

Zestaw schematów i wskazówek

Niezbędna wiedza:

Podstawowe symbole i sposoby zapisu:

- \in - należy do; używamy gdy jakaś liczba x jest w jakimś przedziale/zbiorze; np. $x \in \langle 3, 5 \rangle$ znaczy że x to liczba między 3 a 5 czyli $3 \leq x \leq 5$
- $\langle a, b \rangle$ - przedział obustronnie zamknięty od a do b ; czyli wszystkie liczby x takie że: $a \leq x \leq b$; zapis $[a, b]$ znaczy to samo
- (a, b) - przedział obustronnie otwarty od a do b ; czyli wszystkie liczby x takie że; $a < x < b$
- \cup - "lub" między zbiorami; używamy gdy jakaś liczba należy do jednego zbioru lub do drugiego np. zbiór wszystkich liczb takich że są między 0 a 2 lub między 4 a 8 zapiszemy: $x \in (0, 2) \cup (4, 8)$
- \mathbb{D} - oznaczenie dziedziny funkcji czyli tych x których możemy użyć/ które wrzucamy do funkcji
- ZW_f lub ZW - oznaczenie zbioru wartości funkcji, czyli liczb $f(x)$ lub y które powstają po wrzuceniu x z dziedziny do funkcji
- miejsce zerowe x_0 - taki x który jest w dziedzinie że $f(x_0) = 0$; czyli wykres funkcji przecina oś x-sów Ox
- x - nazywane rozwiązaniami, argumentami

Wiedza na temat równań

Dziedzina równania- \mathbb{D} podobnie jak dziedzina funkcji to wszystkie liczby x które można wsadzić do równania.

Zbiór rozwiązań równania to wszystkie liczby x takie że równanie jest spełnione.

$$\frac{x-5}{x-1} = 0$$

np. dziedziną \mathbb{D} równania powyżej jest $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{1\}$ dlatego że dla $x = 1$ dzielimy przez 0 czego nie wolno robić.

A zbiorem rozwiązań jest $\{5\}$ ponieważ dla $x = 5$ mamy:

$$\frac{5-5}{5-1} = \frac{0}{4} = 0$$

UWAGA: Kiedy wyznaczamy dziedzinę najważniejsze jest żeby uwzględnić:

- dzielenie przez 0 - jeśli gdziekolwiek w mianownikach pojawia się x to trzeba uwzględnić że nie może być on zerem. np. dla równania powyżej: w mianowniku mamy $x - 1$ więc $x - 1 \neq 0$ więc $x \neq 1$
- pierwiastki z x pod pierwiastkiem, np. $\sqrt{x-2}$ to $x - 2$ musi być większe lub równe 0 to znaczy $x - 2 \geq 0$ więc $x \geq 2$

Pamiętaj też, że podczas rozwiązywania nierówności gdy mnożysz/dziелisz przez liczbę ujemną to musisz zmienić znak nierówności. Np. $5 > 2$ mnożymy obustronnie razy -1 więc mamy $-5 < -2$ musieliśmy zmienić stronę nierówności ($>$ zmieniło się na $<$) żebyśmy dalej mieli coś prawdziwego.

Wiedza potrzebna do zadań statystycznych

Średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

gdzie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ to obserwacje cechy (np. wzrost, wynagrodzenie) a n to liczebność (ile ich jest)

Średnia ważona:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_{n-1} w_{n-1} + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} + w_n}$$

gdzie $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ to wagi czyli liczebności poszczególnych grup obserwacji (np. 7 osób ma 180cm wzrostu, wtedy $w_1 = 7$ a $x_1 = 180cm$)

Dominanta/moda:

Wartość występująca najczęściej - najwyższy słupek/część na wykresie. Jeśli mamy oceny ludzi z klasy 2,2,2,3,4,5 to dominanta = 2, jeśli oceny byłyby 2,2,3,3,4,5 to dominanta nie ma bo wartości 2 i 3 występują najczęściej i po równo

Mediana: (UWAGA: wartości muszą być ustawione niemalejąco.)

Wartość w środku obserwacji ustawionych rosnąco jeśli jest ich nieparzysta ilość.

Np. oceny w klasie 1,1,2,3,3,4,5 mamy 7 wartości a środkowa jest 4-czwarta wartość od lewej ($7:2 = 3,5$ i zaokrąglamy) więc mediana = 3

Średnia arytmetyczna z dwóch środkowych obserwacji jeśli jest ich parzysta ilość.

