

宽带无线预编码调制 关键技术研究

(申请清华大学工学博士学位论文)

培 养 单 位 : 电 子 工 程 系
学 科 : 信 息 与 通 信 工 程
研 究 生 : 曾 维 亮
指 导 教 师 : 陆 建 华 教 授

二〇一二年十月

Precoded Modulation for Wideband Wireless Communications

Dissertation Submitted to
Tsinghua University
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Philosophy
in
Information and Communication Engineering
by
Zeng Weiliang

Dissertation Supervisor : Professor Lu Jianhua

October, 2012

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：

清华大学拥有在著作权法规定范围内学位论文的使用权，其中包括：（1）已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文，学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；（2）为教学和科研目的，学校可以将公开的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所供校内师生阅读，或在校园网上供校内师生浏览部分内容；（3）根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》，向国家图书馆报送可以公开的学位论文。

本人保证遵守上述规定。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

作者签名：_____

导师签名：_____

日 期：_____

日 期：_____

摘 要

无线通信技术的发展推动业务需求的迅猛增长。到2015年,无线通信总容量仅能满足1/10的用户需求。无线网络面临有限的传输能力难以支撑庞大业务需求的核心问题。多天线技术具有大幅提升频谱效率的潜力,是未来无线通信的关键技术。虽然现有技术已经开始尝试利用多天线的优点,但没有充分发掘发射信号的结构,导致实际构建的系统与理论预期的传输性能存在差距。以LTE系统为例,2×2天线配置实现的传输速率只能达到理论界的一半;同时,随着天线数目的增加,实际性能与理论界的差距还将进一步扩大。本文以提升实际多天线系统的传输性能为目标,围绕面向实际调制信号的预编码调制技术展开以下研究:

首先,针对多天线系统预编码设计准则众多,缺乏有效设计框架的问题,构建提升实际多天线系统传输性能的预编码调制设计模型。该模型以最大化调制约束的互信息为设计准则,以复矩阵为优化变量,以功率为约束条件,得到的解能够改善系统频谱效率,降低系统编码后的误比特率。

第二,在发端具有完全信道状态信息的条件下,提出一种采用预编码调制实现信号与信道的有效适配方案。通过分解预编码矩阵,实现匹配信道、优化信号功率分配、旋转调制信号星座结构。该设计方法收敛快速,能够获得高的性能增益,在采用QPSK的2×2MIMO衰落信道下性能逼近理论界;

第三,在发端只有统计信道状态信息的条件下,针对平均互信息包含多重积分,难以计算的问题,导出具有渐近最优性且计算复杂度低6个数量级以上的平均互信息下界和上界;在此基础上提出了优化功率分配和信号设计的两步迭代算法,高效求解最大化平均互信息问题。与传统方法相比,在采用QPSK的4×4实测微蜂窝信道下,最大增益超过4 dB。

最后,针对多天线系统的干扰抑制难题,设计预编码提升收发端传输速率的同时避免对网络中其他用户造成干扰。提出了一种基于凸凹包络法的优化方法,通过不断迭代缩小求解空间,有效克服了多极值NP难解问题。理论上证明了该方法可达到全局最优,仿真表明与传统方法相比,在采用1/2码率的信道编码、QPSK调制的4×4MIMO信道下,最大增益超过15 dB。

关键词: 多天线技术; 预编码调制; 频谱效率; 传输性能限; 宽带无线通信

Abstract

Wireless communication, as one of the most rapidly developing technologies, provides enormous new products and services on a daily basis. By 2015, the overall throughput of wireless technologies, as predicted, will only afford 10 percent data requested by users. These developments present huge challenges for wireless system designers. Multiple-input and multiple-output (MIMO) has the potential to significantly improve the spectrum efficiency and therefore is recommended for the next generation wireless systems. Existing designs utilize the benefit of multiple antennas; they, however, fail to exploit the structure of the transmitted signals. Therefore, the performance of existing MIMO systems is far from the theoretical potential. For example, the 2×2 MIMO system built in LTE offers a transmission rate only one half of the theoretical limit. The difference between the performance of practical systems and theoretical expectation is even larger when the number of antennas is bigger. This thesis is based on the design and analysis of the precoded modulation technique for practical MIMO systems. The main contributions are as follows:

Firstly, we build the framework for precoded modulation, which maximizes the constellation-constrained mutual information over the complex precoding matrix with different power constraints. The performance of existing precoding methods, e.g., maximizing the capacity or the diversity, is far away from the transmission limits of the channel. Our proposed framework improves not only the spectrum efficiency of wireless systems but also the coded bit error rate. It helps practical systems achieve the transmission limits of the channel.

Secondly, we propose the precoded modulation method to adapt the transmission signal to the channels when channel state information is known at the transmitter. Since the function of mutual information has multiple local maxima, finding a good precoder solution can be difficult. We develop an efficient two-step iterative algorithm, by decomposing the precoder, which converges fast and is almost irrelevant to the initial points. The performance of the proposed algorithm is close to the theoretical limits for 2×2 fading MIMO channels with QPSK inputs.

Thirdly, we consider the precoded modulation method to maximize the average mutual information of MIMO fading channels with only statistical channel state information

known at the transmitter. Since the average mutual information involves multiple integrals and is extremely difficult to evaluate, we derive lower and upper bounds and prove that maximizing the bounds is asymptotically optimal. We analyze the structure of the optimal precoder, extend our two-step iterative algorithm, and solve the problem of maximizing average mutual information efficiently. Compared with the conventional methods, the highest possible gain of the proposed method is more than 4 dB for 4×4 experimental validated MIMO microcell correlation model with QPSK inputs.

Finally, we investigate the precoded modulation method for spectrum sharing in multi-antenna cognitive radio networks. We maximize the transmission rate between the transceiver while controlling the interference power to existing users sharing the same spectrum at the same time. We propose a global optimization algorithm, which is based on the reformulation and the relaxation, by its convex and concave envelopes, of the problem. In this way, a sequence of relaxed problems is solved over a shrinking feasible region until convergence. Numerical examples show that the highest possible gain provided by the proposed algorithm is more than 15 dB for 4×4 MIMO channels with QPSK inputs and 1/2 channel coding rate compared with existing methods.

Key words: multiple-input multiple-output (MIMO); precoded modulation; spectrum efficient; transmission limit; wideband wireless communications

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 研究背景	1
1.1.1 无线通信亟需满足迅猛发展的业务需求	1
1.1.2 不断提升频谱效率是解决问题的关键途径	1
1.1.3 频谱效率的提升不能以牺牲功率效率为代价	3
1.2 MIMO传输技术	4
1.2.1 MIMO系统的容量界	5
1.2.2 实际信号的频谱效率	7
1.2.3 MIMO系统收发机构架	8
1.3 研究思路及难点分析	10
1.3.1 实现信号与信道的有效匹配	10
1.3.2 大幅降低适应信道的信息交互量	11
1.3.3 保障传输的同时有效控制网络干扰	13
1.4 本论文主要工作及内容安排	13
第 2 章 预编码调制：模型与设计	16
2.1 MIMO信道模型	16
2.1.1 MIMO信道的三重选择性	16
2.1.2 MIMO信道的外延	20
2.1.3 MIMO信道状态信息获取	23
2.2 预编码调制方法：问题与设计准则	25
2.2.1 预编码问题	25
2.2.2 预编码设计准则	26
2.2.3 预编码调制方法	28
2.3 本章小结	29
第 3 章 完全信道信息下预编码调制设计方法	31
3.1 系统模型	31
3.2 研究现状	33
3.3 最大化互信息的预编码设计	34
3.3.1 最优左酉矩阵	34
3.3.2 优化功率分配向量	36
3.3.3 优化右酉矩阵	38
3.3.4 两步方法优化互信息	40
3.4 仿真结果	40

3.4.1 确定信道互信息性能评估	40
3.4.2 确定信道BER性能评估	46
3.4.3 衰落信道互信息性能评估	47
3.5 附录A: 定理3.1的证明	49
3.5.1 定义	49
3.5.2 MMSE矩阵的Jacobian.....	50
3.5.3 定理3.1的证明	54
3.6 本章小结	55
第4章 统计信道信息下预编码调制优化设计	56
4.1 系统模型	56
4.2 研究现状	57
4.3 调制信号的平均互信息.....	57
4.3.1 最优预编码结构	59
4.4 最大化平均互信息的预编码设计.....	60
4.4.1 渐近最优性	60
4.4.2 凹性	64
4.4.3 预编码设计	65
4.5 仿真结果	69
4.5.1 平均互信息与所推导性能界的关系	70
4.5.2 计算复杂度的比较	72
4.5.3 两步算法的收敛性	74
4.5.4 统计信道平均互信息性能评估	76
4.6 附录A: 定理 4.1的证明	80
4.7 附录B: 定理 4.2的证明	81
4.8 附录C: 函数凹性的证明	84
4.9 本章小结	85
第5章 干扰可控的预编码调制优化设计	86
5.1 系统模型	88
5.1.1 收发信号模型	88
5.1.2 干扰可控的预编码问题	89
5.2 研究现状	90
5.3 问题的重构与松弛	90
5.3.1 预编码调制问题的重构	90
5.3.2 凸包络、凹包络及双线性函数的松弛	93
5.4 基于全局优化的BAMIO算法	96
5.4.1 原问题的下界和上界	96
5.4.2 下界和上界的迭代收敛	97

5.4.3 BAMIO算法的收敛加速	99
5.4.4 与半定松弛的关系	101
5.5 仿真分析	101
5.5.1 例一：性能与复杂度的折衷	102
5.5.2 例二：不同松弛方法的比较	105
5.5.3 例三：不同预编码方法的性能比较	106
5.6 附录A：问题(5-11)和 (5-15) 最优值关系的证明	111
5.7 附录B：优化问题(5-11)、 (5-17)、 (5-18)收敛性及最优值关系的证明 ..	113
5.8 本章小结	113
第 6 章 结束语	115
6.1 论文工作总结	115
6.2 下一步工作建议	116
参考文献	118
致 谢	127
声 明	128
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果	129

主要符号对照表

术语缩写

1G	第一代 (First Generation)
2G	第二代 (Second Generation)
3G	第三代 (Third Generation)
3GPP	第3代合作伙伴计划 (3rd Generation Partnership Project)
4G	第四代 (Forth Generation)
AMPS	高级移动电话系统 (Advanced Mobile Phone System)
AWGN	加性白高斯噪声 (Additive white Gaussian noise)
bps	每秒比特数 (bit per second)
B3G	后3G (Beyond 3G)
BER	误比特率 (Bit Error Rate)
BICM	比特交织编码调制 (Bit-Interleaved Coded Modulation)
CDMA	码分多址 (Code Division Multiple Access)
CSI	信道状态信息 (Channel State Information)
DFE	判决反馈均衡 (Decision Feedback Equalization)
EDGE	增强型数据速率GSM演进 (Enhanced Data rate for GSM Evolution)
FDMA	频分多址 (Frequency Division Multiple Access)
GA	梯度上升 (Gradient Ascent)
GPRS	通用分组无线业务 (General Packet Radio Services)
GSM	全球移动通信系统 (Global System for Mobile communication)
IMT-Advanced	先进的国际移动通信 (International Mobile Telecommunications-Advanced)
ISI	符号间干扰 (Inter-Symbol Interference)
KKT	卡罗需-库恩-塔克 (Karush-Kuhn-Tucker)
LDPC	低密度奇偶校验 (low-density parity-check)
LTE	长期演进 (Long Term Evolution)
LTE-Advanced	长期演进增强 (Long Term Evolution-Advanced)
MAP	最大后验 (Maximum A Posteriori)
METRA	多元收发天线 (Multiple Element Transmit-Receive Antennas)
MIMO	多输入多输出 (Multiple-Input Multiple-Output)

MISO	多输入单输出 (Multiple-Input Single-Output)
ML	最大似然 (Maximum Likelihood)
MMSE	最小均方误差 (Minimum Mean Squared Error)
SDR	半定规划松弛 (Semi-Definite Relaxation)
SIMO	单输入多输出 (Single-Input Multiple-Output)
SINR	信干噪比 (Signal to Interference plus Noise Ratio)
SISO	单输入单输出 (Single-Input Single-Output)
SNR	信噪比 (Signal-to-Noise Ratio)
SVD	奇异值分解 (Singular Value Decomposition)
TDMA	时分多址 (Time Division Multiple Access)
TD-SCDMA	时分同步码分多址 (Time Division Synchronous CDMA)
OFDM	正交频分复用 (Orthogonal Frequency Division Multiplexing)
OFDMA	正交频分多址 (Orthogonal Frequency Division Multiple Access)
PAM	脉冲幅度调制 (Pulse Amplitude Modulation)
PSK	相移键控 (Phase Shift Keying)
QAM	正交幅度调制 (Quadrature Amplitude Modulation)
QoS	服务质量 (Quality of Service)
QPSK	正交相移键控 (Quadrature Phase Shift Keying)
W-CDMA	宽带CDMA (Wideband CDMA)
ZF	迫零 (Zero Forcing)

数学符号

\mathbb{R}	实数空间
\mathbb{C}	复数空间
a	标量 a (斜体字母)
\mathbf{a}	向量 \mathbf{a} (粗体小写字母)
a_i	向量 \mathbf{a} 的第 i 个元素
\mathbf{A}	矩阵 \mathbf{A} (粗体大写字母)
$\mathbf{A} > \mathbf{0}$	正定矩阵
$\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$	正半定矩阵
$\mathbf{A} < \mathbf{0}$	负定矩阵
$\mathbf{A} \leq \mathbf{0}$	负半定矩阵
$(\cdot)^T$	转置
$(\cdot)^*$	复共轭
$(\cdot)^H$	复共轭转置
$(\cdot)^+$	Moore-Penrose伪逆

diag(A)	矩阵 A 对角元素构成的向量
Diag(a)	向量 a 构成的对角矩阵
vec(A)	矩阵 A 列堆栈的向量化函数
Tr(A)	矩阵的迹
det(A)	矩阵的行列式
A ⊗ B	矩阵的Kronecker积
0	元素全为零的矩阵
I	单位矩阵
log	底为2的对数
ln	底为 <i>e</i> 的对数
ℜ	复数的实部
ℑ	复数的虚部
j	单位虚数
‖ · ‖	矩阵或向量的Frobenius范数
E	随机变量的期望

第1章 引言

1.1 研究背景

1.1.1 无线通信亟需满足迅猛发展的业务需求

无线通信是现代社会不可缺少的信息交互平台，是当今世界最为关注的高新技术领域，一直保持强劲的发展趋势。无线通信技术对社会发展具有重大影响，《国家“十二五”科学和技术发展规划》提出要加速推动新一代无线通信技术的发展，通过开展关键技术研究，提升我国在该技术领域的国际地位，增强核心竞争力^[1]。

迅猛发展的无线通信需求是当前信息技术领域的显著特征。截止2011年底，移动在网用户数超过全球总人口的80%，达到59亿，与2006年相比翻了一番^[2]，这就要求无线通信系统能够提供越来越大的系统容量。另一方面，无线应用的年下载量已经超过250亿次^[3]，表明人们是多么需要随时随地通过无线的方式获取信息。大量应用，如在线视频，可视通话，在线游戏，要求无线通信系统能够提供越来越高的传输速率^[4]。

面对如此庞大的无线业务需求，通信频谱资源匮乏所导致的瓶颈效应日益突出^[5]。Cisco Visual Networking Index预测，到2015年，无线通信总容量仅能满足1/10的用户需求^[6-8]。系统容量与用户需求的供需矛盾难以平衡的时候，就是无线网络拥塞甚至瘫痪现象出现的时候。据美国国家广播公司（National Broadcasting Company, NBC）报道，因业务需求的陡增，无线网络全球知名运营商Verizon，在2012年9月一个月内出现三次大范围瘫痪^[9]。这样的网络瘫痪并不是第一次报道。早在2009年9月，iPhone手机上市的时候，因无线应用下载业务的陡增，就已经导致美国纽约和旧金山地区的3G网络严重过载，并出现局部瘫痪^[10]。可以预见在不久的将来无线网络瘫痪将会出现的越来越频繁，由此带来的影响也将越来越大。

1.1.2 不断提升频谱效率是解决问题的关键途径

无线通信大容量、高传输速率的需求与频谱资源匮乏所导致的矛盾需要通过不断提升频谱效率来解决。为此，人们做出了大量的努力，使得无线通信系统不

断的向前发展。从早期的第一代移动通信系统到目前最新的第四代移动通信系统，频谱效率得到了巨大的提升。

第一代移动通信系统（1G）诞生于19世纪80年代，以北美的高级移动电话系统（Advanced Mobile Phone System, AMPS）为代表^[10]，首次使得蜂窝技术服务于大众。以现代的观点来看，这一系统存在很多的不足。例如它采用了易于受到噪声和干扰影响的模拟通信技术；采用频分多址，占用大量频谱资源来区分不同用户。系统的传输速率低，网络容量小，只支持约2.4Kbps的语音服务，而无法传输数据信息^[11]。

第二代移动通信系统（2G）实现了从模拟通信技术到数字通信技术的跨越，以GSM^[12]和IS-95^[13]为代表，是目前为止商用最为成功，应用最为广泛的系统。GSM和IS-95分别采用时分多址（TDMA）^[14]和码分多址（CDMA）^[15]技术，为用户提供语音服务和速率为9.6Kbps到32Kbps之间的数据服务。在此基础上改进而成的GPRS（2.5G）^[16]和EDGE（2.75G）^[16]系统，进一步增强了数据传输速率。然而，仍然受限于所采用的技术框架，传输速率最高也只能达到几百Kbps，从而仅能为用户提供低速率的服务。

第三代移动通信系统（3G）提升了数据传输速率，典型的技术标准包括W-CDMA，CDMA2000和TD-SCDMA等^[17]，是目前正在大范围推广使用的商用系统。较之第二代移动通信系统，第三代系统的传输速率得到了极大的提高，能够为室内用户提供峰值2Mbps的传输速率，从而在一定程度上缓解了用户的应用需求。即便如此，离人们长期以来预期的高传输速率大容量的宽带无线通信仍有极大差距。因此，人们随即展开了B3G和4G通信系统的研究与开发^[18-20]。

第四代移动通信系统（4G）体现了不同标准的融合。其中一个分支是3GPP等通信领域的标准化组织所大力推动的LTE和LTE-Advanced标准^[21,22]，希望通过技术手段实现“移动通信宽带化”，提供更高的传输速率，满足用户更高的应用需求；另一个分支是IEEE组织所推动的802.16e和802.16m等标准^[23]，希望通过技术手段实现“宽带接入移动化”，将宽带无线接入向移动化方向发展和演进，为用户提供更快传输速率，进一步提升终端访问网络的能力。两个分支经历多年的独立发展后，近年来在功能定位和技术体制方面呈现出融合之势。它们均采用多天线（MIMO）技术^[24-27]作为物理层提升频谱效率的关键技术手段，并以OFDMA^[28-31]技术作为多址方案。

通过上述回顾可以清晰看出，移动通信系统的发展历程不仅标志着无线传输技术的不断进步，更是一部通过新技术体制实现传输速率提升的历史，同时也是不断满足飞速递增的用户数量及激增的业务需求的历史。

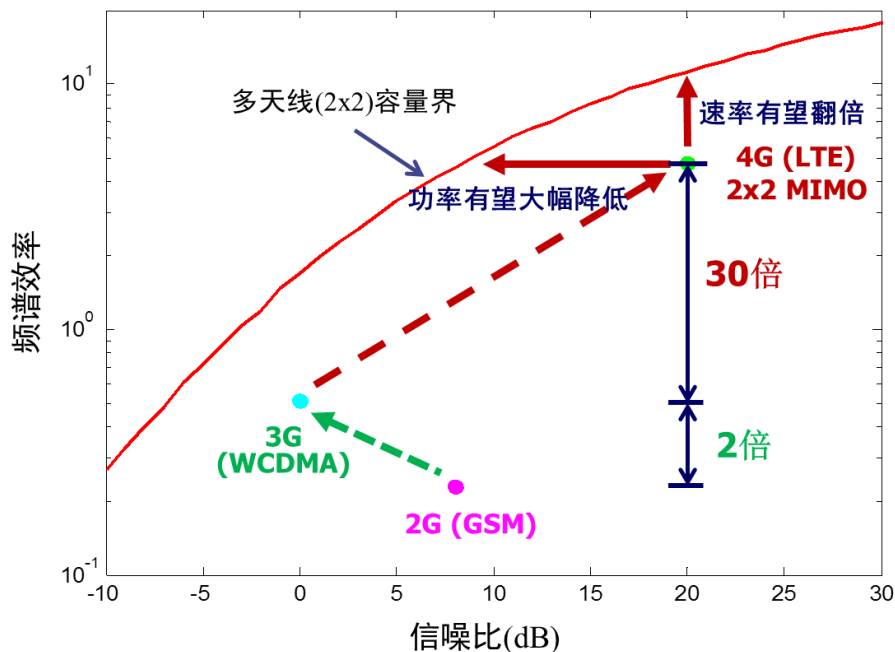


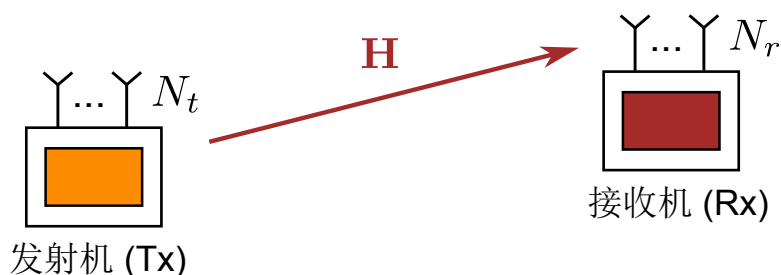
图 1.1 几代移动通信系统频谱效率的横向比较

1.1.3 频谱效率的提升不能以牺牲功率效率为代价

通过对几代移动通信系统所达到的频谱效率做横向比较能够对其演进的过程得到更加清晰而直观的认识。图1.1给出的是2G、3G和4G系统频谱效率的比较^①。可以看出，从2G到3G系统，频谱效率提高了约2倍，同时降低了传输功率，在图中沿左上方移动。与此同时，从3G到4G系统，伴随着MIMO技术的引入，频谱效率实现了质的飞跃。然而，为了使得接收端能够解调译码多个发射天线同时发送的调制信号，4G系统需要极大的提高工作信噪比，为此付出巨大的功率代价^[32,33]，在图中沿右上方移动。

频谱效率的提升必须要付出巨大的功率代价吗？当然不是。由图1.1可以看出，即便是当前最新的4G系统，性能仍有巨大的改善空间。MIMO系统的容量界告诉我们，现有系统所达到的性能离理论限还差很远。纵向来看，在信噪比一定的情况下，现有系统传输速率只达到了MIMO（ 2×2 ）容量界的一半，也就是说，在相同系统配置下，现有系统传输速率有望翻倍，频谱效率可以得到进一步提升；横向来看，在频谱效率一定的情况下，现有系统性能与MIMO容量界的距离在10 dB以上，也就是说，功率代价有望大幅降低。同时，随着天线数目的增加，受限于现有系统中采用的收发机方案，与理论限的差距还将进一步扩大^[33,34]。

① 1G系统所支持的语音传输速率极低，同时不支持数据传输，因而在图中标出。

图 1.2 MIMO系统 ($N_r \times N_t$) 模型示意图

频谱效率的提升能够为用户提供更高的传输速率，功率代价的降低具有诸多现实的意义^[35]。从运营商的角度来看，降低功率代价不仅能够带来巨大的经济利益，同时也是可持续发展的要求。据中国电子信息产业发展研究院的统计报告，我国四大运营商每年消耗电能200亿度以上，耗电总量居各行业前列。因此，降低功耗、节能环保的意义重大。从用户的角度来看，降低无线链路传输功率也就降低了信号辐射，减小了电磁波辐射可能带来的安全隐患，从而能够为公众带来巨大安全保障。

这里所讨论的速率和功率的潜在增益本质源于现有系统与MIMO容量界的差距。那么一个重要的问题就是：现有系统性能为何难以逼近容量界？如何使现有系统逼近容量界？对这一问题的思考和解决是在当前主流系统构架基础上进一步提升性能，满足用户不断递增需求的关键所在。然而，要回答这一问题我们就需要对MIMO传输技术有更深入的理解。

1.2 MIMO传输技术

MIMO是通过在收发设备上同时采用多个天线（如图1.2所示），从而提升系统传输性能的技术。我们用 $N_t \times N_r$ 表示发端有 N_t 个天线，收端有 N_r 个天线的MIMO系统。MIMO技术的产生为无线通信带来了重大突破。相对于传统的单天线系统，即单输入单输出（SISO）系统，MIMO技术为传输设计提供了除时间和频率之外的空间维度。通过合理的利用空间维度，可以在不占用更多时频资源的前提下为系统带来如下好处：

1、空间分集增益

无线信道的衰落特性导致信号不稳定。MIMO技术可以提高信号接收的可靠性。一个发射天线发出的信号被多个接收天线得到，同时多个发射天线可以发出多份同样的信号。这样就不会因为某个信道的严重衰落而导致信号无法获得。 $N_t \times N_r$ 的MIMO信道最多提供的空间分集数目为^[14]

$$N_t \cdot N_r.$$

2、空间复用增益

MIMO技术带来的新自由度除了用于空间分集，提高传输可靠性，还可以通过空间复用的方式提高频谱效率。在富散射环境下， $N_r \times N_t$ 的MIMO信道最多可以提供的独立数据子信道数目为

$$\min\{N_r, N_t\}.$$

每一个子信道的传输速率同单天线系统的性能类似，这样就成倍提升了系统的传输速率^[14]。

3、阵列增益

阵列增益通过采用信号处理的方法，如波束成型^[26]等，实现接收信噪比的大幅增加。它包含发射成型和接收成型两种方式，分别利用信道信息在发射端和接收端做预处理和后处理使得信噪比提高。采用该方法获得的信噪比增益有利于对抗无线信道的环境噪声、衰落和干扰，进而提升无线网络的性能和覆盖范围。

4、干扰消除和避免

无线网络的开放特性导致干扰现象极为严重^[36,37]。通过MIMO技术提供的空间自由度，可以降低干扰对系统的影响。例如，利用MIMO提供的空间维度，将信号能量指向特定的用户，并控制其他用户的接收信号功率使其避免或降低受到的干扰，可以实现多个用户共用频率资源，进一步提升频谱效率^[38-42]。

需要注意的是，MIMO技术的上述多个优点之间是彼此制约的，它们的本质都来源于MIMO技术带来的空间自由度。这些优点分别是根据不同的需求，从不同的角度对无线资源加以利用。优秀的MIMO系统设计能够根据当前的信道状况进行自适应，同时利用到多项优点^[43-47]，从而实现系统速率、可靠性和覆盖范围的提升。正是因为MIMO技术的这些特点，它已经成为众多无线标准的核心技术，广泛应用于无线局域网的IEEE 802.11（WLAN），无线城域网的IEEE 802.16（WMAN），以及移动宽带无线多址接入（MBWA）等系统框架中。

1.2.1 MIMO系统的容量界

MIMO传输模型是通过其信道矩阵 \mathbf{H} 来刻画的。发射信号 \mathbf{x} 经信道 \mathbf{H} 和噪声 \mathbf{n} 的影响后，在接收机获得，其接收信号表示为 \mathbf{y} 。

在发端知道信道状态信息的情况下，达到传输容量界需要满足两个条件^[48]：

- 1) 输入信号 \mathbf{x} 服从高斯分布；
- 2) 输入高斯信号的协方差应满足如下结构：

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = \mathbf{V}_H \mathbf{D}^2 \mathbf{V}_H^H$$

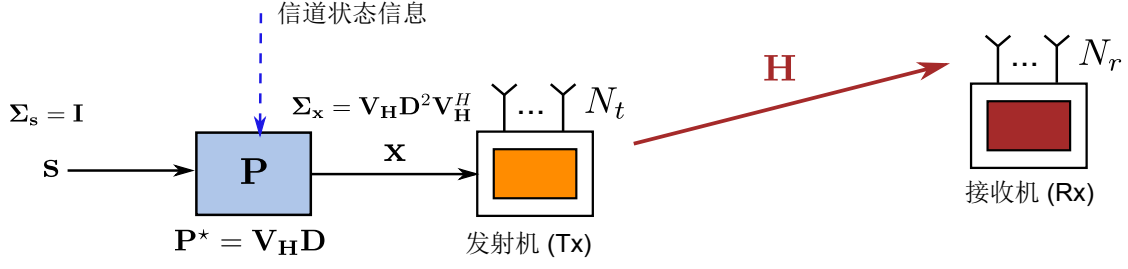


图 1.3 采用容量可达的预编码后MIMO系统的模型

其中 \mathbf{V}_H 是信道 \mathbf{H} 奇异值分解得到的右特征矩阵， \mathbf{D} 表示对角矩阵，通过经典注水算法得到^[49]。这一结论是香农信息论的多天线扩展^[48,50]。

以上结果对应清晰的物理概念：要达到容量界，系统应加入线性预编码模块。通过预编码实现对输入信号的变换，从而有效匹配信道。这一概念可以通过由图1.3来说明，其中信号 \mathbf{s} 表示高斯输入信号，其协方差为单位阵，即

$$\Sigma_s = \mathbf{I}.$$

经由预编码矩阵

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{V}_H \mathbf{D}$$

处理后，输入信号 \mathbf{s} 转换协方差为如下表达式的高斯信号 \mathbf{x}

$$\Sigma_x = \mathbf{V}_H \mathbf{D}^2 \mathbf{V}_H^H.$$

这样的信号变换满足了达到容量界的两个条件，从而能够实现MIMO系统理论上最大的传输速率。

看似所有的问题都已经解决，我们有了达到最大容量的预编码闭合表达式

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{V}_H \mathbf{D}$$

由此可以计算出MIMO信道所能达到的容量界^[49]

$$C = \log \det(\mathbf{I} + (\mathbf{P}^*)^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}^*).$$

在 2×2 Rayleigh衰落的MIMO信道条件下，与未采用预编码相比，即

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}$$

性能增益约为3 dB。

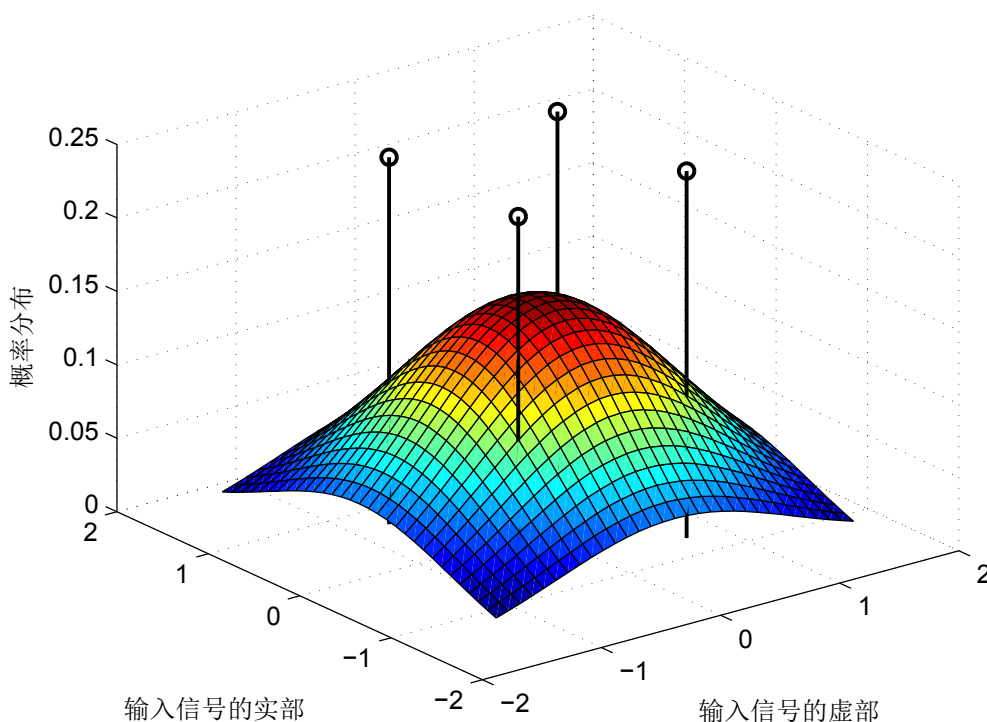


图 1.4 高斯信号与QPSK信号的概率分布比较

1.2.2 实际信号的频谱效率

重新思考上节所讨论的容量界结果，不难发现一个非常根本，非常重要的问题没有解决：达到容量界需要输入信号服从高斯分布。

服从高斯分布的输入信号到今天为止都未能在实际系统中实现。其根本原因在于高斯信号的幅度分布没有上界而且连续。没有上界意味着发射功率可能无穷大，连续意味着接收端做信号检测将会异常难。实际调制信号，如BPSK, PAM, QPSK, QAM等，幅度都有界而且分布离散。有界意味着发射功率受限，离散则意味着接收端做信号检测会容易很多。图1.4给出的是高斯信号与QPSK信号幅度的概率分布对比。水平两维坐标分别表示发射信号的实部和虚部，纵坐标表示概率分布。从中可以直观的看出高斯信号与实际调制信号的巨大差异。

