1 AX=B 和它的四个子空间

1.1 The geometry of linear equations

线性代数的基本问题是解决 n 个未知数的 n 个等式的方程组
比如：

$$2x - y = 0$$

$$-x + 2y = 3$$

从行的角度来看

如果方程组表示的直线有交点，那么交点就是它们的解

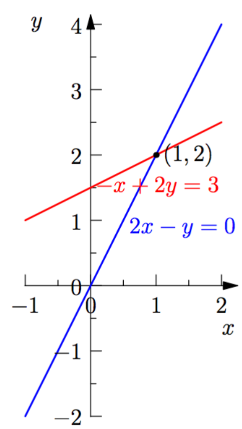

Figure 1: The lines $2x - y = 0$ and $-x + 2y = 3$ intersect at the point $(1, 2)$.

从列的角度来看

通过把方程组的系数变成列向量，可以把方程组写成一个等式

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

给定两个向量 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$，和标量 x 和 y，那么 $x\boldsymbol{c} + y\boldsymbol{d}$ 就是向量 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 的线性组合

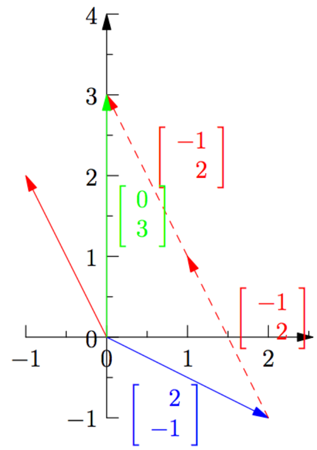

Figure 2: A linear combination of the column vectors equals the vector **b**.

找到对应的 x 和 y 能够使线性组合等于向量 $\boldsymbol{b}$

从列的角度看，对于高维空间的情况更容易想象

从矩阵的角度来看

通过矩阵和向量来表示一个等式

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{bmatrix}$ 成为系数矩阵，向量 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 是未知向量, 得等式

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

则关于等式的解, 如果 A 可逆的话

$$\boldsymbol{x}=A^T\boldsymbol{b}$$

1.2 An overview of key ideas

向量

在三维空间 R^3 中

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{u}$ 构成空间中的一条直线，$\boldsymbol{v}$ 构成空间中的另一条直线，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 的线性组合构成一个平面，一些向量的所有线性组合构成一个子空间

矩阵

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的线性组合 $c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{w}$

$$c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d-c \\ e-d \end{bmatrix}$$

创建一个矩阵 A，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 是列向量, 上述式子可以表示成 $A\boldsymbol{x} = b$ 的形式

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d-c \\ e-d \end{bmatrix}$$

矩阵 A 乘以向量 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e})$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{w}$$

一开始是数字 c，d，e 分别乘以向量，$A\boldsymbol{x}$ 是矩阵的列向量的线性组合，如今是矩阵作用于这些数字，就是矩阵 A 作用于向量 $\boldsymbol{x}$

1.3 A=LU

例子:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{bmatrix} = LU$$

LU 分解的过程中是不能进行行变换的,L 的主对角线上的数都是 1

关于 A=LU 有以下结论:

L 与 A 的下三角矩阵的形式一致，当 A 的行以 0 开头，L 的行也是一样 U 与 A 的上三角矩阵的形式一致，当 A 的列以 0 开头，U 的列也是一样

1.4 矩阵转置

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1})$$

$A\boldsymbol{x}$ 是 A 的列的线性组合，而 $\boldsymbol{x}^T A^T$ 是 A^T 的行的线性组合

当 A 时对称矩阵即 $A = A^T$, 能被分解成 LDU，且没有发生行变换，那么 $U = L^T$

2 向量空间 R^n

向量空间 R^n，在此向量空间中的向量就有 n 个实数组成

子空间

一个向量空间包含在另一个向量空间中，叫做该向量的子空间。子空间的向量应该包含零向量 **列空间**在三维空间 R^3 中给予一个矩阵 A，则矩阵 A 的列和列的所有线性组合构成三维空间的一个子空间，也就是列空间 C(A). 如果 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$，那么 A 的列空间就是在三维空间中穿过原点，且包含 A 的两个列向量的一个平面

参考文献

[1] Gilbert Strang: introduction to linear algebra