1 概率论

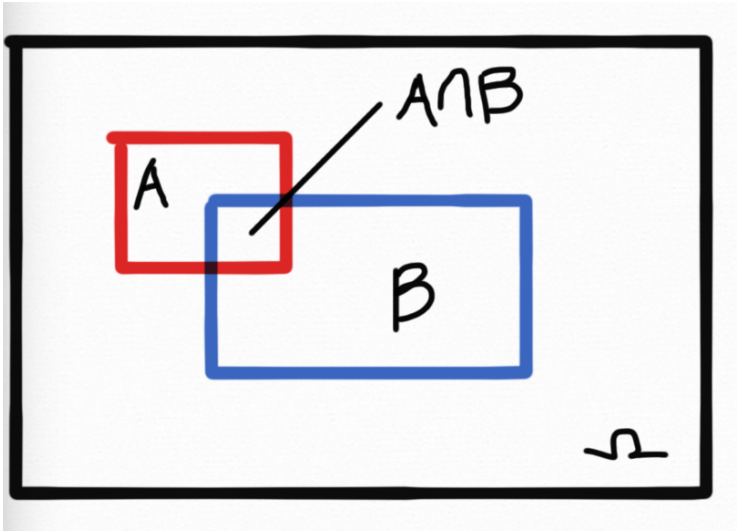
1.1 全概率公式以及贝叶斯公式

条件概率

条件概率的定义是，设有两个事件 A,B，而 P(B) $\neq$ 0, 则在给定 B 发生的条件下 A 的条件概率记为 P(A|B), 定义为:

$$P(A|B) = P(AB)/P(B)\ P(B) \neq 0$$

对于公式的理解，条件概率是在 B 发生的条件下，也就是 B 发生的时候，A 也发生，简言之就是在 B 发生的条件下 A 和 B 同时发生的概率。可以根据下图来帮助理解



全概率公式

设 $B_1, B_2...$ 为有限或无限个事件，它们两两互斥且在每次实验中至少发生一个，即:

$$B_i B_j = \emptyset, i \neq j$$

$$B_1 + B_2 + \cdot\cdot\cdot\cdot = \omega$$

把具有这些性质的一组事件成为一个完备事件组。任一事件 B 以及其对立事件组成一个完备事件组。

现考虑任一事件 A。因 ω 是必然事件，有 $A = A\omega = AB_1 + AB_2 + \cdots$，因 $B_1, B_2, ...$ 两两互斥，显然 $AB_1, AB_2, ...$ 也两两互斥。

由加法定理有

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots$$

再由条件概率的定义有:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots$$

上式成为全概率公式。"全部"概率 P(A) 被分解成了许多部分之和，在较复杂的情况下直接算 P(A) 不容易，但 A 总是伴随着某个 B_i 伴出。

另一角度理解，把 B_i 看作是导致事件 A 发生的一种可能途径，对不同的途径，A 发生的概率即条件概率 P(A|B) 各个不同，而采取哪个途径却是随机的。

贝叶斯公式

根据条件概率的定义以及在全概率公式的假定下

$$P(B_i|A) = P(AB_i)/P(A) = P(B_i)P(A|B_i)/\sum_j P(B_j)P(A|B_j)$$

如果把事件 A 看成是"结果"，把诸事件 $B_1, B_2, ...$ 看成是导致这结果的可能的"原因"，则可以把全概率公式看作成为"由原因推导结果"；而贝叶斯公式看作是"由结果推导原因"：现在有一个结果 A 已经发生，在众多可能的原因中，是哪一个导致了这结果?

1.2 随即变量及概率分布

一维随机变量

随机变量：顾名思义，就是其值随机会而定。可以说随机变量就是实验结果的函数。在实验前，我们不能预知它将取何值，这要凭机会，一旦试验后，取值就确定了。

随机变量按其可能取值的全体的性质，分为两大类:

一类叫离散型随机变量。其特征是只能取有限个值，或随在理论上能取无限个值，但这些值可以毫无遗漏地一个接一个排列出来。

另一类叫连续型随即变量，取值不仅是无穷多，还不能无遗漏地逐一排列，而是充满一个区间。

离散型随机变量分布

定义：设 X 为离散型随机变量，其全部可能值为 $\{a_1, a_2, ...\}$ 则

$$p_i = P(X = a_i), i = 1, 2, ...$$

称为 X 的概率函数，也成为概率分布

定义：设 X 为一随机变量，则函数

$$P(X \leq x) = F(x), -\infty < x < \infty$$

称为 X 的分布函数。它对任何随即变量都有定义。

若知道离散型的概率函数，则

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\{i:a_i \leq x\}} p_i$$

定义：设连续性随机变量 X 有概率分布函数 F(x), 则 F(x) 的倒数 $f(x) = F^{'}(x)$, 称为 X 的概率密度函数

1.3 多维随机变量

定义：以 $\{a_{i1}, a_{i2}, ...\}$ 记 X_i 的全部可能值，i=1,2... 则事件 $\{X_1 = a_{1_{j_1}}, X_2 = a_{2_{j_2}}, ..., X_n = a_{n_{j_n}}\}$ 的概率

