政治经济学讲义

作者：陈伟凯

中国人民大学经济学院

第四章　劳动价值论：简单线性模型

内容提要

- ❑ 简单线性模型
- ❑ 生产性条件
- ❑ 价值定义的两种不同诠释
- ❑ 价值向量的图示

4.1 导言

我们在上一讲“价值与商品拜物教”中主要讨论了价值理论质的方面，分析了在商品经济条件下劳动产品成为商品、劳动表现为价值的逻辑过程，重点阐释了“价值不是物，而是体现在物上的商品生产者之间彼此交换劳动的社会关系”这一核心观点。这一讲将重点讨论价值理论量的方面，并运用简单的数理模型加以表达，着重价值量的两种不同诠释以及相关的假设，并初步介绍理论模型与实际数据之间的关系。

4.2 简单线性模型

模型的目的不在于完全地反映现实，而是根据要回答的问题对现实做出适当的简化。一个 1:1 的地图是没有意义的，人们往往根据自己的需要选择不同的地图，作战用的军事地图和旅行用的交通地图就是根据不同的目的对现实进行不同的抽象和简化。我们这里要介绍的简单线性模型也是对现实的一种简化，在此处主要用于说明价值量的决定。模型是检验理论自洽性的工具，如果一种理论逻辑在简单模型中都不成立，就遑论复杂的现实了。

下面我们来看一个特别简单的模型。假定这个社会中只有两种不同的产品，所有劳动都是同质的简单劳动，都是在现有社会正常的生产条件下、社会平均的劳动熟练程度和劳动强度下进行的劳动[1]。因为我们的目的不在于讨论技术变化和技术选择（choice of technique）的问题，所以在这个简单的模型中我们假定生产这两种产品的技术各有一种且都是给定的，用下面式子来表示：

$$a_{11}\text{单位的商品一} + a_{21}\text{单位的商品二} + l_1\text{小时的劳动} \longmapsto 1\text{单位的商品一}$$

$$a_{21}\text{单位的商品一} + a_{22}\text{单位的商品二} + l_1\text{小时的劳动} \longmapsto 1\text{单位的商品二}$$

这些式子隐含了若干个假定。比如说一个生产过程只有一种产出，而没有别的副产品，我们称其为简单生产（simple production）[2] 另一个假定是线性，即如果把生产规模扩大常数倍，需要投入的生产资料和劳动也扩大相应的倍数。

生产过程投入的生产资料，往往不只反映技术数量关系，正如马克思所说的，“劳动资料不仅是人类劳动力发展的测量器，而且是劳动借以进行的社会关系的指示器。”[5] 第 210 页 这个问题我们会在后面讨论劳动过程的时候进一步展开，在这里，我们首先关心的是价值量的决定问题，所以就只把生产过程抽象为一个简单的数量关系。

为了简单表示，我们把上面生产过程的数理关系用下面的向量形式来表示：

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} \oplus l_1 \longmapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} \oplus l_2 \longmapsto \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

[1] 这个假定有助于让我们暂开复杂劳动与简单劳动之间的换算问题，即所谓的“还原问题”（Reduction Problem）[7, 8]

[2] 这就是我们的模型叫做 简单线性模型的原因。对应地，如果一个生产过程有多种产出，就叫做联合生产（joint production），联合生产下价值量的决定方式和我们这里讨论的简单生产不完全相同

或者用更紧凑的方式表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \oplus (l_1, l_2) \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

我们把代表投入品的数组称为矩阵 A，劳动的投入向量记为 l。这样简单线性模型中的技术关系就可以用 (A, l) 来表示。一般地，矩阵 A 的每一列表示一个生产过程的投入品，元素 a_{ij} 表示生产 1 单位产品 j 所需要投入的产品 i 的量。

4.3 价值的两种定义

在上述简单线性模型 (A, l) 中，我们重新来考察价值的定义：

定义 4.1 (价值量)

商品的价值量由生产一单位该商品所需的社会必要劳动时间决定，即在现有的社会正常的生产条件下，在社会平均的劳动熟练程度和劳动强度下生产一单位该商品所需要的劳动时间。♣

