。若边界处使用  $\partial y/\partial x=0$ （Neumann 边界条件）同样会发生全反射但没有半波损失。

## Matlab 程序

```
1 % 一维波动方程数值解
2 function wave1D
3 close all;
4
5 % ==== 参数 ====
6 c = 1; % 波速
7 xmin = -4; xmax = 6; Nx = 1200; % 空间格点
8 tmin = 0; tmax = 12; Nt = 2401; % 时间格点
9 k = 6; Ncyc = 5; % 初始波包的波数和周期数
10 bc = 'd'; % 边界条件: [d] Dirichlet, [n] Neumann, [o] Open
11 % =====
12
13 x = linspace(xmin, xmax, Nx)';
14 t = linspace(tmin, tmax, Nt);
15 dx = (xmax - xmin)/(Nx - 1);
16 dt = (tmax - tmin)/(Nt - 1);
17 C = c*dt/dx; C2 = C*C;
18 y = zeros(Nx, Nt);
19 y(:,1) = y0(x, k, Ncyc);
20 y(:,2) = y0(x - c*dt, k, Ncyc);
21
22 % 二阶差分 (边界元设为 0)
23 D2 = @(v) [0;
24     v(1:end-2) - 2*v(2:end-1) + v(3:end);
25     0];
26
27 figure;
28 for n = 2:Nt - 1
29     y(:,n+1) = 2*y(:,n) - y(:,n-1) + C2*D2(y(:,n));
30     y = bc_set(y, n+1, bc, c, dx, dt);
31     if (mod(n, 8) == 0)
32         clf; plot(x, y(:,n+1)); axis([xmin,xmax,-2,2]);
```

```

33     hold on; scatter([xmin,xmax], [y(1,n+1), y(end,n+1)]);
34     if bc == 'd'
35         title(['Dirichlet B.C. t = ', num2str(t(n+1), '%.2f')]);
36     elseif bc == 'n'
37         title(['Neumann B.C. t = ', num2str(t(n+1), '%.2f')]);
38     else
39         title(['Open B.C. t = ', num2str(t(n+1), '%.2f')]);
40     end
41     xlabel x; ylabel y;
42     drawnow;
43     % saveas(gcf, [bc 'wv' num2str(n) '.png']); % 保存图片文件
44 end
45 end
46 end
47
48 % 初始波包
49 % sin^2 波形
50 function y = y0(x, k, Ncyc)
51 T = 2*pi/k;
52 L = T*Ncyc/2;
53 y = zeros(size(x));
54 k0 = k / Ncyc / 2;
55 for i = 1:numel(x)
56     xx = x(i);
57     if abs(xx) <= L
58         y(i) = cos(k0*xx)^2 * sin(k*xx);
59     end
60 end
61 end
62
63 % 处理边界值
64 function y = bc_set(y, n, bc, c, dx, dt)
65 if bc == 'd' % Dirichlet
66     y(1, n) = 0;
67     y(end, n) = 0;
68 elseif bc == 'n' % Neumann
69     y(1, n) = y(2, n);
70     y(end, n) = y(end-1, n);
71 elseif bc == 'o' % Open
72     y(end, n) = y(end-1, n) - 1/c * (y(end-1, n) - y(end-1, n-1))*dx/dt;
73 end
74 end
75

```

以下这几个图反映了波的反射过程。

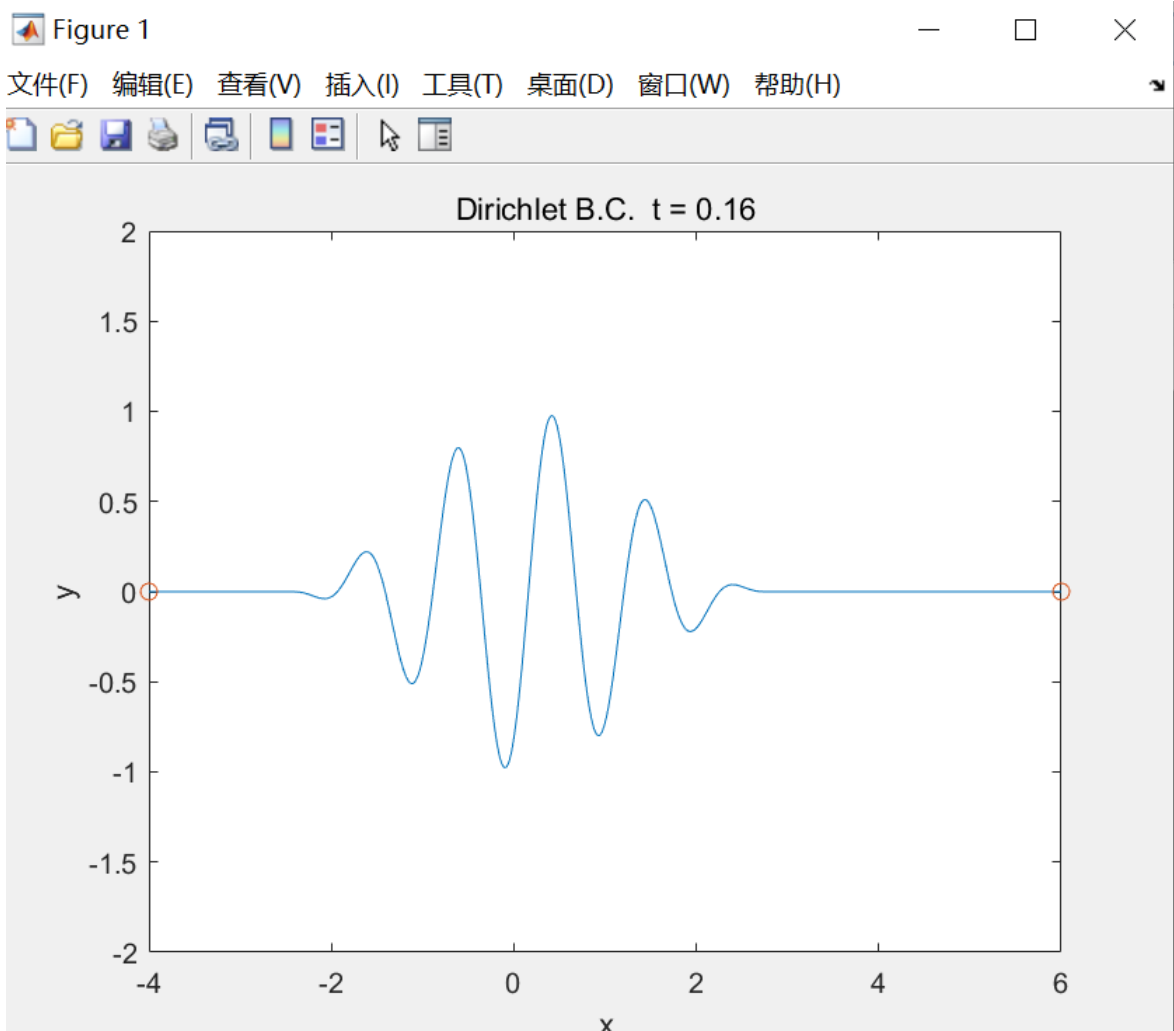


Figure 1

文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)