Np. oceny w klasie 1,1,2,3,4,4,5,6 mamy 8 wartości, więc liczymy średnią arytmetyczną z dwóch środkowych wartości mediana = $\frac{3+4}{2} = 3,5$ (środkowe wartości to 3 i 4 bo $8:2 = 4$ a 8 parzyste więc bierzemy 4-czwartą i 5-piątą wartość w kolejności od lewej strony)

WW - Ważne wskazówki do całości:

- Gdy coś gdzieś wstawiamy, np. do wzoru, to zawsze w nawiasie, jest bezpieczniej bo robiąc to krok po kroku z nawiasami nie pomylimy znaków.
- kolejność wykonywania działań:
(nawiasy) -> (potęgi) -> (mnożenie i dzielenie) -> (dodawanie i odejmowanie)
np. $2 : 2 + 2 \cdot 2 - (2 + 3)^2$ rozwiązujemy zaczynając od nawiasu czyli $2+3=5$ więc mamy: $2 : 2 + 2 \cdot 2 - 5^2$ następnie potęgi $5^2 = 25$ więc mamy:
 $2 : 2 + 2 \cdot 2 - 25$, teraz mnożenie czyli $2 : 2 = 1, 2 \cdot 2 = 4$ więc mamy:
 $1 + 4 - 25$ i teraz już dodawanie i odejmowanie:
 $1 + 4 - 25 = 5 - 25 = -20$

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $2024 : \left(1 - \frac{1}{2025}\right) - \left(1 - \frac{2025}{2024}\right) : \frac{1}{2024}$ jest równa

A. 0

B. 1

C. 2024

D. 2026

Wyjaśnienie: To co chcemy zrobić to rozwiązanie tego, musimy się przy tym kierować kolejnością wykonywania działań. (Patrz sekcje WW - ważne wskazówki). Zaczynamy więc od nawiasów:

$$\begin{aligned} & 2024 : \left(1 - \frac{1}{2025}\right) - \left(1 - \frac{2025}{2024}\right) : \frac{1}{2024} = \\ & = 2024 : \left(\frac{2025}{2025} - \frac{1}{2025}\right) - \left(\frac{2024}{2024} - \frac{2025}{2024}\right) : \frac{1}{2024} = \\ & = 2024 : \left(\frac{2025-1}{2025}\right) - \left(\frac{2024-2025}{2024}\right) : \frac{1}{2024} = \\ & = 2024 : \left(\frac{2024}{2025}\right) - \left(\frac{-1}{2024}\right) : \frac{1}{2024} = (*) \end{aligned}$$

teraz możemy zająć się mnożeniem i dzieleniem. Nie lubimy dzielić przez ułamki więc obracamy je do góry nogami i zamieniamy dzielenie na mnożenie (mnożymy przez odwrotność)

$$\begin{aligned} (*) & = 2024 \cdot \left(\frac{2025}{2024}\right) - \left(\frac{-1}{2024}\right) \cdot \frac{2024}{1} = \\ & = \cancel{2024} \cdot \left(\frac{2025}{\cancel{2024}}\right) - \left(\frac{-1}{\cancel{2024}}\right) \cdot \frac{\cancel{2024}}{1} = 2025 - \frac{-1}{1} \\ & = 2025 - (-1) \text{ teraz zostaje nam dodawanie i odejmowanie, tu jest już łatwo} \\ & = 2025 + 1 = 2026 \text{ więc nasza odpowiedź to D.} \end{aligned}$$

Zadanie 2. (0–2)

Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej.

Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A–D oraz odpowiedź spośród E–H.

1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y

- A.** o 40% pensji pana Y.
B. o 90% pensji pana Y.
C. o 150% pensji pana Y.
D. o 275% pensji pana Y.

2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X

- E.** o 60% pensji pana X.
F. o 73% pensji pana X.
G. o 90% pensji pana X.
H. o 150% pensji pana X.

[illegible]

Wyjaśnienie:

Zadanie 6. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{\sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54}}$ jest równa

A. $\sqrt[3]{\frac{76}{49}}$

B. (-1)

C. 4

D. $4\sqrt[3]{2}$

[illegible]

Wykazano, że

Wyjaśnienie:

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $|\sqrt{5} - 1| - 3|2 - \sqrt{5}|$ jest równa

- A.** (-7)
- B.** $5 - 4\sqrt{5}$
- C.** $4\sqrt{5} - 7$
- D.** $5 - 2\sqrt{5}$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

Wyjaśnienie:

Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi 3% w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym.

Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%)

- A. 30%** **B. 34%** **C. 36%** **D. 43%**

A blank sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 15 rows, providing a structured space for drawing or writing.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_2 \left[(\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot (\sqrt{2})^8 \right]$ jest równa

- A.** $\sqrt{2}$ **B.** 7 **C.** 14 **D.** 2^7

[illegible]

Wyjaśnienie:

Zadanie 12. (0–1)

Dane są liczby $a = \log_2(3\sqrt{5} + \sqrt{13})$ oraz $b = \log_2(3\sqrt{5} - \sqrt{13})$.

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $a + b$ jest równa

- A.** $\log_2 45$ **B.** $\log_2 30$ **C.** 4 **D.** 5

[illegible]

Wyjaśnienie:

Zadanie 14. (0–2)

Dane są liczby $a = \sqrt{5} - 2$ oraz $b = \sqrt{5} + 2$.

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ dla podanych a i b .

[illegible]

Wyjaśnienie:

Zadanie 15. (0–2)

Dana jest liczba $x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$, gdzie a należy do zbioru liczb rzeczywistych.
W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ są niewymierne.

Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Liczba x jest wymierna dla

- A.** $a = 5$
B. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0,3$
C. $a = 6$
D. $a = -2\sqrt{6} + 12,5$
E. $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$
F. $a = -\sqrt{6}$

Wyjaśnienie:

Zadanie 16. (0–1)

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{x - 2}{x}$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x .	P	F
2.	Jeżeli wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona, to $W(x) = \frac{2x}{x+2}$.	P	F

[illegible]

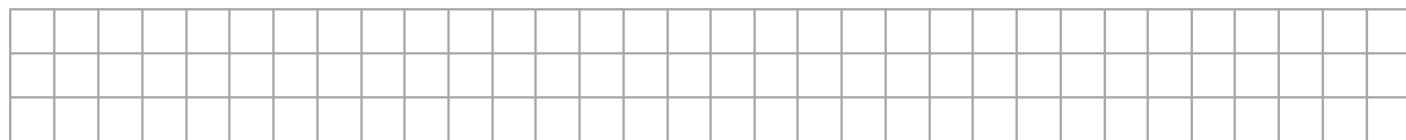
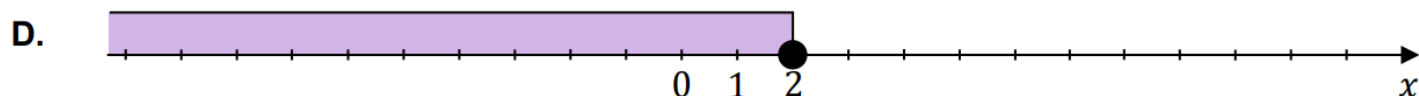
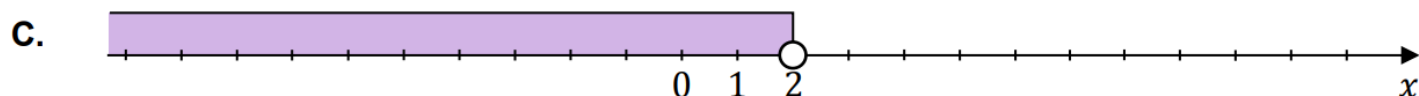
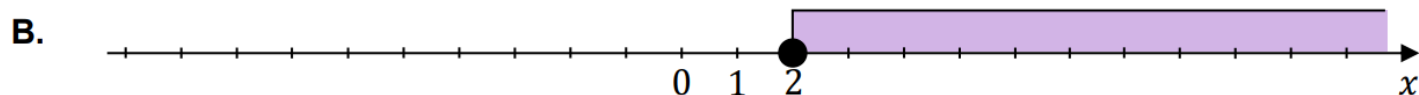
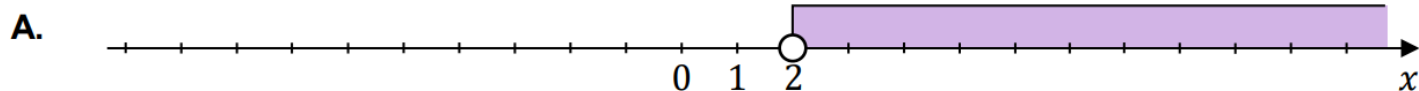
Wyjaśnienie:

Zadanie 17. (0–1)

Dana jest nierówność

$$\frac{2x - 1}{2} - \frac{x + 2}{3} \geq \frac{1}{6}$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.