这一定义看似明确无误，但什么叫做生产一单位该商品所需要的劳动时间呢？细究起来却有两种不同的解释。

第一种解释是生产 1 单位该商品所需要的直接和间接的劳动，也就说除了在这个生产过程中直接投入的劳动外，还要把制造生产资料所需要的劳动也算进去。

“工作把一定量的劳动——撇开他的劳动所具有的特定的内容、目的和技术性质不说——加到劳动对象上，也就是把新价值加到劳动对象上。另一方面我们发现，被消耗的生产资料的价值又成了产品价值的组成部分，例如，棉花和纱锭的价值包含在棉花的价值中。可见，生产资料的价值由于转移到产品上而被保存下来。”[5] 第 232 页

这里新价值的量就由直接投入的劳动时间来衡量，而被“转移”产品上的生产资料的价值就是间接的劳动。按照这种解释，在简单线性模型中，我们可以用下面的式子来定义两种产商品的价值 λ_1 和 λ_2，

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + l_1 &= \lambda_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + l_2 &= \lambda_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

这是一个二元一次方程组，有两个未量 (λ_1, λ_2) 和两个方程式。如果用向量点积形式来表达，可以写为

$$(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (a_{11}, a_{21}) + l_1 = \lambda_1$$
$$(\lambda_1, \lambda_2) \cdot (a_{12}, a_{22}) + l_2 = \lambda_2$$

为了节约空间，我们令 $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$，然后用更紧凑的方式来表达：

$$\Lambda A + l = \Lambda$$

由此我们可以得到在简单线性模型中价值的一个定义：

定义 4.2

假定简单线性生产技术 (A, l)，单位价值量 Λ 由下式决定

$$\Lambda A + l = \Lambda \tag{4.3}$$

任一商品束 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 的价值量为 $\Lambda y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. ♣

例题 4.1 假设 $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$, $l = (0.3, 0.4)$，则方程组 (4.3) 为

$$0.1\lambda_1 + 0.3\lambda_2 + 0.3 = \lambda_1$$
$$0.4\lambda_1 + 0.2\lambda_2 + 0.4 = \lambda_2$$

可得单位价值向量 $\Lambda = (0.6, 0.8)$.

接下来我们看定义4.1的第二种诠释: 生产 1 单位该商品所需要的劳动时间还可能理解为把 1 单位这种商品作为净产品生产出来所需的直接劳动投入。假如说生产 x_1 单位的商品 1 和 x_2 单位的商品 2，那么需要投入的生产资料为

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}, \text{其中} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

净产品就是总产品扣除掉投入的生产资料，即

$$x - Ax = \begin{bmatrix} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{bmatrix}$$

假如我们要计算 1 单位商品一的价值，那么我们就要先算出相应的总产品来，即

$$x - Ax = \begin{bmatrix} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这同样是一个二元一次方程组，它的解 x 就代表了要得到 1 单位商品的净产品需要生产的总产品。得到总产品以后以后就可以求出直接投入总劳动为 $\ell x = \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2$. 由此，我们可以得到下面的定义

定义 4.3

假定简单线性生产技术 (A, l)，任意商品束 y 价值量等于

$$lx = l_1 x_1 + l_2 x_2 \tag{4.4}$$

其中 x 由下式决定

$$x - Ax = y \tag{4.5}$$

♣

练习 4.1 假设技术 (A, l) 同例题4.1，问要把 1 单位商品一作为净产品生产出来需要生产多少商品一和商品二? 由定义 4.3得到的 1 单位商品一的价值量是多少? 与例题 4.1中得到的结果相同吗?

借助简单线性模型,我们说明了对价值定义的两种诠释。那么在该模型下由于不同诠释产生的两个定义4.2和4.3是不是等价的呢?

事实上，我们可以在数学上证明二者是一致的，也就是说生产任一商品所需要的劳动既可以理解为生产该商品所需要的直接与间接劳动，也可以理解为把该商品作为净产品生产出来所需的全部直接劳动。第一种诠释是历史的纵向的，是在当前的技术条件下把一个商品从无到有一步一步生产出来需要耗费的总劳动。第二种诠释是社会的横向的，是社会上各个生产部门按照某种比例同时进行生产所投入的全部的直接劳动。

练习 4.2 假定 $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$, $l = (0.1, 0.1)$，求价值向量 Λ，这个结果合理吗? 为什么? 若总产出为 $x = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$，求投入生产资料的数量，总产出能够完全补偿生产资料吗?