$$p(j_1, j_2, ..., j_n) = P(X_1 = a_{1_{j_1}}, X_2 = a_{2_{j_2}}, ..., X_n = a_{n_{j_n}})$$

$$j_1 = 1, 2, ..., j_2 = 1, 2, ..., j_n = 1, 2, ...$$

称为随即向量 $X_1, ..., X_n$ 的概率函数或概率分布

定义：若 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 是定义在 R^n 上的非负函数，使对 R^n 中的任何集合 A，有

$$P(X \in A) = \int_A \cdots \int f(x_1, ..., x_n) dx_1 \cdots dx_2$$

则称 f 是 X 的密度函数

边缘分布

设 $X = (X_1, ..., X_n)$ 是一 n 维随机变量，X 有一定的分布 F，这是一个 n 维分布。因为 X 的每个分量 X_i 都是因为随机变量，故它们有各自的分布 $F_i, i = 1, 2, ..., n$，这些都是一维分布，成为随即向量 X 或其分布 F 的边缘分布

虽然一个随即向量 $X = (X_1, ..., X_n)$ 的分布 F 足以决定其任一分量 X_i 的边缘分布 F_i，但反过来不对，即使知道了所有 X_i 的边缘分布，也不足以决定 X 的分布 F。边缘分布只考虑了单个变量的情况，而未涉及它们之间的关系，而这个信息是包含在 $(X_1, ..., X_n)$ 的分布之内的。边缘分布就是通常的分布，无特殊含义。

1.4 条件概率分布

一个随机变量或向量 X 的条件概率分布，就是在某种给定的条件下，X 的概率分布。一般采取如下的形式：设有两个随机变量或向量 X,Y，在给定 Y 取某个或某些值的条件下，去求 X 的条件分布。

离散型随机变量的条件概率分布

设 (X_1, X_2) 为一个二维离散随机向量，X_1 的全部可能取值为 $a_1, a_2, ...$;X_2 的全部可能取值为 $b_1, b_2, ...$, 而 (X_1, X_2) 的联合概率分布为

$$p_{ij} = P(X_1 = a_i, X_2 = b_j), i, j = 1, 2, ...$$

考虑 X_1 在给定 $X_2 = b_j$ 的条件下的条件分布，依条件概率的定义，有

$$P(X_1 = a_i | X_2 = b_j) = P(X_1 = a_i, X_2 = b_j)/P(X_2 = b_j) = p_{ij}/P(X_2 = b_j)$$

而根据边缘分布 $P(X_2 = b_j) = \sum_k p_{kj}$, 于是

$$P(X_1 = a_i | X_2 = b_j) = p_{ij} / \sum_k p_{kj}, i = 1, 2, ...$$

连续型随机变量的条件概率分布

设二维随机向量 $X=(X_1,X_2)$ 有概率密度函数 $f(x_1,x_2)$，先考虑在限定 $a\le x_2\le b$ 的条件下，X_1 的条件分布，有

$$P(X_1\le x_1|a\le X_2\le b)=\frac{P(X_1\le x_1,a\le X_2\le b)}{P(a\le X_2\le b)}$$

$$P(X_1\le x_1,a\le X_2\le b)=\int_{\infty}^{x_1}dt_1\int_a^b f(t_1,t_2)dt_2$$

X_2 的边缘分布的密度函数 $f_2(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)dx_1$

$$P(a\le X_2\le b)=\int_a^b f_2(t_2)dt_2$$

由此可得

$$P(X_1\le x_1|a\le X_2\le b)=\frac{\int_{\infty}^{x_1}dt_1\int_a^b f(t_1,t_2)dt_2}{\int_a^b f_2(t_2)dt_2}$$

这是 X_1 的条件分布函数，对 x_1 求导，得到条件密度函数

$$f_1(x_1|a\le X_2\le b)=\int_a^b f(x_1,t_2)dt_2/\int_a^b f_2(t_2)dt_2$$

若在给定 a=b 的情况下，即在 X_2 给定等于一个值之下，X_1 的条件密度函数。

$$\begin{aligned}f_1(x_1|x_2)&=f_1(x_1|X_2=x_2)\\&=\lim_{h\to0}f_1(x_1|x_2\le X_2\le x_2+h)\\&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{x_2}^{x_2+h}f(x_1,t_2)dt_2/\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{x_2}^{x_2+h}f_2(t_2)dt_2\\&=f(x_1,x_2)/f_2(x_2)\end{aligned}$$

式子改写成

$$f(x_1,x_2)=f_2(x_1)f_1(x_1|x_2)$$

就是说两个随机变量的联合概率密度，等于其中之一的概率密度乘以在给定这一个之下另一个的概率密度。

式子可以推广到多个变量的场合：设有 n 维随机向量 $X_1,..,X_n$, 其概率密度函数 $f(x_1,...,x_n)$ 则

$$f(x_1,...,x_n)=g(x_1,...,x_k)h(x_{k+1},...,x_n|x_1,...,x_k)$$

其中 g 是 $X_1,...,X_k$ 的概率密度，而 h 则是在给定 $X_1=x_1,...,X_k=x_k$ 的条件下，$X_{k+1},...,X_n$ 的条件概率密度。

