#### Zestaw schematów i wskazówek

#### Niezbędna wiedza:

#### Podstawowe symbole i sposoby zapisu:

- $\in$  należy do; używamy gdy jakaś liczba x jest w jakimś przedziale/zbiorze; np.  $x \in \langle 3, 5 \rangle$  znaczy że x to liczba między 3 a 5 czyli  $3 \le x \le 5$
- $\langle a,b \rangle$  przedział obustronnie zamknięty od a do b; czyli wszystkie liczby x takie że:  $a \le x \le b$ ; zapis [a,b] znaczy to samo
- (a,b) przedział obustronnie otwarty od a do b; czyli wszystkie liczby x takie że; a < x < b
- $\cup$  "lub" między zbiorami; używamy gdy jakaś liczba należy do jednego zbioru lub do drugiego np. zbiór wszystkich liczb takich że są między 0 a 2 lub między 4 a 8 zapiszemy:  $x \in (0,2) \cup (4,8)$
- ullet D oznaczenie dziedziny funkcji czyli tych x których możemy użyć/ które wrzucamy do funkcji
- ullet  $ZW_f$  lub ZW oznaczenie zbioru wartości funkcji, czyli liczb f(x) lub y które powstają po wrzuceniu x z dziedziny do funkcji
- miejsce zerowe  $x_0$  taki x który jest w dziedzinie że  $f(x_0) = 0$ ; czyli wykres funkcji przecina oś x-sów Ox
- x nazywane rozwiązaniami, argumentami

#### Wiedza na temat równań

Dziedzina równania-  $\mathbb D$  podobnie jak dziedzina funkcji to wszystkie liczby x które można wsadzić do równania. Zbiór rozwiązań równania to wszystkie liczby x takie że równanie jest spełnione.

$$\frac{x-5}{x-1}=0$$

np. dziedziną  $\mathbb D$  równania powyżej jest  $\mathbb D=\mathbb R-\{1\}$  dlatego że dla x=1 dzielimy przez 0 czego nie wolno robić. A zbiorem rozwiązań jest  $\{5\}$  ponieważ dla x=5 mamy:

$$\frac{5-5}{5-1} = \frac{0}{4} = 0$$

UWAGA: Kiedy wyznaczamy dziedzinę najważniejsze jest żeby uwzględnić:

- dzielenie przez 0 jeśli gdziekolwiek w mianownikach pojawia się x to trzeba uwzględnić że nie może być on zerem. np. dla równania powyżej: w mianowniku mamy x-1 więc  $x-1\neq 0$  więc  $x\neq 1$
- pierwiastki z x pod pierwiastkiem, np.  $\sqrt{x-2}$  to x-2 musi być wieksze lub równe 0 to znaczy x-2>0 wiec x>2

Pamiętaj też, że podczas rozwiązywania nierówności gdy mnożysz/dzielisz przez liczbę ujemną to musisz zmienić znak nierówności. Np. 5>2 mnożymy obustronnie razy -1 więc mamy -5<-2 musieliśmy zmienić stronę nierówności (> zmieniło się na <) żebyśmy dalej mieli coś prawdziwego.

#### Wiedza potrzebna do zadań statystycznych

Średnia arytmetyczna:

$$\overline{x}=rac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n}{n}$$

gdzie  $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$  to obserwacje cechy (np. wzrost, wynagrodzenie) a n to liczebność (ile ich jest)

Średnia ważona:

$$\overline{x} = rac{x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_{n-1}w_{n-1} + x_nw_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} + w_n}$$

gdzie  $w_1,w_2,w_3,\ldots,w_n$  to wagi czyli liczebności poszczególnych grup obserwacji (np. 7 osób ma 180cm wzrostu, wtedy  $w_1=7$  a  $x_1=180cm$  )

#### Dominanta/moda:

Wartość występująca najczęściej - najwyższy słupek/część na wykresie. Jeśli mamy oceny ludzi z klasy 2,2,2,3,4,5 to dominanta = 2, jeśli oceny byłyby 2,2,3,3,4,5 to dominanty nie ma bo wartości 2 i 3 występują najczęściej i po równo

Mediana: (UWAGA: wartości muszą być ustawione niemalejąco.)

Wartość w środku obserwacji ustawionych rosnąco jeśli jest ich nieparzysta ilość.