信号形式的巨大差异导致传输性能的巨大差异。图1.5给出的是 2×2 的MIMO信道，在Rayleigh衰落情况下采用高斯信号和QPSK输入信号的频谱效率比较。首先来看基于高斯信号的方法。高斯信号幅度分布连续，携带的信息量不受限，频谱效率随着信噪比的增加而不断增加。在发送端知道信道状态信息的前提下，采用容量可达的预编码方法为高斯信号带来约3dB的增益；也就是说，同样的频谱效率可以在更低的信噪比下获得。QPSK信号的性能与高斯信号截然不同，它的频谱效率受限，随着信噪比的增加最终饱和。例如，

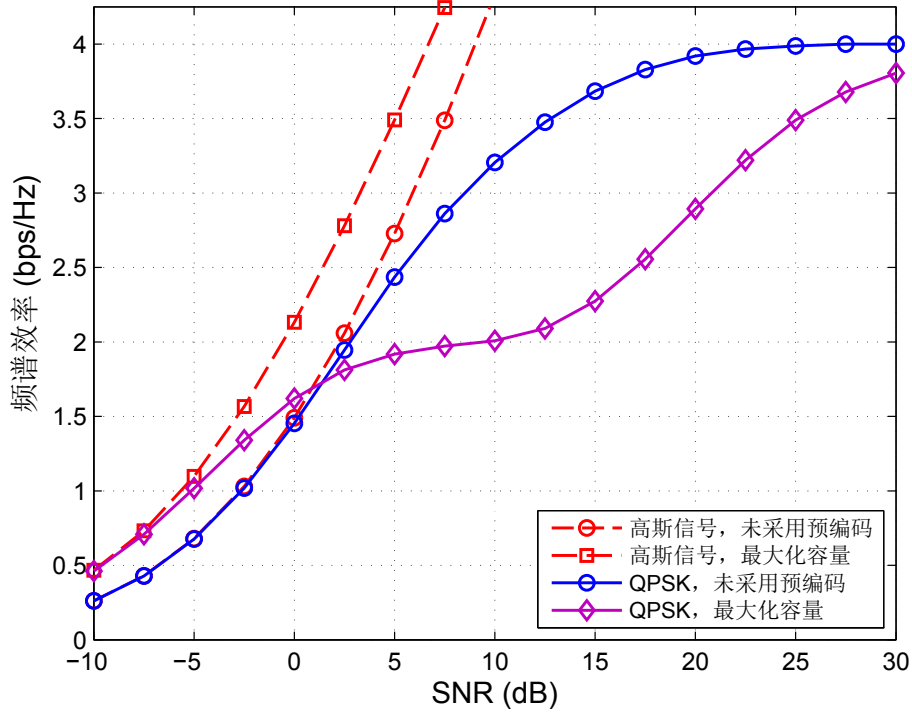


图 1.5 2×2 的MIMO Rayleigh衰落信道下高斯信号与QPSK信号频谱效率比较

对于 2×2 的MIMO信道，采用QPSK信号后频谱效率的极限为4bps/Hz；同时，对于 $N_r \times N_t$ 的MIMO信道，采用总计 M 个星座点的调制信号，频谱效率的极限为

$$\log_2 (M \cdot N_t).$$

由高斯信号与实际调制信号的巨大差异就不难理解图1.5带给我们的结论：将基于高斯信号“可达容量”的预编码应用到实际系统中采用的调制信号，在很宽的信噪比范围内，不但无法带来性能增益，反而将导致性能更加恶化。

这一现象告诉我们，现有达到容量的理论无法指导实践。探索应用于实际调制信号，提升实际系统性能的预编码调制方法意义重大。

1.2.3 MIMO系统收发机构架

上面给出的高斯信号和实际调制信号的频谱效率比较基于信息论的分析。实际构建的系统能否达到上述信息论分析的性能仍然依赖于具体的收发机设计方案，如图1.6所示。从发射机来看，输入信息首先经过信道编码与交织模块。信道编码根据实际系统性能需求及允许的复杂度，选择范围非常广，从简单的卷积码，到复杂的Turbo码和LDPC码^[51]。编码后的数据经数字调制后，根据对信道状态信息的了解进行预编码。预编码的目的是根据某一具体的准则是输入信号适应信道，从而提升传输性能。经处理后的信号即可由多天线发射出去。

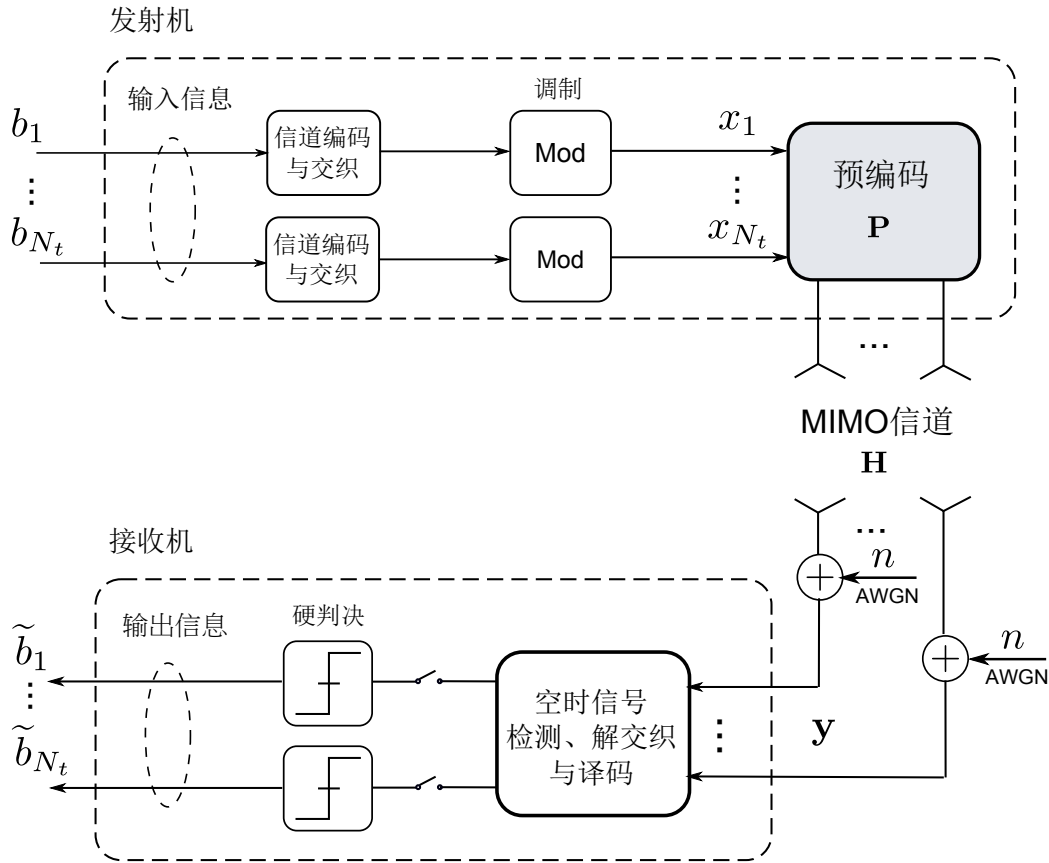


图 1.6 采用MIMO技术的收发机方案

发射信号经MIMO信道及噪声的影响后，由接收天线获得，并送入空时信号检测、解交织与译码模块。空时信号检测在MIMO技术的研究中占有重要地位，不断有令人耳目一新的方法出现。从线性的检测方法，如迫零（Zero Forcing, ZF）检测器^[52,53]和最小均方误差（Minimum Mean Squared Error, MMSE）检测器^[54,55]，到非线性的方法，如判决反馈均衡（Decision Feedback Equalization, DFE）^[56,57]和最大后验概率（Maximum A Posteriori, MAP）检测^[57,58]；从降低复杂度着手的球译码（Sphere Decoding）方法^[59,60]，到基于优化的半定规划松弛（Semi-Definite Relaxation）^[61,62]，不断的为我们提供新的MIMO检测方法和看问题视角。

根据系统性能及对复杂度的要求，信号检测与译码模块可以采用迭代和不迭代两种实现方法。不迭代的方法将空时信号检测与译码分离为两个独立模块，而迭代的方法则通过检测器与译码器之间不断交换软信息，从而达到更好的性能。检测器与译码器的迭代方案在文献中被称之为比特交织编码调制技术（Bit-Interleaved Coded Modulation, BICM）^[63,64]，配合最优或近似最优的信号检测与信道编译码方法后，该收发机方案可以使实际系统逼近信息论分析得到的性能限。

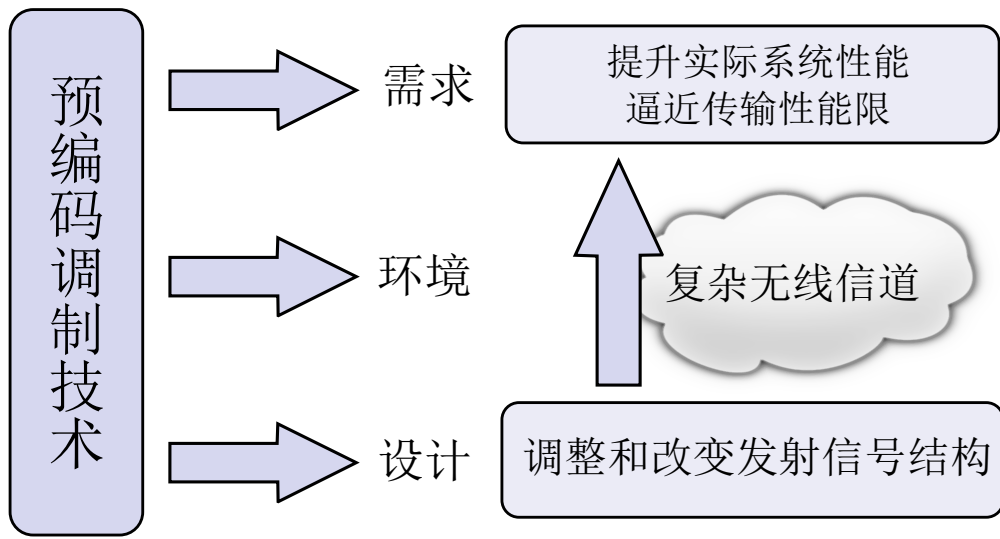


图 1.7 研究思路

既然已经存在逼近信息论分析性能限的MIMO收发机结构，更重要的问题就是如何提升实际系统的性能限，这是我们整个研究的重心所在。

1.3 研究思路及难点分析

本论文研究面向实际调制信号的预编码技术，通过调整和改变发射信号结构，实现对复杂无线信道的匹配，最终达到提升实际系统性能，逼近传输性能限的目的，如图1.7所示。论文通过对预编码设计中的三个重要问题进行思考而依次展开。第一个研究点讨论如何实现信号与信道的有效匹配，希望突破已有的方案，针对实际调制信号提出完全信道信息下预编码设计的统一理论框架和优化方法；第二个研究点讨论如何大幅降低适应信道所需的信息交互量，希望通过利用信道统计规律，降低利用信道的时间尺度；第三个研究点讨论如何保障传输的同时有效控制网络干扰，希望通过控制干扰，实现频率资源的共用，从而进一步提升系统频谱效率。

1.3.1 实现信号与信道的有效匹配

预编码调制方法通过利用信道状态信息，在信号发射前调整和改变调制信号的结构，实现与信道的有效匹配，达到提升系统性能的目的，参见图1.8。信号通过预编码的方式进行预处理，本质上是对多路发射信号加权叠加。针对实际调制信号的加权系数设计，即预编码参数设计，需要系统有效的方法应对不同的调制信号形式和不同的天线配置参数。调制信号的形式决定了是什么样的信号形式进行加权叠加，天线配置的参数决定了有多少个信号进行加权叠加。已有预编码设

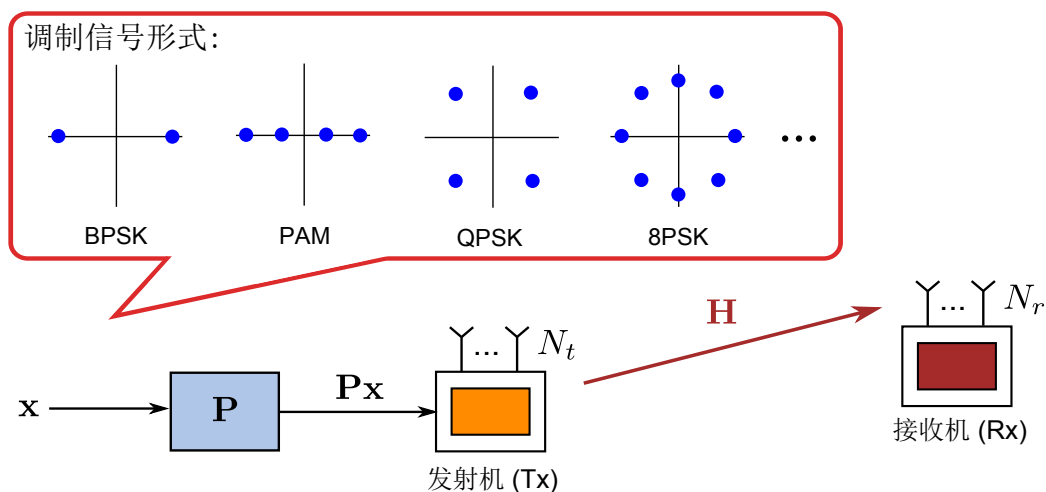


图 1.8 研究内容一：实现信号与信道的有效匹配

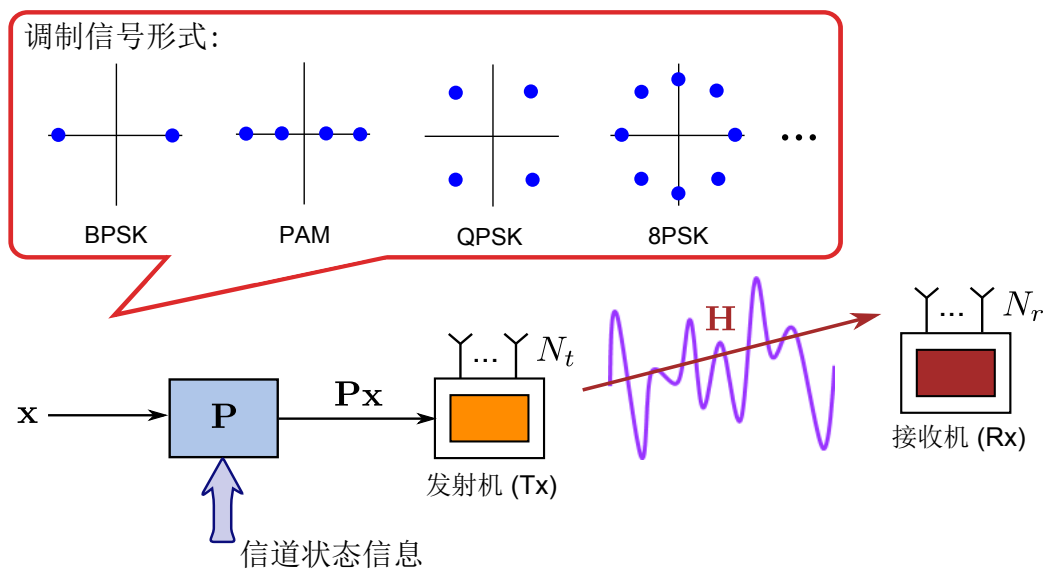


图 1.9 研究内容二：大幅降低适应信道的信息交互量

计方案要么完全不考虑调制信号的形式，采用第1.2.1节所讨论的最大化容量的方法，得到的结论大多仅具有理论价值，难以实用；要么针对某一组具体的调制信号和天线配置参数进行设计，应用面窄，缺乏适用面广的设计方法和设计机理。我们希望突破这些已有方案，即要依据实际调制信号进行设计，又要找到统一的理论框架和优化方法，得到提升实际系统频谱效率的一般性方法，并通过构建实际收发系统来逼近传输性能限。

1.3.2 大幅降低适应信道的信息交互量

预编码是适应信道，对信号进行预处理的方法。适应信道意味着需要获取信道状态信息，需要收发端的信息交互，如图1.9所示。当信道变化较慢时，需

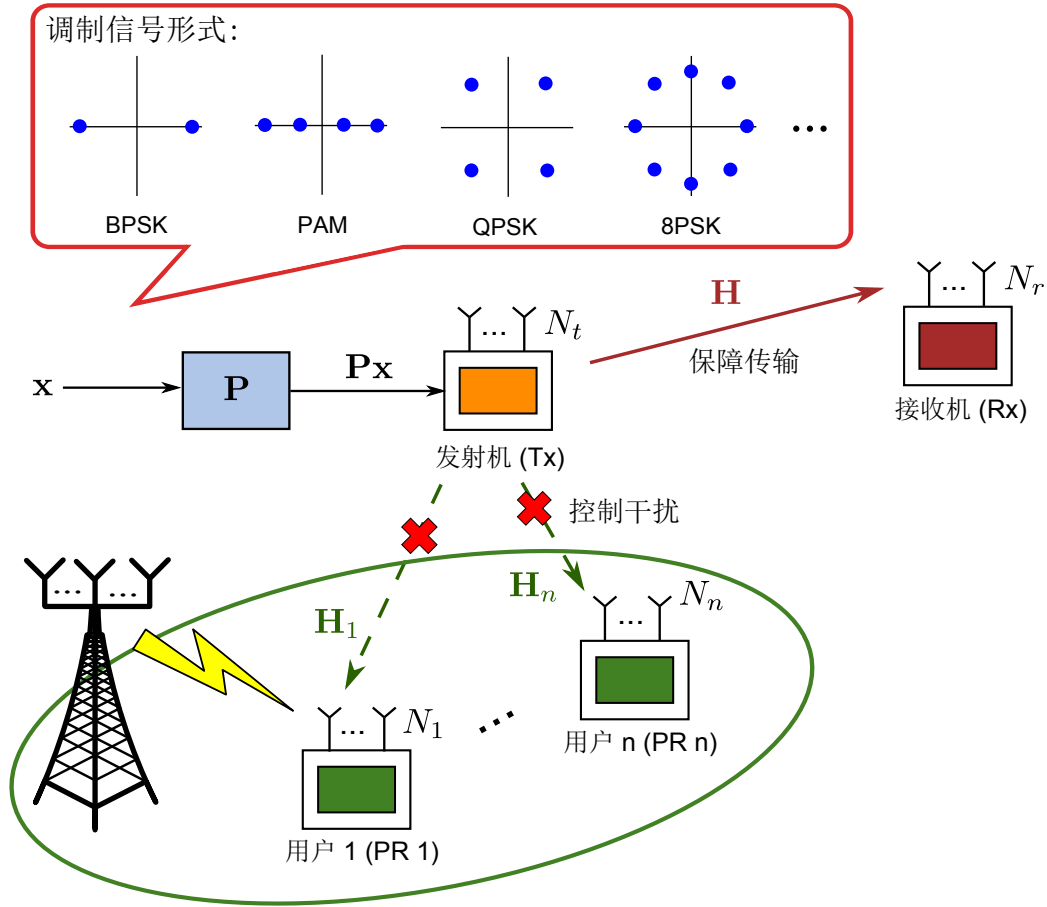


图 1.10 研究内容三：保障传输的同时有效控制网络干扰

要的信息交互量少，可以采用完全信道信息的设计，以达到好的传输性能；当信道变化快时，信息交互量将变的越来越大。例如，LTE系统的中心频率为2.1 GHz，当通信设备的移动速度达到20 m/s时，信道相关时间约为1 ms，相干带宽约为50 KHz^[14]。对于4×4信道，其信道参数通过32个实数来描述。假设每个实数通过8个比特进行量化，则获取信道信息需要的传输速率达到

$$R = \frac{32 \times 8}{50 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-3}} = 5.12 \text{ bit/s/Hz}$$

对于采用QPSK的传输系统，信息交互量带来的开销占MIMO系统互信息极限的64%。虽然减少量化比特数可以在一定程度上减少信息交互量，但随着通信设备移动速度加快及天线数目进一步增加，系统开销量越来越大的趋势无法改变。也就是说，如果针对快变信道仍然采用完全信道状态信息，实用性差。在研究内容二中，我们讨论如何利用信道的统计规律，降低利用信道的时时间尺度。我们希望通过统计信道信息下预编码调制的优化设计，实现降低信息交互量，达到减少系统实现成本的目的。

1.3.3 保障传输的同时有效控制网络干扰

无线通信最大的特点是存在干扰。正是因为干扰，使得我们要对不同的用户采用时分或频分加以区分；正是因为干扰，使得我们对不同的小区采用不同的频率，并用频率复用因子这样的参数来刻画无线资源的使用情况。干扰是一把双刃剑，处理干扰的能力决定了我们利用资源自由度的能力。如果我们能够认识传播环境，找到控制网络干扰的办法，就能使多个收发系统共用频率资源，从而进一步提升频谱效率。如图1.10所示，通过预编码设计可以一方面提升系统的传输速率，一方面控制对使用相同频率资源的多个用户的干扰。这样就可以在不对已有系统用户造成干扰的前提下，达到共用频率资源的目的。有效控制干扰是这一方案得以实现的根本，因此在研究内容三中，我们讨论如何在预编码设计中考虑干扰因素，研究在控制网络干扰的前提下，如何提升系统传输性能。

1.4 本论文主要工作及内容安排

综上所述，本论文面向实际无线通信系统，通过研究调整 and 改变发射信号结构的预编码调制技术，实现对复杂无线信道的匹配，最终达到提升实际系统性能，逼近传输性能限的目的。研究围绕预编码调制的关键技术而依次展开。首先建立预编码调制设计的基础模型（第2章）；第二，在此模型的基础上从完全信道信息的设计入手，研究预编码调制的设计方法（第3章）；第三，从降低快变信道信息交互的角度出发，研究统计信道信息下的预编码调制优化设计（第4章）；最后，研究干扰可控的预编码调制优化设计（第5章）。本论文的总研究结构如图1.11所示。

第2章讨论预编码调制技术的模型与设计。从MIMO信道入手，首先讨论基于频率、时间和空间三重选择性的信道建模，多天线信道与几类常用多用户信道的关系，以及信道状态信息获取的方法。接下来讨论预编码问题和几种典型的设计准则。最后引出本论文讨论的重点：最大化调制约束的互信息准则。与已有的准则相比，最大化调制约束的互信息以实际系统采用调制信号后的频谱效率为目标函数，以复矩阵为优化变量，以功率为约束条件，得到的解对提升实际系统的性能有重大意义。与已有方法相比，采用这一设计框架更易于得到统一的求解框架和优化算法；从性能结果来看，这一框架不仅能够提升实际系统的频谱效率，还能大幅改善通信系统编码后的误比特率。

第3章在第2章模型的基础上，针对完全信道状态信息，提出了最大化调制约束互信息的预编码方法。算法首先将待设计的预编码分解为三个部分：左酉矩阵、功率分配矩阵和右酉矩阵。其中第一部分（左酉矩阵）匹配无线信道，利用

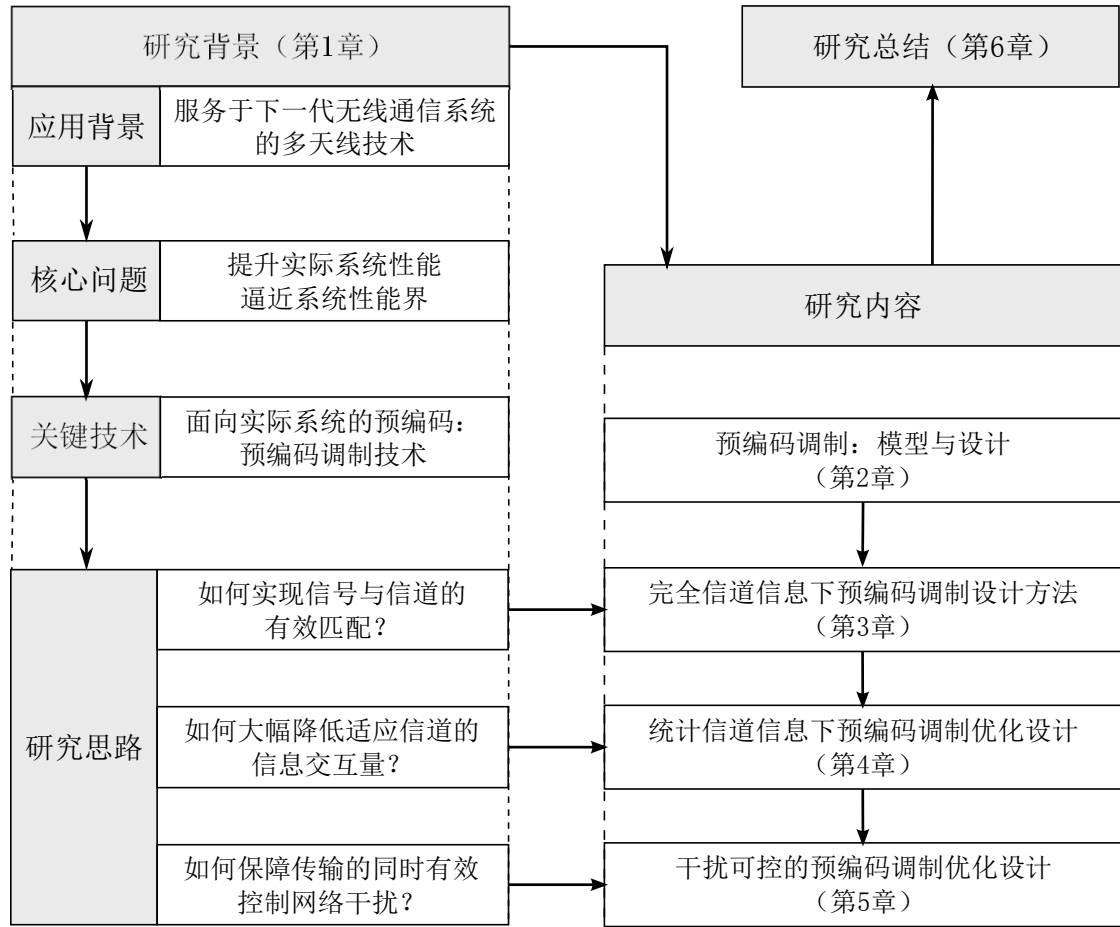


图 1.11 本论文总体结构示意图

最优的信号发射方向；第二部分（功率分配矩阵）控制发射信号的功率，对调制星座点进行扩张和收缩；第三部分（右酉矩阵）对调制星座点进行旋转。由此得到迭代算法，求解直到收敛。所提算法收敛快速、对起始点不敏感，能够获得高的互信息增益。与此同时，通过建立BER仿真系统，进一步验证了已有文献中大量讨论的最大化容量方法通常只具有理论意义，将其应用于实际系统会带来性能恶化，很多时候甚至比未采用预编码还要差；与此相反，针对实际调制信号最大化互信息的方法能够为实际系统带来高的性能增益。因此所提方法不仅在理论上是对最大化容量方法的补充，扩展了信息论中基于高斯信号容量限的结论，它更是一项可以实用化的方法，能够对现有通信系统带来巨大增益，进而使得实际系统逼近传输性能限。

第4章讨论统计信道状态信息下预编码调制的设计方法。通过利用信道的统计规律，降低利用信道的时间尺度，从而减少适应信道所需要的信息交互量。依据统计信道设计最大化平均互信息的预编码方法首先遇到的问题是平均互信息本身难以计算，从而使得以此为目标的优化问题难以求解。我们提出了平均互信息

的下界和上界，并发现得到的下界加上一个确定常数后能够非常好的近似平均互信息。下界的计算时间代价比直接计算平均互信息少几个数量级。这样，利用下界进行预编码的设计既可以保证好的性能，又大幅降低的计算复杂度。同时，为了有效的最大化平均互信息下界，通过分析最优预编码结构，提出了优化功率分配和信号设计的两步迭代算法，对问题进行高效求解。与已有预编码方法相比，该方法在平均互信息和编码后的BER两个指标上性能突出。

第5章讨论干扰可控的预编码调制优化设计，通过认识传播环境、控制网络干扰，实现共用频率资源，充分利用资源自由度。预编码设计的目标是提升收发端传输速率的同时避免对网络中其他用户造成干扰。通过提出基于分支定界的预编码调制算法，全局最优的求解了这一理论难题。本章内容是对第3章和第4章所提方法的极大扩展，不仅考虑了更为复杂和实际的设计问题，而且提出了全新优化理论框架进行求解。所讨论的预编码问题是严格非凸的，通过采用凸凹包络法得到了这一问题的松弛问题，并在不断缩小的求解空间上对松弛问题求解，我们证明了算法最终能够收敛到全局最优。同时讨论了两种加速收敛的方法，并比较了几种可能的松弛方法对算法的影响。数值仿真验证了所提方法得到的性能与复杂度的折衷关系。只需极低的计算代价，BAMIO算法就可以得到精度非常高的解，同时与已有算法具有巨大性能优势。

最后，第6章总结全文工作，并对预编码调制技术的进一步研究给出建议。

第2章 预编码调制：模型与设计

预编码是多天线系统发射端最靠近传输信道的模块，是发射端对信号进行处理的最后一级模块，在整个系统中的位置参见图1.6。预编码不仅是多天线技术研究中的热点^[65–74]，也是众多无线传输标准正式采用的技术方案^[75]。预编码的设计依赖于对信道的理解，因此，本章从MIMO信道入手，首先讨论信道频率、时间和空间三重选择性的建模，与常见多用户信道的联系，信道状态信息的获取方法。接下来讨论预编码问题，以及文献中常用的几种典型设计准则。最后引出本论文讨论的重点：最大化调制约束的互信息准则。与已有准则相比，最大化调制约束的互信息基于具体调制信号进行设计，以实际系统的频谱效率作为目标函数，得到的解对提升实际系统性能具有重大意义。

2.1 MIMO信道模型

2.1.1 MIMO信道的三重选择性

MIMO信道具有三重选择性：频率选择性、时间选择性和空间选择性，下面分别从这三方面入手阐述MIMO信道的模型。

1、频率选择性

频率选择性是指信道在频率维度上的变化。首先考虑窄带传输，即在相应频带内，信道不随频率变化而变化。这种情况通常称之为频率平（frequency-flat）MIMO信道。发射端有 N_t 个天线，接收端有 N_r 个天线的MIMO信道，其基带输入输出模型可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{n} = \mathbf{H}\mathbf{x}' + \mathbf{n} \quad (2-1)$$

其中， $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$ 是输入信号， $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ 是预编码矩阵， $\mathbf{x}' \in \mathbb{C}^{N_t \times 1}$ 是经预编码变换后的输入信号， $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$ 是接收信号， $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_r \times 1}$ 是噪声信号； $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 是信道矩阵，可以写成矩阵元素的形式：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & h_{1,N_t} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & h_{2,N_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_r,1} & h_{N_r,2} & \cdots & h_{N_r,N_t} \end{bmatrix}$$