随机变量的独立性

定义：设 n 维随机向量 $\{X_1,...,X_n\}$ 的联合密度函数为 $f(x_1,...,x_n)$，而 X_i 的边缘密度函数为 $f_i(x_i), i=1,2,...,n$ 如果：

$$f(x_1,...,x_n)=f_1(x_1)\cdot\cdot\cdot f_n(x_n)$$

就称随机变量 $\{X_1,...,X_n\}$ 相互独立

定义：设 $\{X_1,...,X_n\}$ 都是离散型随机变量，若对任何常数 $a_1,...,a_n$ 都有：

$$P(X_1=a_1,...,X_n=a_n)=P(X_1=a_1)\cdot\cdot\cdot P(X_n=a_n)$$

就称随机变量 $\{X_1,...,X_n\}$ 相互独立

1.5 随机变量的函数的概率分布

已知某个或某些随机变量 $X_1,...,X_n$ 的分布，另有一些随机变量 $Y_1,...,Y_m$，它们都是 $X_1,...,X_n$ 的函数：

$$Y_i=g_i(X_i,...,X_n), i=1,...,m$$

比如在数理统计中，$X_1,...,X_n$ 是原始的观察或试验数据，$Y_1,...,Y_m$ 则是为某种目的将这些数据加工而得到的量，成为统计量。比如 $X_1,...,X_n$ 的算术平均值 $\overline{X}=(X_1,...,X_n)/n.$ $\overline{X}$ 就是 $X_1,...,X_n$ 的函数。

两个重要的特殊函数：

Γ 函数 $\Gamma(x)$: 通过积分

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}\exp^{-t}t^{x-1}dt,x>0$$

$$\Gamma(1)=1,\Gamma(1/2)=\sqrt{2},\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

β 函数 $\beta(x,y)$：通过积分

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1},x>0,y>0$$

$$\beta(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$$

2 数理统计

2.1 基本概念

当我们用试验或观察的方法研究一个问题时，首先要通过适当的观察或试验以取得必要的数据，然后对数据进行分析，以对所提出的问题作出尽可能正确的结论。

之所以说尽可能正确，是因为数据一般带有随机性误差，不只是通常意义下得因测量不准造成的误差。由于数据带有随机误差，所以作出的结论，也有可能出错。

统计的两大问题：参数估计和假设检验

参数估计：比如模型为指数函数，估计参数 λ 为多少，从而求得平均值 $1/\lambda$，λ 一般是未知的。所以可以从选取的样本计算样本的平均值来估计 $1/\lambda$

假设检验：假设不符合但被接受，假设符合但可能被拒绝

总体：是指与所研究的问题有关的对象的全体构成的集合

总体的概率分布：是指数分布还是正态分布等等，总体就是一个概率分布，只要服从同一概率分布，就可以视为同类总体。

样本：是按一定的规定从总体中抽出的一部分个体。总体中的每一个个体有同等的被抽出的机会。

统计量：完全由样本所决定的量。统计量只依赖于样本，而不能依赖于其它位置的量。特别是，它不依赖与总体分布中所包含的未知参数。例如，设 $X_1+...+X_n$ 是从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中取出的样本，则 $\overline{X}=(X_1+...+X_n)/n$

是统计量，因为它完全由样本决定，但 $\overline{X}-\mu$ 不是统计量，因为 μ 未知，$\overline{X}-\mu$ 不是完全由样本所决定。

统计量可以看作是对样本的一种加工，它把样本中所含的 (某一方面) 的信息集中起来。例如 $\overline{X}$ 可以用于估计未知的 μ。可以这样看：原始数据 $X_1,...,X_N$ 中的每一个，都包含有 μ 的若干信息，但这些事杂乱无章的，一经集中到 $\overline{X}$ 就有了明确的概念。

统计量有：样本均值 $\overline{X}=(X_1+...+X_n)/n$

样本方差 $S^2=\sum_{i=1}^{n}(X-\overline{X})^2/(n-1)$

样本矩，分为样本原点矩和样本中心矩。

$$a_k=(X_1^k+....+X_n^k)/n$$

称为 k 阶样本原点矩

$$m_k=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k/n$$

称为 k 阶样本中心矩

2.2 矩估计，极大似然估计，贝叶斯估计

设有一个统计总体，以 $f(x,\theta_1,...,\theta_k)$ 及其概率密度函数 (若总体分布为连续型)，或其概率函数 (若其总体分布为离散型) 。这分布包含 k 个未知参数 $\theta_1,...,\theta_k$

例如对于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$, 有 $\theta_1=\mu,\theta_2=\sigma^2$ 而

$$f(x,\theta_1,\theta_2)=(\sqrt{2\pi\theta_2})^{-1}\exp(-\frac{1}{2\theta_2}(x-\theta_1)^2),-\infty<x<\infty$$

若总体有二项分布 $B(n,p)$，则 $\theta_1=p$, 而

$$f(x,\theta_1)=\binom{n}{x}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n-x},x=0,1,...,n$$