Wyjaśnienie:

Zadanie 18. (0–3)

Dane jest równanie

$$\frac{2}{2x+1} = \frac{x-1}{x+2}$$

Wyznacz dziedzinę tego równania. Rozwiąż to równanie.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of thin, light gray horizontal and vertical lines forming small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Wyjaśnienie:

Zadanie 21. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układ równań $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -4x - 8y = -4 \end{cases}$

- A.** nie ma rozwiązań.
- B.** ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- C.** ma dokładnie dwa rozwiązania.
- D.** ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Wyjaśnienie:

Funkcja $y = f(x)$ jest określona za pomocą tabeli

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	2	0	1	0	2	1

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.	P	F
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykres funkcji f jest symetryczny względem osi Oy .	P	F
Największa wartość funkcji f jest równa 3.	P	F

[illegible]

Wyjaśnienie:

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykresy funkcji liniowych $f(x) = (2m + 7)x + 5$ oraz $g(x) = 3x$ nie mają punktów wspólnych dla

- A.** $m = -2$ **B.** $m = -1$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

[illegible]

Wyjaśnienie:

Zadanie 24. (0–1)

Dana jest funkcja f określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{dla } x \leq 2 \\ x - 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejszem zerowym funkcji f jest liczba

A. (-6)

B. (-4)

C. 3

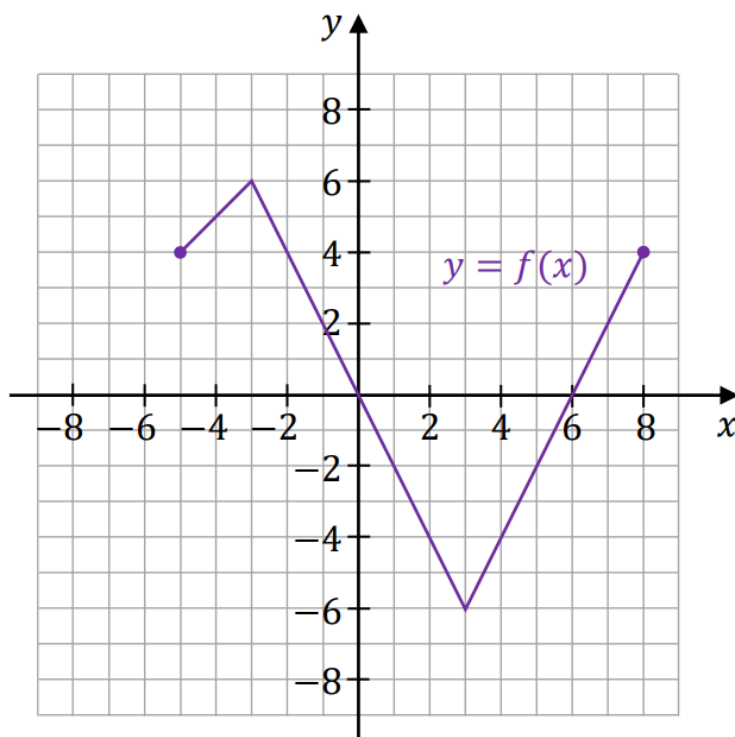
D. 4

[illegible]

Wyjaśnienie:

Zadanie 27.

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Zadanie 27.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wy kropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$.

.....

Zadanie 27.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest malejąca w przedziale

- A. $[-5, -3]$ B. $[3, 8]$ C. $[0, 6]$ D. $[-3, 3]$

Zadanie 27.3. (0–2)

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wy kropkowanych miejscach tak, aby zdania były prawdziwe.