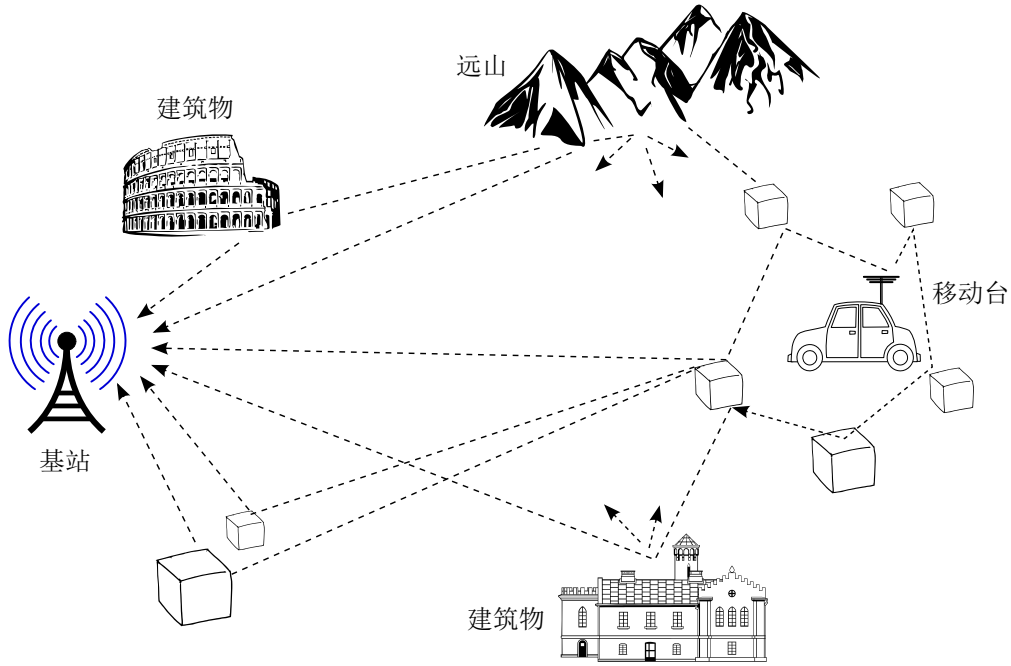


图 2.1 无线信道的多径传输

其中，矩阵 \mathbf{H} 的第 (i, j) 个元素 $h_{i,j}$ 表示从第 j 个发射天线到第 i 个接收天线的信道增益；矩阵 \mathbf{H} 的第 i 列表示第 i 个发射天线到所有接收天线信道增益组成的向量。

当 $N_t = 1$ 时，式(2-1)中的MIMO信道简化为SIMO (Single-Input Multiple-Output) 信道，表示只在接收端有多个天线；当 $N_r = 1$ 时，式(2-1)中的MIMO信道简化为MISO (Multiple-Input Single-Output) 信道，表示只在发射端有多个天线；同时，当 $N_t = N_r = 1$ 时，MIMO信道退化为传统的SISO (Single-Input Single-Output) 信道，由一个标量表示其信道增益。

信道的频率选择性来源于无线信道多径传输产生的符号间干扰 (Inter-Symbol Interference, ISI) 现象，如图2.1所示。符号间干扰现象表示在时间 m 接收到的信号受到当前时刻和之前的 L 个时刻的发射信号影响，表示为可以写为如下的表示形式：

$$\mathbf{y}(m) = \sum_{k=0}^L \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{x}'(m-k) + \mathbf{n}(m) \quad (2-2)$$

其中， $\mathbf{x}'(m)$ ， $\mathbf{n}(m)$ ， $\mathbf{H}(m)$ 和 $\mathbf{y}(m)$ 分别表示时刻 m 时的发射信号，噪声信号，信道矩阵和接收信号。

ISI信道的一个处理方式是在发射端每 N 个符号中插入至少 L 个零，这种补零的方法称之为zero-padding，能够将式(2-2)转化为形如式(2-1)的更加简洁的输入输

出关系，其中转化后的信道矩阵 \mathbf{H} 具有如下的卷积矩阵形式^[76,77]

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}(L) & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & & \mathbf{H}(0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}(L) \end{bmatrix}$$

此外，如果在发射端每 N 个符号中插入至少 L 个循环前缀（cyclic prefix, CP），同样可以将式(2-2)转化为形如式(2-1)的形式。此时，转化后的信道矩阵 \mathbf{H} 具有如下圆卷积形式^[76,77]

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}(L-1) & \mathbf{H}(L-2) & \cdots & \mathbf{H}(1) \\ \mathbf{H}(1) & \mathbf{H}(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}(L-1) & \cdot & \mathbf{H}(2) \\ \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}(L-1) & \mathbf{H}(L-2) & \cdots & \mathbf{H}(1) & \mathbf{H}(0) \end{bmatrix}$$

有了ISI信道的圆卷积形式，在发射端和接收端分别做逆傅里叶变换（IDFT）和傅里叶变换（DFT），就可以将具有ISI的MIMO信道转化为形式规则的块对角信道结构^[78,79]

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_N \end{bmatrix}$$

这样变化之后，不同的块矩阵 \mathbf{H}_k ， $k = 1, \dots, N$ ，之间独立，构成多个并行子信道。例如，第 k 个子信道的输入输出关系可以表示为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}'_k + \mathbf{n}_k, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2-3)$$

这就是著名的OFDM传输技术^[79-81]。它将具有频率选择性的宽带信道转化为 N 个称之为子载波的频率平窄带信道。多个窄带信道能够无干扰的独立进行传输。这一方法不仅简化了通信信号处理的结构，同时当 N 足够大时因加入循环前缀带来的性能损失可以忽略不计^[76]。

正因如此，大量无线通信标准采用OFDM技术或以OFDM为基础的OFDMA多址技术^[82]。在本论文中，我们的设计将针对采用OFDM/OFDMA技术后的子载波进行讨论，也就是说，我们的方法都是针对模型(2-3)进行设计。同时，如不特别

加以说明，我们省略角标 k ，这样形式上又还原回式(2-1)表示的模型。需要特别注意的是，此时物理概念已经发生了根本的变化。

2、时间选择性

时间选择性是指信道在时间维度上的变化，它源于收发机和传播环境中散射物的移动。时间选择性的一个重要参数是相关时间 T_c ，定义为时变信道参数独立变化的最小时间间隔。对于时间 t_1 和 t_2 ，若

$$|t_1 - t_2| > T_c$$

则信道矩阵 \mathbf{H} 满足

$$\mathbb{E} [\text{vec}(\mathbf{H}(t_1)) \text{vec}^H(\mathbf{H}(t_2))] = \mathbf{0}$$

也就是信道不相关。信道相关时间反比于信道的多普勒扩展。信道多普勒扩展越大，信道的相关时间就越小。

依据信道变化的时间尺度可以将信道分为快衰落和慢衰落两种类型^[14]。如果相关时间 T_c 远小于系统的时延需求，称为快衰落；反之，如果相关时间 T_c 远大于系统的时延需求，称之为慢衰落。快衰落信道假设下，信息在传输的过程中经历了多次不相关的信道状态；慢衰落信道假设下，信息传输在一个相关时间内完成。

在系统分析过程中，为了降低分析的复杂度，通常采用块衰落（block fading）模型。该模型将相关时间内的信道变化建模为常数，多个相关时间的信道通过多个常数进行建模，如图2.2所示。这样，针对慢衰落信道的研究集中在如何针对某一确定信道进行设计提高系统性能；针对快衰落信道的研究则依据完全或部分信道状态信息，讨论如何设计相应方法，针对一系列信道提高系统性能。

3、空间选择性

空间选择性是指信道在空间维度上的变化，刻画信道的空间相关性。空间相关是相对于空间不相关，即元素独立分布的信道来说的。经典的Rayleigh模型做了空间不相关的假设，认为信道矩阵 \mathbf{H} 的元素是独立同分布的高斯复随机变量，即

$$\mathbb{E} [\text{vec}(\mathbf{H}) \text{vec}^H(\mathbf{H})] = \mathbf{0}$$

其中信道矩阵 \mathbf{H} 第 (i, j) 个元素 H_{ij} 的方差满足

$$\mathbb{E}[|H_{ij}|^2] = 1.$$

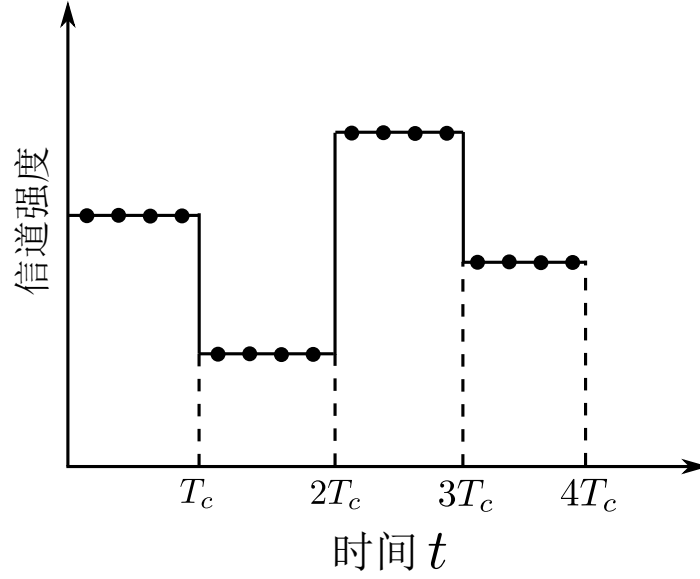


图 2.2 块衰落模型示意

空间选择性的建模是在经典Rayleigh模型基础上考虑了发射和接收相关特性后得到的^[83,84]

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Psi}_r^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{\Psi}_t^{1/2} \quad (2-4)$$

其中 $\mathbf{H}_w \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 的每一个元素独立同分布，且为零均值单位方差的高斯随机变量； $\mathbf{\Psi}_t \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t} > 0$ 和 $\mathbf{\Psi}_r \in \mathbb{C}^{N_r \times N_r} > 0$ 为发射和接收相关矩阵。

这一模型在文献中通常称之为MIMO信道的双相关模型^[85-87]，它的有效性已通过信道测量验证^[88,89]，并在大量无线通信标准中推荐使用。

2.1.2 MIMO信道的外延

上面我们主要讨论的是点对点传输场景下的输入输出模型。事实上，MIMO信道所能表示的情况远不止点对点无线通信系统。数学上看，式(2-1)刻画的MIMO信道由一个矩阵进行描述，它能表示众多包含多个输入维度和多个输出维度的系统，具有非常广泛的表示能力。

1、多址接入信道模型

多址接入信道^[49,90]是指多个发射端同时给一个接收端发送信息的情况。如图2.3(a)所示，它的收发模型可以写为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}_1 \mathbf{x}'_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{x}'_2 + \cdots + \mathbf{H}_n \mathbf{x}'_n + \mathbf{n}$$

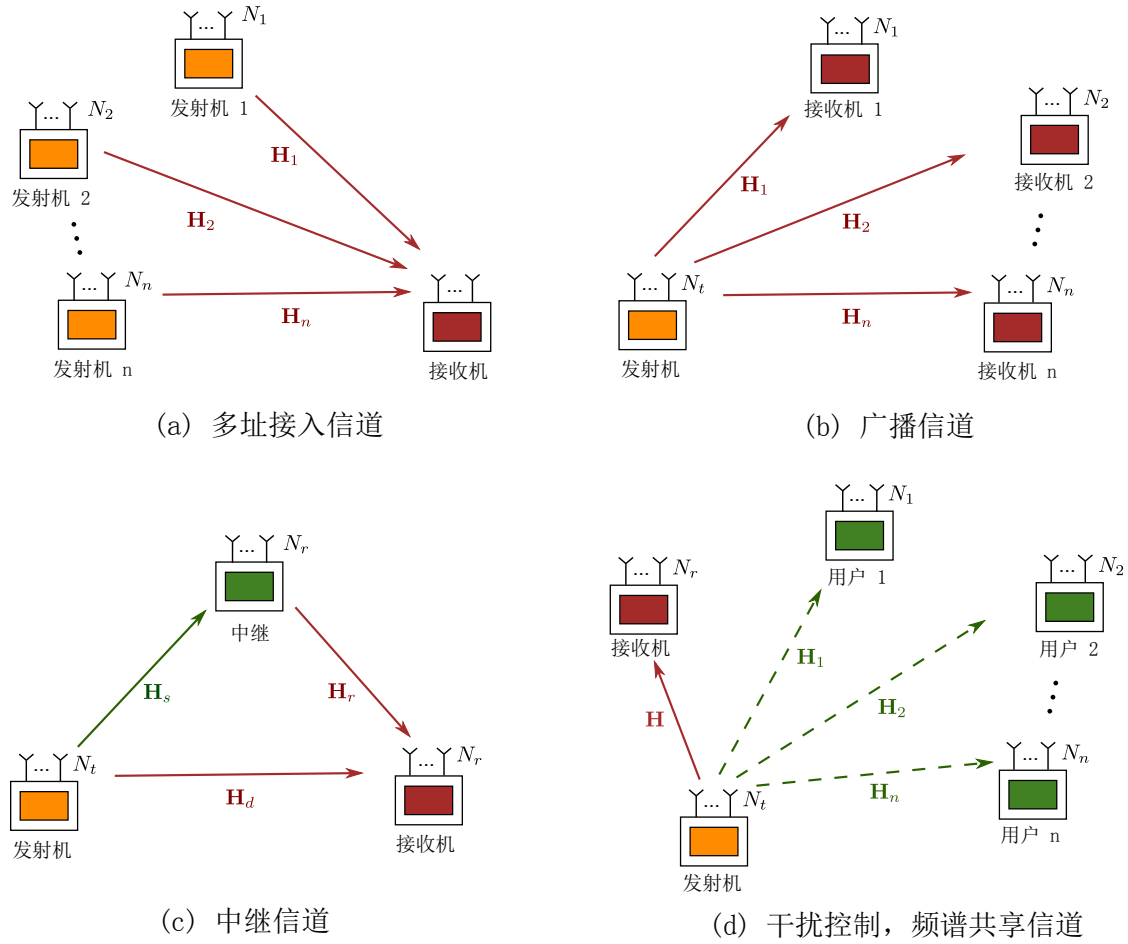


图 2.3 MIMO信道的外延

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \cdots & \mathbf{H}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}'} + \mathbf{n} \quad (2-5)$$

其中， \mathbf{x}'_i , $i = 1, \dots, n$, 表示第 i 个发射机的发射信号； \mathbf{H}_i , $i = 1, \dots, n$, 表示第 i 个发射机到接收机的信道矩阵； \mathbf{n} 表示噪声向量； \mathbf{y} 表示接收机获得的信号。将该输入输出关系组合写为矩阵的形式可以看出，多址接入信道是将多个MIMO子信道进行横向排列。与MIMO信道的不同之处在于多个发射端的信息无法直接交互，难以做类似于MIMO系统的联合发射处理。因此，由对应MIMO信道的研究能够得到多址接入信道传输性能的上界。

2、广播信道模型

广播信道^[49,91]是指一个发射端给多个接收端发送信息的情况。如图2.3(b)所

示，它的收发模型可以写为

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{x}' + \mathbf{n}_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2-6)$$

其中， \mathbf{x}' 是发射信号， \mathbf{H}_i , $i = 1, \dots, n$, 是发射机到第*i*个接收机的信道矩阵； \mathbf{n}_i , $i = 1, \dots, n$, 表示与接收机*i*有关的噪声向量； \mathbf{y}_i , $i = 1, \dots, n$, 是第*i*个接收机获得的信号。通过将输入输出信号进行组合，可以写为如下矩阵的形式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{x}' + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} \quad (2-7)$$

可以看出，广播信道结构上是多个MIMO子信道进行纵向排列，与MIMO信道的不同在于多个接收端的信息无法直接交互，难以做类似于MIMO系统的联合检测和译码。因此，由对应MIMO信道的研究得到的是广播信道传输性能的上界。

3、中继信道模型

中继信道^[92-97]是指有中继节点辅助的传输方案，如图2.3(c)所示。在第一时隙，发射机发出信号 \mathbf{x}'_1 ，中继和接收机分别收到信号

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{x}'_1 + \mathbf{n}_r \quad (2-8)$$

$$\mathbf{y}_{d,1} = \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{x}'_1 + \mathbf{n}_1 \quad (2-9)$$

其中 \mathbf{x}'_1 为第一时隙的发射信号； \mathbf{H}_s 和 \mathbf{H}_d 分别为发射机到中继和发射机到接收机的信道矩阵； \mathbf{n}_r 和 \mathbf{n}_1 分别为中继和接收机的噪声信号。

第二时隙发射机发出信号 \mathbf{x}'_2 ，同时中继采用简单的放大转发^[98,99]，接收机收到叠加的信号

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{d,2} &= \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{x}'_2 + \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{y}_r + \mathbf{n}_2 \\ &= \mathbf{H}_d \cdot \mathbf{x}'_2 + \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{H}_s \cdot \mathbf{x}'_1 + \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{n}_r + \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (2-10)$$

其中 \mathbf{x}'_2 为第二时隙的发射信号； \mathbf{H}_r 为中继到接收机的信道矩阵； \mathbf{n}_2 为接收机的噪声信号； \mathbf{y}_r 为中继在第一时隙的接收信号，参见式(2-8)。综合考虑式(2-8)、(2-9)和(2-10)的输入输出关系，可以将其统一写为矩阵形式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{d,1} \\ \mathbf{y}_{d,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_r \cdot \mathbf{H}_s & \mathbf{H}_d \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}'} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} \quad (2-11)$$

可以清楚看出，这里所讨论的中继传输方案对应MIMO信道的一个特例，从而通过对MIMO信道的研究能够得到适用于该中继传输的方案^[100]。

4、频谱共享信道

共用频率资源的频谱共享方案是近年来的研究热点，它允许收发机占用原本分给特定用户使用的频谱。在保证原有用户不受干扰的前提下，让新接入的收发机能够传输数据，速率可以尽可能的高，如图2.3(d)所示。频谱共享的一种可行方案是让移动通信用户共用数字电视的频谱资源^[42]，从而满足日益增长的移动通信需求。

新接入的收发机信道本身可以用MIMO模型来建模，唯一的区别是多了保证已有用户不受干扰的约束。因为干扰约束的存在，其对应MIMO信道的传输性能对应频谱共享信道的性能上界。对这一问题的讨论参见第5章。

MIMO信道模型小结

综上所述，MIMO模型本身提供了及其丰富的内涵和外延。对这一模型的深入理解和针对该模型的设计不仅能为已有系统提供解决方案，同时能为更多新的系统和新的场景提供大量借鉴和指导。

2.1.3 MIMO信道状态信息获取

当前无线通信系统通常会在发射信号中插入导频（pilot）信息，利用导频并采用信道估计的方法可以再接收机精确获取信道状态信息（Channel State information, CSI）。发射机获取CSI一般采用较为间接的方法。由于发射机利用CSI可以设计预编码方案有效提升系统性能，因此在MIMO传输方案的设计中占有重要的地位。发射机获取CSI的方式主要有两种：利用信道互易特性和反馈，下面分别进行讨论。

信道的互易特性是利用发射机A到接收机B的信道与发射机B到接收机A的信道完全相同的原理。互易特性的严格成立需要正向链路传输（ $A \rightarrow B$ ）与反向链路传输（ $B \rightarrow A$ ）发生在相同的时间，相同的频率和相同的地理位置。因为移动通信系统大多采用全双工机制，正向链路的发射机同时是反向链路的接收机。利用互易特性，A端获取正向链路（ $A \rightarrow B$ ）信道的问题可以通过对反向链路（ $B \rightarrow A$ ）的信道估计得到。这一过程如图2.4所示。

在实际全双工系统中，互易特性成立所要求的时间相同，频率相同和地理位置相同三个条件难以精确满足。然而，只要这三个条件在一定程度上成立，即正向链路与反向链路的传输时间差 δ_t 远小于信道相关时间 T_c

$$\delta_t \ll T_c \quad (2-12)$$

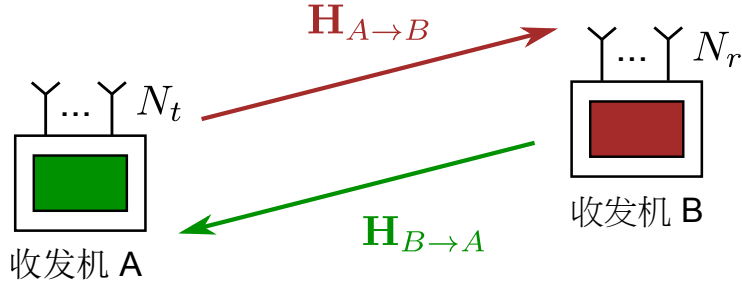


图 2.4 利用信道互易获取信道状态信息

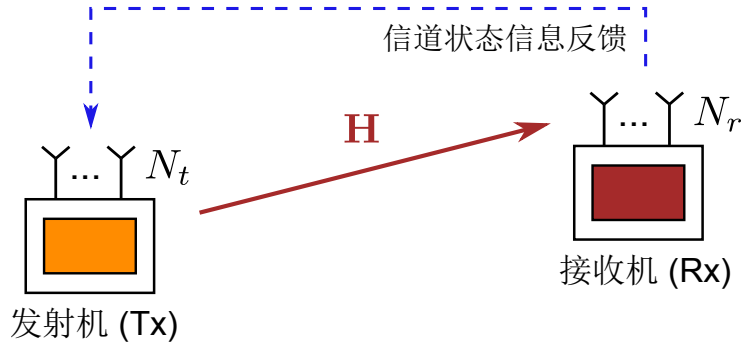


图 2.5 利用反馈获取信道状态信息

正向链路与反向链路的传输频率差 δ_f 远小于信道相关带宽 B_c

$$\delta_f \ll B_c \quad (2-13)$$

正向链路与反向链路发生时的地理位置差 δ_g 远小于信道相关距离 L_c

$$\delta_g \ll L_c \quad (2-14)$$

互易特性即可近似成立^[101]。

利用信道互易获取CSI的方法常用于时分双工系统（time-division-duplex, TDD）。时分双工系统中的频率相同和地理位置相同的条件完全满足，因此只需满足条件(2-12)信道互易条件即成立。

在频分双工系统（Frequency-division-duplex, FDD）中，正向链路和反向链路的频率间隔通常远大于信道相关带宽，因此信道互易条件难以成立。这时就需要采用反馈的方法获取CSI。

利用反馈获取CSI的方法如图2.5所示，接收端通过信道估计的方法获得CSI并反馈回发送端。需要特别注意的是，反馈延迟 δ_d 应远小于信道相关时间 T_c 才能保证CSI的有效性，即

$$\delta_d \ll T_c. \quad (2-15)$$

当信道变化较慢时，信道相关时间较大，式(2-15)给出的条件更容易满

足，此时可以采用基于完全信道状态信息的设计，参见第3章；当信道变化较快时，信道相关时间较小，式(2-15)给出的条件更苛刻，单位时间需要的反馈信息量将更大。此时，我们需要采用基于统计信道状态信息的设计，研究仅依赖于信道统计参数的预编码方法，以此减少需要的反馈信息量，降低实现的复杂度，参见第4章。

2.2 预编码调制方法：问题与设计准则

2.2.1 预编码问题

预编码通过对发射信号进行变换而实现预处理。为了说明这一点我们举一个 2×2 信道的例子，此时信号的输入输出关系可以表示为：

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 \\ p_{21}x_1 + p_{22}x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Px}} + \underbrace{\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (2-16)$$

其中 x_1, x_2 为输入信号； h_{ij} ($i, j = 1, 2$) 为MIMO信道参数； p_{ij} ($i, j = 1, 2$) 为预编码参数； n_1, n_2 为高斯噪声。如果没有预编码，即 $p_{11} = p_{22} = 1, p_{12} = p_{21} = 0$ （预编码矩阵 $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ ），则第一和第二个天线分别发送信号 x_1 和 x_2 。这样的发送方案只利用多天线信道的复用增益，同时传输两路信息，但没有利用信道的空间分集，因此传输易于受到衰落的影响。

在预编码的帮助下，信号 x_1 和 x_2 在发送之前进行加权叠加。这样第一和第二个天线分别发送信号 $p_{11}x_1 + p_{12}x_2$ 和 $p_{21}x_1 + p_{22}x_2$ ^①。这样就有机会获得空间复用增益的同时获得分集增益和阵列增益，并能够根据需要避免网络干扰，参见第1.2节。

将式(2-16)扩展至 $N_r \times N_t$ 的MIMO信道，其输入输出关系可以写为矩阵形式：

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (2-17)$$

其中 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 是信道矩阵，它的第 (i, j) 个元素表示从第 j 个发射天线到第 i 个接收天线的信道传播系数； $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ 是线性预编码矩阵； $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_r}$ 表示零均值圆对

① 对于 $N_r \times N_t$ 信道，进行加权叠加的信号数目增加为 N_t 个。

称方差为 $\sigma^2 \mathbf{I}$ 的噪声向量。预编码矩阵 \mathbf{P} 通过相应准则进行优化设计，是我们下面讨论的重点。

2.2.2 预编码设计准则

从数学的角度来看，预编码设计包括对问题的优化建模和求解。优化问题包括三个要素：优化准则、优化变量和约束条件。为了使读者更加清楚本论文工作与其他已有工作的关系，下面以优化准则为主线，结合优化变量和约束条件对文献中已有工作进行归类，并由此引出我们所重点讨论的最大化调制约束的互信息准则。

1、最大化容量方法

最大化容量方法的设计目标是在满足发射功率约束

$$\text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) \leq N_t$$

前提下，依据信道矩阵 \mathbf{H} 设计预编码矩阵 \mathbf{P} ，从而提高基于高斯输入信号的传输容量

$$\mathcal{I}^G(\mathbf{H}, \mathbf{P}) = \log \det \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}}{\sigma^2} \right) \quad (2-18)$$

其中 σ^2 为噪声功率。在完全信道状态信息条件下，信道矩阵 \mathbf{H} 已知，故预编码设计可以写为如下优化问题：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \mathcal{I}^G(\mathbf{P}) \\ & \text{subject to} \quad \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) \leq N_t \end{aligned} \quad (2-19)$$

因为式(2-19)是凸问题，可以利用凸优化理论^[102,103]以极低的求解代价得到全局最优解。正如我们在第1.2.1节所讨论的，问题(2-19)的最优解可以表示为

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{V}_H \mathbf{D}$$

这一结果对应清晰的物理概念。解的第一部分 \mathbf{V}_H 为酉矩阵，是信道矩阵 \mathbf{H} 奇异值分解（SVD）后的右特征矩阵；解的第二部分 \mathbf{D} 为对角矩阵，实现功率分配的目的，可以通过注水算法得到。

当信道变化较慢时，信道相关时间较大，完全信道状态信息可以得到（参见第2.1.3节），式(2-19)讨论的方案易于实现。当信道变化较快时，基于完全信道信息的设计将极大增加开销。此时，可以采用如下的统计设计方法

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \mathbb{E}_H[\mathcal{I}^G(\mathbf{H}, \mathbf{P})] \\ & \text{subject to} \quad \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) \leq N_t \end{aligned} \quad (2-20)$$

与问题(2-19)的区别在于目标函数增加了对信道参数 \mathbf{H} 的数学期望。这样，只要信道的统计参数不变，就不需要重新求解优化问题。期望的加入使得问题(2-20)更加难解。大量学者对这一问题进行深入研究，文献[104]讨论了在MISO系统下的统计优化问题(2-20)的解结构，文献[105]针对MIMO系统做了分析，并指出简单的波束成形方法（beamforming）的最优条件。文献[106]对问题(2-20)进行了更加深入的分析，提出了有效的迭代算法进行求解，并将算法推广到多天线多址接入信道（MIMO-MAC），该模型参见第2.1.2节。

需要特别指出的是，最大化容量的方法大多仅限于理论分析，将该方法到的预编码应用于实际系统将会带来极大的性能损失，很多时候甚至比未采用预编码的性能还要差，参见图1.5。

2、最大化分集增益

正是因为最大化容量方法的实用性差，人们开始讨论面向实际系统的性能提升方法。最大化分集增益是其中应用较广的一类。基于分集设计的出发点是优化性能的斜率，典型的方法是首先推导出MIMO系统接收端的成对差错概率（pairwise error probability）的上界，得到形如下式的不等式^[107,108]：

$$\Pr(\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}) \leq G_c^{-G_d} \quad (2-21)$$

其中 G_c 和 G_d 分别称之为编码增益和分集增益。

为了式(2-21)不等式左边的成对差错概率尽可能的小，最大化分集增益的方法就是要通过预编码的设计使得分集增益 G_d ，即成对差错概率的斜率，尽可能的大。最大化性能的斜率当然无法保证性能最优，也就更无法保证由此得到的方法可以逼近传输性能限。

在最大化分集的框架下，一种可能的改进方案是设计预编码使分集增益 G_d 尽可能大的同时使编码增益 G_c 尽可能的小，这样一来根据式(2-21)就可以进一步减小成对差错概率。然而，一般情况下推导出有效的 G_c 表达式依赖于对具体调制信号的结构分析，复杂度非常高。针对不同的调制信号和天线配置需要完全不同的推导计算，目前仍无统一且性能突出的方法。

3、最大化最小距离

最大化最小距离的方法通过分析经信道影响后的调制信号，利用预编码矩阵使得星座点之间最小的距离最大化，也就是最大化如下表达式^[109]

$$d_{\min} = \min_{\substack{m \neq k \\ m, k=1, \dots, M^{N_t}}} \left\| \mathbf{H} \mathbf{P} (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k) \right\|^2 \quad (2-22)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示向量的欧氏范数； \mathbf{x}_m 和 \mathbf{x}_k 分别表示使用多天线发射时调制信号的

第 m 和第 k 种可能的星座向量。它们均包含 N_t 个符号，当其角标由1变化到 M^{N_t} 时，将遍历多天线发射符号的所有可能性。

MIMO传输星座点中的最小距离没有闭合表达式，找出最小距离的星座组合需要遍历所有的情况，因此非常复杂而繁琐。自2004年文献[109]给出针对 2×2 信道采用BPSK和QPSK调制下的解之后，基于这一框架的方法长时间难以获得更大的突破。2008年，Vrigneau等学者通过采用一系列的近似手段将这一方法进行了一定的推广^[110]；同时，2012年，Ngo等学者将这一方法的应用范围扩展到了 3×3 信道传输的情况^[111]。尽管如此，到目前为止仍然没有针对更一般调制信号和任意收发天线数目的最大化最小距离方法。

近来的大量研究表明，最大化最小距离方法在信噪比无穷高的情况下等同于最大化调制约束的互信息准则^[73]，能够使实际系统性能最优。但针对低信噪比或一般信噪比情况，其最优性不存在，因此性能无法得到保证。

4、最大化调制约束的互信息

将调制约束的互信息作为预编码设计的准则是近年来逐渐获得认可并开始获得广泛关注的方法。追根溯源，这一准则其实很早就开始引起了人们的注意。早在1968年，MIT的Robert G. Gallager教授在其信息论经典教材“Information theory and reliable communication”^[112]中就给出了调制约束互信息的概念，虽然当时并没有给出这一准则的具体表达式。2005年，Ezio Biglieri在其“Coding for Wireless Channels”^[113]一书中重新给出调制信号的互信息概念，并明确指出了这一准则进行发射设计具有重要意义。2006年，HKUST的Palomar教授在其“MIMO Transceiver Design via Majorization Theory”^[69]一书中更是将最大化调制约束下的互信息列为MIMO技术中尚未解决的七个重要问题之一。本论文将这一准则的预编码设计方法称之为预编码调制方法，下面我们对其进行详细的介绍。

2.2.3 预编码调制方法

预编码调制方法是以调制约束的互信息作为设计目标，具体可以写为如下的优化问题

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad f(\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})) \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{P} \in \mathcal{A} \end{aligned} \quad (2-23)$$

其中 $\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 表示调制约束的互信息，与具体的调制信号形式、收发天线数目、信道矩阵及预编码矩阵均有关系； $f(\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P}))$ 表示调制约束下互信息的函数，在本论文中特指面向完全信道状态信息的设计（第3章和第5章）和面向统计信道状态信息，对信道参数取统计平均（第4章）两种情况；约束条件的集合 \mathcal{A} 根据设计

表 2.1 采用不同预编码设计准则的比较

设计准则	设计变量	研究示例	特点
最大化容量	复矩阵	[105,106]	限于理论分析 用于实际系统损失严重
最大化分集增益 (空时码)	局限为 酉矩阵	[107,108]	提升分集(性能的斜率)增益 无法保证逼近性能限
最大化编码增益 (空时码)	局限为 酉矩阵	[108]	针对具体信号和天线配置设计 缺乏统一方法, 无法保证逼近性能限
最大化最小距离	复矩阵	[109–111]	针对具体信号和天线配置设计 无法保证逼近性能限
最大化调制约束 的互信息	对角矩阵 复矩阵	[69,112,113]	提升实际系统性能 最具前景的方法

