

Assignment 10

1. Consider a forward SDE

$$dx_t = f(x_t, t) dt + g(x_t, t) dW_t,$$

show that the corresponding probability flow ODE is written as

$$dx_t = \left[f(x_t, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2(x_t, t) - \frac{g^2(x_t, t)}{2} \frac{\partial}{\partial x} \log p(x_t, t) \right] dt.$$

The corresponding Fokker-Planck equation (FP) :

$$\frac{\partial}{\partial t} p = - \frac{\partial}{\partial x} (f p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2 p)$$

Probability flux form : $\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x}$, where the probability flux is defined as : $J(x, t) = f(x, t)p(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (g^2(x, t)p(x, t))$

For a deterministic ODE $\frac{dx_t}{dt} = v(x_t, t)$, the density $p(x, t)$ satisfies the continuity equation : $\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (v p)$.

Comparing equations : $v p = J = f p - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (g^2 p)$

$$\Rightarrow v = f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (g^2 p).$$

Applying product rule : $\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial x} (g^2 p) = \frac{\partial}{\partial x} g^2 + g^2 \frac{\partial}{\partial x} \log p$,

$$\Rightarrow v(x, t) = f(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} g^2(x, t) - \frac{1}{2} g^2(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \log p(x, t).$$

Substituting v back into $v(x_t, t) = \frac{dx_t}{dt}$, we obtain

$$dx_t = [f(x_t, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_t} g^2(x_t, t) - \frac{1}{2} g^2(x_t, t) \frac{\partial}{\partial x_t} \log p(x_t, t)] dt.$$

AI 的未來與機器學習的基石——氣候與永續發展

1. AI 的未來能力

目前的人工智慧雖能協助進行氣候預測與能源分析，但仍屬於被動的輔助工具。它可以告訴我們氣溫將上升、能源需求將增加，卻無法主動提出全球層級的永續解決方案。我認為在未來二十年內，AI 有可能達成一項具有重大意義的能力——自主發現並實施全球能源與氣候最佳化策略。

這項能力的核心在於整合多層次的資訊，包括氣候變化模型、能源供需、經濟活動以及人類行為。未來的 AI 不僅能預測氣候趨勢，更能在模擬環境中試驗政策：例如在虛擬城市中模擬不同碳稅制度與政策的長期影響，尋找環境與經濟的平衡點。如此一來，AI 不僅僅是分析工具，而是進化為決策者，在全球層面協調人類行為以減緩氣候變遷。

2. 涉及的機器學習模型

- **監督式學習 (Supervised Learning)**：可用來建立氣候與能源預測模型，從歷史資料中學習氣溫、降雨量、碳排放與能源使用等之間的的關聯。資料來源包括氣象觀測、衛星影像與能源市場資料及產業活動紀錄；目標訊號則是實際測量到的氣候或能源指標。
- **非監督式學習 (Unsupervised Learning)**：在複雜的多維資料中自動辨識具有相似能源結構或氣候特徵的地區，發現潛在模式。
- **強化學習 (Reinforcement Learning)**: 讓 AI 能在模擬的氣候——經濟環境中自主嘗試政策行動，根據獎勵訊號（如溫度穩定、碳排減少、經濟成長）學習長期最優策略。

3. 第一步的模型化

作為第一步的研究，可設計一個「能源—氣候—經濟互動模擬環境」，捕捉三者之間的關係。在此模型中，AI 控制變數如再生能源比例或碳稅政策，觀察對氣溫、碳排放與經濟指標的長期影響，目標是最小化氣候變化與經濟損失。若 AI 能在不同初始條件下產生穩定、合理的決策策略，即代表模型成功。過程 AI 需結合數值模擬、強化學習、監督式預測與貝氏不確定性分析等工具。透過這樣的簡化模型，AI 能在有限的資訊與多重目標之間學習如何取得平衡，逐步發展出協調全球永續策略的能力，最終將此智慧決策機制推廣至真實世界。

3. Unanswered Questions

There are unanswered questions from the lecture, and there are likely more questions we haven't covered.

- Take a moment to think about these questions.
- Write down the ones you find important, confusing, or interesting.
- You do **not** need to answer them—just state them clearly.

Why does the PF-ODE produce the same marginal density as the forward SDE even though it contains no randomness?

Is there any intuitive explanation beyond matching the Fokker-Planck equation?