参数估计问题的提法一般是：设有了从总体中抽出的样本 $X_1,...,X_n$ (独立同分布)，依据这些样本对参数 $\theta_1,...,\theta_k$ 的未知值做出估计。为了要估计 θ_1，需要构造出适当的统计量 $\hat{\theta_1}=\hat{\theta_1}(X_1,...,X_n)$。当有了样本 $X_1,...,X_n$ 就代入函数 $\hat{\theta_1}=\hat{\theta_1}(X_1,...,X_n)$ 算出一个值，用来作为 θ_1 的估计值。由于

未知参数 θ_1 是数轴上的一个点，用 $\hat{\theta_1}$ 去估计 θ_1，等于用一个点去估计另一个点，所以这就叫做点估计。

矩估计法

设总体分布为 $f(x,\theta_1,...,\theta_k)$，则它的矩 (原点矩和中心距都可以，以原点矩为例)，

$$\alpha_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x,\theta_1,...,\theta_k)dx$$

或

$$\sum_i x_i^m f(x_i,\theta_1,...,\theta_k)$$

依赖于 $\theta_1,...,\theta_k$.另一方面，至少在样本大小 n 较大时，α_m 又对应接近于样本原点矩 a_m，于是

$$\alpha_m = \alpha_m(\theta_1,...,\theta_k) \approx a_m = \sum_{i=1}^{n} X_i^m/n$$

并让上面的近似式改为等式，得到

$$\alpha_m(\theta_1,...,\theta_k) = a_m, m = 1,...,k$$

解此方程组，得根 $\hat{\theta_i} = \hat{\theta_i}(X_1,...,X_n), i = 1,...,k$。就以 $\hat{\theta_i}$ 作为 θ_i 的估计

关于矩估计量有如下结论:

定理：设总体 X 的均值 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2$,$(X_1,...,X_n)$ 为取自该总体的样本，则 $\overline{X}$ 是 μ 的矩估计量，S_N^2 是 σ^2 的矩估计量,S_n 是 σ 的矩估计量

极大似然估计

设总体有分布 $f(X;\theta_1,...,\theta_k)$，$X_1,...,X_n$ 为这总体中抽出的样本，则样本 $X_1,...,X_n$ 的分布为

$$f(X_1;\theta_1,...,\theta_k)f(X_2;\theta_1,...,\theta_k)...f(X_n;\theta_1,...,\theta_k)$$

记为 $L(X_1,...,X_n;\theta_1,...,\theta_k)$

固定 $\theta_1, ...\theta_k$ 而看作是 $X_1, ..., X_n$ 的函数时，L 是一个概率密度函数或概率函数。

当 $X_1, ..., X_n$ 固定，而把 L 看作是 $\theta_1, ...\theta_k$ 的函数时，它成为似然函数

用似然程度最大的点 $\theta_1^*, ..., \theta_k^*$，满足条件

$$L(X_1, ..., X_n; \theta_1^*, ..., \theta_k^*) = \max_{\theta_1, ...\theta_k} L(X_1, ..., X_n; \theta_1, ..., \theta_k)$$

这个估计 $\theta_1^*, ..., \theta_k^*$ 就叫做定 $\theta_1, ...\theta_k$ 的极大似然估计

之后可以对上式两边取对数，再求偏导

与据估计法不同，极大似然估计法要求分布有参数的形式，比如总体分布毫无所知而要估计其均值方差，极大似然法就无能为力

贝叶斯法

对点估计问题，矩估计和极大似然估计，未知参数 θ 就是简单的是一个未知数，在抽取样本之前，我们对 θ 没有任何了解，所有的信息全部来自样本

贝叶斯学派认为，在进行抽样之前，我们对 θ 有一定的知识，叫先验知识，表示这种知识在实验之前就有了。这种先验知识必须用 θ 的某种概率分布表达出来，这概率分布叫做 θ 的先验分布，这个分布总结了我们在实验之前对未知参数 θ 的知识。

贝叶斯统计的一个基本要求是：你必须设法去定出一个 θ 的先验密度 $h(\theta)$，甚至出于你自己的主观认识

如果已定下先验密度之后，怎么去得出参数 θ 的估计?

设总体有概率密度 $f(X, \theta)$, 从这总体抽样本 $X_1, .., X_n$, 则样本的密度为 $f(X_1, \theta) \cdot \cdot \cdot f(X_n, \theta)$. 它可视为在给定 θ 值时 $X_1, ..., X_n$ 的密度,$(\theta, X_1, .., X_n)$ 的联合密度为

$$h(\theta) f(X_1, \theta) \cdot \cdot \cdot f(X_n, \theta)$$

由此算出 $X_1, ...X_n$ 的边缘密度为:

$$p(X_1, ..., X_n) = \int h(\theta) f(X_1, \theta) \cdot \cdot \cdot f(X_n, \theta) d\theta$$

积分的范围，要看参数 θ 的范围而定

在给定 $X_1, ..., X_n$ 的条件下，θ 的条件密度为

$$h(\theta|X_1,...,X_n)=h(\theta)f(X_1,\theta)\cdot\cdot\cdot f(X_n,\theta)/p(X_1,...,X_n)$$