的要求和场景的不同而有变化。点对点的传输设计考虑发射功率约束（第3章和第4章），干扰避免、频谱共享环境下的设计额外考虑干扰功率约束（第5章）。

采用调制约束的互信息作为优化准则有一系列的优点：首先，与最大化容量方法不同，对问题(2-23)的求解能够提升实际系统的频谱效率；其次，与最大化分集增益、最大化编码增益和最大化最小距离三个方法不同，最大化调制约束的互信息无须为不同的调制信号和天线参数重新推导目标函数，因此更有可能对预编码问题得到统一的求解框架和优化算法；同样与上述三个准则改善未编码系统的性能不同，调制约束的互信息是基于信息论的方法，与具体的信道编译码参数无关，能够改善实际系统编码后的误比特率，因此更具实用价值。表2.1概括了几种预编码设计准则的特点。

基于互信息准则预编码设计在问题求解时会遇到诸多挑战。第一，调制约束的互信息没有闭合表达式，包含多重积分，计算复杂；第二，这一准则对应的优化问题非凸，已有算法大多基于梯度方法进行优化，严重依赖于起始点，性能难以得到保证；第三，这一准则对应的优化问题在一些情况下为非确定多项式时间难（non-deterministic polynomial-time hard, NP-hard）问题，多项式时间内求得最优解无望。如何针对具体的问题有效克服这些挑战将是我们接下来在第3章，第4章和第5章要重点讨论的内容。

2.3 本章小结

本章从多天线的信道模型入手，具体讨论信道的频率、时间和空间三重选择性建模、模型扩展以及信道状态信息的获取方法。通过对预编码问题进一步分析，将已有研究工作从设计准则的角度进行了归纳、比较和总结。在此基础上，

提出基于调制约束互信息准则的预编码调制方法的设计模型。该模型以最大化调制约束的互信息为设计准则，以复矩阵为优化变量，以功率为约束条件，得到的解能够改善实际系统的频谱效率和编码后的误比特率。相比其他方法，基于该设计模型的预编码设计可以通过优化算法的研究，得到统一的求解框架，从而有效提升实际系统性能，最终使实际系统逼近传输性能限。

第3章 完全信道信息下预编码调制设计方法

利用第2章讨论的预编码调制方法基础模型，本章从完全信道状态信息入手，研究如何求解预编码问题。首先对完全信道状态信息下预编码设计的问题进行分析，分别考虑确定MIMO信道和衰落MIMO信道下的预编码问题。接下来进一步分析研究现状，归纳现有文献中的主要方法。在此基础上，提出一种新的两步迭代算法，系统的解决了完全信道状态信息下的预编码调制设计问题。仿真结果表明所提方法能够充分利用MIMO信道的空间资源，提高实际系统的频谱效率，有效逼近传输性能限。

3.1 系统模型

考虑发端有 N_t 个天线，收端有 N_r 个天线的MIMO系统。令 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_t}$ 表示具有零均值单位协方差的发射信号，即 $\mathbf{E}(\mathbf{x}\mathbf{x}^H) = \mathbf{I}$ ，则MIMO系统的接收信号 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N_r}$ 可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (3-1)$$

其中 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 是信道矩阵，它的第 (i, j) 个元素表示从第 j 个发射天线到第 i 个接收天线的信道传播系数； $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ 是线性预编码矩阵； $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_r}$ 表示零均值圆对称方差为 $\sigma^2 \mathbf{I}$ 的噪声向量。

基于不同的应用场景，本章考虑完全信道状态信息下的两种信道模型^[48]。

1、确定MIMO信道

当收发端及周围环境变化的时间尺度很低时，可以将多天线信道建模为确定模型。实际输入信号取自于等概率的离散调制集合（如PSK，PAM或QAM），不失一般性，我们令调制集合的势为 M 。实际系统接收机大多采用信道估计的方法，从而可以获得信道矩阵 \mathbf{H} 和预编码矩阵 \mathbf{P} 的乘积，此时输入信号 \mathbf{x} 和输出信号 \mathbf{y} 之间的互信息表示为^[113,114]

$$\begin{aligned} I(\mathbf{H}, \mathbf{P}) &= I(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}\mathbf{P}) \\ &= N_t \log M - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \mathbf{E}_{\mathbf{n}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{e}_{mk} + \mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2}{\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (3-2)$$

其中符号 $I(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 体现了互信息是信道矩阵 \mathbf{H} 和预编码矩阵 \mathbf{P} 的函数，便于后面优化问题的表述；符号 $I(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}\mathbf{P})$ 则遵循信息论中的关于互信息的表示； $\|\cdot\|$ 表示向

量的欧氏范数； $\mathbf{e}_{mk} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k$ ， \mathbf{x}_m 和 \mathbf{x}_k 分别表示使用多天线时调制信号的第 m 和第 k 个可能。它们均包含 N_t 个符号，当其角标由1变化到 M^{N_t} 时，遍历发射符号的所有可能性。

在发射端已知信道矩阵 \mathbf{H} 时，我们的目标是找到一个能够最大化互信息 $\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 的预编码矩阵 \mathbf{P} ；也就是说，我们希望找到设计维度为 $N_t \times N_t$ 的复矩阵 \mathbf{P} 的方法，使得信号 \mathbf{x} 在发射之前做恰当的变换，从而适应信道，使传输速率最大化。这一优化问题可以写为如下形式：

$$\begin{aligned} & \text{maximize } \mathcal{I}(\mathbf{P}) \\ & \text{subject to } \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) \leq \text{Tr}(\mathbf{E}_x \mathbf{x}\mathbf{x}^H) = N_t \end{aligned} \quad (3-3)$$

其中

$$\text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) = \text{Tr}(\mathbf{E}_x \mathbf{P}^H \mathbf{x}^H \mathbf{x} \mathbf{P})$$

表示预编码后信号的平均发射功率。式(3-3)中的约束条件保证了经过预编码变换后的发射信号功率小于或等于未经预编码的发射信号功率 $\text{Tr}(\mathbf{E}_x \mathbf{x}\mathbf{x}^H)$ 。

这样，在确定MIMO信道下，调制约束的互信息极限可以表示为

$$\mathcal{I}(\mathbf{H}) = \max_{\mathbf{P}: \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) \leq N_t} \mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P}). \quad (3-4)$$

其中，函数 $\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 由式(3-2)给出。

2、衰落MIMO信道

当信道变化足够慢，信道状态信息可以及时有效的在发射机获得，互信息的遍历极限可以表示为式3-4的结果 $\mathcal{I}(\mathbf{H})$ 对所有随机信道 \mathbf{H} 的数值平均^[48]：

$$\mathcal{I} = \mathbf{E}_{\mathbf{H}} [\mathcal{I}(\mathbf{H})] = \mathbf{E}_{\mathbf{H}} \left[\max_{\mathbf{P}: \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) \leq N_t} \mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P}) \right] \quad (3-5)$$

这样，发端已知信道状态信息的衰落MIMO信道下，求解遍历互信息极限和对应预编码的问题就归结为分别对每一组信道参数 \mathbf{H} 求解式(3-4)。因此，我们下面将集中讨论问题(3-4)的求解^①。

输出信号 \mathbf{y} 经过酉矩阵 \mathbf{U} 的变换（记为 $\mathbf{U}\mathbf{y}$ ）等价为一个信道为 $\mathbf{U}\mathbf{H}$ ，噪声为 $\mathbf{U}\mathbf{n}$ 的MIMO系统。由欧式范数的酉不变性可以得到如下结论：

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}\mathbf{P}) = \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{U}\mathbf{y} | \mathbf{H}\mathbf{P}). \quad (3-6)$$

若酉变换 \mathbf{U} 作用在输入信号 \mathbf{x} 上，情况则完全不同。互信息 $\mathcal{I}(\mathbf{U}\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}\mathbf{P})$ 会因作

① 发端未知实时信道状态信息，依据统计信道特性设计预编码并求解互信息极限的问题将在第4章讨论。

用在 \mathbf{x} 上的酉变换而改变，也就是说

$$I(\mathbf{U}\mathbf{x}; \mathbf{y}|\mathbf{HP}) \neq I(\mathbf{x}; \mathbf{y}|\mathbf{HP}). \quad (3-7)$$

由此可以看出，实际调制信号的互信息与基于高斯假设的互信息性质截然不同。对于高斯信号来说，无论输入信号 \mathbf{x} 还是输出信号 \mathbf{y} ，经过酉变换后其互信息都不会变化，即：

$$I^{\mathcal{G}}(\mathbf{x}; \mathbf{y}|\mathbf{HP}) = I^{\mathcal{G}}(\mathbf{U}\mathbf{x}; \mathbf{y}|\mathbf{HP}) = I^{\mathcal{G}}(\mathbf{x}; \mathbf{U}\mathbf{y}|\mathbf{HP}). \quad (3-8)$$

其中 $I^{\mathcal{G}}$ 表示高斯信号的互信息。

式(3-7)和式(3-8)的区别说明，高斯信号的互信息和实际调制信号的互信息在函数特性上相差很大。基于高斯假设得到的可达容量的预编码设计方法并不能使采用实际调制信号的系统互信息最大；与此同时，相对于基于高斯信号的方法，从实际调制信号出发设计的预编码将能带来新的实现性能提升的机会。

3.2 研究现状

问题 (3-3)的求解从理论和实用的角度都具有十分重要的意义，对该问题及其特例问题的研究长期以来吸引着众多学者的深入探索。文献[115]假定信道矩阵 \mathbf{H} 和预编码矩阵 \mathbf{P} 都是对角矩阵，在这种条件下可以证明互信息是预编码矩阵平方 \mathbf{P}^2 的凹函数。利用这一特性可以求得对角预编码矩阵的全局最优解。文献[116]发现互信息相对于SNR的导数与最小均方误差存在线性关系；文献[117]对这一结果进行了扩展，讨论互信息关于多个不同变量的一阶导数，并提出梯度上升（Gradient Ascent, GA）方法来直接迭代求解预编码矩阵；同时，GA方法在文献[74]中被进一步采用。GA虽然相对来说简单直观，但对起始点的选取异常敏感，很容易陷入局部最优解。因为互信息是非凹函数，采用GA方法进行求解无法保证最优性，很多时候得到的解甚至比未采用预编码还要差。因此，采用GA方法的文献^[74,117,118]大多建议采用多组起始点进行优化，从中找出最好的结果最终作为优化问题的解。虽然从理论上讲，当选用的起始点趋于无穷多时，从中挑选出的最好的优化结果就是问题的全局最优解，但从算法设计的角度讲这样的方法不可靠，因为不知要选多少组起始点才能得到满意的性能；同时也不实用，因为随着起始点的增加，算法复杂度将同时增加。

正因如此，探索最大化互信息的预编码的解结构非常有意义。利用解结构，算法能够以更快的速度收敛，同时获得更好的性能。文献[119]假定信道、信号及预编码矩阵的元素皆为实数，在此条件下讨论互信息的二阶导数及互信息关于变

量的凹性关系。文献[120]同样采用实数信道模型进行分析，并将得到的方法直接应用于实际的复数模型。文献[121]通过证明互信息相对于复合信道预编码矩阵是凹函数，提出了一个两层迭代算法。它采用底层（预编码矩阵）和顶层（复合信道预编码矩阵）的迭代，在一些调制和天线数的配置下，能够得到好的性能。

本章将讨论一种新的预编码求解两步迭代算法，该方法首先对信道和预编码矩阵进行奇异值分解（SVD），得到左酉矩阵，对角矩阵和右酉矩阵。我们首先证明最优预编码的左酉矩阵应等于信道矩阵的右酉矩阵，同时互信息是预编码SVD分解后对角矩阵平方的凹函数。在此基础上，所提两步算法首先给定可行的右酉矩阵，优化对角矩阵；然后给定对角矩阵优化右酉矩阵，以此通过多次迭代实现互信息最大化。优化右酉矩阵是很难的数学问题，直到今天数学界没有提出全局最优的方法。我们通过将这一问题与Stiefel流形上的优化问题联系起来，并采用基于投影的梯度法得到近似最优解。

本章所讨论的两步迭代算法为探索最大化调制约束下互信息的预编码方法提供了新的求解框架。经大量仿真验证，所提方法收敛速度快，能够提供大的互信息增益。与此同时，我们验证了大的互信息增益同时也代表大的误码率增益。也就是说，从理论的角度来看，预编码调制方法扩展了信息论中基于高斯信号容量限的结论；从实用的角度来看，它能够为现有通信系统带来巨大的性能增益，使实际系统能够逼近传输性能限。

3.3 最大化互信息的预编码设计

本节首先讨论调制约束下最优预编码 \mathbf{P} 的性质，这些性质是我们所提两步迭代算法的基础。

3.3.1 最优左酉矩阵

我们首先来刻画互信息对预编码矩阵 \mathbf{P} 的依赖关系。

引理 3.1： 互信息 $I(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 的函数特性完全由矩阵 $\mathbf{M} = \mathbf{P}^H \tilde{\mathbf{H}}^H \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{P}$ 确定。

证明 将式 (3-2)重新写为如下形式

$$\begin{aligned} I(\mathbf{H}, \mathbf{P}) &= N_t \log M - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \mathbb{E}_{\mathbf{n}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{e}_{mk} + \mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2}{\sigma^2} \right) \\ &= N_t \log M - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \mathbb{E}_{l_{mk}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(-l_{mk}/\sigma^2) \end{aligned} \quad (3-9)$$

可以看出，给定天线参数 N_t 、调制参数 M 和由调制参数决定的向量 \mathbf{e}_{mk} ， $m, k = 1, \dots, M^{N_t}$ ，及信噪比 SNR 后，互信息 $\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 可以看成是随机变量 l_{mk} 的函数

$$\begin{aligned} l_{mk} &= \|\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{e}_{mk} + \mathbf{n}\|^2 \\ &= \text{Tr} \left[\mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} + 2\Re \left(\mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{n} \right) + \mathbf{n} \mathbf{n}^H \right] \end{aligned} \quad (3-10)$$

其中 \Re 表示复数的实部。

由式 (3-9) 可知，互信息 $\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 作为信道矩阵 \mathbf{H} 的随机变量，由 l_{mk} 的分布完全确定。也就是说，给定 l_{mk} 的分布， $\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 将完全确定； l_{mk} 的分布改变， $\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 发生相应变化。

同时， l_{mk} 的分布由矩阵 $\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}$ 决定。其原因如下：式 (3-10) 的右边第一项由 $\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}$ 决定；第二项 $\mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{n}$ 是一个高斯随机变量，由其均值和方差确定。其均值为零，方差为 $\mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{e}_{mk}$ 。因此，第二项 $\mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{n}$ 亦由 $\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}$ 决定；第三项与 \mathbf{P} 独立，无需讨论。这样，互信息 $\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ 就完全由矩阵变量 $\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}$ 确定。我们将矩阵变量 $\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}$ 定义为混合信道预编码矩阵。□

将信道矩阵 \mathbf{H} 做SVD分解可以得到

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}_H \text{Diag}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{V}_H^H$$

\mathbf{U}_H 和 \mathbf{V}_H 是酉矩阵， $\boldsymbol{\sigma}$ 是非负向量。同理，可将预编码矩阵做SVD分解，从而得到：

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_P \text{Diag}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}}) \mathbf{V}_P^H$$

其中向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 非负且受限于功率约束。为了简化表示，我们作如下定义

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_P, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_P^H$$

这样就有

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \text{Diag}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}}) \mathbf{V}$$

其中 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 分别称之为预编码矩阵 \mathbf{P} 的左右酉矩阵。

引理 3.2： 对于任意给定的矩阵变量 $\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}$ 及其对应的可达互信息 $\mathcal{I}(\mathbf{H}, \mathbf{P})$ ，当 \mathbf{P} 的左酉矩阵恰好等于 \mathbf{H} 的右酉矩阵时，可以使平均发射功率 $\text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H)$ 最小；也就是说，对于给定的发射功率约束，满足条件

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}_H \text{Diag}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}}) \mathbf{V}$$

的预编码将最大化互信息^①。

采用最优的左酉矩阵 $\mathbf{U} = \mathbf{V}_H$ ，并利用性质(3-6)，信道模型(3-1)可以进一步简化为

$$\mathbf{y} = \text{Diag}(\boldsymbol{\sigma})\text{Diag}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}})\mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{n}. \quad (3-11)$$

可以看出，当前的优化变量仅剩功率分配向量 $\boldsymbol{\lambda}$ 和右酉矩阵 \mathbf{V} 。我们分别用符号 $I(\boldsymbol{\lambda})$ 和 $I(\mathbf{V})$ 来表示互信息对变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 \mathbf{V} 的依赖关系，分别讨论其特性，并开发具体的算法优化这两个变量。

3.3.2 优化功率分配向量

给定任意右酉矩阵 \mathbf{V} ，我们首先讨论针对功率分配变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的优化问题：

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad I(\boldsymbol{\lambda}) \\ & \text{subject to} \quad \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) = \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} \leq N_t \\ & \quad \quad \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3-12)$$

其中 $\mathbf{1}$ 和 $\mathbf{0}$ 分别表示全一和全零的列向量。问题(3-12)的有效求解归结于对互信息函数特性的深入理解。下面，我们将文献[119]中定理5所得到的实值信道假设下的Hessian和凹性结果扩展到我们这里讨论的复矩阵信道：

定理 3.1： 针对式(3-11)的MIMO信道简化模型，互信息函数 $I(\boldsymbol{\lambda})$ 是变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的凹函数；也就是说，互信息的Hessian满足

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{\lambda}} I(\boldsymbol{\lambda}) \leq \mathbf{0}.$$

此外，互信息关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的梯度可以表示为

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} I(\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{R} \cdot \text{vec}(\text{Diag}^2(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{V}\mathbf{E}\mathbf{V}^H) \quad (3-13)$$

同时，互信息关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的Hessian矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\boldsymbol{\lambda}} I(\boldsymbol{\lambda}) = & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{I} \otimes \text{Diag}^2(\boldsymbol{\sigma})] \mathbb{E}\{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{y})^* \otimes \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{y})\} \\ & \cdot [\text{Diag}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}})\text{Diag}^2(\boldsymbol{\sigma}) \otimes \text{Diag}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}})] \mathbf{R}^T \text{Diag}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \\ & -\frac{1}{2}\mathbf{R}[\mathbf{I} \otimes \text{Diag}^2(\boldsymbol{\sigma})] \mathbb{E}\{\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{y})^* \otimes \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(\mathbf{y})\} \\ & \cdot [\text{Diag}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}}) \otimes \text{Diag}(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}})\text{Diag}^2(\boldsymbol{\sigma})] \mathbf{K}\mathbf{R}^T \text{Diag}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \end{aligned} \quad (3-14)$$

① 文献[69]中附录3.B给出了这一结论在高斯输入假设下的证明。采用同样的思路和证明过程，可以得到针对实际调制信号的结论。因证明过程相似，这里不再赘述。

上述表达式中

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\mathbf{y}) &= \mathbf{V}\Phi(\mathbf{y})\mathbf{V}^H \\ \tilde{\Psi}(\mathbf{y}) &= \mathbf{V}\Psi(\mathbf{y})\mathbf{V}^T\end{aligned}\quad (3-15)$$

其中 $\Phi(\mathbf{y})$ 和 $\Psi(\mathbf{y})$ 分别是已知接收信号 \mathbf{y} 后的条件MMSE和条件伴随MMSE矩阵:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{y}) &\triangleq \mathbf{E} \left\{ \left[\mathbf{x} - \mathbf{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\} \right] \left[\mathbf{x} - \mathbf{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\} \right]^H \middle| \mathbf{y} \right\} \\ \Psi(\mathbf{y}) &\triangleq \mathbf{E} \left\{ \left[\mathbf{x} - \mathbf{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\} \right] \left[\mathbf{x} - \mathbf{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\} \right]^T \middle| \mathbf{y} \right\}\end{aligned}$$

\mathbf{E} 表示MMSE矩阵, 其定义如下:

$$\mathbf{E} \triangleq \mathbf{E} \left\{ \left[\mathbf{x} - \mathbf{E}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \right] \left[\mathbf{x} - \mathbf{E}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \right]^H \right\};$$

同时, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N_t \times N_t^2}$ 为常数矩阵, 其相应元素定义为

$$[\mathbf{R}]_{i, N_t(j-1)+k} = \delta_{ijk}$$

δ_{ijk} 为Delta函数, 仅当 $i = j = k$ 条件成立时值为1, 否则为0:

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{当且仅当 } i = j = k \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

证明 详见附录A: 定理3.1的证明。 □

定理3.1给出的互信息凹性保证了在给定右酉矩阵 \mathbf{V} 后, 可以通过优化算法得到全局最优的功率分配向量 λ 。此外, 分别由式(3-13)和式(3-14)给出的梯度和Hessian结果为采用最陡上升或牛顿法优化功率分配向量提供了可行性。需要注意的是, 因为互信息函数的计算复杂性, 已有的通用凸优化问题求解器, 如CVX^[122]和SeDuMi^[123]等, 在这里均无法使用。下面, 我们基于内点法^[103]来开发新的求解全局最优功率分配向量的优化算法。

首先将问题(3-12)改写为一个最小化问题, 同时将不等式约束隐含的表示在目标函数中:

$$\text{minimize } f(\lambda) = -\mathcal{I}(\lambda) + \sum_{i=1}^{N_t} \phi(-\lambda_i) + \phi(\mathbf{1}^T \lambda - N_t) \quad (3-16)$$

其中 $\phi(u)$ 表示对数惩罚函数, 用来近似表征约束是否被违反^[103]:

$$\phi(u) = \begin{cases} -(1/t) \ln(-u), & u < 0 \\ +\infty, & u \geq 0 \end{cases}$$

表 3.1 确定信道下功率分配向量优化的算法流程

通过优化功率分配向量最大化确定信道的互信息
步骤1. 给定任意可行功率分配向量 λ , $t := t^{(0)} > 0$, $\alpha > 1$, 容差 $\epsilon > 0$; 步骤2. 采用式(3-17)计算目标函数 f 在 λ 的梯度 $\nabla_{\lambda}f(\lambda)$, 由此得到下降方向 $\Delta\lambda = -\nabla_{\lambda}f(\lambda)$ 步骤3. 如果 $\ \Delta\lambda\ ^2$ 足够小则转至步骤6, 否则进行步骤4; 步骤4. 通过后向线搜索选择步长 γ , 使其满足如下条件 $f(\lambda + \gamma\Delta\lambda) < f(\lambda).$ 步骤5. 令 $\lambda := \lambda + \gamma\Delta\lambda$; 转至步骤2; 步骤6. 如果 $1/t < \epsilon$, 停止; 否则令 $t := \alpha t$; 转至步骤2。

参数 $t > 0$ 是这一近似表征的精度。

基于定理3.1, 目标函数(3-16)的梯度可以写为

$$\nabla_{\lambda}f(\lambda) = -\mathbf{R} \cdot \text{vec}\left(\text{Diag}^2(\sigma)\mathbf{V}\mathbf{E}\mathbf{V}^H\right) - \frac{1}{t}\left(\mathbf{q} - \frac{1}{N_t - \mathbf{1}^T\lambda}\right) \quad (3-17)$$

其中向量 \mathbf{q} 的第 i 个元素 q_i 为

$$q_i = 1/\lambda_i$$

这样, 最陡下降方向可以表示为

$$\Delta\lambda = -\nabla_{\lambda}f(\lambda).$$

采用这一下降方向, 并结合后向线搜索^[103], 我们用表 3.1的算法来求解最优的功率分配向量。因为定理 3.1的凹性, 该算法可以保证全局最优性。

3.3.3 优化右酉矩阵

下面我们考虑给定功率分配向量 λ 后, 右酉矩阵 \mathbf{V} 的优化问题:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad I(\mathbf{V}) \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{V}^H\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}^H = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3-18)$$

表 3.2 确定信道下酉矩阵优化的算法流程

通过优化酉矩阵最大化确定信道的互信息
步骤1. 给定可行的起始点 $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使其满足 $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I};$
步骤2. 通过式(3-19)计算下降方向 $\Delta \mathbf{V}$; 设定步长 $\gamma := 1$;
步骤3. 如果下降方向的范数 $\ \Delta \mathbf{V}\ ^2 = \text{Tr}\{(\Delta \mathbf{V})^H \Delta \mathbf{V}\}$ 充分小, 算法停止; 否则转至步骤4;
步骤4. 通过后向线搜索选取满足如下条件的步长 γ $g(\pi(\mathbf{V} + \gamma \Delta \mathbf{V})) < g(\mathbf{V})$
步骤5. 将迭代后的变量映射回酉约束满足的Stiefel流形 $\mathbf{V} := \pi(\mathbf{V} + \gamma \Delta \mathbf{V})$ 并转至步骤 2.

将目标函数改写为最小化的形式, 同时将酉矩阵约束的问题转化为在受限搜索空间上的无约束优化问题:

$$\text{minimize } g(\mathbf{V}) = -I(\mathbf{V})$$

g 是定义在Stiefel流形^[124]上的函数, 其定义域为

$$\text{dom } g = \{\mathbf{V} \in \text{St}(n)\}$$

符号 $\text{St}(n)$ 表示 n 维的Stiefel流形

$$\text{St}(n) = \{\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n} | \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I}\}.$$

对于 $\text{St}(n)$ 中的任一起始点 \mathbf{V} , 为了最小化目标函数, 可以沿着其切线方向 $\Delta \mathbf{V}$ 进行移动^[125]:

$$\Delta \mathbf{V} = -\nabla_{\mathbf{V}} g(\mathbf{V}) = \nabla_{\mathbf{V}} I(\mathbf{V}) - \mathbf{V}(\nabla_{\mathbf{V}} I(\mathbf{V}))^H \mathbf{V} \quad (3-19)$$

其中 $\nabla_{\mathbf{V}} I(\mathbf{V})$ 表示互信息相对于 \mathbf{V} 的梯度，表示为

$$\nabla_{\mathbf{V}} I(\mathbf{V}) = \text{Diag}^2(\sigma) \text{Diag}(\lambda) \mathbf{V} \mathbf{E}.$$

然而沿着切线方向移动可能导致酉约束不再满足。用投影的方法可以将变量重新映射回可行域。对于任意复矩阵 $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，其Stiefel流形上的投影 $\pi(\mathbf{W})$ 定义欧式范数度量意义下最靠近 \mathbf{W} 的点，即

$$\pi(\mathbf{W}) = \arg \min_{\mathbf{Q} \in \text{St}(n)} \|\mathbf{W} - \mathbf{Q}\|^2.$$

引理 3.3: 任给满秩矩阵 $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，将其进行 SVD 分解 $\mathbf{W} = \mathbf{U}_{\mathbf{W}} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}_{\mathbf{W}}^H$ ，则它的投影是唯一的，表示为^[126]

$$\pi(\mathbf{W}) = \mathbf{U}_{\mathbf{W}} \mathbf{V}_{\mathbf{W}}^H.$$

将基于投影的下降方向与后向线搜索相结合，通过优化酉矩阵来最大化互信息，其算法见表 3.2。

3.3.4 两步方法优化互信息

结合表 3.1 和表 3.2 的两个算法，优化预编码矩阵 \mathbf{P} 的两步迭代算法总结在表 3.3 中。

所提两步迭代算法在低信噪比情况下可以保证收敛到全局最优解，因为在此情况下预编码问题退化为仅需优化功率分配向量 $\boldsymbol{\lambda}$ ^[74]，是一个凸优化问题；当信噪比不那么低时，理论上所提算法将收敛到局部最优解。然而，我们在下一节将通过大量实验进行验证，所获得的局部最优解对不同的起始点非常不敏感；也就是说，这里两步方法获得的局部最优解非常靠近全局最优解。

3.4 仿真结果

3.4.1 确定信道互信息性能评估

本节通过一系列仿真结果来说明所提预编码调制算法的性能，这一节先以确定信道为例，阐述算法的各项特性。首先考虑如下的 2×2 MIMO 信道

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ -0.55j & 0.35 \end{bmatrix}$$

表 3.3 确定信道下两步迭代算法流程

通过两步算法最大化确定信道的互信息
步骤1. 初始化: 设定 \mathbf{P} 的左酉矩阵 $\mathbf{U} := \mathbf{V}_H$; 给定可行的功率分配向量 λ 和右酉矩阵 \mathbf{V} ; 步骤2. 更新功率分配向量: 给定右酉矩阵 \mathbf{V} , 运行表 3.1的算法得到功率分配向量 λ ; 步骤3. 更新右酉矩阵: 给定功率分配向量 λ , 运行表 3.2的算法得到右酉矩阵 \mathbf{V} ; 步骤4. 迭代: 重复步骤2和步骤3, 直到收敛。

该信道两个特征值一大一小分布, 是在有中继节点辅助传输情况下的等价MIMO信道 (参见式 (2-11))。该类信道在已有文献中被多次讨论^[99,100], 是近年来的研究热点。从这里可以看出, 所提算法不仅可以用于提升点对点MIMO信道的传输性能, 从更一般的角度来看, 可以用于任意的信道可以等价表示为矩阵形式的传输场景。

先来考虑不同的起始点对算法的影响。为了生成大量随机起始点, 我们需要有系统的方法。任意 2×2 的酉矩阵可以表示为如下两个特殊的酉矩阵相乘的形式^[127]

$$\mathbf{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{j\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{j\alpha_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \psi & e^{-j\theta} \sin \psi \\ -e^{j\theta} \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_2}.$$

因为简化系统模型(3-11)的互信息不随对角酉矩阵 \mathbf{V}_1 的变化而改变, 所以只需采用 \mathbf{V}_2 的结构生成可行的右酉矩阵 \mathbf{V} 。

先来考虑两组不同的起始点。情况A:

$$\lambda = [0.5; 0.5], \quad \psi = \pi/6, \quad \theta = \pi/4.$$

情况B:

$$\lambda = [0.2; 0.8], \quad \psi = \pi/10, \quad \theta = \pi/10$$

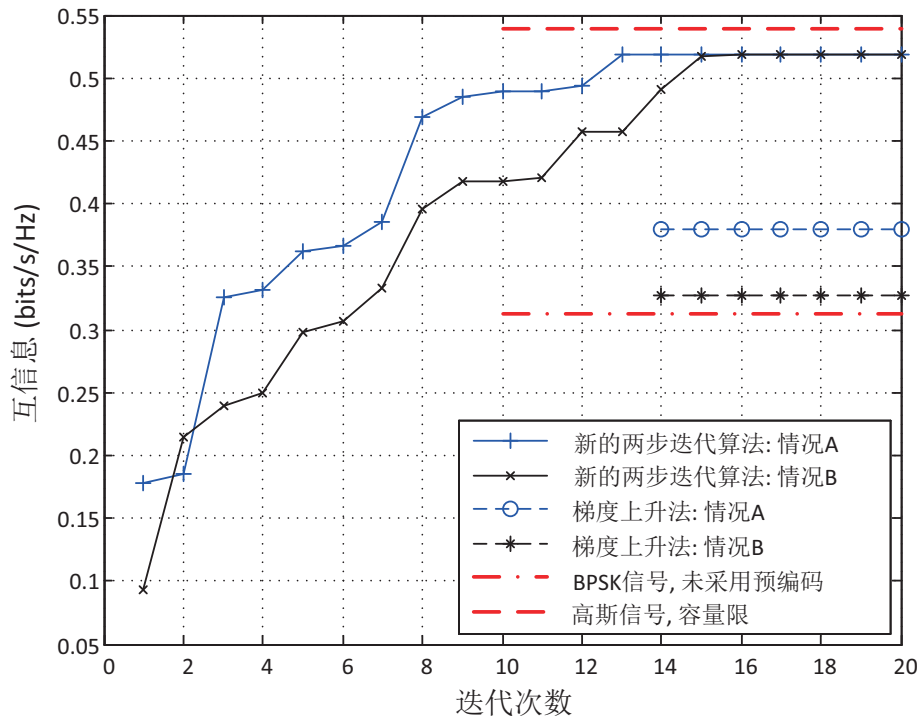


图 3.1 迭代优化确定信道互信息的收敛曲线；输入信号采用 BPSK 调制，SNR 为 0 dB

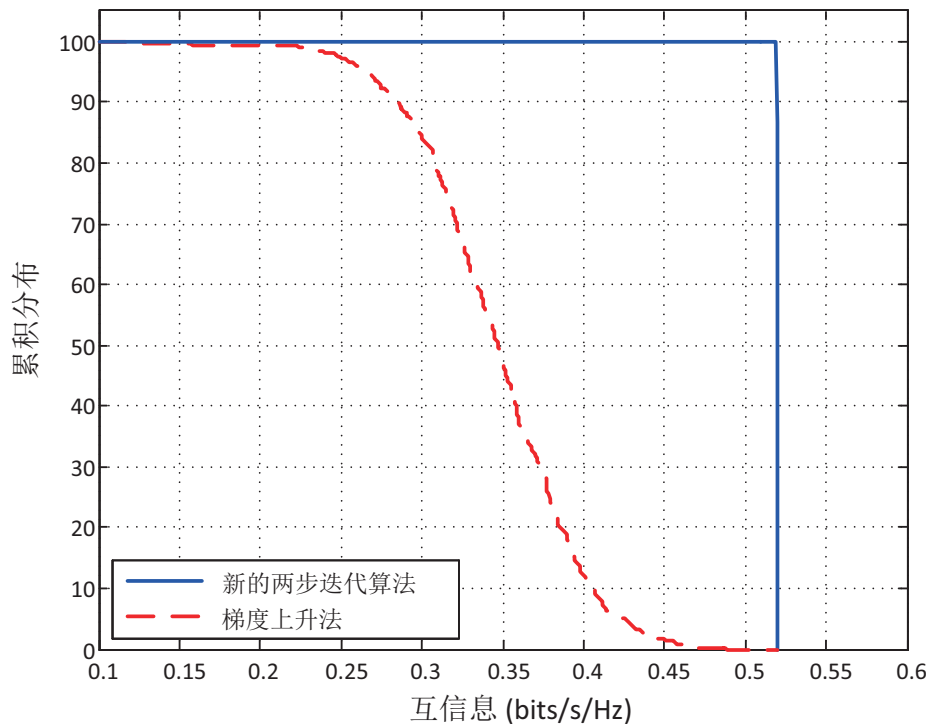


图 3.2 由不同起始点出发，采用两步算法和梯度上升法，针对确定信道优化得到互信息的累积分布曲线；输入信号采用BPSK调制，SNR为0 dB

图3.1给出了当SNR为0 dB时, 采用BPSK调制的互信息收敛情况。为了便于比较, 该图同时画出了未采用预编码, 采用高斯信号得到的容量限^[48], 以及采用梯度上升算法^[74,117]优化得到的互信息结果。