得到上述两个定义以后，我们还要问它们是不是定义良好 (well-defined) 的，比如说会不会出现方程(4.3)没有解，或者有解但是出现负数解的情况? 是不是任意商品组合 y 都可能作为净产品生产出来，即是不是对任何 y，方程组(4.5)都有非负解?

事实上，要保证这两种诠释定义良好，须假定技术投入矩阵 A 满足一定的生产性条件，严格地说明这个问题都需要用到一些线性代数的知识，我们把它放在附录里供有相关背景的读者参考。下面我们利用图示对生产性条件和价值向量进行一些说明。

4.4 生产性条件

由上一节我们知道要让定义 4.3有意义，不出现负的价值，就需要保证 (4.5)对任何 y 都有非负解，也就是说要技术条件需要满足一定的条件保证对任意商品组合 y，都存在一种总产出规模 x 使 y 作为净产品生产出来。这乍看起来是一个很苛刻的条件，但是我们下面会"证明"这一条件等价于如下条件

定义 4.4 (生产性)

对于技术投入矩阵 A，如果存在一种总产出规模使得净产品非负且不为零，我们就说该技术矩阵具有生产性（productive）。换言之，

$$A\text{具有生产性} \Leftrightarrow \exists x \geq 0 \text{ s.t. } y = x - Ax \geq 0$$

♣

注 我们说一个向量 $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq 0$ 非负且不为零，是指它的分量都大于等于零，且至少有一个分量大于零，即 $y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0$ 且 $y_1 + y_2 > 0$.

为了方便在图上表示，我们先由每个生产过程的投入品向量推导出净产品向量。生产 1 单位某种商品最终得到的净产品就是总产出扣除掉投入品，即

$$n_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} \\ -a_{21} \end{bmatrix}, \text{同理 } n_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ 1 - a_{22} \end{bmatrix}$$

✍ **练习 4.3** 生产 2 单位商品 1 能得到多少净产品？生产 3 单位商品 2 呢？或生产 x_1 单位的商品 1 和 x_2 单位的商品 2 呢？（结果请用 n_1 和 n_2 的代数式表示）

✍ **练习 4.4** 请使用例题4.1中的 A 计算出净产品向量 n_1 和 n_2，并在平面图中画出这两个向量。你能找到向量 $n_1 + 2n_2$ 吗？它代表什么呢？

✍ **练习 4.5** 请使用练习4.2中的 A 重复上题，你有什么发现吗？

4.A 线性代数

待完成

4.B 证明

待完成

参考文献

[1] 国家统计局. 2018 年全国时间利用调查公报[EB/OL]. (2019-01-25) [2020-08-15]. http://www.stats.gov.cn/tjsj/zxfb/201901/t20190125_1646796.html.

[2] 海尔布罗纳, 米尔博格. 经济社会的起源[M]. 上海人民出版社, 2012. 219 pp.

[3] 萨林斯. 石器时代经济学[M]. 张经纬, 郑少雄, 张帆, 译. 生活· 读书· 新知三联书店, 2019. 435 pp.

[4] 费孝通. 江村经济[M]. 戴可景, 译. 北京大学出版社, 2012. 265 pp.

[5] 马克思. 资本论(第一卷)[M]. 中共中央马克思恩格斯列宁斯大林著作编译局, 译. 人民出版社, 2004. 1127 pp.

[6] 马克思, 恩格斯. 共产党宣言[M]. 中共中央马克思恩格斯列宁斯大林著作编译局, 译. 北京: 人民出版社, 1997. 82 pp.

[7] HARVEY P. The Value-Creating Capacity of Skilled Labor in Marxian Economics[J]. Review of radical political economics., 1985.

[8] ITOH M. Skilled Labour in Value Theory[J]. Capital & Class, 1987, 11(1): 39-58.