1 关系

1.1 关系及其性质

定义 1：设 A 和 B 是集合，一个从 A 到 B 的二元关系是 A X B 的子集。

换句话说，一个从 A 到 B 的二元关系是有序对的集合 R，其中每一个有序对的第一个元素取自 A 并且第二个元素取自 B。我们使用记号 aRb 表示 $(a, b) \in R,$。当 (a,b) 属于 R 时，称 a 与 b 有关系 R。

函数作为关系：一个从集合 A 到集合 B 的函数 f 对于 A 中的每个元素都指定 B 中一个唯一的元素。

定义 2：集合 A 的关系是从 A 到 A 的关系

换句话说，集合 A 的关系是 A X A 的子集。

关系的性质：

定义 3：如果对每个元素 $a \in A$ 有 $(a, a) \in R$, 那么集合 A 上的关系 R 叫做自反的

如果 A 的每个元素都关系到它自己，A 上的关系就是自反的（也就是说对每一个元素，自己与自己的关系也可以成立）

定义 4：对于 $a, b \in A$, 如果只要 $(a, b) \in R$ 就有 $(b, a) \in R$，则集合 A 上的关系 R 叫做对称。如果对于 $a, b \in A$, 仅当 a=b 时 $(a, b) \in R$ 就有 $(b, a) \in R$，则集合 A 上的关系 R 叫做反对称。

定义 5：如果对于 $a, b, c \in R, (a, b) \in R, (b, c) \in R$ 则 $(a, c) \in R$，那么集合 A 上的关系 R 叫做传递的

定义 6：设 R 是从集合 A 到集合 B 的关系，S 是从集合 B 到集合 C 的关系。R 和 S 的合成是由有序对 (a,c) 构成的关系。其中 $a \in A, c \in C$，并且对于它们存在一个元素 $b \in B$ 使得 $(a, b) \in R, (b, c) \in S$. 用 $S \circ R$ 表示 R 与 S 的合成。其中在 R 中有序对的第二元素与 S 中有序对的第一元素相同。

定义 7：设 R 是集合 A 上的关系。幂 $R^n, n = 2, 3, 4...$ 递归的定义为

$$R^1 = R, R^{n+1} = R^n \circ R$$

定理 1：集合 A 上的关系 R 是传递的，当且仅当对 n=1，2，3, 有 $R^n \subseteq R$

1.2 n 元关系及其应用

定义 1：设 $A_1, A_2, ..., A_n$ 是集合。在这些集合上的 n 元关系是 $A_1XA_2X...XA_n$ 的子集。这些集合 $A_1, A_2, ..., A_n$ 叫做关系的域，n 叫做它的阶

1.3 关系的表示

用矩阵表示关系：

关系 R 可以用矩阵 $M_R = [m_{ij}]$ 来表示，其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & if(a_i, bj) \in R \\ 0, & if(a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

M_R 的主对角线的所有元素都等于 1，那么 R 是自反的

M_R 是对称矩阵，则 R 是对称的

当矩阵 $i \neq j, m_{ij} = 0 or m_{ji} = 0$，关系 R 是反对称的

用图表示关系

定义 1：一个有向图由顶点集 V 和边集 E 组成，其中边集是 V 中元素的有序对的集合。顶点 a 叫做边 (a,b) 的始点，顶点 b 叫做这条边的终点。

形如 (a, a) 的形式叫做环。

一个关系是自反的，当且仅当又想吐的每个顶点都有环，从而每个形如 (x , x) 的有序对都出现在关系中

一个关系是对称的，当且仅当对有向图不同顶点之间的每一条边都存在一条方向相反的边，从而只要 (x,y) 在关系中就有 (y,x) 在关系中

一个关系是反对称的，当且仅当在不痛的两个顶点之间不存在两条方向相反的边。

一个关系是传递的，当且仅当只要存在一条从顶点 x 到顶点 y 的边和一条顶点 y 到顶点 z 的边，就有一条从顶点 x 到顶点 z 的边。

1.4 关系的闭包

设 R 是集合 A 上的关系，R 可能具有或者不具有某些性质 P。如果存在包含 R 的具有性质 P 的关系 S，并且 S 是包含 R 且具有性质 P 的每一个关系的子集，那么 S 叫做 R 的关于 P 的闭包。

自反闭包：给定集合 A 上的关系 R，对于 $a \in R$, 可以通过把形如 (a, a) 的所有的对，除了已在 R 中的之外，都加入到 R 中，就构成了 R 的自

反闭包。加入这些对产生了一个新的自反的，包含 R 的关系，并且它被包含在任何包含 R 的自反关系中。自反闭包等于 $R \cap \Delta, \Delta = \{(a,a)|a \in A\}$