由图3.1可以看出, 梯度上升法易于受到起始点的影响, 从不同的起始点出发, 算法收敛到不同的结果。同时, 所提的两步迭代算法对起始点不敏感, 从不同的起始点出发收敛到几乎完全相同的结果。与未采用预编码方法相比, 两步迭代算法将互信息指标提升了68% (达到0.52 bps/Hz), 使得采用BPSK信号的互信息接近了基于高斯假设下的传输容量限。值得注意的是, 两步迭代算法的收敛曲线呈现阶梯状, 其中每一个阶梯对应算法的变量交叉迭代优化过程, 以及表 3.1所列算法中参数 t 的迭代更新。

图3.2给出了从不同起始点出发进行优化, 分别采用所提两步算法和梯度上升法, 优化得到互信息的累积分布曲线。两条曲线分别统计两种算法针对随机均匀生成的5,000个起始点得到的优化结果。由图3.2可以看出, 两步迭代算法的累积分布曲线非常陡, 其优化得到互信息的最大值和最小值的差仅为 0.003 bps/Hz; 也就是说, 针对所讨论的非凹预编码调制优化问题, 两步迭代算法能够以相对小的计算代价得到近似最优解; 与此相反, 梯度上升法的性能非常依赖于起始点的选取, 其优化得到互信息的最大值和最小值的差大于 0.3 bps/Hz。同时, 我们还发现如果算法起始点选的不合适, 梯度上升法得到的结果甚至可能比不用预编码的方法还要差。

对于其他的仿真参数, 可以得到类似的算法收敛曲线和优化结果累积分布。图3.3和 3.4给出的是输入信号为QPSK调制, SNR为5 dB的例子。所提两步算法迭代大约15步以后得以收敛。相对于未采用预编码的方法来说, 互信息提升了38%。由图 3.4可以看出, 采用QPSK调制信号, 所提算法以69%的概率达到98%的高斯输入的容量限, 而梯度上升法只有5%的概率达到70%的高斯输入容量限; 也就是说, 两步算法能以更大的概率得到更好的互信息性能。

图 3.5 和 3.6 给出了不同方法随着SNR的变化所对应互信息的性能曲线。其中比较对象包括未采用预编码, 最大化分集增益方法^[108,128], 最大化编码增益方法^[108,128,129]及最大化容量方法^[48,130,131]。通过观察图3.5和图3.6 可以得到以下一系列重要结论:

第一, 当输入信号 \mathbf{x} 采用 BPSK或 QPSK调制, 2×2 的MIMO信道互信息上限分别为1 bps/Hz和 2 bps/Hz, 该上限在高信噪比时达到。

第二, 虽然采用最大化容量的方法能够使高斯输入信号达到容量限, 如果将这一方法应用于实际调制信号将导致极大的性能损失。性能损失源自于两种方法在功率分配向量和右酉矩阵设计上的本质不同。对高斯输入信号来说, 为信道质

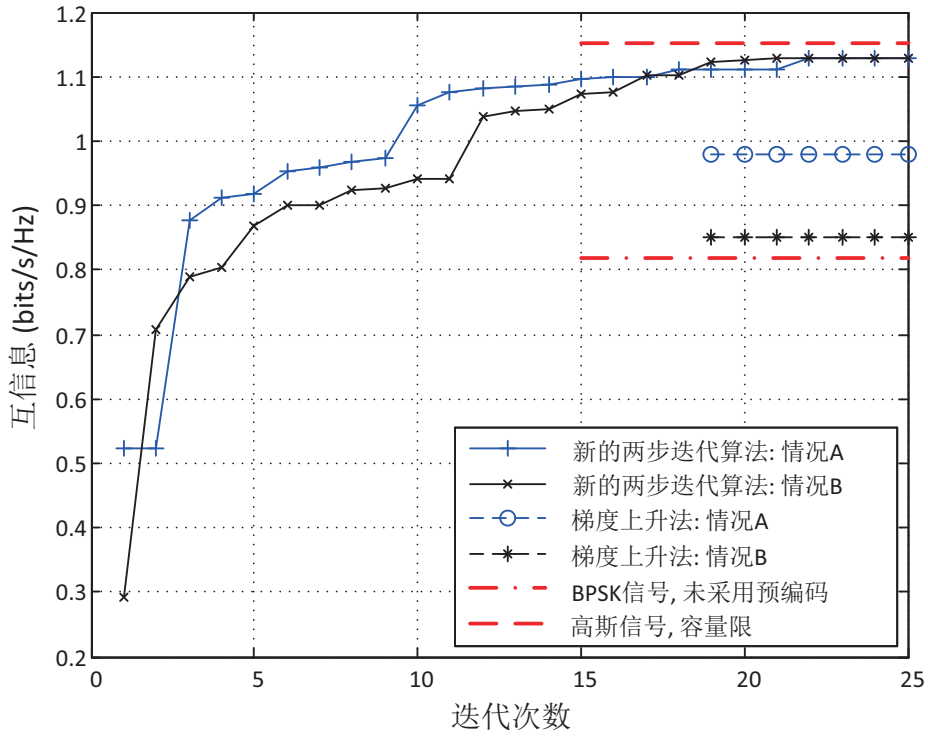


图 3.3 迭代优化确定信道互信息的收敛曲线；输入信号采用 QPSK 调制，SNR 为 5 dB

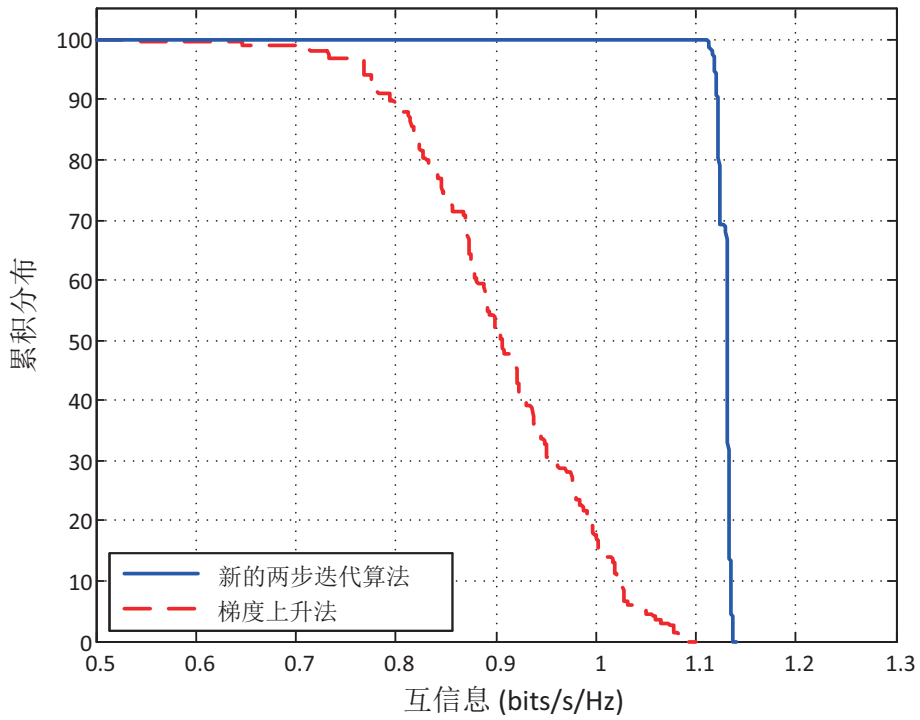


图 3.4 由不同起始点出发，采用两步算法和梯度上升法，针对确定信道优化得到互信息的累积分布曲线；输入信号采用 QPSK 调制，SNR 为 5 dB

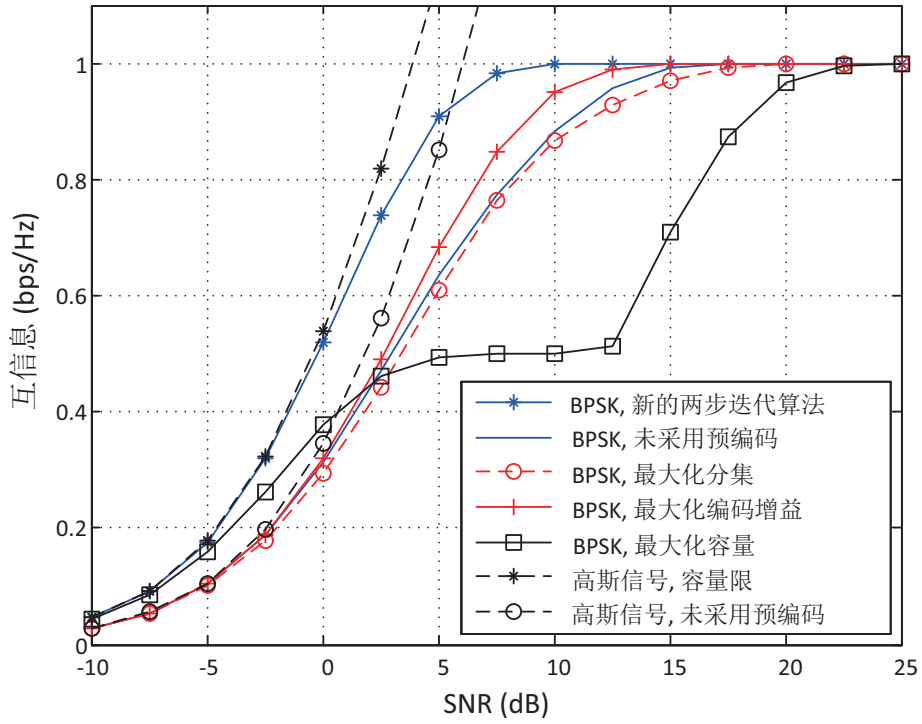


图 3.5 确定信道下互信息随信噪比的变化曲线；BPSK调制

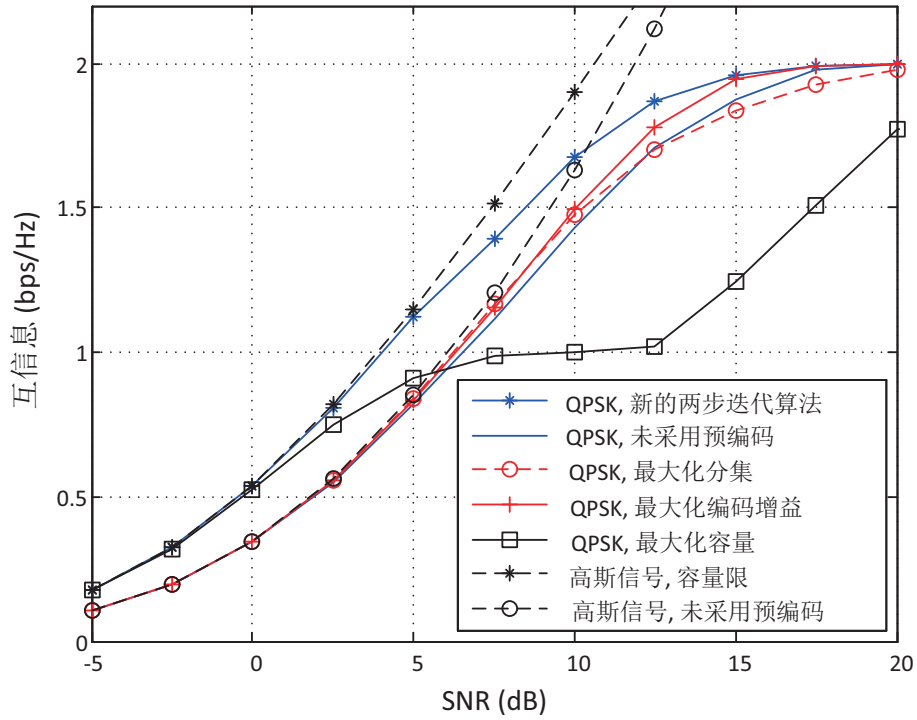


图 3.6 确定信道下互信息随信噪比的变化曲线；QPSK调制

量相对好的子信道分配更多的功率，为信道质量相对差的子信道分配更少的功率是达到容量限的关键，在信息论中称之为注水定理。然而，将这一结论应用于实际调制信号却没有依据。因为实际调制信号的互信息是有上界的，当某一子信道的质量非常好，那么它可能已经接近饱和状态，为其分配更多的功率完全是浪费资源；在这种情况下，反而将有限的功率分给信道质量相对差的子信道能获得更多的收益。此外，对于高斯输入信号，右酉矩阵是完全没有必要的，因为它不会改变高斯输入的可达互信息，参见式 (3-8)。然而，右酉矩阵对于实际调制信号却非常有用，它需要认真的设计才能最大化互信息。

第三，虽然最大化编码增益的方法比最大化分集和未采用预编码的方法都要好，但它的设计到目前为止还没有特别通用的方法。已有文献仅针对几种特定的天线数目和调制方式给出了设计结论^[128,129]，难以推广到更一般的情况。我们所提的两步算法具有更强的通用性，它可以用于任意的天线数目和调制方式。两步算法利用最优的左酉矩阵，对功率分配向量和右酉矩阵进行迭代求解，提供极大的性能增益。例如，对于BPSK调制信号，当所用信道编码的码率为3/4时，所提算法与最大化编码增益方法，未采用预编码，最大化容量方法相比，分别得到4 dB，5.5 dB和6 dB的功率增益。

最后，当信道编码的码率小于0.6时，所提预编码算法可以使BPSK和QPSK调制信号的互信息完全接近基于高斯信号假设的容量界；此外，当信道编码的码率小于0.9时，所提预编码算法使得实际调制信号的互信息超过了未采用预编码的高斯信号。

3.4.2 确定信道BER性能评估

为了进一步阐明所提算法的优势及其在实际系统中的应用，下面评估不同预编码方法采用信道编码后的BER性能。我们建立了图3.7所示的仿真平台：信源符号 b_1, \dots, b_{N_t} 分别由LDPC编码器进行信道编码并调制；经过调制后的信号进入预编码模块处理，对信号加权叠加后由多天线进行发射；经过信道和噪声的影响后，信号在接收端采用近似最优的turbo接收机结构^[132,133]进行联合检测和译码。值得注意的是，与文献[132,133]相比，我们的BER性能评估框图中没有采用交织器。这是因为LDPC编译码器中已经包含了作用相同的子模块^[134]。

在接收端，MAP检测器根据接收信号 \mathbf{y} 及从译码器送来的先验信息 $L_e(b)$ 计算出外信息 $L_e(c)$ 。外信息在MAP检测器和译码器之间交换，直到收敛^[132]。

LDPC编译码模块根据文献[135]提供的仿真库修改而来；我们对输入信号进行BSPK和QPSK调制，并采用3/4和2/3码率的编码，编码后的码长为2400，MAP检测器与译码器之间的迭代设为5。图3.8和3.9给出了不同方

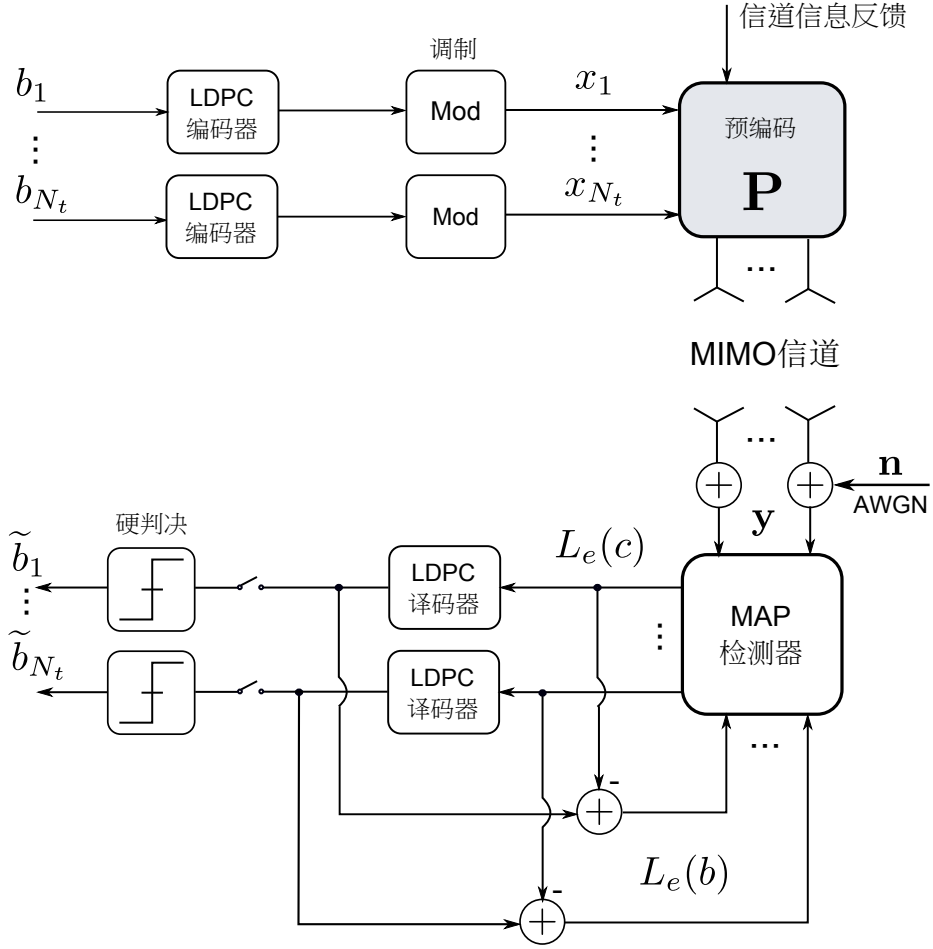


图 3.7 确定信道不同预编码方法BER性能评估框图

法的BER仿真性能。可以看出，采用高斯信号的最大化容量方法导致BER性能甚至比未采用预编码还要差，而我们所提的最大化互信息的预编码方法在BER指标上较之已有方法得到极大性能增益。

3.4.3 衰落信道互信息性能评估

评估衰落信道下预编码的性能需要首先有生成大量信道的方法。为此，我们采用如下的双相关MIMO信道模型：

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_r^{1/2}(\rho_r)\mathbf{H}_w\mathbf{H}_t^{1/2}(\rho_t)$$

其中 \mathbf{H}_w 是一个随机复矩阵，其元素是独立同分布的零均值单位方差的高斯随机变量。 $\mathbf{H}_r(\rho_r)$ 和 $\mathbf{H}_t(\rho_t)$ 分别为确定的接收和发射相关矩阵，第 i, j 个元素定义为

$$[\mathbf{H}(\rho)]_{ij} = \rho^{|i-j|}, \quad \rho \in [0, 1), \quad i = 1, \dots, N_r, \quad j = 1, \dots, N_t.$$

文献中一般称此模型为指数MIMO模型。实验中，我们生成5,000组信道，通过

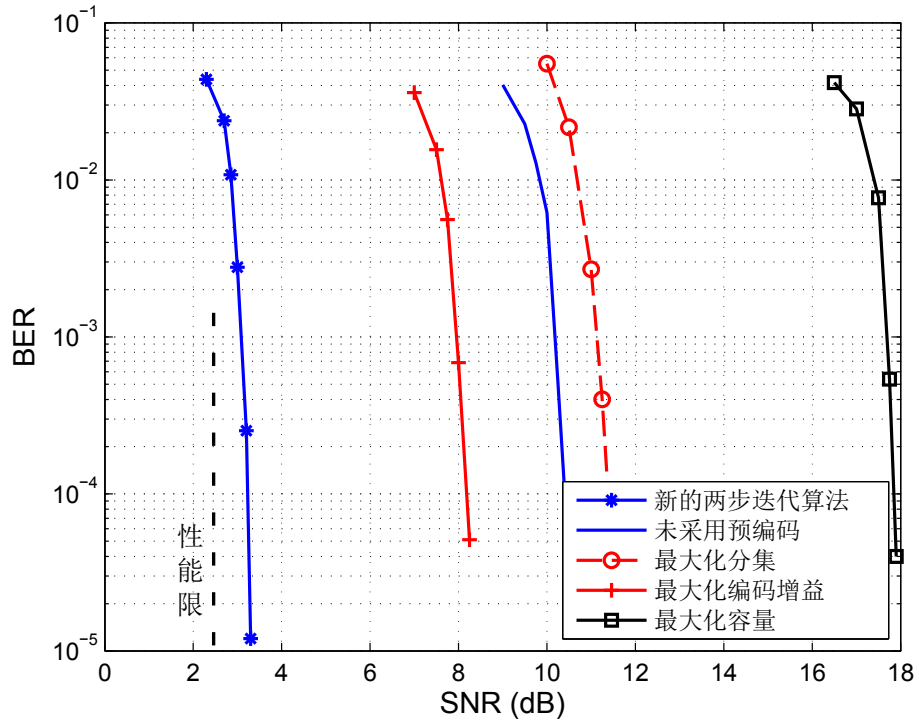


图 3.8 确定信道不同预编码方法的BER性能比较；BPSK调制，信道编码码率3/4，码长2400

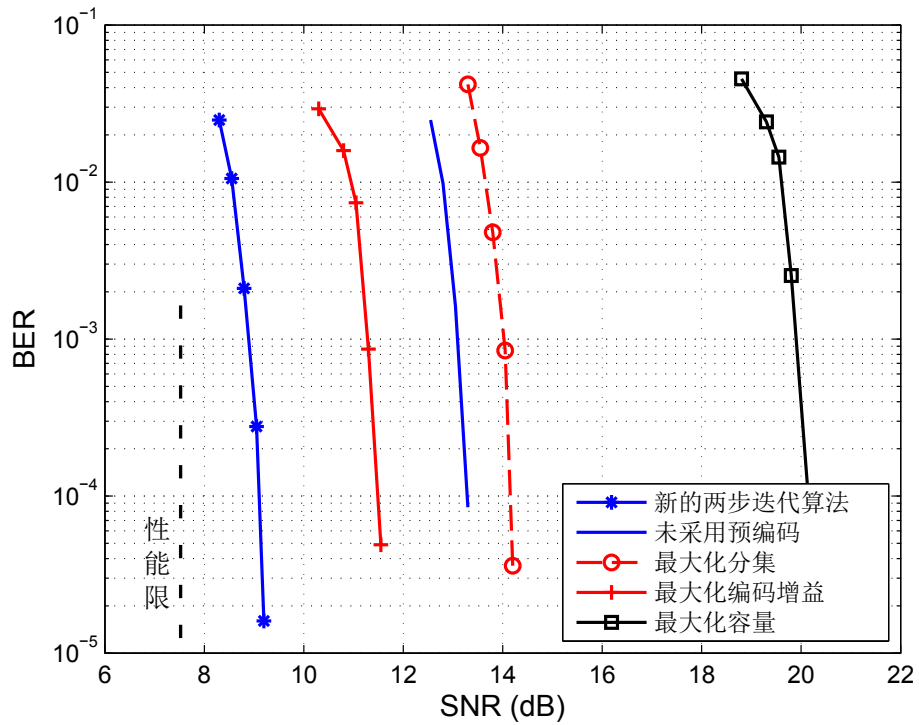


图 3.9 确定信道不同预编码方法的BER性能比较；QPSK调制，信道编码码率2/3，码长2400

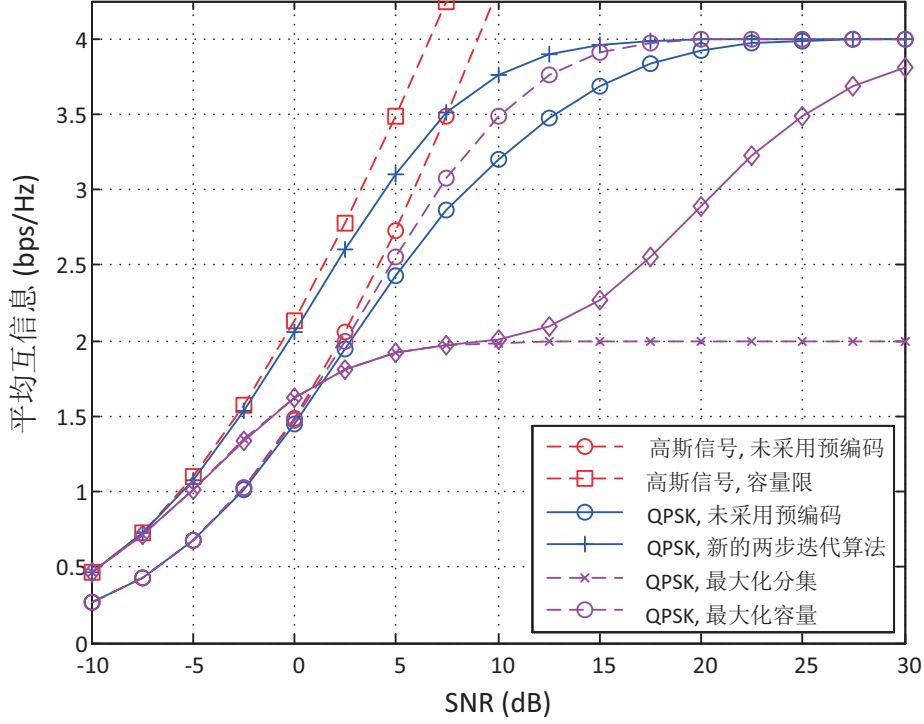


图 3.10 衰落信道下平均互信息随信噪比变化曲线；QPSK调制

式(3-5)来计算衰落信道的遍历互信息。

图 3.10 给出了 2×2 衰落MIMO信道下平均互信息随信噪比变化曲线，其中接收相关和发射相关矩阵的生成参数分别如下

$$\rho_r = 0.5, \quad \rho_t = 0.95.$$

图3.10的结果不仅进一步验证了所提算法性能上的优势，同时也进一步确认了基于高斯的最大化容量用于实际系统会产生的巨大性能损失。

3.5 附录A：定理3.1的证明

为便于说明，我们首先引入函数相对于复矩阵的梯度，Jacobian和Hessian的定义^[136,137]。

3.5.1 定义

函数 f 关于复矩阵 \mathbf{Z} 的梯度定义为

$$\nabla_{\mathbf{Z}} f \triangleq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{Z}^*}$$

其中梯度矩阵的第 (i, j) 个元素表示为

$$[\nabla_{\mathbf{Z}} f]_{ij} = \partial f / \partial [\mathbf{Z}^*]_{ij}.$$

若 $\mathbf{F}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*)$ 表示变量 \mathbf{Z} 和 \mathbf{Z}^* 的矩阵函数，相对于 \mathbf{Z} 和 \mathbf{Z}^* 的 Jacobian 矩阵分别表示为

$$\mathcal{D}_{\mathbf{Z}} \mathbf{F} \triangleq \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{F})}{\partial \text{vec}^T(\mathbf{Z})}, \quad \mathcal{D}_{\mathbf{Z}^*} \mathbf{F} \triangleq \frac{\partial \text{vec}(\mathbf{F})}{\partial \text{vec}^T(\mathbf{Z}^*)}. \quad (3-20)$$

令 \mathbf{Z}_1 和 \mathbf{Z}_2 表示两个复矩阵， f 表示 \mathbf{Z}_1 和 \mathbf{Z}_2 的实值标量函数，则 f 关于 \mathbf{Z}_1 和 \mathbf{Z}_2 的 Hessian 矩阵定义为：

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2} f &\triangleq \mathcal{D}_{\mathbf{Z}_1} (\mathcal{D}_{\mathbf{Z}_2} f) \\ &= \frac{\partial}{\partial \text{vec}^T(\mathbf{Z}_1)} \left[\frac{\partial f}{\partial \text{vec}^T(\mathbf{Z}_2)} \right]^T. \end{aligned} \quad (3-21)$$

3.5.2 MMSE 矩阵的 Jacobian

互信息关于预编码矩阵 \mathbf{P} 的一阶倒数具有如下线性表示^[117]：

$$\nabla_{\mathbf{P}} I(\mathbf{H}, \mathbf{P}) = \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{E}$$

其中 \mathbf{E} 表示信号估计理论中经常出现的 MMSE（最小均方误差）矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\triangleq \mathbb{E} \left\{ \left[\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \right] \left[\mathbf{x} - \mathbb{E}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \right]^H \right\} \\ &= \mathbf{I} - \frac{1}{(\pi M)^{N_t}} \int_{\mathbf{y}} \frac{\left[\sum_{l=1}^{M^{N_t}} \mathbf{x}_l \exp \left(-\|\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{x}_l\|^2 \right) \right] \left[\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \mathbf{x}_k^H \exp \left(-\|\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{x}_k\|^2 \right) \right]}{\sum_{m=1}^{M^{N_t}} \exp \left(-\|\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{x}_m\|^2 \right)} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3-22)$$

发射信号 \mathbf{x} 的 MMSE 估计可以用如下的条件均值表示

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{M^{N_t}} \mathbf{x}_l p(\mathbf{x}_l|\mathbf{y}) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}} \left[\mathbf{x} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \right]$$

与此同时，接收信号 \mathbf{y} 的条件概率密度函数是

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^{N_t}} \exp \left(-\|\mathbf{y} - \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{x}\|^2 \right).$$

MMSE 矩阵的 Jacobian，表示为 $\mathcal{D}_{\mathbf{P}} \mathbf{E}$ ，由下面的引理给出。这一结论对互信息二阶特性，即 Hessian 矩阵的推导非常有帮助。

引理 3.4: MMSE矩阵 \mathbf{E} 相对于 \mathbf{P}^* 的 Jacobian 表达式为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbf{P}^*} \mathbf{E} = & -\mathbf{E}\{\Phi^*(\mathbf{y}) \otimes \Phi(\mathbf{y})\} \cdot \mathbf{K} \cdot [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^*)] \\ & -\mathbf{E}\{\Psi^*(\mathbf{y}) \otimes \Psi(\mathbf{y})\} \cdot [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^*)] \end{aligned} \quad (3-23)$$

其中 \mathbf{K} 表示 $N_t^2 \times N_t^2$ 的置换矩阵, 满足条件^[126]

$$\text{vec}(\Phi^T(\mathbf{y})) = \mathbf{K} \cdot \text{vec}(\Phi(\mathbf{y})).$$