按照贝叶斯学派的观点，这个条件密度代表了我们现在 (在取得样本 $X_1,...,X_n$ 之后) 对 θ 的知识，它综合了 θ 的先验信息 (以 $h(\theta)$ 反映) 与由样本带来的信息，把上式成为 θ 的后验密度，因为他是在做了试验之后得到的。

	问 题	先验知识	当前知识	后验(现在)知识
贝叶斯公式	事件 $B_1,\cdots,B_n$ 中那一个发生了?	$P(B_1),\cdots,P(B_n)$	事件 A 发生了	$P(B_1\|A),\cdots,P(B_n\|A)$
此处的问题	$\theta=?$	$h(\theta)$	样本 $X_1,\cdots,X_n$	后验密度(2.11)

贝叶斯学派的下一个重要观点：在得出后验分布后，对参数 θ 的任何统计推断，都只能基于这个后验分布。

那么如何使用这个后验概率呢? 可以结合某种准则去进行，对点估计问题，一个常用的方法是取后验分布的均值作为 θ 的估计。

例如，作 n 次独立试验，每次观察某事件 A 是否发生，A 在每次试验中发生的概率为 p，要依据试验结果去估计 p

以往都是用频率估计概率的方法去处理。这种方法不用 p 的先验知识。以下用贝叶斯统计的观点来处理这个问题。

引进 $X_i=1,X_i=0$, 视第 i 次试验时 A 发生与否而定,$i=1,...,n.P(X_i=1)=p,P(X_i=0)=1-p$，因此 $(X_1,...,X_n)$ 的概率函数为 $p^x(1-p)^{n-x}$，x 是 $X_i=1$ 发生的次数，取 p 得先验密度 h(p), 则 p 的后验密度为

$$h(p|X_1,...,X_n)=\frac{h(p)p^x(1-p)^{n-x}}{\int_0^1 h(p)p^x(1-p)^{n-x}dp},0\le p\le 1$$

此分布的均值（其实就是期望，注意上式得分布是个对 p 定积分，已经是个无关 p 的式子了）

$$\begin{aligned}\tilde{p}=\tilde{p}(X_1,...,X_n)&=\int_0^1 ph(p|X_1,...,X_n)dp\\&=\frac{\int_0^1 h(p)p^{x+1}(1-p)^{n-x}dp}{\int_0^1 h(p)p^x(1-p)^{n-x}dp}\end{aligned}$$

$\tilde{p}$ 就是 p 在先验分布 h(p) 之下的贝叶斯估计

上式中概率 p 是需要进行估计的，h(p) 是先验知识，需要我们选择，那么如何选择呢？贝叶斯本人提出过“同等无知”的原则，即实现认为 p 取 [0,1] 内一切值都有可能，也就是说在 [0,1] 内均匀分布，这作为 p 的先验分布。这时根据均与分布，可知概率密度 h(p)=1，当 $0 \leq p \leq 1$，上式的两个积分都可以用 β 函数表示出，可得：

$$\tilde{p} = \frac{\beta(X+2, n-x+1)}{\beta(X+1, n-x+1)}$$

最终算得

$$\tilde{p} = \frac{X+1}{n+2}$$

这个估计与频率 x/n，有些差别，当 n 很大时并不显著，而在 n 很小的颇为显著。从一个角度看，当 n 相当小时，用贝叶斯估计比用 x/n 合理。因为当 n 很小的时候，试验结果可能出现 X=0 或 X=n 的极端结果，这时，依 X/n 应该把 p 估计为 0 或 1，这就太极端了。而在这两种情况下，按照贝叶斯估计，分别给出估计值为 1/(n+2) 和 (n+1)/(n+2) 就留有一定的余地。

联想：这跟在自然语言处理里面的平滑处理很像，一句话虽然没有收录在语料库中，或者人们根本不会去说，但不代表这句话不会出现，即出现的概率为 0，尤其是某些新词突然出现，比如“蓝瘦香菇”。

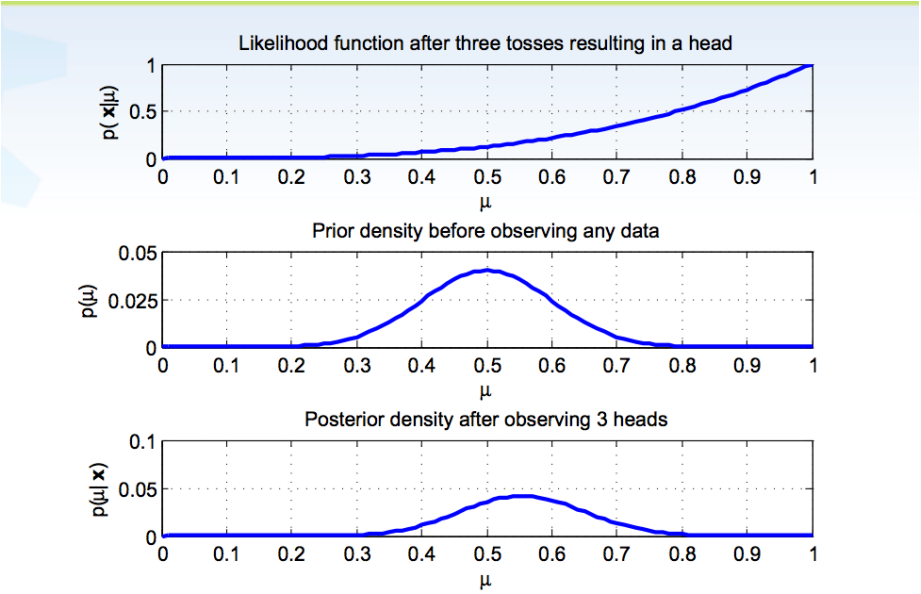
这个同等无知原则也成为贝叶斯原则，被广泛应用到其他情况，不过随着所估计的参数的范围和性质不同，该原则表现的形式也不同。