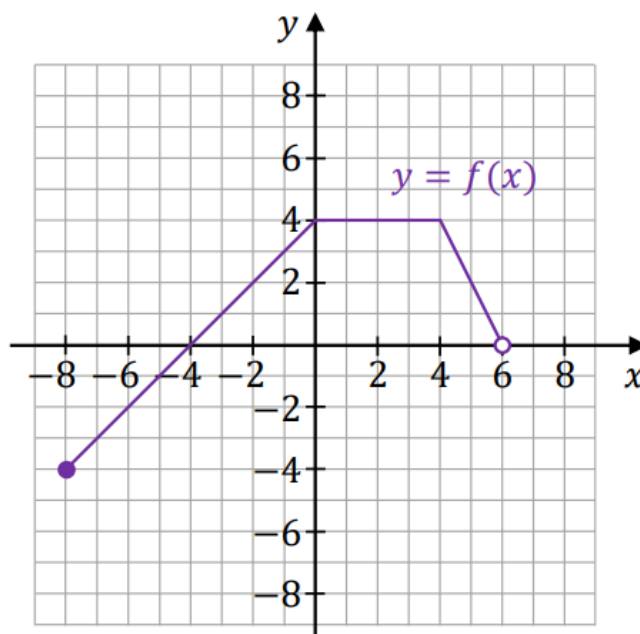
1. Największa wartość funkcji f jest równa
2. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[6, 8]$ jest równa

Zadanie 28. (0–4)

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{dla } x \in [-8, 0] \\ 4 & \text{dla } x \in (0, 4] \\ -2x + 12 & \text{dla } x \in (4, 6) \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wy kropkowanych miejscach tak, aby zdania były prawdziwe.

1. Dziedzina funkcji f jest przedział
2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział
3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, jest przedział
4. Zbiorem wszystkich rozwiązań równania $f(x) = 4$ jest przedział

Wyjaśnienie:

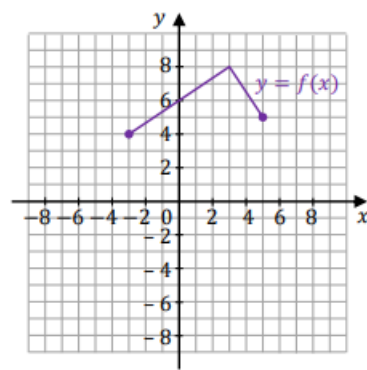
Zadanie 29. (0–2)

Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.

Funkcje g oraz h są określone za pomocą funkcji f następująco:

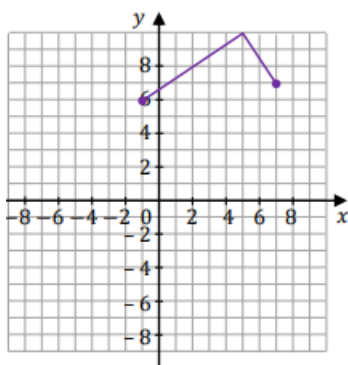
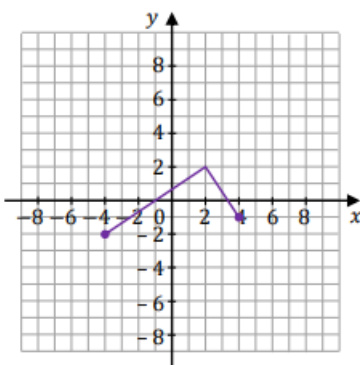
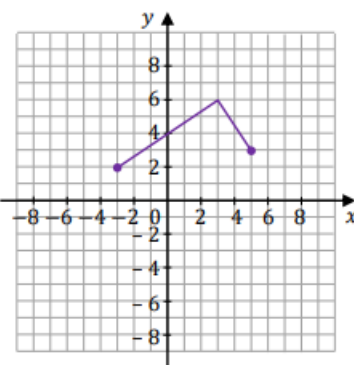
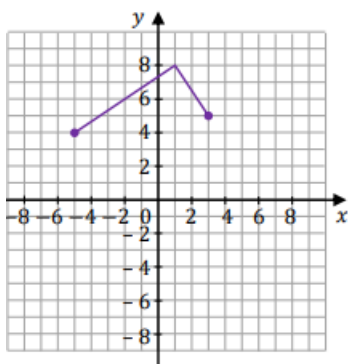
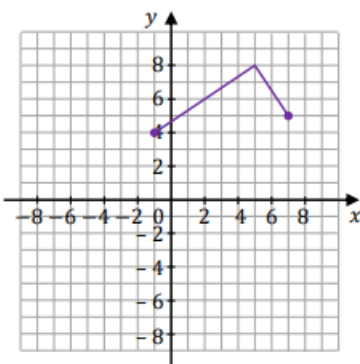
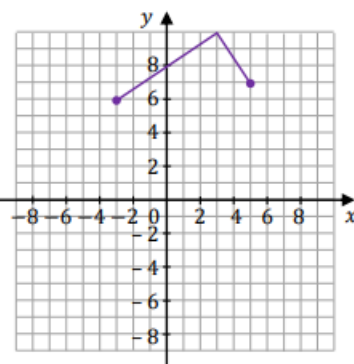
$$y = g(x) = f(x + 2) \qquad y = h(x) = f(x) + 2$$

Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji – w tym wykresy funkcji g oraz h .