证明 引理的证明思路与文献 [119] 中定理3的证明过程类似。这两个结论的区别在于文献[119]讨论的是实值信道的情况, 而这里将其证明过程扩展至实际的复数信道。

MMSE矩阵 \mathbf{E} 的第 (i, j) 个元素可以写为

$$[\mathbf{E}]_{ij} = \mathbf{E}\{x_i x_j^*\} - \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{x_i|\mathbf{y}\} \mathbf{E}\{x_j^*|\mathbf{y}\}\}$$

这样可以进一步得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\mathbf{E}]_{ij}}{\partial [\mathbf{P}]_{kl}^*} = & -\int \frac{\partial p(\mathbf{y})}{\partial [\mathbf{P}]_{kl}^*} \mathbf{E}\{x_i|\mathbf{y}\} \mathbf{E}\{x_j^*|\mathbf{y}\} d\mathbf{y} \\ & -\int p(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{E}\{x_i|\mathbf{y}\}}{\partial [\mathbf{P}]_{kl}^*} \mathbf{E}\{x_j^*|\mathbf{y}\} d\mathbf{y} \\ & -\int p(\mathbf{y}) \mathbf{E}\{x_i|\mathbf{y}\} \frac{\partial \mathbf{E}\{x_j^*|\mathbf{y}\}}{\partial [\mathbf{P}]_{kl}^*} d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3-24)$$

根据向量Jacobian的结果

$$\mathcal{D}_{\mathbf{y}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x})^H$$

可以得到

$$\mathcal{D}_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = -p(\mathbf{y}|\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x})^H \quad (3-25)$$

$$\mathcal{D}_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}) = \mathbf{E}\{\mathcal{D}_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\} = -\mathbf{E}\{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x})^H\}.$$

概率密度函数 $\nabla_{\mathbf{P}} p(\mathbf{y})$ 的梯度可以写为

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{P}} p(\mathbf{y}) = & \mathbf{E}[\nabla_{\mathbf{P}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})] \\ = & \mathbf{E}[p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \mathbf{H}^H (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x}) \mathbf{x}^H] \\ = & -\mathbf{H}^H \mathbf{E}\{[\mathcal{D}_{\mathbf{y}} p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H \mathbf{x}^H\} \end{aligned} \quad (3-26)$$

同时, 条件期望的梯度 $\nabla_{\mathbf{P}} \mathbf{E}\{x_i|\mathbf{y}\}$ 可由下式给出

$$\nabla_{\mathbf{P}} \mathbf{E}\{x_i|\mathbf{y}\} = \nabla_{\mathbf{P}} \mathbf{E}\left\{x_i \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})}\right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\mathbb{E} \left\{ x_i \frac{\mathbf{H}^H [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H \mathbf{x}^H}{p(\mathbf{y})} \right\} + \mathbb{E} \left\{ x_i \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \mathbf{H}^H \mathbb{E} \{ [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H \mathbf{x}^H \}}{[p(\mathbf{y})]^2} \right\} \\
 &= \frac{1}{p(\mathbf{y})} \mathbf{H}^H \left[-\mathbb{E} \{ x_i [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H \mathbf{x}^H \} + \mathbb{E} \{ x_i | \mathbf{y} \} \mathbb{E} \{ [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H \mathbf{x}^H \} \right]. \quad (3-27)
 \end{aligned}$$

Jacobian $\mathcal{D}_y \mathbb{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\}$ 可以推导如下

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_y \mathbb{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\} &= \mathcal{D}_y \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x} \frac{\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{y}) - p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \cdot \mathcal{D}_y p(\mathbf{y})}{[p(\mathbf{y})]^2} \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x} \frac{-p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x})^H}{p(\mathbf{y})} \right\} + \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbb{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\})^H}{p(\mathbf{y})} \right\} \\
 &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x} \mathbf{x}^H \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \right\} - \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x} \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} \mathbb{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\}^H \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \right\} \\
 &= [\mathbb{E} \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^H | \mathbf{y} \} - \mathbb{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\} \mathbb{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\}^H] \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \\
 &= \Phi(\mathbf{y}) \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H. \quad (3-28)
 \end{aligned}$$

与 (3-28) 的步骤相似, 我们可以得到如下的 Jacobian 表达式:

$$\mathcal{D}_y^* \mathbb{E}\{\mathbf{x}|\mathbf{y}\} = \Psi(\mathbf{y}) \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H. \quad (3-29)$$

将 (3-26) 和 (3-27) 代入 (3-24) 得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial [\mathbf{E}]_{ij}}{\partial [\mathbf{P}]_{kl}^*} &= - \int \mathbb{E}\{x_i | \mathbf{y}\} \mathbb{E}\{x_j^* | \mathbf{y}\} \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbb{E} \{ [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H x_l^* \} d\mathbf{y} \\
 &\quad + \int \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbb{E} \{ x_i [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H x_l^* \} \mathbb{E}\{x_j^* | \mathbf{y}\} d\mathbf{y} \\
 &\quad + \int \mathbb{E}\{x_i | \mathbf{y}\} \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbb{E} \{ x_j^* [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H x_l^* \} d\mathbf{y} \quad (3-30)
 \end{aligned}$$

其中 \mathbf{e}_k 和 \mathbf{e}_l 分别是单位矩阵的第 k 和第 l 列。

式 (3-30) 的第一项可以写为

$$\begin{aligned}
 &- \int \mathbb{E}\{x_i | \mathbf{y}\} \mathbb{E}\{x_j^* | \mathbf{y}\} \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbb{E} \{ [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H x_l^* \} d\mathbf{y} \\
 &\stackrel{(a)}{=} - \int \mathbb{E}\{x_i | \mathbf{y}\} \mathbb{E}\{x_j^* | \mathbf{y}\} \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \frac{\partial p(\mathbf{y}) \mathbb{E}\{x_l^* | \mathbf{y}\}}{\partial \text{vec}(\mathbf{y}^*)} d\mathbf{y} \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int p(\mathbf{y}) \mathbb{E}\{x_l^* | \mathbf{y}\} \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \frac{\partial \mathbb{E}\{x_i | \mathbf{y}\} \mathbb{E}\{x_j^* | \mathbf{y}\}}{\partial \text{vec}(\mathbf{y}^*)} d\mathbf{y} \\
 &\stackrel{(c)}{=} \int p(\mathbf{y}) \mathbb{E}\{x_l^* | \mathbf{y}\} \mathbb{E}\{x_j^* | \mathbf{y}\} \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} \Psi(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i d\mathbf{y} \\
 &\quad + \int p(\mathbf{y}) \mathbb{E}\{x_l^* | \mathbf{y}\} \mathbb{E}\{x_i | \mathbf{y}\} \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} \Phi(\mathbf{y}) \mathbf{e}_j d\mathbf{y} \quad (3-31)
 \end{aligned}$$

其中 (a) 由式(3-20)中Jacobian矩阵的定义和等式

$$\mathbf{E}\{x_l^*|\mathbf{y}\} = \mathbf{E}\{x_l^* p(\mathbf{y}|\mathbf{x})/p(\mathbf{y})\}$$

得到; (b) 根据分布积分公式得到; (c) 利用了式(3-28) 和式(3-29)的结果。

同样, 式(3-30)的第二项可以表示为

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbf{E}\{x_i [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H x_l^*\} \mathbf{E}\{x_j^*|\mathbf{y}\} d\mathbf{y} \\ &= - \int \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} \Phi(\mathbf{y}) \mathbf{e}_j \mathbf{E}\{x_i x_l^*|\mathbf{y}\} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3-32)$$

式(3-30)的第三项表示为

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{E}\{x_i|\mathbf{y}\} \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbf{E}\{x_j^* [\mathcal{D}_y p(\mathbf{y}|\mathbf{x})]^H x_l^*\} d\mathbf{y} \\ &= - \int \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} \Psi(\mathbf{y}) \mathbf{e}_j \mathbf{E}\{x_j^* x_l^*|\mathbf{y}\} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (3-33)$$

将 (3-31), (3-33)和 (3-32) 代入式 (3-30) 得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\mathbf{E}]_{ij}}{\partial[\mathbf{P}]_{kl}^*} &= - \int \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} \Phi(\mathbf{y}) \mathbf{e}_j p(\mathbf{y}) [\mathbf{E}\{x_i x_l^*|\mathbf{y}\} - \mathbf{E}\{x_i|\mathbf{y}\} \mathbf{E}\{x_l^*|\mathbf{y}\}] d\mathbf{y} \\ &\quad - \int \mathbf{e}_k^T \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} \Psi(\mathbf{y}) \mathbf{e}_j p(\mathbf{y}) [\mathbf{E}\{x_j^* x_l^*|\mathbf{y}\} - \mathbf{E}\{x_j^*|\mathbf{y}\} \mathbf{E}\{x_l^*|\mathbf{y}\}] d\mathbf{y} \\ &= -\mathbf{E}_y \left\{ \mathbf{e}_i^T \Phi(\mathbf{y}) \mathbf{e}_l \mathbf{e}_j^T \Phi^T(\mathbf{y}) \mathbf{G}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^* \mathbf{e}_k \right\} - \mathbf{E}_y \left\{ \mathbf{e}_j^T \Psi^*(\mathbf{y}) \mathbf{e}_l \mathbf{e}_i^T \Psi(\mathbf{y}) \mathbf{G}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^* \mathbf{e}_k \right\} \\ &= -\mathbf{E}_y \left\{ \left[\mathbf{K}(\Phi(\mathbf{y}) \otimes (\Phi^T(\mathbf{y}) \mathbf{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^*)) \right]_{i+(j-1)2L, k+(l-1)2L} \right\} \\ &\quad - \mathbf{E}_y \left\{ \left[\Psi^*(\mathbf{y}) \otimes (\Psi(\mathbf{y}) \mathbf{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^*) \right]_{i+(j-1)2L, k+(l-1)2L} \right\} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4L^2 \times 4L^2}$ 是一个置换矩阵, 满足如下条件^[138]:

$$\text{vec}(\Phi^T(\mathbf{y})) = \mathbf{K} \cdot \text{vec}(\Phi(\mathbf{y})).$$

根据梯度结果

$$\partial[\mathbf{E}]_{ij}/\partial[\mathbf{P}]_{kl}^* = [\mathcal{D}_{\mathbf{P}^*} \mathbf{E}]_{i+(j-1)2L, k+(l-1)2L}$$

我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbf{P}^*} \mathbf{E} &= -\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_y \left\{ \Phi(\mathbf{y}) \otimes \left[\Phi^T(\mathbf{y}) \mathbf{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^* \right] \right\} \\ &\quad - \mathbf{E}_y \left\{ \Psi^*(\mathbf{y}) \otimes \left[\Psi(\mathbf{y}) \mathbf{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^* \right] \right\} \\ &= -\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_y \left\{ \Phi(\mathbf{y}) \otimes \Phi^*(\mathbf{y}) \right\} \cdot \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^* \right] \\ &\quad - \mathbf{E}_y \left\{ \Psi^*(\mathbf{y}) \otimes \Psi(\mathbf{y}) \right\} \cdot \left[\mathbf{I} \otimes \mathbf{P}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}^* \right]. \end{aligned} \quad (3-34)$$

应用置换矩阵 \mathbf{K} 的性质^[138],

$$\mathbf{K} \cdot (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}) \cdot \mathbf{K}$$

即可证明相应结论。 □

3.5.3 定理3.1的证明

首先将预编码待设计的剩余部分写为新的变量 \mathbf{G}

$$\mathbf{G} \triangleq \text{Diag}(\sqrt{\lambda})\mathbf{V}$$

这样功率分配向量 λ 就可以表示为

$$\lambda = \mathbf{R} \cdot \text{vec}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H).$$

根据式(3-21)Hessian矩阵的定义, 互信息的 Hessian表示如下

$$\mathcal{H}_\lambda I(\lambda) = \mathcal{D}_\lambda [\mathcal{D}_\lambda I(\lambda)]. \quad (3-35)$$

其中 $\mathcal{D}_\lambda I(\lambda)$ 可以写为

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\lambda I(\lambda) &= \mathcal{D}_{\mathbf{G}\mathbf{G}^H} I(\lambda) \cdot \mathbf{R}^T \\ &\stackrel{(a)}{=} \text{vec}^T(\text{Diag}^2(\sigma)\mathbf{V}\mathbf{E}\mathbf{V}^H) \cdot \mathbf{R}^T \\ &\stackrel{(b)}{=} \text{vec}^T(\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{V}^H \otimes \mathbf{V}^T \text{Diag}^2(\sigma)) \cdot \mathbf{R}^T \end{aligned}$$

等式(a)来源于文献[117]中的定理2, 等式 (b)利用了矩阵的如下性质^[138]:

$$\text{vec}(\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{B}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}) \cdot \text{vec}(\mathbf{T})$$

这样, 式 (3-35) 可以进一步写为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\lambda I(\lambda) &= \mathcal{D}_\lambda [\mathbf{R} \cdot (\mathbf{V}^* \otimes \text{Diag}^2(\sigma)\mathbf{V}) \cdot \text{vec}(\mathbf{E})] \\ &= \mathbf{R} \cdot (\mathbf{V}^* \otimes \text{Diag}^2(\sigma)\mathbf{V}) \cdot \mathcal{D}_\lambda \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3-36)$$

根据Jacobian的链式法则^[137]可知

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathbf{G}^*} \mathbf{E} &= \mathcal{D}_\lambda \mathbf{E} \cdot \mathcal{D}_{\mathbf{G}^*} \lambda + \mathcal{D}_{\lambda^*} \mathbf{E} \cdot \mathcal{D}_{\mathbf{G}^*} \lambda^* \\ &= 2\mathcal{D}_\lambda \mathbf{E} \cdot \mathcal{D}_{\mathbf{G}^*} \lambda \end{aligned} \quad (3-37)$$

其中 $\mathcal{D}_{\mathbf{G}^*}\boldsymbol{\lambda}$ 可由Jacobian的定义 (3-20)得到:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathbf{G}^*}\boldsymbol{\lambda} &= \mathcal{D}_{\mathbf{G}^*} \left[\mathbf{R} \cdot \text{vec}(\mathbf{G}\mathbf{G}^H) \right] \\ &= \mathbf{R} \cdot (\mathbf{I} \otimes \mathbf{G}) \cdot \mathbf{K}.\end{aligned}$$

因为 $\mathcal{D}_{\mathbf{G}^*}\boldsymbol{\lambda}$ 是满列秩, 由(3-37)可得

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathcal{D}_{\mathbf{G}^*}\mathbf{E}) \cdot (\mathcal{D}_{\mathbf{G}^*}\boldsymbol{\lambda})^+ \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{D}_{\mathbf{G}^*}\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{G}^H \otimes \mathbf{I}) \cdot \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{R}^T \cdot \text{Diag}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned}\quad (3-38)$$

其中 $(\cdot)^+$ 表示矩阵的Moore-Penrose伪逆^[136]。

将式 (3-23) 和式(3-38) 代入式(3-36) 即可得到式(3-14) 给出的Hessian, 同时容易进一步确认它是负半定矩阵。

3.6 本章小结

本章讨论完全信道状态信息下信号与信道的有效适配, 使实际系统性能逼近传输性能限的预编码调制方法。针对预编码设计问题存在大量极值点, 优化过程复杂, 将待设计预编码矩阵分解为三个部分, 其中第一部分(左酉矩阵)匹配无线信道, 利用最优的信号发射方向; 第二部分(功率分配矩阵)控制发射信号的功率, 对调制星座点进行扩张和收缩; 第三部分(右酉矩阵)对调制星座点进行旋转。由此得到预编码算法, 迭代求解直到收敛。仿真表明, 所提算法收敛快速、对起始点不敏感, 能够获得高的互信息增益。与此同时, 通过建立BER仿真系统, 进一步发现已有文献中大量讨论的最大化容量方法通常只具有理论意义, 将其应用于实际系统会带来性能恶化, 甚至比未采用预编码的性能还要差; 与此相反, 最大化互信息的方法能够为实际系统带来高的性能增益。因此, 所提算法不仅在理论上是对最大化容量方法的补充, 扩展了信息论中基于高斯信号容量限的结论; 它更是一项可以实用化的技术, 能够为现有通信系统带来高性能增益, 使实际系统逼近传输性能限。

第4章 统计信道信息下预编码调制优化设计

通过上一章对完全信道信息下预编码调制方法的讨论，建立了针对实际调制信号优化互信息的基本方法。完全信道信息的设计方法可用于信道慢速变化的情况，对于快速变化的信道是不适用的。信道变化越来越快时，利用完全信道信息的方法将会带来大量的信息交互开销，实现代价大。

利用第2章讨论的预编码调制方法基础模型，本章基于统计信道状态信息，研究如何根据快变信道的统计特性对预编码问题进行建模和求解。因为信道统计特性变化的时间尺度非常低，采用统计设计的方法能够解决预编码设计带来的信息交互开销的问题。

4.1 系统模型

考虑发端有 N_t 个天线，收端有 N_r 个天线的MIMO系统。令 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_t}$ 表示具有零均值单位协方差的发射信号，即 $\mathbf{E}(\mathbf{x}\mathbf{x}^H) = \mathbf{I}$ ，则MIMO系统的接收信号 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N_r}$ 可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (4-1)$$

其中 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 是信道矩阵，它的第 (i, j) 个元素表示从第 j 个发射天线到第 i 个接收天线的信道传播系数； $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ 是线性预编码矩阵； $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_r}$ 表示零均值圆对称，方差为 $\sigma^2 \mathbf{I}$ 的噪声向量。

与第3章讨论的完全MIMO信道信息下的预编码设计不同，我们这里考虑统计信道信息下的设计问题。将信道矩阵 \mathbf{H} 用双相关MIMO信道进行建模^[139]，可以得到（参见第2.1.1节）

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Psi}_r^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{\Psi}_t^{1/2} \quad (4-2)$$

$\mathbf{H}_w \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 表示复矩阵，每一个元素为独立同分布，且零均值单位方差的高斯随机变量； $\mathbf{\Psi}_t \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t} > \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{\Psi}_r \in \mathbb{C}^{N_r \times N_r} > \mathbf{0}$ 在文献中一般称之为发射和接收相关矩阵。为降低信息交互开销，我们假设发送端只知道统计信道状态信息^①，并依此通过预编码矩阵实现对信道的自适应。

① 这里的统计信道状态信息指的是发射和接收相关矩阵。

4.2 研究现状

统计信道信息的预编码设计一直以来都是MIMO技术的研究热点。然而，大量的工作都集中在针对最大化容量准则的讨论。文献[104]讨论了MISO系统下的统计优化设计，文献[105]针对MIMO系统做了分析，并指出简单的波束成形方法（beamforming）的最优条件。文献[106]提出了有效的迭代算法求解统计信道下的最大化容量问题，并将算法推广到多天线多址接入信道（MIMO-MAC）。正如第2.2.2节所述，最大化容量的方法大多仅限于理论分析，将其得到的方案应用于实际系统将带来极大的性能损失，很多时候甚至比未采用预编码的性能还要差。

正因如此，文献[140]讨论了最大化调制约束下平均互信息预编码的必要条件。同时讨论利用该必要条件的迭代优化算法。然而，直接最大化平均互信息面临一系列难点。首先，目标函数因为统计平均的引入计算复杂度高；其次，优化算法未利用解结构，收敛速度慢且难以得到最优解。本章针对统计优化的特点，分析最优预编码的解结构，简化目标函数的计算，同时将第3章所提出的两步迭代算法扩展至本章。从而，为统计信道状态信息下的预编码调制设计的提供统一求解框架和优化方法。

4.3 调制信号的平均互信息

输入信号 \mathbf{x} 和输出信号 \mathbf{y} 之间的平均互信息表示为

$$\mathcal{I}_A(\mathbf{P}) = \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}) \quad (4-3)$$

这里，我们用符号 $\mathcal{I}_A(\mathbf{P})$ 特指平均互信息是预编码矩阵 \mathbf{P} 的函数；用 $\mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H})$ 表示第3章式(3-2)所讨论的完全信道状态信息下的互信息：

$$\mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}) = N_t \log M - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \mathbb{E}_{\mathbf{n}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{e}_{mk} + \mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2}{\sigma^2} \right) \quad (4-4)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示向量的欧氏范数； $\mathbf{e}_{mk} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k$ ， \mathbf{x}_m 和 \mathbf{x}_k 分别表示使用多天线发射时调制信号的第 m 和第 k 种可能。它们均包含 N_t 个符号，当其角标由1变化到 M^{N_t} 时，将遍历发射符号的所有可能性。

由欧式范数的酉不变性可知，输出信号 \mathbf{y} 经过酉矩阵 \mathbf{U} 的变换（记为 $\mathbf{U}\mathbf{y}$ ），平均互信息保持不变，即

$$\mathbb{E}_{\mathbf{H}} \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}) = \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{U}\mathbf{y} | \mathbf{H}). \quad (4-5)$$

然而，输入信号 \mathbf{x} 经过酉变换 \mathbf{U} ，平均互信息 $\mathbb{E}_{\mathbf{H}} \mathcal{I}(\mathbf{U}\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H})$ 会发生变化，也就

是说,

$$\mathbb{E}_{\mathbf{H}} \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}) \neq \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \mathcal{I}(\mathbf{Ux}; \mathbf{y} | \mathbf{H}). \quad (4-6)$$

这一关系表明,即便是酉矩阵都可能提升实际调制信号的平均互信息。因为酉矩阵只是复矩阵的一种特例,设计一般的复预编码矩阵提升系统性能的潜力将更大。

本章将设计有效的算法来优化满足功率约束的 $N_t \times N_t$ 的复矩阵 \mathbf{P} , 优化的目标是实现平均互信息表达式(4-3)的最大化。这一问题可以写为如下优化问题:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \mathcal{I}_A(\mathbf{P}) \\ & \text{subject to} \quad \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) \leq N_t. \end{aligned} \quad (4-7)$$

优化问题(4-7)的求解依赖于对表达式 $\mathcal{I}_A(\mathbf{P})$ 的计算以及对变量 \mathbf{P} 的优化, 它们分别对应了求解该问题的两个重要难点。首先, 平均互信息表达式中包含多重积分, 计算代价巨大。以 $N_r \times N_t$ 的 MIMO 信道为例, 评估一次平均互信息需要计算 $2(N_r N_t + N_r)$ 次从负无穷到正无穷的函数积分。这些函数积分没有闭合表达式, 只能通过数值计算或 Monte Carlo 仿真进行评估。

此外, 由于 $\mathcal{I}_A(\mathbf{P})$ 是 \mathbf{P} 的非凹函数, 获得最优解非常困难。如果函数 g 的定义域 $\text{dom } g$ 是凸集合, 对于定义域中任给的两个点

$$\mathbf{P}_x, \mathbf{P}_y \in \text{dom } g$$

和任给的参数 θ

$$0 \leq \theta \leq 1$$

目标函数满足以下条件^[103]:

$$g(\theta \cdot \mathbf{P}_x + (1 - \theta) \cdot \mathbf{P}_y) \geq \theta \cdot g(\mathbf{P}_x) + (1 - \theta) \cdot g(\mathbf{P}_y). \quad (4-8)$$

我们称函数 g 为凹函数,

具体到本章所讨论的问题(4-7), 其定义域表示为

$$\text{dom } \mathcal{I}_A = \{\mathbf{P} | \text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H) \leq N_t\}$$

定义了一个凸集合; 然而, 目标函数却不满足式 (4-8) 所给出的不等式, 这一点可以通过反例来证明。例如取如下一组参数

$$\Psi_t = \mathbf{I}, \Psi_r = \mathbf{I}, \mathbf{P}_x = \mathbf{0}, \mathbf{P}_y = \mathbf{I}, \theta = 0.5.$$

4.3.1 最优预编码结构

本节进一步讨论平均互信息的性质，分析最大化平均互信息的预编码所满足的最优结构。利用该结构能够简化预编码设计，同时为即将所讨论的预编码求解算法提供理论依据。

通过特征值分解，可以将发射相关矩阵 Ψ_t 和接收相关矩阵 Ψ_r 分别写为

$$\Psi_t = \mathbf{U}_t \Sigma_t \mathbf{U}_t^H \quad (4-9)$$

$$\Psi_r = \mathbf{U}_r \Sigma_r \mathbf{U}_r^H \quad (4-10)$$

\mathbf{U}_t 和 \mathbf{U}_r 是酉矩阵，其列向量分别是 Ψ_t 和 Ψ_r 的特征向量； Σ_t 和 Σ_r 是对角矩阵，对角元素分别为 Ψ_t 和 Ψ_r 的特征值。因为相关矩阵皆为正定矩阵，根据式(4-2)，可以将信道矩阵 \mathbf{H} 表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}_r \Sigma_r^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}_r^H \mathbf{H}_w \mathbf{U}_t \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}_t^H. \quad (4-11)$$

由随机矩阵理论可知，矩阵 \mathbf{H}_w 和 $\tilde{\mathbf{H}}_w = \mathbf{U}_r^H \mathbf{H}_w \mathbf{U}_t$ 的统计特性完全相同。结合式(4-5)给出的平均互信息的性质，可以将信道模型 (4-1) 等价写为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \underbrace{\Sigma_r^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_w \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}_t^H}_{\tilde{\mathbf{H}}} \mathbf{P} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (4-12)$$

其中 $\tilde{\mathbf{y}}$ 和 $\tilde{\mathbf{n}}$ 表示信号 \mathbf{y} 和 \mathbf{n} 经酉矩阵 \mathbf{U}_r^H 变换后的结果。最大化 $E_{\mathbf{H}} \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H})$ 等价于最大化 $E_{\tilde{\mathbf{H}}_w} \mathcal{I}(\mathbf{x}; \tilde{\mathbf{y}} | \tilde{\mathbf{H}})$ ，下面集中讨论如何求解后者。

因为 $\mathcal{I}(\mathbf{x}; \tilde{\mathbf{y}} | \tilde{\mathbf{H}})$ 是信噪比（定义为 $1/\sigma^2$ ）的增函数^[74]，所以平均互信息 $E_{\tilde{\mathbf{H}}_w} \mathcal{I}(\mathbf{x}; \tilde{\mathbf{y}} | \tilde{\mathbf{H}})$ 亦为SNR的增函数。这样，最大化平均互信息的预编码矩阵应充分利用功率资源；也就是说，问题 (4-7) 中的不等式约束应当替换为等式约束：

$$\text{Tr}(\mathbf{P} \mathbf{P}^H) = N_t. \quad (4-13)$$

将预编码矩阵做SVD分解，得到

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_P \Sigma_P \mathbf{V}_P^H$$

其中 \mathbf{U}_P 和 \mathbf{V}_P 表示酉矩阵； Σ_P 表示对角矩阵，相应元素非负且为降序排列。沿用第3章的命名规则，我们称 \mathbf{U}_P 为左酉矩阵， Σ_P 为功率分配矩阵， \mathbf{V}_P 为右酉矩阵。同时，最优的左酉矩阵通过如下定理给出：

定理 4.1： 最大化平均互信息的最优预编码 \mathbf{P} 的左酉矩阵应等于发射相关矩阵 Ψ_t 的特征向量矩阵，即满足

$$\mathbf{U}_P = \mathbf{U}_t.$$

证明 详见附录A：定理 4.1的证明。 \square

这一结果解决了预编码左酉矩阵的设计，同时将信道模型 (4-12) 简化为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{\Sigma}_r^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_w \mathbf{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (4-14)$$

其中 $\tilde{\mathbf{P}}$ 表示预编码矩阵仍待设计的部分，写为：

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{\Sigma}_p \mathbf{V}_p^H.$$

针对式(4-14)的简化信道模型，下面的定理给出平均互信息的下界和上界：

定理 4.2： 双相关MIMO信道的平均互信息下界为

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_L(\tilde{\mathbf{P}}) = & N_t \log M - N_r \left(\frac{1}{\ln 2} - 1 \right) \\ & - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \prod_q \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \mathbf{\Sigma}_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4-15)$$

其中 r_q 表示 $\mathbf{\Sigma}_r$ 的第 q 个对角元素。与此同时，平均互信息的上界为

$$\mathcal{I}_U(\tilde{\mathbf{P}}) = N_t \log M - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left(-\frac{\text{Tr}(\mathbf{\Sigma}_r)}{\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \mathbf{\Sigma}_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right). \quad (4-16)$$

证明 详见附录B：定理 4.2的证明。 \square

4.4 最大化平均互信息的预编码设计

本节讨论最大化式(4-15)给出的平均互信息下界和式(4-16)给出的平均互信息上界的预编码设计方法。我们首先证明最大化下界或上界具有渐近最优性，然后将第3章讨论的两步算法进行扩展，使其能够用来求解依据统计信道信息设计的预编码问题。

4.4.1 渐近最优性

4.4.1.1 低信噪比下的渐近最优性

根据下界的表达式 (4-15)，最大化平均互信息下界 $\mathcal{I}_L(\tilde{\mathbf{P}})$ 等价于求解如下最小化问题

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \prod_q \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \mathbf{\Sigma}_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right)^{-1} \\ & \text{subject to} \quad \text{Tr}(\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^H) = N_t. \end{aligned} \quad (4-17)$$

在低信噪比情况下，即 $\sigma^2 \rightarrow +\infty$ 时，式 (4-17) 的目标函数可以根据泰勒展开式写为

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \prod_q \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right)^{-1} \\ &= M^{N_t} \log M^{N_t} - \frac{\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}})}{2 \ln(2) M^{N_t} \sigma^2} \\ & \quad \cdot \left(\sum_m \sum_k \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right) + O(1/\sigma^4) \end{aligned} \quad (4-18)$$

其中 $O(1/\sigma^4)$ 表示与 $1/\sigma^4$ 同阶的无穷小项。由一阶最优条件，最大化 $\mathcal{I}_L(\tilde{\mathbf{P}})$ 可以等价于求解如下优化问题

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \sum_m \sum_k \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \\ & \text{subject to} \quad \text{Tr}(\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^H) = N_t. \end{aligned} \quad (4-19)$$

对于等概率零均值的调制集合，式(4-19)的目标函数可以进一步化简为

$$\begin{aligned} & \sum_m \sum_k \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \\ &= \sum_m \sum_k \text{Tr}(\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H) \\ &= \text{Tr} \left(\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \sum_m \sum_k \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H \right) \\ &= e_{mk} \cdot \text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{t}} \Sigma_{\mathbf{P}}^2) \end{aligned} \quad (4-20)$$

e_{mk} 表示常数，定义如下

$$e_{mk} \mathbf{I} = \sum_m \sum_k \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H.$$

这样，问题 (4-19) 就可以等价写为

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{t}} \Sigma_{\mathbf{P}}^2) \\ & \text{subject to} \quad \text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{P}}^2) = N_t \end{aligned} \quad (4-21)$$

根据KKT条件可以获得该凸优化问题的闭式解： $\Sigma_{\mathbf{P}}^2$ 对角元素除了对应于 $\Sigma_{\mathbf{t}}$ 的最大特征值外，其它皆为零。结合定理 4.1 的最优解结构，将这一结论总结为如下定理：

定理 4.3: 在低信噪比下, 最大化平均互信息下界的预编码可以表示为矩阵 \mathbf{U}_t 乘以一个对角功率分配矩阵。其中, 对角功率分配矩阵将所有的功率都分配在对应 Ψ_t 的最大特征值元素上。这样的方法一般被称之为波束成型。

与此同时, 在低信噪比下, 通过使用一阶最优条件直接最大化平均互信息等价求解如下问题^[74]

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}) \\ & \text{subject to} \quad \text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{P}) = N_t \end{aligned} \quad (4-22)$$

其中目标函数可以进一步写为

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P}) \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{H}}_w} \text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{U}_t \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_w^H \Sigma_r \tilde{\mathbf{H}}_w \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}_t^H \mathbf{P}) \\ &= \text{Tr}(\Sigma_r) \cdot \text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{U}_t \Sigma_t \mathbf{U}_t^H \mathbf{P}) \\ &= \text{Tr}(\Sigma_r) \cdot \text{Tr}(\Sigma_P^2 \mathbf{U}_P^H \mathbf{U}_t \Sigma_t \mathbf{U}_t^H \mathbf{U}_P). \end{aligned} \quad (4-23)$$