思考：其实从贝叶斯的角度来看，极大似然也算是贝叶斯估计的一种，似然函数 L 其实可以写作 $P(L|\theta)$，本质上也是概率密度函数，只是忽略了先验信息罢了。比如扔硬币，对于似然估计，用频率估计概率，一般都是先做了假设：硬币是均匀材质，正反两面情况出现的机会相等，其实已经利用到了先验信息。但是要是试验的次数很少，只有几次，或者硬币的质地并不均匀，则似然估计就不是那么适用。

贝叶斯公式其实也可以表示成：

$$p(\theta|X) = \frac{p(\theta)p(X|\theta)}{p(X)} = \frac{likelihood \cdot prior}{p(X)}$$

对扔三次硬币，针对不同的先验信息，极大似然以及贝叶斯估计的不同表现



http://www.cs.tut.fi/~hehu/SSP/lecture10.pdf

2.3 点估计的优良性准则

在考虑估计量的优劣时，必须从某种整体性能去衡量它，而不能看它在个别样本下得表现如何。整体性有两种意义：一是指估计量的某种特性，具有这种特性就是好的，否则就是不好的，如无偏性；二是指某种具体的数量性指标，两个估计量，指标小者为优，比如均方误差。

估计量的无偏性

设某统计总体的分布包含未知参数 $\theta_1, ..., \theta_k, X_1, ..., X_n$ 是从该总体抽出的样本，要估计 $g(\theta_1, ..., \theta_k)$。g 为一已知函数。设 $\hat{g}(X_1, ..., X_n)$ 是一个估计量，如果对任何可能的 $\theta_1, ..., \theta_k$ 都有

$$E_{\theta_1,...,\theta_k}[\hat{g}(X_1, ..., X_n)] = g(\theta_1, ..., \theta_k)$$

称 $\hat{g}$ 是 $g(\theta_1, ..., \theta_k)$ 的一个无偏估计量。

估计量的无偏性有两个含义。第一个含义是没有系统性的偏差，不论用

什么样的估计量 $\hat{g}$ 去估计 g，总是时而偏低，时而偏高。无偏性表示，把这些正负偏差在概率上平均起来，其值为 0.

另一个含义是估计量由无偏性，则在大量次数使用取平均时，能以接近于 100% 的把握无限逼近被估计量。如果没有无偏性，则无论是用多少次，其平均也会与真值保持一定距离——这距离就是系统误差

最小方差无偏估计

一个参数往往有不止一个无偏估计，从这些众多的无偏估计中，挑选出最优的。这牵涉到两个问题：一是为优良性制定一个准则，二是在已定的准则之下，如何找到最优者。

1. 均方误差，设 $X_1, ..., X_n$ 是从某一带参数 θ 的总体中抽出的样本，要估计 θ. 若我们采用估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, ..., X_n)$，则其误差为 $\hat{\theta}(X_1, ..., X_n) - \theta$. 这误差随样本 $X_1, ..., X_n$ 的具体值而定，也是随机的，因为其本身无法取为优良性指标。我们把它平方以消除符号，得 $(\hat{\theta}(X_1, .., X_n) - \theta)^2$, 然后取它的均值:

$$M_{\hat{\theta}}(\theta) = E_\theta[\hat{\theta}(X_1, ..., X_n) - \theta]^2$$

2. 最小方差无偏估计 (MVU 估计)。若局限于无偏估计的范围，且采用均方误差的准则，则两个无偏估计 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的比较，归结为其方差的比较：方差小者为优

估计量的相合性与渐近正态性

定义：设总体分布依赖于参数 $\theta_1, ..., \theta_k$，$g(\theta_1, ..., \theta_k)$ 是 $\theta_1, ..., \theta_k$ 之一给定函数。设 $X_1, X_2, ..., X_n$ 为该总体中抽出的样本，$T(X_1, ..., X_n)$ 是 $g(\theta_1, ..., \theta_k)$ 的一个估计量，如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P_{\theta_1,..,\theta_k}(|T(X_1, ..., X_n) - g(\theta_1, ..., \theta_k)| \geq \varepsilon) = 0$$

而且这对 $\theta_1, ..., \theta_k$ 一切可能取的值都成立,则称 $T(X_1, ..., X_n)$ 是 $g(\theta_1, ..., \theta_k)$ 的一个相合估计。

