1 极限

1.1 有界序列与无穷小序列

从自然数集 N 到实数集 R 的一个映射:

$$x : N \to R$$

相当于用自然数编号的一串实数

$$x_1 = x(1), x_2 = x(2), ..., x_n = x(n), ...$$

这样的一个映射，或者说这样的用自然数编号的一串实数 $\{x_n\}$，称为是一个实数序列

1. 有界序列

定义 1：设 $\{x_n\}$ 是一个实数序列

（1）如果存在 $M \in R$ 使得:

$$x_n \leq M, \forall n \in N$$

就说序列 $\{x_n\}$ 有上界，实数 M 是它的一个上界;

（2）如果存在 $m \in R$ 使得:

$$x_n \geq m, \forall n \in N$$

就说序列 $\{x_n\}$ 有下界，实数 m 是它的一个下界;

（3）如果序列 $\{x_n\}$ 有上界也有下界，就说序列有界。

序列设 $\{x_n\}$ 有界的充分必要条件是：存在 $K \in R$ 使得

$$|x_n| \leq K, \forall n \in N$$

例 1: 序列 $x_n = \frac{n+1}{n}, (n = 1, 2, ...)$ 是有界的，

$$\because |x_n| = |\frac{n+1}{n}| \leq |\frac{n+n}{n}| = 2, \forall n \in N$$

例 2：序列 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, (n = 1, 2, ...)$ 是有界的，因为

$$
\begin{aligned}
0 < x_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} \\
&+ \cdots\cdot + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \\
&+ \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots\cdot + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3
\end{aligned}
$$

注意：$\frac{1}{n^n} = \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$

例 3：考察序列

$$x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n, n = 1, 2, ...$$

证明这个序列无界。事实上，对任意自然数, 只要取 $n = 2^{2N}$，就有

$$
\begin{aligned}
x_n &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \cdots + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}) \\
&+ \cdots + (\frac{1}{2^{2N-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{2N}}) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + 4\frac{1}{2^3} + \cdots + 2^{k-1}\frac{1}{2^k} + \cdots + 2^{2N-1}\frac{1}{2^{2N}} \\
&> \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 2N\frac{1}{2} = N
\end{aligned}
$$