当 \mathbf{U}_P 等于 \mathbf{U}_t , 且 Σ_P^2 的系数中除了对应 Ψ_t 的最大特征值外皆为零时, 式(4-23)取得最大值。这一结果与最大化下界的解是相同的, 参见定理4.3。这一结论告诉我们, 在低信噪比下, 最大化平均互信息下界与最大化平均互信息的解是一样的。也就是说, 求解求解平均互信息下界具有渐近最优性。

采用同样的方法, 我们还可以证明低信噪比下, 最大化平均互信息上界也具有渐近最优性。因步骤相似, 证明过程在此省略。

4.4.1.2 高信噪比下的渐近最优性

下面来讨论高信噪比情况下, 最大化平均互信息下界的渐近最优性。此时, 式(4-17)的目标函数可以写为

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \prod_q \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right)^{-1} \\ &= \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left[\ln \prod_q \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4-24)$$

表达式中的结构

$$\log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\cdot)$$

在数学上称为软最大 (soft maximization) ^[103]。在指数函数的作用下，软最大可以通过其最大的一个子项近似。通过近似，我们可以得到

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left[\ln \prod_q \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right)^{-1} \right] \\ & \approx \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \max_k \ln \prod_q \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right)^{-1} \\ & = \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \max_k \left[- \sum_q \ln \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right) \right]. \end{aligned}$$

在高信噪比情况下，即 $\sigma^2 \rightarrow 0$ 时，可以进一步写为

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \max_k \left[- \sum_q \ln \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right) \right] \\ & \approx \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \max_k \left[- \sum_q \ln \left(\frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right) \right] \\ & \leq - \min_{\substack{m,k \\ m \neq k}} \left[\sum_q \ln \left(\frac{r_q}{2\sigma^2} \right) + N_r \ln \left(\mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \right) \right]. \end{aligned}$$

因此，最大化问题 (4-17) 就对应于求解如下最大化最小问题

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \min_{\substack{m,k \\ m \neq k}} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \\ & \text{subject to} \quad \text{Tr}(\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{P}}^H) = N_t. \end{aligned} \quad (4-25)$$

式(4-25)中二次项的最小值事实上是所有可能的输入向量中的最小距离

$$d_{\min} = \min_{\substack{m,k \\ m \neq k}} \left\| \Sigma_t^{1/2} \tilde{\mathbf{P}} (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k) \right\|^2 \quad (4-26)$$

这一结果告诉我们：

定理 4.4： 在高信噪比下，最大化平均互信息下界等价于最大化调制集合的最小距离。

与此同时，高信噪比下直接最大化平均互信息同样等价于最大化最小距离：

$$d_{\min}^{(A)} = \min_{\substack{m,k \\ m \neq k}} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{H}}_w} \left\| \Sigma_r^{1/2} \tilde{\mathbf{H}}_w \Sigma_t^{1/2} \tilde{\mathbf{P}} (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k) \right\|^2. \quad (4-27)$$

这里的推导利用了式 (4-14) 的简化信道模型，以及文献[74]中给出的完全信道状态信息下互信息优化的结论。

表 4.1 优化平均互信息的渐近最优性

考虑的情况	最优预编码	
	低信噪比情况	高信噪比情况
最大化确定信道的互信息 发端知道全部信道状态信息	波束成型 (参见文献[74])	最大化最小距离 (参见文献[74])
最大化平均互信息下界, 式 (4-15) 发端知道统计信道状态信息	波束成型 (参见第4.4.1节)	最大化最小距离 (参见第 4.4.1节)
最大化平均互信息上界, 式 (4-16) 发端知道统计信道状态信息	波束成型 (参见第 4.4.1节)	最大化最小距离 (参见第 4.4.1节)

因为复随机矩阵 $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}$ 的元素为零均值单位方差的高斯变量, 式(4-27)中对 $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}$ 的期望可以直接求解得到

$$d_{\min}^{(A)} = \min_{\substack{m,k \\ m \neq k}} \text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}}) \cdot \|\Sigma_{\mathbf{t}}^{1/2} \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k)\|^2. \quad (4-28)$$

这样, 直接最大化平均互信息得到的预编码与最大化下界得到的预编码完全相同; 也就是说, 高信噪比下最大化平均互信息下界是渐近最优的。采用相似的步骤, 同样可以证明最大化平均互信息上界也具有渐近最优性。表 4.1 总结了本节所讨论的渐近最优结果。

4.4.2 凹性

考虑到最大化平均互信息下界和上界具有渐近最优性, 且计算复杂度相对较低且不需要计算多重数值积分, 我们考虑利用所提下界和上界来设计预编码矩阵, 以此间接的最大化平均互信息。设计最大化下界和上界的高效算法依赖于对其函数特性的了解。下面我们考虑这两个函数相对于不同设计参数的凹性。

我们首先来看相对于矩阵 $\tilde{\mathbf{P}}$ 的凹性。如果凹性满足, 则预编码问题可以轻松求解。不幸的是, 下界和上界相对于 $\tilde{\mathbf{P}}$ 不是凹函数。这一结论可以通过反例来证明, 例如令 $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$ 。

下面我们来看下界和上界相对于矩阵 $\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}}$ 的凹性。值得注意的是, 文献 [120] 证明了发端具有完全信道状态信息时, 确定实值 MIMO 信道下这一凹性成立, 文献 [121] 进一步证明了复值信道下这一结论依然成立。这里讨论的是统计信道的情况, 我们证明针对下界和上界, 函数的凹性结论是成立的。

定理 4.5: 式 (4-15) 和式(4-16)所给出的平均互信息下界和平均互信息上界是矩阵 $\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}}$ 的凹函数。

证明 详见附录C: 函数凹性的证明。 □

虽然定理 4.5 的凹性结论成立，应用它求解预编码矩阵仍是难题。这是因为难以将等式功率约束

$$\text{Tr}(\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^H) = N_t$$

等价的转化为相对于此时的待求变量

$$\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}}$$

的凸约束。也就是说，相对于变量 $\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}}$ ，预编码问题依然难以求解。

接下来我们来看相对于预编码 \mathbf{P} 的平方奇异值的凹性：

定理 4.6： 平均互信息的下界和上界是功率分配向量 $\lambda = \text{diag}(\Sigma_{\mathbf{P}}^2)$ 的凹函数。下界相对于 λ 的梯度为

$$\nabla_{\lambda} \mathcal{I}_L = \text{diag} \left(\sum_{m=1}^{M^{N_t}} \frac{\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \left\{ w_{mk} \cdot \sum_q \frac{r_q \mathbf{W}_{mk}^T}{2\sigma^2 + r_q \text{Tr}(\mathbf{W}_{mk} \Sigma_{\mathbf{P}}^2)} \right\}}{\ln(2) M^{N_t} \cdot \sum_{k=1}^{M^{N_t}} w_{mk}} \right) \quad (4-29)$$

其中参数 \mathbf{W}_{mk} 和 w_{mk} 分别定义为

$$\mathbf{W}_{mk} = \Sigma_t \mathbf{V}_{\mathbf{P}}^H \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{V}_{\mathbf{P}} \quad (4-30)$$

$$w_{mk} = \exp \left[- \sum_q \ln \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \text{Tr}(\mathbf{W}_{mk} \Sigma_{\mathbf{P}}^2) \right) \right]. \quad (4-31)$$

同时，上界相对于 λ 的梯度为

$$\nabla_{\lambda} \mathcal{I}_U = \text{diag} \left(\frac{\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}})}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \frac{\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \{ f_{mk} \cdot \mathbf{W}_{mk}^T \}}{\ln(2) \sigma^2 \cdot \sum_{k=1}^{M^{N_t}} f_{mk}} \right) \quad (4-32)$$

参数 f_{mk} 定义为

$$f_{mk} = \exp \left[- \frac{\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}})}{\sigma^2} \text{Tr}(\mathbf{W}_{mk} \Sigma_{\mathbf{P}}^2) \right]. \quad (4-33)$$

证明 详见附录C：函数凹性的证明。 \square

表 4.2 总结了下界和上界函数的凹性结论。为了便于比较，表 4.2 还给出了当发端具有完全信道状态信息时互信息的相应结论。

4.4.3 预编码设计

本节以最大化下界为例来说明如何利用上一节讨论的凹性开发高效的预编码求解算法。需要特别注意的是，虽然我们以下界为例进行说明，该算法同样可以应用于最大化上界函数。算法设计的思路上与第3章的两步迭代算法类似，不同点在于目标函数的变化。

表 4.2 平均互信息下界和上界的凹性总结。符号 \checkmark 表示对应凹性成立；符号 \times 表示对应凹性不成立。

情况	相对于 $\tilde{\mathbf{P}}$	相对于 $\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_t \tilde{\mathbf{P}}$	相对于 $\text{diag}(\Sigma_{\mathbf{P}}^2)$
确定信道的互信息 发端具有完全CSI	\times (文献[119] 和 [121])	\checkmark (文献 [120] 和 [121])	\checkmark (文献 [119]、[121]和[73])
平均互信息下界 发端只具有统计CSI	\times (参见第 4.4.2节)	\checkmark (参见定理 4.5)	\checkmark (参见定理 4.6)
平均互信息上界 发端只具有统计CSI	\times (参见第 4.4.2节)	\checkmark (参见定理 4.5)	\checkmark (参见定理 4.6)

4.4.3.1 优化功率分配向量

定理 4.6 的凹性结果保证了在给定右酉矩阵 $\mathbf{V}_{\mathbf{P}}$ 的条件下，可以找到全局最优的功率分配向量。我们首先讨论这一问题的求解：

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} \quad \mathcal{I}_L(\boldsymbol{\lambda}) \\
 & \text{subject to} \quad \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = N_t \\
 & \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4-34}$$

其中 $\mathbf{1}$ 表示全1的列向量。

为了高效求解上述问题，我们利用问题的结构，开发能够达到全局最优的迭代算法。

首先，利用惩罚函数的方法将问题(4-34)的不等式约束写入目标函数^[103]：

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} \quad f(\boldsymbol{\lambda}) = -\mathcal{I}_L(\boldsymbol{\lambda}) + \sum_{i=1}^{N_t} \phi(-\lambda_i) \\
 & \text{subject to} \quad \mathbf{1}^T \boldsymbol{\lambda} = N_t
 \end{aligned} \tag{4-35}$$

其中 $\phi(u)$ 是对数障碍函数，它用来近似表征约束是否被违反

$$\phi(u) = \begin{cases} -(1/t) \ln(-u), & u < 0 \\ +\infty, & u \geq 0. \end{cases} \tag{4-36}$$

参数 $t > 0$ 是这一近似表征的精度。随着 t 的增加，近似的精度将越来越高。

下一步处理等式约束。对于任意可行点 $\boldsymbol{\lambda}$ ，可以将 $f(\boldsymbol{\lambda})$ 进行线性展开

$$f(\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{d}) \approx f(\boldsymbol{\lambda}) + \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} f(\boldsymbol{\lambda})^T \mathbf{d} \tag{4-37}$$

$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} f(\boldsymbol{\lambda})$ 表示 f 在 $\boldsymbol{\lambda}$ 的梯度

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} f(\boldsymbol{\lambda}) = -\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{I}_L(\boldsymbol{\lambda}) - (1/t) \mathbf{q} \tag{4-38}$$

其中 $\nabla_{\lambda} \mathcal{I}_L(\lambda)$ 由式(4-29)给出, 向量 \mathbf{q} 的第 i 个元素 q_i 表示为

$$q_i = 1/\lambda_i$$

为了求解问题(4-35), 我们利用线性展开来寻找迭代的方向

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \nabla_{\lambda} f(\lambda)^T \mathbf{d} \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{1}^T (\lambda + \mathbf{d}) = N_t \\ & \quad \mathbf{d}^T \mathbf{d} \leq 1 \end{aligned} \quad (4-39)$$

其中式 (4-39) 的第一个约束保证原问题的等式约束成立, 第二个约束将优化方向限定在欧式单位球中。

这一最小化问题存在闭式解。将 $\Delta \lambda$ 定义为问题(4-39)的下降方向, 它由如下的KKT系统给出

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_{\lambda} f(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

其中 ν 是等式约束对应的拉格朗日乘子。利用该线性系统的结构及块矩阵的求逆定理, $\Delta \lambda$ 可以写为

$$\Delta \lambda = - \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T}{N_t} \right) \cdot \nabla_{\lambda} f(\lambda) \quad (4-41)$$

其中 $(\mathbf{I} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T / N_t)$ 是一个矩阵, 它将函数 f 在 λ 的梯度, 即 $\nabla_{\lambda} f(\lambda)$, 投影到满足如下条件的空间

$$\mathbf{1}^T \Delta \lambda = 0. \quad (4-42)$$

采用这一搜索方向, 并结合后向线搜索^[103], 我们用表 4.3 的算法来求解功率分配向量。因为定理4.6的凹性, 该算法可以保证全局最优性。

4.4.3.2 优化酉矩阵

给定功率分配向量 λ , 最大化平均互信息下界转化为如下问题:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \quad \mathcal{I}_L(\mathbf{V}_P) \\ & \text{subject to} \quad \mathbf{V}_P^H \mathbf{V}_P = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4-43)$$

其中我们用符号 $\mathcal{I}_L(\mathbf{V}_P)$ 来强调 \mathbf{V}_P 是平均互信息下界 \mathcal{I}_L 的变量。

在酉矩阵约束下, 式(4-43) 可以改写为一个在受限搜索空间上的无约束优化问题:

$$\text{minimize} \quad h(\mathbf{V}_P) \quad (4-44)$$

表 4.3 统计信道下功率分配向量优化的算法流程

通过优化功率分配向量最大化统计信道的平均互信息下界
步骤1. 给定任意可行向量 λ , $t := t^{(0)} > 0$, $\alpha > 1$, 容差 $\epsilon > 0$; 步骤2. 采用式(4-38)计算 f 在 λ 的梯度 $\nabla_{\lambda} f(\lambda)$, 并利用式(4-41)计算下降方向 $\Delta\lambda$; 如果 $\ \Delta\lambda\ ^2$ 足够小则转至步骤5, 否则进行下一步; 步骤3. 通过后向线搜索选择步长 γ , 使其满足如下条件 $f(\lambda + \gamma\Delta\lambda) < f(\lambda);$ 步骤4. 令 $\lambda := \lambda + \gamma\Delta\lambda$; 转至步骤2; 步骤5. 如果 $1/t < \epsilon$, 停止; 否则令 $t := \alpha t$; 转至步骤2。

其中 $h(\mathbf{V}_P) = -\mathcal{I}_L(\mathbf{V}_P)$, 定义域限定在Stiefel流形上

$$\text{dom } h = \{\mathbf{V}_P \in \mathbb{S}^{N_t \times N_t}\} \quad (4-45)$$

也就是说,

$$\mathbb{S}^{N_t \times N_t} = \{\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t} | \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}\}. \quad (4-46)$$

为了求解这样一个酉矩阵约束问题, 我们将沿着切线空间的复梯度作为搜索方向^[125]

$$\Delta\mathbf{V}_P = \nabla_{\mathbf{V}_P} \mathcal{I}_L(\mathbf{V}_P) - \mathbf{V}_P \left(\nabla_{\mathbf{V}_P} \mathcal{I}_L(\mathbf{V}_P) \right)^H \mathbf{V}_P \quad (4-47)$$

其中 $\nabla_{\mathbf{V}_P} \mathcal{I}_L(\mathbf{V}_P)$ 表示下界的梯度, 由下式给出

$$\nabla_{\mathbf{V}_P} \mathcal{I}_L(\mathbf{V}_P) = \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \frac{\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \left\{ w_{mk} \cdot \sum_q \frac{r_q \mathbf{Q}_{mk}}{2\sigma^2 + r_q \text{Tr}(\mathbf{V}_P^H \mathbf{Q}_{mk})} \right\}}{\ln(2) M^{N_t} \cdot \sum_{k=1}^{M^{N_t}} w_{mk}} \quad (4-48)$$

w_{mk} 是式 (4-31) 中定义的常数, \mathbf{Q}_{mk} 表示如下

$$\mathbf{Q}_{mk} = \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{V}_P \Sigma_P^2 \Sigma_t. \quad (4-49)$$

沿着切线方向移动并不能保证酉约束满足。我们沿用引理3.3的投影方法将不满足约束的变量映射回可行域 $\mathbb{S}^{N_t \times N_t}$ 。

通过将下降方向(4-47)与基于投影的后向线搜索相结合, 我们通过优化右酉矩阵来最大化平均互信息下界。

表 4.4 统计信道下右酉矩阵优化的算法流程

通过优化右酉矩阵最大化统计信道的平均互信息
<p>步骤1. 给定可行的起始点, 使其满足 $\mathbf{V}_P \in \mathbb{S}^{N_t \times N_t}$;</p> <p>步骤2. 通过式(4-47)计算下降方向 $\Delta \mathbf{V}$;</p> <p>如果下界方向的范数 $\ \Delta \mathbf{V}\ ^2 = \text{Tr}\{(\Delta \mathbf{V})^H \Delta \mathbf{V}\}$ 充分小, 算法停止; 否则转至步骤3;</p> <p>步骤3. 采用如下方法设定步长 γ:</p> <p>步骤3-a. 如果条件</p> $h(\mathbf{V}_P) - h(\pi(\mathbf{V}_P + 2\gamma\Delta \mathbf{V}_P)) \geq \gamma\ \Delta \mathbf{V}_P\ ^2$ <p>满足, 令 $\gamma := 2\gamma$, 重复步骤3-a;</p> <p>步骤3-b. 如果条件</p> $h(\mathbf{V}_P) - h(\pi(\mathbf{V}_P + \gamma\Delta \mathbf{V}_P)) < \frac{1}{2}\gamma\ \Delta \mathbf{V}_P\ ^2$ <p>满足, 令 $\gamma := \frac{1}{2}\gamma$, 重复步骤 3-b.</p> <p>步骤4. 令 $\mathbf{V}_P := \pi(\mathbf{V}_P + \gamma\Delta \mathbf{V}_P)$; 转至步骤 Step 2。</p>

4.4.3.3 两步方法优化平均互信息下界

将定理 4.1 的左酉矩阵设计与表 4.3 和表 4.4 的算法相结合, 我们就得到了完整的两步迭代算法来优化平均互信息下界。

虽然对比两步迭代算法理论上只能达到局部最优解, 但大量的仿真表明, 较之已有的算法, 两步迭代算法收敛快速, 受起始点的影响小, 能够在较低的复杂度开销下达到近似最优的解。下面我们通过仿真结果来验证这些结论。

4.5 仿真结果

本节通过一系列仿真说明所提方法的特性。通过若干例子阐述平均互信息与所推导出的上、下界的关系, 以及之间计算复杂度的比较。同时讨论算法的收敛性和所提算法的性能。仿真考虑两种信道模型, 分别为参数化的指数相关模型

$$[\Psi(\rho)]_{i,j} = \rho^{|i-j|}, \quad \rho \in [0, 1); \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

表 4.5 统计信道下两步迭代算法流程

通过两步算法最大化统计信道的平均互信息下界
步骤1. 初始化: 给定可行的起始点 $\lambda^{(0)}$, $\mathbf{V}_P^{(0)}$, 令 $n := 1$; 步骤2. 设定左酉矩阵: 令 \mathbf{U}_P 等于发射相关矩阵的特征向量矩阵 \mathbf{U}_t ; 步骤3. 更新功率分配向量: 通过算法4.3求解优化问题: $\lambda^{(n)} := \arg \max_{\substack{\mathbf{1}^T \lambda = N_t \\ \lambda \geq \mathbf{0}}} \mathcal{I}_L(\lambda, \mathbf{V}_P^{(n-1)}).$ 步骤4. 更新右酉矩阵: 通过算法 4.4求解优化问题: $\mathbf{V}_P^{(n)} := \arg \max_{\mathbf{V}_P \in \mathbb{S}^{N_t \times N_t}} \mathcal{I}_L(\lambda^{(n)}, \mathbf{V}_P).$ 步骤5. 迭代: 令 $n := n + 1$; 转至步骤3直到算法收敛; 步骤6. 输出: 设计的预编码表示为: $\mathbf{P}^* = \mathbf{U}_t \cdot \text{Diag}(\sqrt{\lambda^{(n)}}) \cdot (\mathbf{V}_P^{(n)})^H.$

其中

$$\Psi_t = \Psi(\rho_t); \quad \Psi_r = \Psi(\rho_r)$$

和多元收发天线模型^[88]。参数化的指数相关模型能够很好建模等间距线性天线阵列，多元收发模型基于信道的实际测量结果，在几种常见场景下与实际信道吻合很好。

4.5.1 平均互信息与所推导性能界的关系

我们首先说明式(4-15)给出的下界加上一个确定的常数后将能够非常精确的近似计算极其复杂的平均互信息。考虑平均互信息在信噪比趋于极限时的情况。当信噪比分别趋于 0 和 $+\infty$ 时, σ^2 分别趋于 $+\infty$ 和 0, 平均互信息的极限为

$$\lim_{\text{SNR} \rightarrow 0} \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}) = 0$$

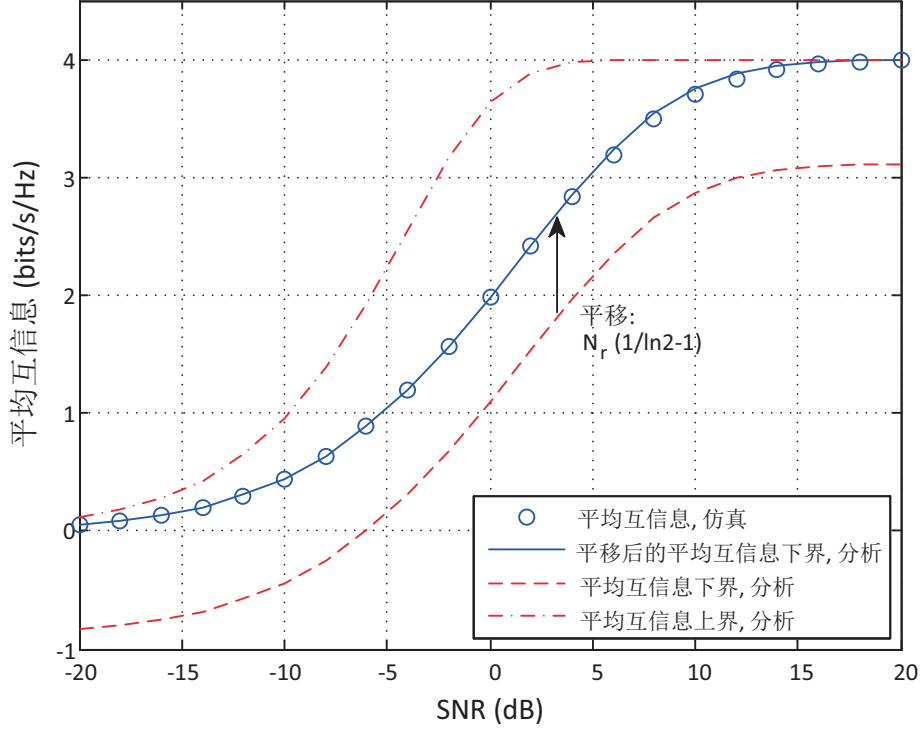


图 4.1 平均互信息与所推导性能界的关系。仿真条件： 2×2 指数相关MIMO信道，收发相关矩阵的生成系数为 $\rho_r = 0.8$ ， $\rho_t = 0.8$ ，QPSK调制。

$$\lim_{\text{SNR} \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \mathcal{I}(\mathbf{x}; \mathbf{y} | \mathbf{H}) = N_t \log M.$$

在此情况下，式 (4-15) 给出下界的极限也不难得到

$$\begin{aligned} \lim_{\text{SNR} \rightarrow 0} \mathcal{I}_L &= -N_r \left(\frac{1}{\ln(2)} - 1 \right) \\ \lim_{\text{SNR} \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_L &= N_t \log M - N_r \left(\frac{1}{\ln(2)} - 1 \right) \end{aligned}$$

比较平均互信息和下界在低信噪比和高信噪比的极限可知，它们之间存在一个常数 c 的差别

$$c = -N_r \left(\frac{1}{\ln(2)} - 1 \right).$$

虽然从优化的角度来看，在目标函数中加上这一常数并不会改变优化问题的解；但从数值近似的角度来看，推导出的下界函数加上一个常数非常好的逼近了难以计算的平均互信息。

图4.1给出的是平均互信息与所推导得到的性能界之间的关系。其仿真信道为 2×2 指数相关MIMO模型，收发相关矩阵的生成系数 $\rho_r = 0.8$ ， $\rho_t = 0.8$ ，采用QPSK调制。图4.1中标注仿真的点是由Monte Carlo方法通过随机生成大量随机矩阵 \mathbf{H}_w 和 \mathbf{n} ，并计算平均互信息得到，具体做法详见第 4.5.2节；图中标注分析

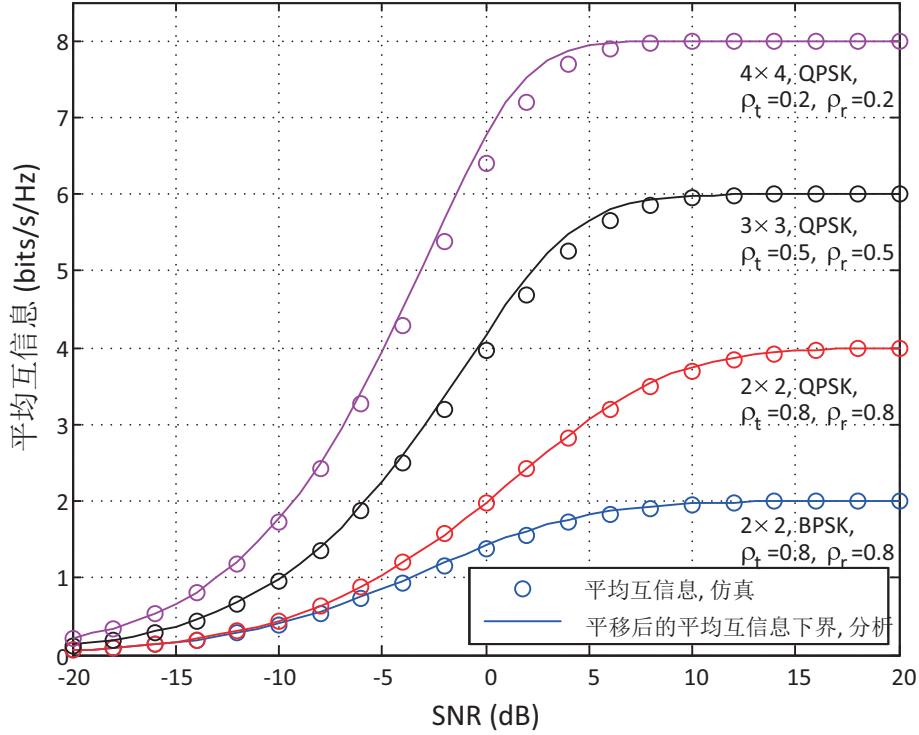


图 4.2 平移后的下界近似平均互信息。仿真针对不同数目的收发天线，不同的调制方式，不同的天线相关参数。

的线分别表示推导得到的上界，下界，以及下界加上确定常数

$$N_r \left(\frac{1}{\ln(2)} - 1 \right).$$

我们发现，经常数平移后分析得到的下界在低信噪比和高信噪比处与仿真得到的平均互信息完全一致，在其他信噪比处，二者非常接近。

图 4.2 进一步给出不同收发天线数，不同调制方式，不同信道相关参数下，经平移后的下界与仿真得到的平均互信息的关系。根据这些结果可以看出，平移后的下界在不同条件下都能够非常好的近似平均互信息。值得注意的是，二者的计算代价是截然不同的。这一点我们通过对计算复杂度的比较来说明。

4.5.2 计算复杂度的比较

平均互信息的计算包含多重积分且没有闭合表达式。已有的方法都是通过 Monte Carlo 等生成大量仿真数据的方式来进行估计，参见式 (4-3) 和式 (4-4)。受限于这些方法的特点，当仿真数据不够时，无法准确估计平均互信息。当然，随着仿真数据的增加，估计的精度可以进一步提高。但精度提高的同时也导致计算开销的急剧增加。为了公平的评估这种基于仿真估计方法的计算代价，我们将仿真数据量取为不能显著提升估计精度时的量。我们构造三个序列：仿真数据量

表 4.6 平均互信息 \mathcal{I}_A 与下界 \mathcal{I}_L 的计算时间（秒）比较。符号 \times 表明相应情况的计算时间超过一小时。

情况	BPSK		QPSK	
	计算 \mathcal{I}_L	计算 \mathcal{I}_A	计算 \mathcal{I}_L	计算 \mathcal{I}_A
2×2 MIMO 信道	0.000030	9.369150	0.000049	678.844615
4×4 MIMO 信道	0.000041	406.015399	0.004163	\times
6×6 MIMO 信道	0.000365	\times	1.705958	\times
8×8 MIMO 信道	0.006716	\times	450.630528	\times
10×10 MIMO 信道	0.155704	\times	\times	\times
12×12 MIMO 信道	3.646632	\times	\times	\times
14×14 MIMO 信道	77.444873	\times	\times	\times
16×16 MIMO 信道	1607.453623	\times	\times	\times

序列

$$N = [0, k, 2k, \dots]$$

平均互信息序列

$$A = [A_0, A_1, A_2, \dots], \quad A_0 = 0$$

及计算时间序列

$$T = [T_0, T_1, T_2, \dots], \quad T_0 = 0$$

我们用 A_i 表示采用 $k \cdot i$ 个仿真数量的噪声和信道得到的平均互信息的估计值，同时在此情况下完成计算需要 T_i 秒。将满足精度改进 $|A_i - A_{i-1}|$ 小于预设门限 α 的最小序号 i 记为 i^* ，即

$$i^* = \arg \min_i \{ |A_i - A_{i-1}| < \alpha \}.$$

这样，我们将 T_{i^*} 记为估计平均互信息所需的时间。

在仿真中，令 $k = 1,000$ ， $\alpha = 0.01$ 。计算下界和估计平均互信息的代码通过C++实现，同时仿真时间是在Intel Core i7-2600 3.40 GHz处理器上运行得到的统计结果。表4.6给出了采用不同天线，BPSK和QPSK调制时估计平均互信息及计算下界的CPU时间。可以看出，计算下界的代价远远小于计算平均互信息的代价，通常计算前者的时间开销比计算后者要少几个数量级。例如，对于 2×2 信道来说，采用BPSK和QPSK调制，计算下界 \mathcal{I}_L 的时间分别是计算 \mathcal{I}_A 的 3.2×10^{-6} 和 7.2×10^{-8} 。

考虑到采用下界作为目标函数的诸多优点：计算复杂度低，能够近似平均互信息，渐近最优性等，我们可以预期采用这一准则将能够以低的计算代价得到非常好的预编码结果。

4.5.3 两步算法的收敛性

验证求解非凹问题的算法是否收敛，最好办法就是观察不同起始点对它的影响。假设算法A和算法B都能够求解一个非凹问题。如果算法A受起始点的影响大，只能以较小的概率达到某一性能；同时算法B受起始点的影响小，能以更大的概率到达同样的性能。我们就可以称算法B在性能上优于算法A。

以 2×2 指数相关MIMO信道为例进行说明，其中相关系数 $\rho_t = 0.95$ ， $\rho_r = 0.5$ 。可行的功率分配向量 $\lambda^{(0)}$ 应非负且满足和功率约束，同时可行的右酉矩阵 $\mathbf{V}_p^{(0)}$ 应满足酉矩阵约束。任意 2×2 的酉矩阵可以表示为^[127]

$$\mathbf{V} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{j\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{j\alpha_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \psi & e^{-j\phi} \sin \psi \\ -e^{j\phi} \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_2} \quad (4-50)$$

其中 \mathbf{V}_1 是对角酉矩阵， \mathbf{V}_2 是酉矩阵，其参数满足

$$-\pi < \psi \leq \pi, \quad -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2.$$

因为简化系统模型(4-14)的平均互信息不随对角酉矩阵 \mathbf{V}_1 的变化而改变，所以用 \mathbf{V}_2 的结构生成可行的右酉矩阵 $\mathbf{V}_p^{(0)}$ 即可。