如果当样本大小无限增加时，估计量依概率收敛于被估计的值，则称该估计量是相合估计。

渐近正态性：当样本大小 $n \to \infty$ 时，其分布都渐近于正态分布

总结：估计量的相合性和渐近正态性成为估计量的大样本性质，指的是：这种性质都是对样本大小 $n \to \infty$ 来谈的，对一个固定的 n，相合性与渐近正态性都是无意义。与此相对，估计量的无偏性概念是对固定的样本大小来谈的，不需要样本大小趋于无穷。这种性质成为小样本性质。因此大小样本性质之分不在于样本的具体大小如何，而在于样本大小趋于无穷与否。

2.4 区间估计

设 $X_1, ..., X_n$ 是从该总体中抽出的样本。所谓 θ 的区间估计，就是满足条件 $\hat{\theta}_1(X_1, ..., X_n) < \hat{\theta}_2(X_1, ..., X_n)$ 的两个统计量 $\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}$ 为端点的区间 $[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}]$。一旦有了样本 $X_1, ..., X_n$，就把 θ 估计在区间 $[\hat{\theta}_1(X_1, ..., X_n), \hat{\theta}_2(X_1, ..., X_n)]$ 之内，这里有两个要求：

1.θ 要以很大的可能性落在区间 $[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}]$ 内，也就是说，概率 $P_\theta(\hat{\theta}_1(X_1, ..., X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_2(X_1, ..., X_n))$ 要尽可能大

2. 估计的精密度要尽可能高。区间的长度尽可能小

定义：给定一个很小的数 $\alpha > 0$。如果对参数 θ 的任何值，概率 $P_\theta(\hat{\theta}_1(X_1, ..., X_n) \le \theta \le \hat{\theta}_2(X_1, ..., X_n))$ 都等于 $1-\alpha$，则称区间估计 $[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}]$ 的置信系数为 $1-\alpha$.

区间估计也常称为置信区间。意思是对该区间能包含未知参数 θ 可置信到何种程度。

构造合理的区间估计的方法：

枢轴变量法

例如，设 $X_1, ..., X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，σ^2已知，要求 μ 的区间估计

先找一个 μ 的良好的点估计，在此可以选择样本均值 $\overline{X}$。由总体为正态易知

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$$

以 Φ 记为 N(0,1) 的分布函数。对 $0 < \beta < 1$，用方程

$$\Phi(\mu_\beta) = 1 - \beta$$

定义记号 μ_β 为分布 N(0,1) 的上 β 分位点。其意义是：N(0,1) 分布中大于 μ_β 的那部分的概率就是 β. 如下图画的是 N(0,1) 的密度函数，涂黑的部分标出的面积就是 β

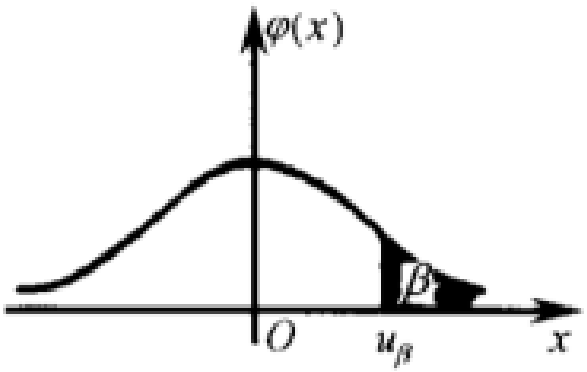


图 4.2

由上面的式子以及 $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$ 有

$$P(-\mu_{\alpha/2} \le \sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma \le \mu_{\alpha/2} = \Phi(\mu_{\alpha/2}) - \Phi(\mu_{\alpha/2}) \\ = (1 - \alpha/2) - \alpha/2 = 1 - \alpha$$

可以改写为:

$$P(\overline{X} - \sigma\mu_{\alpha/2}/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{X} + \sigma\mu_{\alpha/2}/\sqrt{n})$$

此式指出:

$$[\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}] = [\overline{X} - \sigma\mu_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \overline{X} + \sigma\mu_{\alpha/2}/\sqrt{n}]$$

可作为 μ 的区间估计，置信系数为 $1 - \alpha$

方法可总结为:

1. 找到一个与要估计的参数 $g(\theta)$ 有关的统计量 T，一般是其良好的点估计（此例 T 为 $\overline{X}$

2. 设法找出 T 和 $g(\theta)$ 的某一函数 $S(T, g(\theta))$, 其分布 F 要与 θ 无关（此例中，$S(T, g(\theta))$ 为 $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma$，分布 F 就是 Φ.S 成为枢轴变量。

3. 对任何常数 a < b，不等式 $a \le S(T, g(\theta)) \le b$ 要能够改写成为等价的形式 $A \le g(\theta) \le B$，A，B 只与 T,a,b 有关而与 θ 无关