Każdej z funkcji $y = g(x)$ oraz $y = h(x)$ przyporządkuj jej wykres. Wpisz obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

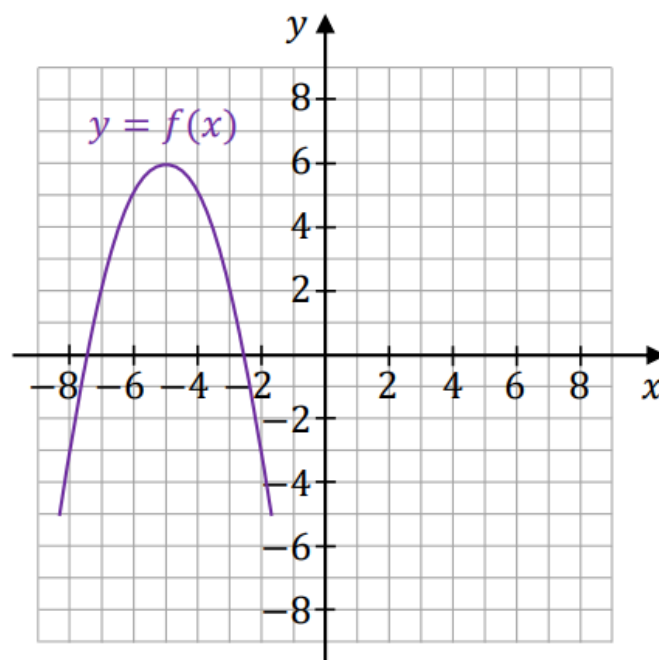
Nr zadania	Funkcja	Rysunek
29.1.	$y = g(x)$	
29.2.	$y = h(x)$	

A.**B.****C.****D.****E.****F.**

Wyjaśnienie:

Zadanie 30. (0–1)

Dana jest funkcja kwadratowa $y = f(x)$, której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych, jeżeli wiadomo, że jeden ze wzorów podanych w odpowiedziach A–D to wzór funkcji f .

Funkcja kwadratowa $y = f(x)$ jest określona wzorem

A. $y = -(x + 5)^2 - 6$

B. $y = -(x + 5)^2 + 6$

C. $y = -(x - 5)^2 - 6$

D. $y = -(x - 5)^2 + 6$

Wyjaśnienie:

Zadanie 34. (0–2)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \end{cases} \quad \text{dla ka\k{z}dej liczby naturalnej } n \geq 1$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu (a_n) .

[illegible]

Wyjaśnienie:

Zadanie 36. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 - n$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ jest

A.	rosnący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$	1.	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą ujemną.
B.	malejący,		2.	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa zero.
C.	stały,		3.	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest liczbą dodatnią.

[illegible]

Wyjaśnienie:

Zadanie 65.

Na wykresie słupkowym poniżej podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie \mathcal{F} . Na osi poziomej podano – wyrażone w tysiącach złotych – miesięczne wynagrodzenie netto pracowników firmy \mathcal{F} , a na osi pionowej przedstawiono liczbę osób, która osiąga podane zarobki.



Zadanie 65.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Dominantą miesięcznych zarobków w firmie \mathcal{F} jest

A.	10 tys. zł,	ponieważ	1.	tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie \mathcal{F} .
B.	4,5 tys. zł,		2.	ta wartość zarobków jest największa w firmie \mathcal{F} .
C.	4 tys. zł,		3.	iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie \mathcal{F} .

Wyjaśnienie:

Zadanie 65.2. (0–1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Medianą miesięcznych zarobków w firmie \mathcal{F} jest tys. zł.

[illegible]

Zadanie 65.3. (0–2)

Oblicz średnią miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy \mathcal{F} . Wynik podaj bez zaokrąglania.

[illegible]

jeszcze jedno zadanie tutaj