Np. oceny w klasie 1,1,2,3,3,4,5 mamy 7 wartości a środkowa jest 4-czwarta wartość od lewej (7:2 = 3,5 i zaokrąglamy) więc mediana = 3

Średnia arytmetyczna z dwóch środkowych obserwacji jeśli jest ich parzysta ilość.

Np. oceny w klasie 1,1,2,3,4,4,5,6 mamy 8 wartości, więc liczymy średnią arytmetyczną z dwóch środkowych wartości mediana =  $\frac{3+4}{2}$  = 3,5 (środkowe wartości to 3 i 4 bo 8:2 = 4 a 8 parzyste więc bierzemy 4-czwartą i 5-piątą wartość w kolejności od lewej strony)

#### WW - Ważne wskazówki do całości:

- Gdy coś gdzieś wstawiamy, np. do wzoru, to zawsze w nawiasie, jest bezpieczniej bo robiąc to krok po kroku z nawiasami nie pomylimy znaków.
- kolejność wykonywania działań:

(nawiasy) -> (potęgi) -> (mnożenie i dzielenie) -> (dodawanie i odejmowanie)

np.  $2:2+2\cdot 2-(2+3)^2$  rozwiązujemy zaczynając od nawiasu czyli 2+3 =5 więc

mamy:  $2:2+2\cdot 2-5^2$  następnie potęgi  $5^2=25$  więc mamy:

 $2:2+2\cdot 2-25$ , teraz mnożenie czyli  $2:2=1,2\cdot 2=4$  wiec mamy:

1+4-25 i teraz już dodawanie i odejmowanie:

$$1+4-25=5-25=-20\\$$

W wielu zadaniach będziemy operować na procentach kwoty/wartości której nie znamy - np. pewnej pensji krajowej. Dla
ułatwienia możemy wtedy przyjąć sobie dowolną wartość dla łatwych obliczeń procentowych, najlepiej 1,10,100,1000 itd. - na
tych liczbach łatwo wychodzą obliczenia procentowe.

#### Zadanie 1. (0–1)

#### Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia 
$$2024:\left(1-\frac{1}{2025}\right)-\left(1-\frac{2025}{2024}\right):\frac{1}{2024}$$
 jest równa

**A.** 0

**B**. 1

**C.** 2024

**D.** 2026

**Wyjaśnienie:** To co chcemy zrobić to rozwiązanie tego, musimy się przy tym kierować kolejnością wykonywania działań. (Patrz sekcje WW - ważne wskazówki). Zaczynamy więc od nawiasów:

$$\begin{array}{l} \text{2024}: (1-\frac{1}{2025}) - (1-\frac{2024}{2024}): \frac{1}{2024} = \\ = 2024: (\frac{2025}{2025} - \frac{1}{2025}) - (\frac{2024}{2024} - \frac{2025}{2024}): \frac{1}{2024} = \\ = 2024: (\frac{2025-1}{2025}) - (\frac{2024-2025}{2024}): \frac{1}{2024} = \\ = 2024: (\frac{2024}{2025}) - (\frac{-1}{2024}): \frac{1}{2024} = (*) \\ \end{array}$$

teraz możemy zająć się mnożeniem i dzieleniem. Nie lubimy dzielić przez ułamki więc obracamy je do góry nogami i zamieniamy dzielenie na mnożenie (mnożymy przez odwrotność)

=2025-(-1) teraz zostaje nam dodawanie i odejmowanie, tu jest już łatwo

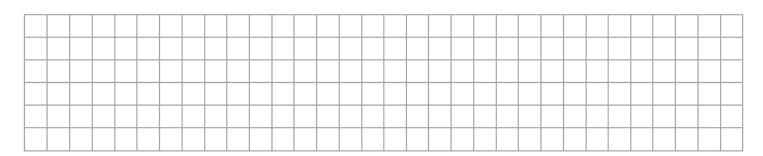
= 2025 + 1 = 2026 więc nasza odpowiedź to **D.** 

#### Zadanie 2. (0-2)

Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej.

#### Dokończ zdania. Zaznacz odpowiedź spośród A-D oraz odpowiedź spośród E-H.

- 1. Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y
  - A. o 40% pensji pana Y.
  - B. o 90% pensji pana Y.
  - C. o 150% pensji pana Y.
  - **D.** o 275% pensji pana Y.
- 2. Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X
  - E. o 60% pensji pana X.
  - **F.** o 73% pensji pana X.
  - G. o 90% pensji pana X.
  - H. o 150% pensji pana X.



