1 分析基础

1.1 实数公理、确界、不等式

1.1.1 解:

$$\because \max\{|a+b|,|a-b|\}<1/2$$

$$\therefore |a+b|<1/2,|a-b|<1/2$$

$$|a+b+a-b|\le|a+b|+|a-b|<1 \therefore 2|a|<1,|a|<1/2$$

同理

$$\therefore |a+b|<1/2,|b-a|<1/2$$

$$|a+b+b-a|\le|a+b|+|b-a|<1 \therefore 2|b|<1,|b|<1/2$$

1.1.2 解:

若 $|1-b|\ge 1/2$, 结论 $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\ge 1/2$ 显然成立

若 $|1-b|<1/2$, 可知 $1/2<b<3/2$, 使用反证法，假设 $\max\{|a+b|,|a-b|\}<1/2$, 根据上题的结论，此时 $|b|<1/2$，不符合

$$\therefore \max\{|a+b|,|a-b|\}\ge 1/2$$

1.1.3 解:

1. 若 $a>b$, 则

$$\max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}=\frac{a+b+a-b}{2}=a$$

$$\min\{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}=\frac{a+b-a+b}{2}=b$$

2. 若 $a<b$, 则

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = b$$

$$\min\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a$$

视 $\max\{a,b\}, \min\{a,b\}$ 为未知数，建立方程组

$$\begin{cases} \max\{a,b\} + \min\{a,b\} = a+b \\ \max\{a,b\} - \min\{a,b\} = |a-b| \end{cases}$$

1.1.4 解:

$$f(x) \leq \sup_{x\in X} f(x), f(y) \leq \sup_{x\in X} f(x)$$

$$f(x) \geq \inf_{x\in X} f(x), f(y) \geq \inf_{x\in X} f(x$$

$$f(x) - f(y) \leq \sup_{x\in X} - \inf_{x\in X} f(x)$$

或者

$$f(y) - f(x) \leq \sup_{x\in X} - \inf_{x\in X} f(x)$$

即

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{x\in X} - \inf_{x\in X} f(x), \forall x, y \in X$$