4. 取分布 F 的上 $\alpha/2$ 分位点 $\omega_{\aleph/2}$ 和上 $1-\alpha/2$ 分位点 $\omega_{1-\aleph/2}$。有 $F(\omega_{\aleph/2})-F(\omega_{1-\aleph/2})=1-\alpha$, 因此

$$P(\omega_{1-\aleph/2}\leq S(T,g(\theta))\leq\omega_{\aleph/2})=1-\alpha$$

得到某个具体的区间后，μ 是一个虽然未知，但其值确定的数。区间包含 μ，或者不包含，二者只居其一。说这区间的置信系数是 0.95，其确切的意义应当是：它是根据所有的数据，用一个置信系数为 0.95 的方法作出的。可见置信系数一词是针对方法：用这方法作出的区间估计，平均 100 此种 95 次包含所要估计的值。一旦算出具体区间，就不能再说它有 95% 的机会包含要估计的值了。比如一个人擅长挑选西瓜：他挑选的西瓜，平均 100 个中有 95 个好的。某天他给你挑一个，结果或好或坏，必居其一，不是 95% 的好。但是考虑到它挑瓜的技术，我对他挑的比较放心，这就是置信系数。

大样本法

主要利用中心极限定理，以建立枢轴变量

贝叶斯法

在有了先验分布密度 $h(\theta)$ 和样本 $X_1,...,X_n$ 后,算出后验密度 $h(\theta|X_1,..,X_n)$，再找两个数 $\hat{\theta_1},\hat{\theta_2}$ 都与 $X_1,...,X_n$ 有关，使得：

$$\int_{\hat{\theta_1}}^{\hat{\theta_2}}h(\theta|X_1,...,X_n)d\theta=1-\alpha$$

区间 $\hat{\theta_1},\hat{\theta_2}$ 的意思是：在所得后验分布之下，θ 落在这区间的概率为 $1-\alpha$

3 假设检验

Statistics	Computer Science	Meaning
estimation	learning	using data to estimate an unknown quantity
classification	supervised learning	predicting a discrete Y from $X \in \mathcal{X}$
clustering	unsupervised learning	putting data into groups
data	training sample	$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$
covariates	features	the X_i's
classifier	hypothesis	a map from covariates to outcomes
hypothesis	—	subset of a parameter space Θ
confidence interval	—	interval that contains unknown quantity with a prescribed frequency
directed acyclic graph	Bayes net	multivariate distribution with specified conditional independence relations
Bayesian inference	Bayesian inference	statistical methods for using data to update subjective beliefs
frequentist inference	—	statistical methods for producing point estimates and confidence intervals with guarantees on frequency behavior
large deviation bounds	PAC learning	uniform bounds on probability of errors

4 不等式

4.1 Markov and Chebychev Inequalities

Markov's Inequality: X 是非负的随机变量，同时假设 E(X) 存在，对任意的 t>0，有：

$$P(X > t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

PROOF:

$$\begin{aligned} E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx &= \int_0^t x f(x) dx + \int_t^\infty x f(x) dx \\ &\geq \int_t^\infty x f(x) dx \\ &\geq t \int_t^\infty f(x) dx = t P(X > t) \end{aligned}$$

Chebyshev's inequality: 让 $\mu = E(X), \sigma^2 = V(X)$, 然后有：

$$P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}, P(|Z| \geq k) \leq \frac{1}{k^2}, Z = (X - \mu)/\sigma$$

PROOF:

use Markov's inequality to conclude that:

$$P(|X-\mu| \geq t) = P(|X-\mu|^2 \geq t^2) \leq \frac{E(X-\mu)^2}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}$$

the second part follows by setting $t = k\sigma$

$$P(|X-\mu|) \geq k\sigma) = P(|X-\mu|/\sigma \geq k) = P(|Z| \geq k) \leq \frac{1}{k^2}$$

4.2 Hoeffding's Inequality

Theorem:

let $Y_1, ..., Y_n$ be independent observations such that $E(Y_i) = 0$,and $a_i \leq Y_i \leq b_i, \epsilon > 0$, for any t > 0

$$P(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \epsilon) \leq e^{-t\epsilon} \prod_{i=1}^{n} e^{t^2(b_i-a_i)^2/8}$$

Theorem:

let $X_1, ..., X_n \sim Bernoulli(p)$, then for any $\epsilon > 0$,

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2}, \overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$$

Fix $\alpha > 0$ and let

$$\epsilon_n = \{\frac{1}{2n}\log(\frac{2}{\alpha})\}^{1/2}$$

By Hoeffding's inequality,

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2} = \alpha$$

let $C = (\overline{X}_n - \epsilon, \overline{X}_n + \epsilon)$.

$$P(p \notin C) = P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leq \alpha$$

So

$$P(p \in C) \geq 1 - \alpha$$

所以随机变量 p 以 $1-\alpha$ 的概率落在随机区间 C 中

4.3 Cauchy-Schwarz and Jensen Inequalities

Cauchy-Schwarz inequality： If X and Y have inite variances then

$$E|XY| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$$

Jensen's Inequality: If g is convex then

$$Eg(X) \geq g(EX)$$

if g is concave then

$$Eg(X) \leq g(EX)$$

PROOF:

假设直线 L(x)=a+bx，与 g(x) 的切点在 E(X), 因为 g 是凸函数，曲线位于直线 L 之上，所以

$$Eg(X) \geq E(L) = E(a + bX) = a + bE(X) = L(E(X)) = g(E(X))$$

由上式可知，$EX^2 \geq (EX)^2, E(1/X) \geq 1/E(X)$

参考文献

[1] 陈希孺：概率论与数理统计

[2] 茆诗松：贝叶斯统计

[3] all of statistics