Wyjaśnienie: W tym zadaniu zależy nam na określeniu jakim procentem czegoś jest coś.

Nie znamy średniej krajowej o której mowa, więc dla łatwych obliczeń możemy ją ustalić na np. 1000 - będzie nam wtedy łatwiej liczyć (patrz sekcja WW). Oznaczmy ją jako K=1000

Najpierw policzmy pensję Pana X i Pana Y.

- Wiemy że Pan X ma pensję o 50% wyższą, więc będziemy dodawać do średniej krajowej te 50%. Zatem pensja Pana X = 100% średniej krajowej + 50% średniej krajowej = 150% średniej krajowej. Jak zamienić procenty na liczbę której potrzebujemy? Wystarczy podzielić przez 100%, przecież procenty to części setne. Mamy zatem: 150% : 100% = 1,5 (zrób to na kalkulatorze, znak % znika bo tak jakby się skraca). Pensja Pana X = 150% średniej krajowej = K · 1,5 = 1000 · 1,5 = 1500
- Teraz chcemy podobnie zastanowić się nad pensją Pana Y. Wiemy że jego pensja jest o 40% niższa od K więc będziemy odejmować %. Zatem pensja Pana Y = 100% średniej krajowej 40% średniej krajowej = 60% średniej krajowej. Znów zamieniamy % na liczbę: 60%: 100% = 0,6. Zatem pensja Pana Y = 60% średniej krajowej =  $K \cdot 0$ ,  $6 = 1000 \cdot 0$ , 6 = 600

Znamy już pensję Pana X i Pana Y. Teraz chcemy się zastanowić o ile % różnią się one od siebie.

Notka pomocnicza - ogólnie do procentów:

Żeby policzyć jakim procentem Wartości 1 =  $w_1$  jest Wartość 2 =  $w_2$  musimy użyć wzoru:

$$rac{w_2}{w_1} \cdot 100\% = p$$

Gdzie  $K_n$  to kapitał (kwota) po n okresach naliczania odsetek (zazwyczaj to ilość lat),  $K_0$  to kapitał z jakim zaczynamy, a p to procent jaki dolicza nam bank w skali roku

W naszym zadaniu nie mamy kwoty  $K_0$  więc podobnie jak w zadaniu z pensjami ustalamy ją taką żeby było nam wygodnie. Weźmy  $K_0 = 1$  (nierealne bo to tylko złotówka ale zadziała w zadaniu).

to do.

## Zadanie 11. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

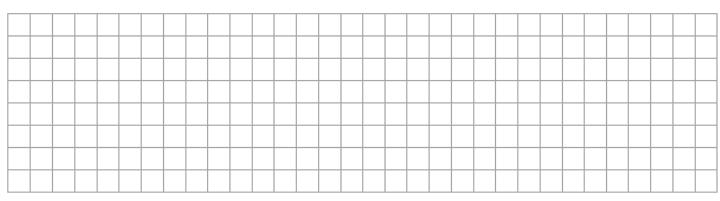
Liczba  $\log_2\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^8\right]$  jest równa

**A.**  $\sqrt{2}$ 

**B.** 7

**C.** 14

**D.**  $2^7$ 



Wyjaśnienie:

## Zadanie 12. (0-1)

Dane są liczby  $a = \log_2(3\sqrt{5} + \sqrt{13})$  oraz  $b = \log_2(3\sqrt{5} - \sqrt{13})$ .

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

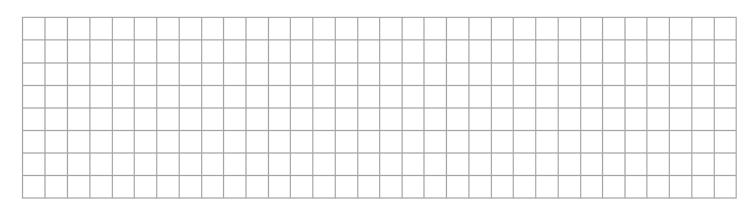
Liczba a + b jest równa

**A.**  $\log_2 45$ 

**B.**  $\log_2 30$ 

**C.** 4

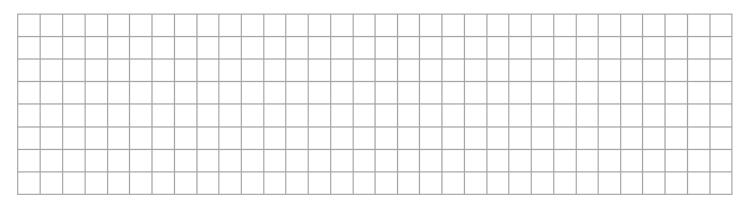
**D.** 5



## Zadanie 14. (0-2)

Dane są liczby  $a = \sqrt{5} - 2$  oraz  $b = \sqrt{5} + 2$ .

Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{a\cdot b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}: \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$  dla podanych a i b.



Wyjaśnienie:

# Zadanie 15. (0-2)

Dana jest liczba  $x=a-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ , gdzie a należy do zbioru liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  oraz  $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$  są niewymierne.

Dokończ zdanie. Zaznacz <u>dwie</u> odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.

Liczba x jest wymierna dla

**A.** 
$$a = 5$$

**B.** 
$$a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0.3$$

**C.** 
$$a = 6$$

**D.** 
$$a = -2\sqrt{6} + 12,5$$

**E.** 
$$a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$$

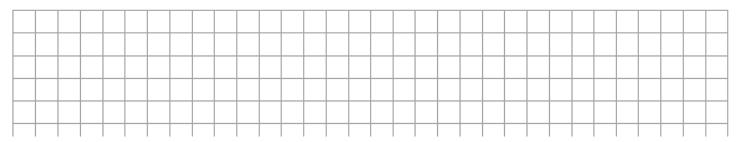
**F.** 
$$a = -\sqrt{6}$$

#### Zadanie 16. (0-1)

Dane jest wyrażenie 
$$W(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{x - 2}{x}$$
.

# Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x$ .	P	F
2.	Jeżeli wartość wyrażenia $W(x)$ jest określona, to $W(x) = \frac{2x}{x+2}$ .	P	F



#### Wyjaśnienie:

Pytanie nr.1 w zasadzie jest o dziedzinę (patrz teoria równań i funkcji). Jeśli ma być dla każdej liczby rzeczywistej to chcemy aby  $\mathbb{D}=\mathbb{R}$  czyli nic nie chcemy wyrzucać z dziedziny.

My widzimy że w prawej części dzielimy przez x czyli na pewno  $x \neq 0$  bo nie możemy dzielić przez 0 zatem **Fałsz.** 

Pytanie nr.2 To w zasadzie pytanie o to, czy po skróceniu wszystkiego wzór W(x) będzie tak wyglądał. Poskracajmy zatem co możemy.

notka: przyda nam się wzór skróconego mnożenia  $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 

mamy  $W(x)=rac{2x^2}{x^2-4}\cdotrac{x-2}{x}=rac{2x^2(x-2)}{x(x^2-4)}$  korzystamy ze wzoru żeby rozbić  $x^2-4$  nasze a we wzorze to x a nasze b we wzorze to 2 bo  $4=2^2$  więc  $(x^2-4)=(x+2)(x-2)$ . Nasze wyrażenie W(x) wygląda: (zapiszemy jeszcze  $x^2=x\cdot x$ )

$$W(x) = rac{2x^2(x-2)}{x(x^2-4)} = rac{2x \cdot x \cdot (x-2)}{x(x-2)(x+2)} = rac{2x \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{(x-2)}}{\cancel{x} \cdot \cancel{(x-2)} \cdot (x+2)} = rac{2x}{x+2}$$

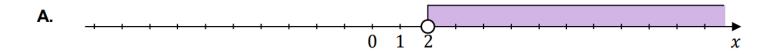
Zatem P.

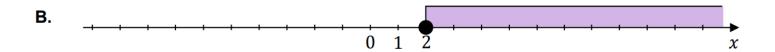
# Zadanie 17. (0–1)

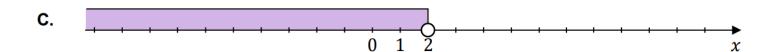
Dana jest nierówność

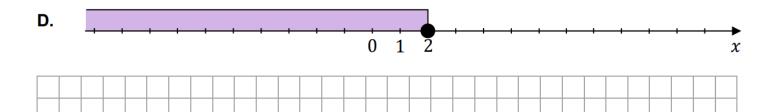
$$\frac{2x-1}{2} - \frac{x+2}{3} \ge \frac{1}{6}$$

Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.







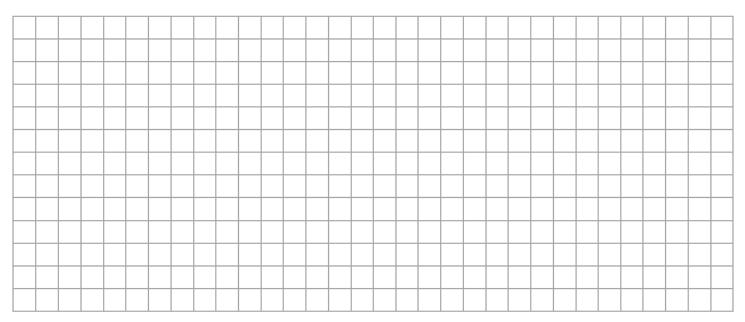


# Zadanie 18. (0–3)

Dane jest równanie

$$\frac{2}{2x+1} = \frac{x-1}{x+2}$$

Wyznacz dziedzinę tego równania. Rozwiąż to równanie.



Wyjaśnienie:

## Zadanie 21. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układ równań 
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -4x - 8y = -4 \end{cases}$$

- A. nie ma rozwiązań.
- **B.** ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
- D. ma nieskończenie wiele rozwiązań.

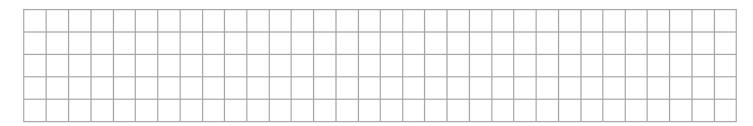
# Zadanie 22. (0–2)

Funkcja y = f(x) jest określona za pomocą tabeli

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	2	0	1	0	2	1

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Zaznacz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F - jeśli jest fałszywe.

Funkcja $f$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.			
W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x,y)$ wykres funkcji $f$ jest symetryczny względem osi $\partial y$ .			
Największa wartość funkcji $f$ jest równa $3.$	Р	F	



Wyjaśnienie:

## Zadanie 23. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

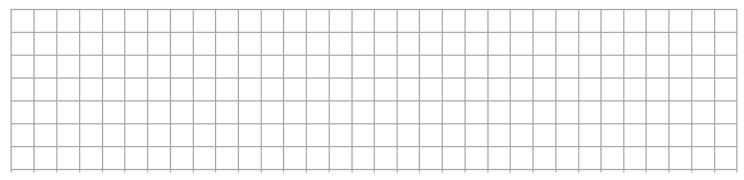
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykresy funkcji liniowych f(x) = (2m + 7)x + 5 oraz g(x) = 3x <u>nie maja</u> punktów wspólnych dla

**A.** 
$$m = -2$$

**B.** 
$$m = -1$$
 **C.**  $m = 1$ 

**C.** 
$$m = 1$$

**D.** 
$$m = 2$$

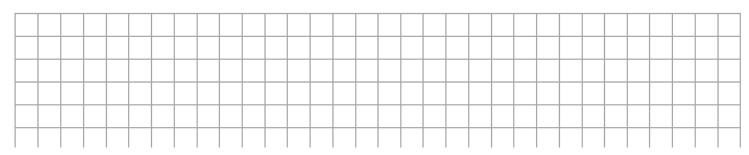


Dana jest funkcja  $\,f\,$  określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{dla } x \le 2\\ x - 4 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

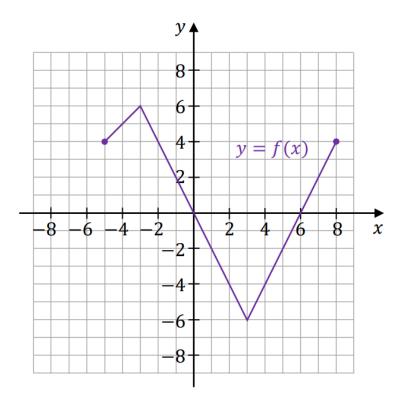
Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejscem zerowym funkcji  $\,f\,$  jest liczba



#### Zadanie 27.

Wykres funkcji y = f(x) przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y)na rysunku poniżej.



# Zadanie 27.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności f(x) > 2.

## Zadanie 27.2. (0-1)

Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Funkcja f jest malejąca w przedziale

**A.** [-5, -3] **B.** [3, 8]

**C.** [0, 6]

**D.** [-3,3]

## Zadanie 27.3. (0-2)

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach tak, aby zdania były prawdziwe.

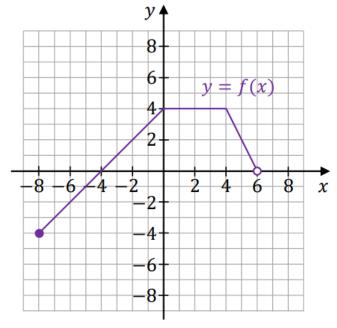
- **1.** Największa wartość funkcji *f* jest równa ......
- **2.** Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale [6,8] jest równa .......

#### Zadanie 28. (0–4)

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{dla } x \in [-8,0] \\ 4 & \text{dla } x \in (0,4] \\ -2x+12 & \text{dla } x \in (4,6) \end{cases}$$

Wykres funkcji y = f(x) przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach tak, aby zdania były prawdziwe.

- **1.** Dziedziną funkcji f jest przedział ......
- **2.** Zbiorem wartości funkcji f jest przedział ......
- **3.** Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nieujemne, jest przedział ......
- **4.** Zbiorem wszystkich rozwiązań równania f(x) = 4 jest przedział ......

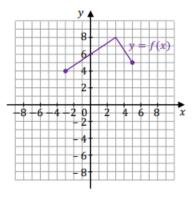
#### Zadanie 29. (0-2)

Dana jest funkcja y = f(x), której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) na rysunku obok.

Funkcje  $\,g\,$  oraz  $\,h\,$  są określone za pomocą funkcji  $\,f\,$  następująco:

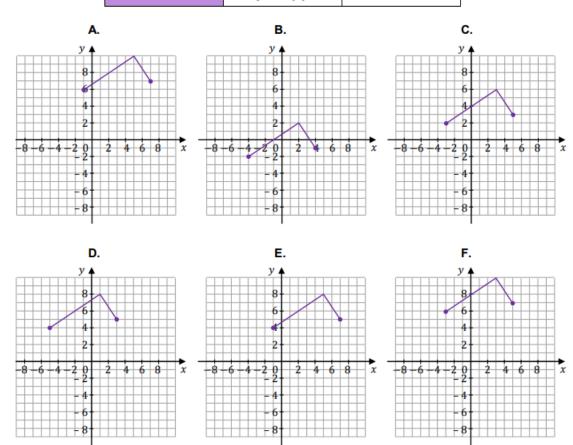
$$y = g(x) = f(x + 2)$$
  $y = h(x) = f(x) + 2$ 

Na rysunkach A–F przedstawiono wykresy różnych funkcji - w tym wykresy funkcji g oraz h.



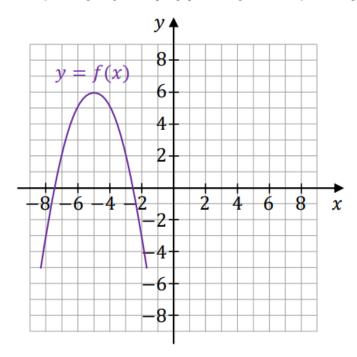
Każdej z funkcji y = g(x) oraz y = h(x) przyporządkuj jej wykres. Wpisz obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród A–F.

Nr zadania	Funkcja	Rysunek
29.1.	y = g(x)	
29.2.	y = h(x)	



Zadanie 30. (0–1)

Dana jest funkcja kwadratowa y = f(x), której fragment wykresu przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych, jeżeli wiadomo, że jeden ze wzorów podanych w odpowiedziach A-D to wzór funkcji f.

Funkcja kwadratowa y = f(x) jest określona wzorem

**A.** 
$$y = -(x+5)^2 - 6$$

**B.** 
$$y = -(x+5)^2 + 6$$

**C.** 
$$y = -(x-5)^2 - 6$$

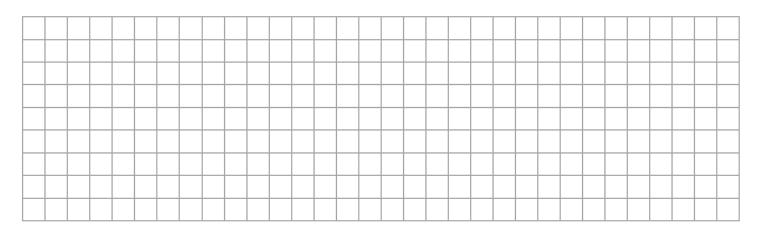
**D.** 
$$y = -(x-5)^2 + 6$$

# Zadanie 34. (0-2)

Dany jest ciąg  $(a_n)$  określony wzorem rekurencyjnym:

$$egin{cases} a_1 = -2 \ a_{n+1} = n \cdot a_n + 4 \ & ext{dla każdej liczby naturalnej} \ n \geq 1 \end{cases}$$

Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ .



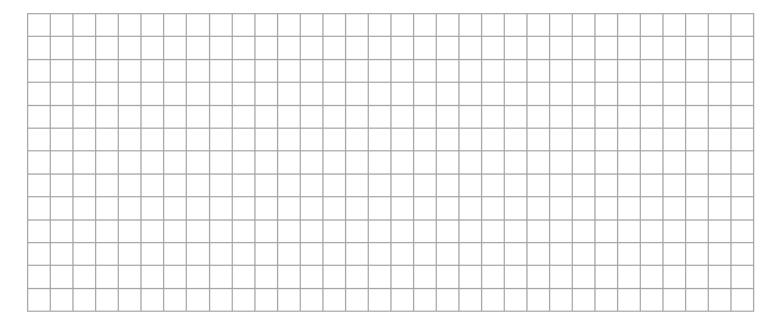
Wyjaśnienie:

# Zadanie 36. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Ciąg  $(a_n)$  określony wzorem  $a_n=n^2-n$  dla każdej liczby naturalnej  $n\geq 1$  jest

A.	rosnący,		1.	różnica $a_{n+1}-a_n$ jest liczbą ujemną.
В.	malejący,	ponieważ dla każdej liczby naturalnej $n \ge 1$	2.	różnica $a_{n+1} - a_n$ jest równa zero.
C.	stały,		3.	różnica $a_{n+1}-a_n$ jest liczbą dodatnią.



#### Zadanie 65.

Na wykresie słupkowym poniżej podano rozkład miesięcznych zarobków wszystkich pracowników w pewnej firmie  $\mathcal{F}$ . Na osi poziomej podano – wyrażone w tysiącach złotych – miesięczne wynagrodzenie netto pracowników firmy  $\mathcal{F}$ , a na osi pionowej przedstawiono liczbę osób, która osiąga podane zarobki.



## Zadanie 65.1. (0–1)

Dokończ zdanie. Zaznacz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

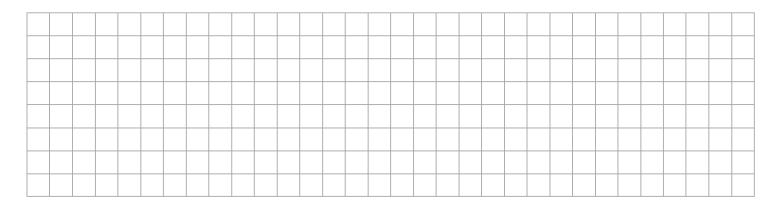
Dominantą miesięcznych zarobków w firmie  $\,\mathcal{F}\,$  jest

A.	10 tys. zł,		1.	tę wartość zarobków osiąga najwięcej osób w firmie ${\mathcal F}.$
В.	4,5 tys. zł,	ponieważ	2.	ta wartość zarobków jest największa w firmie $\mathcal{F}.$
C.	4 tys. zł,		3.	iloczyn tej wartości zarobków i liczby osób z takimi zarobkami jest największy w firmie $\mathcal{F}.$

## Zadanie 65.2. (0–1)

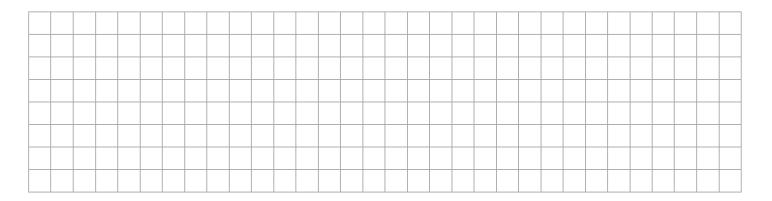
Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Medianą miesięcznych zarobków w firmie  $\mathcal{F}$  jest ...... tys. zł.



## Zadanie 65.3. (0-2)

Oblicz średnią miesięcznego wynagrodzenia netto wszystkich pracowników firmy  $\mathcal{F}$ . Wynik podaj bez zaokrąglania.



jeszcze jedno zadanie tutaj