与上一章的思路一致，我们先考虑两组不同的起始点，情况A：

$$\lambda = [1; 1], \quad \psi = \pi/10, \quad \phi = \pi/10.$$

情况B：

$$\lambda = [1.6; 0.4], \quad \psi = \pi/6, \quad \phi = \pi/4.$$

随着算法4.5对下界的不断迭代优化，平均互信息会一步步提升。图 4.3 给出的是当调制信号为QPSK，SNR为-2.5 dB时，从两个不同的起始点出发平均互信息的迭代变化。为便于说明，该图同时给出了未采用预编码，基于高斯信号的最大化统计信道的容量^[106,141]及直接采用梯度上升法优化平均互信息下界所能得到的平均互信息。可以看出，从不同的起始点出发，两步迭代算法几乎收敛到相同的目标值，这一结果相对于不采用预编码有38.7% 的性能提升；同时它将采用QPSK调制的MIMO系统的性能提升到了接近基于高斯信号假设的容量限。与此同时，直

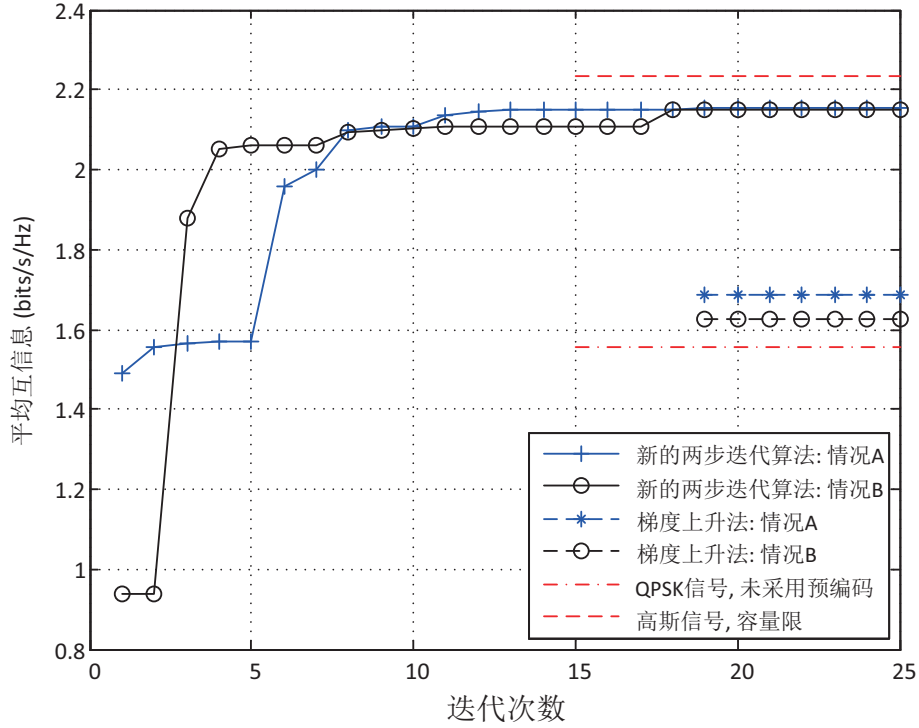


图 4.3 迭代优化统计信道平均互信息的收敛曲线；输入信号采用 QPSK 调制， 2×2 MIMO 信道的指数相关参数 $\rho_t = 0.95$ ， $\rho_r = 0.5$ ，SNR 为 -2.5 dB

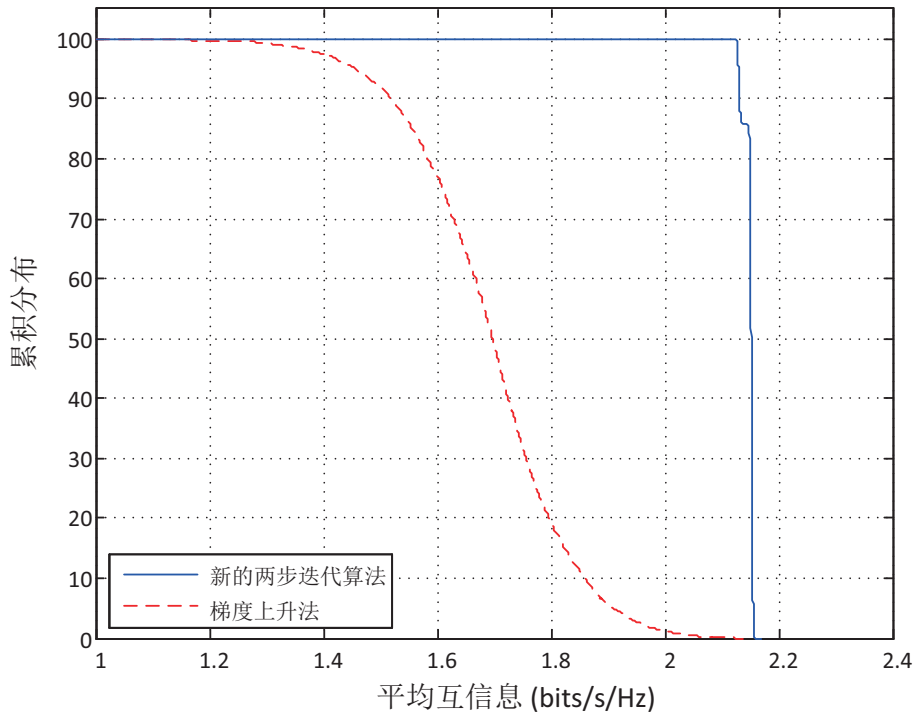


图 4.4 采用两步算法和梯度上升法，由不同起始点出发，针对统计信道优化平均互信息的累积分布曲线；输入信号采用 QPSK 调制，SNR 为 -2.5 dB， 2×2 MIMO 信道的指数相关参数 $\rho_t = 0.95$ ， $\rho_r = 0.5$

接采用梯度上升法则会严重的依赖于所选用的起始点，不同的起始点优化得到不同的结果。

上面两组起始点的例子有利于理解收敛过程，观察更多的起始点得到的统计规律则更能说明所提算法的优点。图4.4给出的是从多达10,000组随机起始点出发进行优化得到平均互信息的累积分布。这一结果有效的说明了所提算法的收敛性。虽然我们求解的是一个数学上很复杂的非凹优化问题，但提出的算法能够保证从任意的起始点出发得到近似最优解。与此相反，梯度法非常依赖起始点，不加认真的选择可能导致经优化算法得到结果甚至比什么都不做还要差。虽然起始点的选择对梯度法非常重要，但针对具体问题如何理性的为梯度法选择起始点到今天也没用公认有效的方法。

4.5.4 统计信道平均互信息性能评估

这一节我们对所提方法及文献中的基于统计CSI设计的预编码方法进行比较。比较对象包括波束成型^[141]，最大化容量^[106,141]，最大化分集增益^[107,108]等方法。这里的信道相关信道参数与上一节相同，调制方式采用QPSK。为便于比较，我们同时还考虑未经预编码的MIMO性能。

图4.5给出的是不同方法随着SNR变化所对应平均互信息的变化情况，由此可以看出所提方法所提供的巨大增益。例如，当信道编码的码率为1/2时，所提方法较之最大化分集，未采用预编码，最大化容量方法分别有2.6 dB，2.9 dB，11.3 dB的增益。与此同时，当SNR小于-2.5 dB，所提方法能够将QPSK调制信号的传输性能提升至高斯信号假设下的容量限。

关于高斯信号假设下基于统计CSI的最大化容量方法^[106,141]，我们有两点需要特别说明。首先，虽然这种方法在高斯信号假设下与未采用预编码相比能够获得性能增益，如果将这样的方法应用到实际调制信号则将导致极大的性能损失。不仅如此，因为实际调制信号与最大化容量方法所做的高斯假设的不匹配，导致将最大化容量方法应用于实际调制信号后，性能会出现拐点，参见图4.5和图4.8。

当系统的SNR小于某一门限时（在图4.5中为7.5 dB），最大化容量的方法会将所有的功率都分给信道质量最强的子信道，同时放弃使用其他信道质量相对差的子信道。这就是有名的波束成型方法。因为只用一个子信道，配合QPSK调制方式，它会导致平均互信息小于2 bps/Hz。当SNR大于7.5 dB，最大化容量的方法开始考虑使用其他子信道，并采用推广到统计CSI的注水定理^[49]给信道质量相对差的子信道分配功率。因为使用了多个子信道，平均互信息将会超过2 bps/Hz。注水方法的特点是分配更多的功率给信道质量更强的子信道，分配更少的功率给信道质量更弱的子信道。

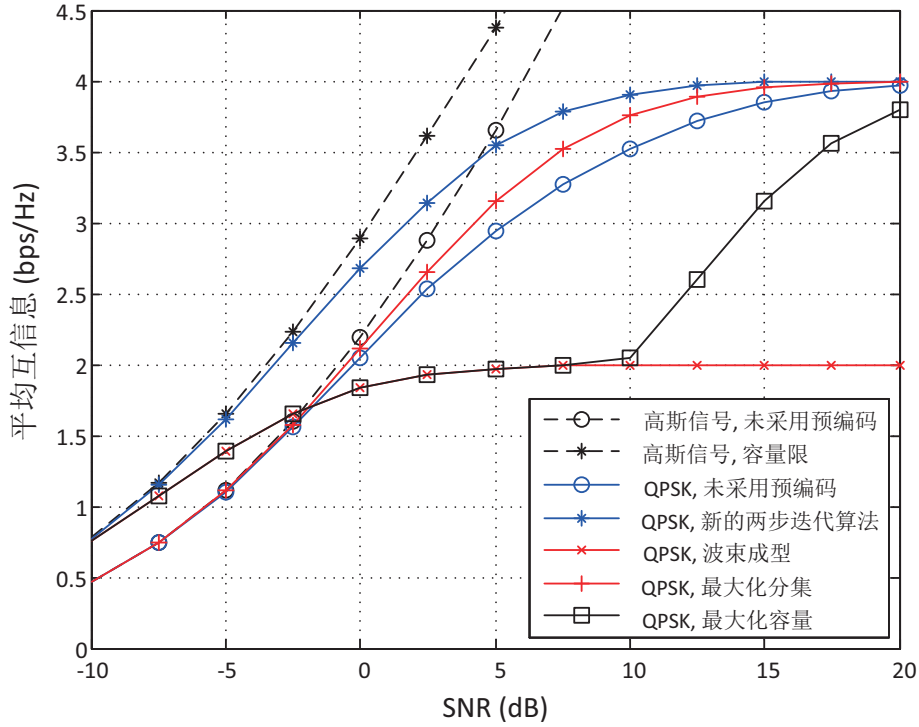


图 4.5 统计信道下平均互信息随信噪比变化曲线；采用QPSK调制， 2×2 MIMO信道的指数相关参数 $\rho_t = 0.95$ ， $\rho_r = 0.5$

基于高斯信号假设的方法与实际调制信号严重不匹配。原因在于高斯信号假设的平均互信息是随着信噪比的提高而无限提高的。与此相反，采用实际调制信号的每一个子信道的平均互信息是受限的。例如，采用BPSK时受限于1 bps/Hz，采用QPSK时受限于2 bps/Hz。由于每一个子信道的传输能力受限，信道质量好的子信道相对于质量差的子信道更接近饱和，因此分更多的功率给信道质量本已较好的子信道是得不偿失的。在这种情况下，将有限的功率分给信道质量较差的子信道才能使总收益更大。最大化容量的方法除了功率分配存在问题外，右酉矩阵的设计也同样存在问题。基于高斯假设的信号是不需要右酉矩阵的，因为高斯信号经过酉矩阵的旋转后其统计特性不变，无法改变平均互信息。相反，实际调制信号的平均互信息却会因右酉矩阵而改变，参见式 (4-6)。

下面我们来比较所提算法和已有算法的BER性能。我们采用图4.6所示的收发机结构^[132]来说明不同的预编码方法对性能的影响。发射机的信号序列通过LDPC编码和调制后，经预编码 \mathbf{P} 的变换后由 N_t 个天线发射。接收机通过MAP检测器来根据接收信号 \mathbf{y} 和译码器传来的先验信息估计每一个比特。通过这样的方法，MAP检测器与译码器相互交换软信息，直到收敛。值得注意的是，文献^[132]原本存在的交织器因为采用了LDPC编码技术而不再需要了^[134]。

实验中的 LDPC编译码器取自文献[135]提供的库函数。信道编码的码率设

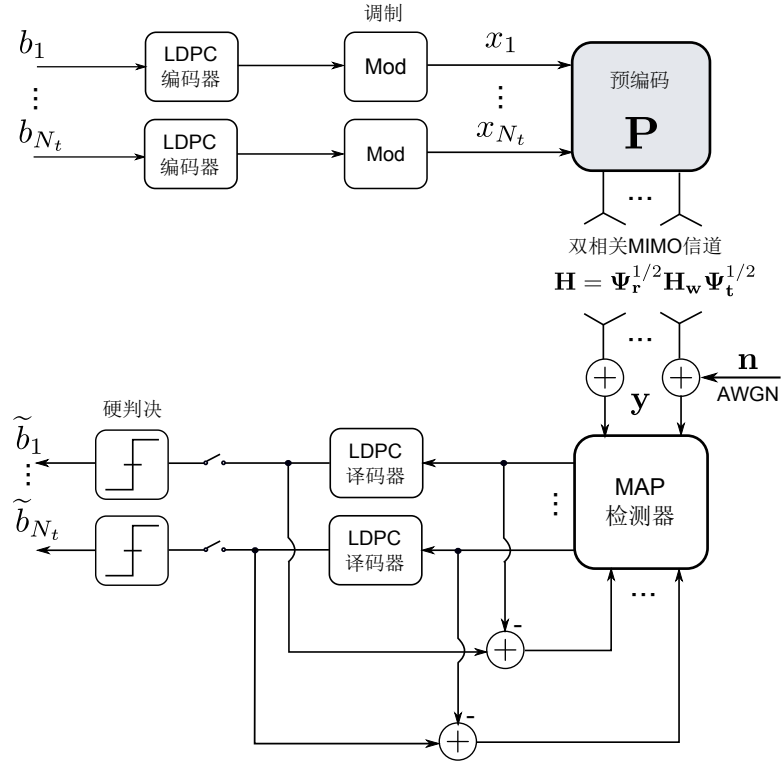
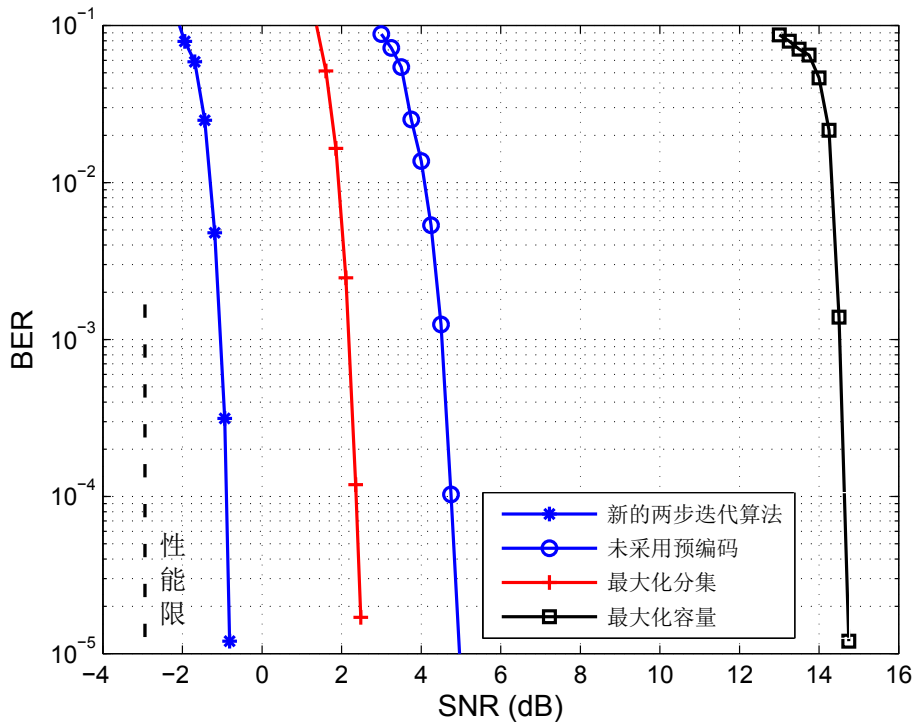


图 4.6 统计信道不同预编码方法BER性能评估框图


 图 4.7 统计信道不同预编码方法BER性能比较；QPSK调制，信道编码码率1/2，码长9,600，包含600次信道实现； 2×2 MIMO信道的指数相关参数 $\rho_t = 0.95$ ， $\rho_r = 0.5$

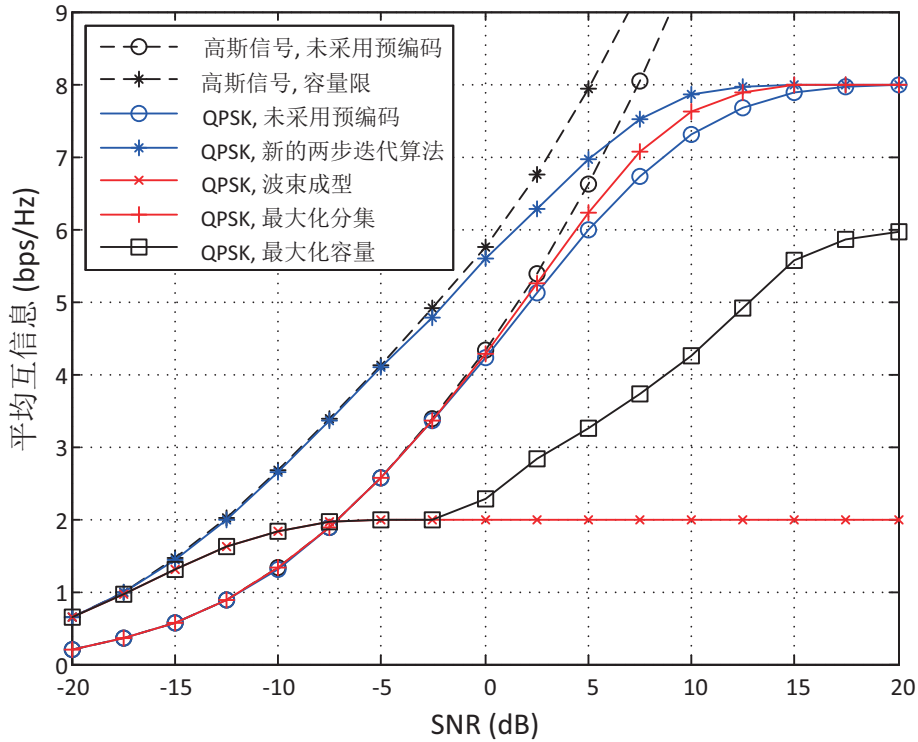


图 4.8 统计信道下平均互信息随信噪比变化曲线；采用QPSK调制， 4×4 MIMO信道的相关参数采用METRA微蜂窝模型

定为 $1/2$ ；MAP检测器与LDPC译码器之间的迭代为5；编码后的码长为9,600，包含600次信道变化。通过仿真大量的传输数据我们获得不同预编码方法的BER性能，如图4.7所示。很明显，所提算法超越文献中已有的方法；同时，不同方法之间的BER性能差异基本与图4.5的平均互信息的性能差异相吻合。这一结果说明了采用平均互信息作为目标函数的合理性。最大化平均互信息的预编码方法不仅能够在给定信噪比下提升传输的速率，还能在给定传输速率下降低系统的误码率。

接下来考虑 4×4 的MIMO系统。图4.8和4.9分别针对METRA统计相关模型^[88]中的微蜂窝（microcell）和微微蜂窝（picocell）得到的仿真结果。其中，微蜂窝模型是针对强相关性传输场景的信道模型，而微微蜂窝是针对弱相关性传输场景的信道模型。

图4.8给出的是微蜂窝情况下的性能比较。从中可以看出，只要信噪比大于-17.5 dB，基于高斯信号的最大化容量方法就会导致极大的性能损失。其中的原因请参见图4.5的分析，这里不再赘述。所提方法在很宽的信噪比范围都将得到极大的增益。例如，当信道编码码率为 $1/2$ 时，它较之最大化分集，未采用预编码，最大化容量方法分别优于4.3 dB，4.5 dB，14 dB。与此同时，当信噪比小于-5 dB时，它使得采用QPSK调制的传输速率接近了采用高斯假设的结果。

图4.9给出的是微微蜂窝情况下的性能比较。可以看出，虽然当SNR小于-5

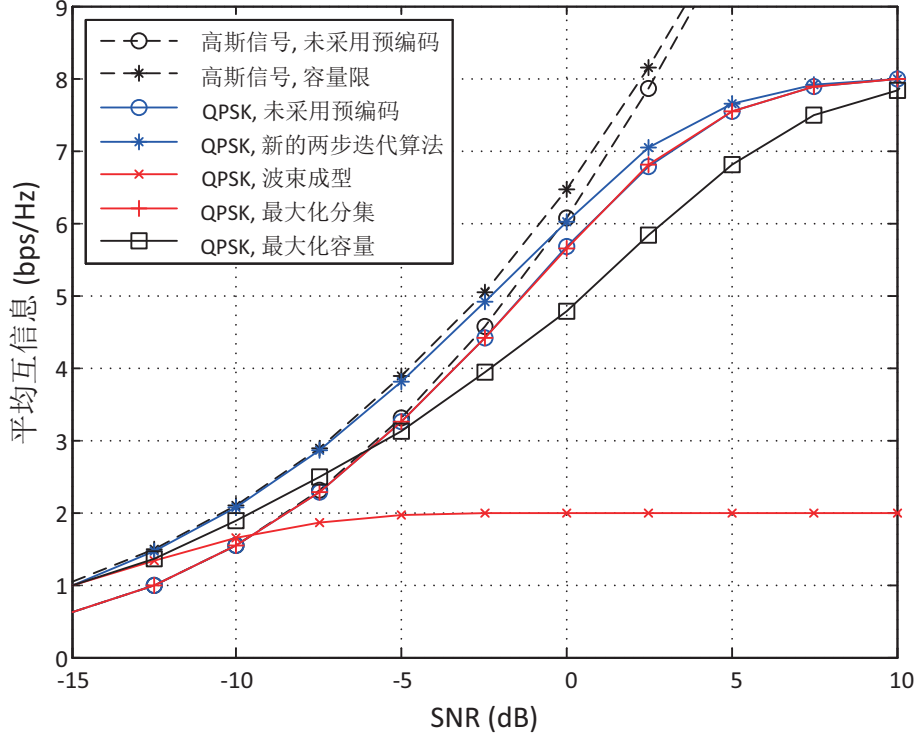


图 4.9 统计信道下平均互信息随信噪比变化曲线；采用QPSK调制， 4×4 MIMO信道的相关参数采用METRA微微蜂窝模型

dB时所提方法仍然能够接近采用高斯假设的传输上界，但此时与未采用预编码相比的性能增益明显小于图4.8所示的微蜂窝情况。可见，预编码提供的性能增益是取决于信道环境的。这一点是符合直观的。预编码作为一种信道自适应的方法，它能够补偿信道对发射信号带来的影响。如果当信道对发射信号影响本来就比较小时（如微微蜂窝场景），什么都不需要做就已经快要接近传输性能极限。此时，即便是最优的预编码方法也不能额外提供更多的好处。试想一个完全统计独立的信道传播环境，即发射相关和接收相关皆为单位矩阵，此时单位矩阵的预编码就是最大化互信息的方法。

4.6 附录A：定理 4.1的证明

证明 引理3.1表明互信息 $\mathcal{I}(\mathbf{x}; \tilde{\mathbf{y}}|\tilde{\mathbf{H}})$ 完全由矩阵 $\mathbf{M} = \mathbf{P}^H \tilde{\mathbf{H}}^H \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{P}$ 确定。对于统计信道来说， $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}$ 的随机性导致矩阵 \mathbf{M} 也是随机矩阵。同时，平均互信息相对于 $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}$ 的期望等价于相对于 \mathbf{M} 的期望，也就是说，

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}} \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{M}) = \mathbb{E}_{\mathbf{M}} \hat{\mathcal{I}}(\mathbf{M}) \quad (4-51)$$

其中符号 $\hat{\mathcal{I}}(\mathbf{M})$ 用来说明平均互信息 $\mathcal{I}(\mathbf{x}; \tilde{\mathbf{y}}|\tilde{\mathbf{H}})$ 是复随机矩阵 \mathbf{M} 的函数；也就是

说， $\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{M})$ 的变化依赖于 \mathbf{M} 的概率密度函数。其中矩阵 \mathbf{M} 表示为

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^H \mathbf{U}_t \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_w^H \Sigma_r \tilde{\mathbf{H}}_w \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}_t^H \mathbf{P}.$$

对于二次形式的矩阵 \mathbf{M} ，其概率密度函数为^[142]

$$p(\mathbf{M}) = \frac{1}{\tilde{\Gamma}_{N_r}(N_t)} \det(\mathbf{W})^{-N_t} \det(\Sigma_r)^{-N_r} \det(\mathbf{M})^{N_t-N_r} \times {}_0\tilde{F}_0^{(N_t)}(-\mathbf{W}^{-1}\mathbf{M}, \Sigma_r^{-1}), \quad \mathbf{M} > 0 \quad (4-52)$$

参数 \mathbf{W} 和 $\tilde{\Gamma}_{N_r}(\alpha)$ 分别定义为

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}^H \mathbf{U}_t \Sigma_t \mathbf{U}_t^H \mathbf{P} \\ \tilde{\Gamma}_{N_r}(\alpha) = \pi^{N_r(N_r-1)/2} \prod_{i=1}^{N_r} \Gamma(\alpha - i + 1), \quad \alpha > N_r - 1 \quad (4-53)$$

其中 $\tilde{\Gamma}_{N_r}(\cdot)$ 是复多变量gamma函数， $\Gamma(\cdot)$ 是Euler's gamma函数， ${}_0\tilde{F}_0^{(N_t)}(\cdot)$ 是两个Hermitian矩阵的超几何函数。

由式(4-52)可知， \mathbf{M} 的分布是由参数 Σ_r 和 \mathbf{W} 确定的。对于任意给定的矩阵

$$\mathbf{W} = \mathbf{P}^H \mathbf{U}_t \Sigma_t \mathbf{U}_t^H \mathbf{P}$$

预编码的结构为^[69]

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_t \Sigma_P \mathbf{V}_P^H$$

能够最小化发射功率 $\text{Tr}(\mathbf{P}\mathbf{P}^H)$ 。至此，证明完成。 \square

4.7 附录B：定理 4.2的证明

首先证明式(4-15)是平均互信息的下界。

证明 $\log(x)$ 在 $x > 0$ 时是凹函数。利用Jensen不等式^[103]，平均互信息对 $\tilde{\mathbf{H}}_w$ 的期望存在下界

$$\mathcal{I}_A(\tilde{\mathbf{P}}) \geq N_t \log M - \frac{N_r}{\ln 2} - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{H}}_w} \mathbb{E}_{\mathbf{n}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{c}_{mk} + \mathbf{n}\|^2}{\sigma^2}\right) \quad (4-54)$$

其中 $\mathbf{c}_{mk} = \Sigma_r^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_w \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk}$ 。

因为 \mathbf{n} 是独立同分布的高斯噪声向量，式(4-54)中对 \mathbf{n} 的期望可以写为

$$\mathbb{E}_{\mathbf{n}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{c}_{mk} + \mathbf{n}\|^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{N_r}} \int_{\mathbf{n}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{c}_{mk} + \mathbf{n}\|^2 + \|\mathbf{n}\|^2}{\sigma^2}\right) d\mathbf{n} \\
 &= \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{N_r}} \int_{\mathbf{n}} \prod_{i=1}^{N_r} \exp\left(-\frac{\|c_{mk,i} + n_i\|^2 + \|n_i\|^2}{\sigma^2}\right) d\mathbf{n} \\
 &= \prod_{i=1}^{N_r} \frac{1}{\pi\sigma^2} \int_{n_i} \exp\left(-\frac{\|c_{mk,i} + n_i\|^2 + \|n_i\|^2}{\sigma^2}\right) dn_i
 \end{aligned} \tag{4-55}$$

其中 $c_{mk,i}$ 和 n_i 分别是 \mathbf{c}_{mk} 和 \mathbf{n} 的第 i 个元素。利用指数函数的积分定理^[143], 式(4-55) 可以写为

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbf{n}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{c}_{mk} + \mathbf{n}\|^2}{\sigma^2}\right) &= \prod_{i=1}^{N_r} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\|c_{mk,i}\|^2}{2\sigma^2}\right) \\
 &= \frac{1}{2^{N_r}} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}_{mk}^H \mathbf{c}_{mk}}{2\sigma^2}\right).
 \end{aligned} \tag{4-56}$$

根据定义 $\mathbf{c}_{mk} = \Sigma_{\mathbf{r}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \Sigma_{\mathbf{t}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk}$, 并利用矩阵运算的性质

$$\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$$

可以得到如下结果

$$\exp\left(-\frac{\mathbf{c}_{mk}^H \mathbf{c}_{mk}}{2\sigma^2}\right) = \exp\left(-\frac{\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \mathbf{Q}_{mk} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}^H)}{2\sigma^2}\right) \tag{4-57}$$

其中 $\mathbf{Q}_{mk} = \Sigma_{\mathbf{t}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}}^{\frac{1}{2}}$ 。

将 $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}$ 的概率分布记为 $p(\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}})$, 则式 (4-54) 要求计算

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}} \exp\left(-\frac{\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \mathbf{Q}_{mk} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}^H)}{2\sigma^2}\right) \\
 &= \int_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}} \exp\left(-\frac{\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \mathbf{Q}_{mk} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}^H)}{2\sigma^2}\right) p(\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}) d\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}.
 \end{aligned} \tag{4-58}$$

为了便于计算积分, 我们将 $\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \mathbf{Q}_{mk} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}^H)$ 写为 $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}$ 的二次形式

$$\begin{aligned}
 &\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \mathbf{Q}_{mk} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}^H) \\
 &= \sum_q \sum_i \sum_j r_q \cdot [\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}]_{q,i} \cdot [\mathbf{Q}_{mk}]_{i,j} \cdot [\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}]_{q,j}^H \\
 &= \sum_q [\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}]_{q,:} \cdot (r_q \mathbf{Q}_{mk}) \cdot [\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}]_{q,:}^H
 \end{aligned} \tag{4-59}$$

其中 r_q 表示 $\Sigma_{\mathbf{r}}$ 的第 q 个对角元素。令 $\mathbf{h}_q = [\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}]_{q,:}^H$, 式(4-58)中对 $\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}$ 的积分可以写

为多个简单积分的乘积

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}} \exp\left(-\frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \mathbf{Q}_{mk} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}^H)}{2\sigma^2}\right) p(\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}) d\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \\
 &= \int_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}} \prod_q \frac{1}{\pi^{N_r}} \exp\left(-\mathbf{h}_q^H \left(\mathbf{I} + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{Q}_{mk}\right) \mathbf{h}_q\right) d\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \\
 &= \prod_q \left[\frac{1}{\pi^{N_r}} \int_{\mathbf{h}_q} \exp\left(-\mathbf{h}_q^H \left(\mathbf{I} + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{Q}_{mk}\right) \mathbf{h}_q\right) d\mathbf{h}_q \right] \quad (4-60)
 \end{aligned}$$

令 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为 Hermitian 矩阵, 指数二次积分公式表明^[144]

$$\int_{\mathbf{h}_q} e^{-\mathbf{h}_q^H (\mathbf{A} + j\mathbf{B}) \mathbf{h}_q} d\mathbf{h}_q = \frac{\pi^{N_r}}{\det(\mathbf{A} + j\mathbf{B})} \quad (4-61)$$

由此, 式 (4-60) 可以进一步化简为

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}} \exp\left(-\frac{\text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \mathbf{Q}_{mk} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}^H)}{2\sigma^2}\right) p(\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}) d\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \\
 &= \prod_q \left[\det\left(\mathbf{I} + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{Q}_{mk}\right) \right]^{-1}. \quad (4-62)
 \end{aligned}$$

根据 \mathbf{Q}_{mk} 的定义, 式 (4-62) 中的行列式可以写为

$$\det\left(\mathbf{I} + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{Q}_{mk}\right) = 1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk}. \quad (4-63)$$

结合式 (4-58), 式 (4-62) 和式 (4-63) 即可得到下界。□

下面我们来证明式 (4-16) 中的上界。

证明 因为 $\log \sum_k \exp(x_k)$ 是凸函数, 对平均互信息表达式应用 Jensen 不等式可以得到上界

$$\mathcal{I}_A(\tilde{\mathbf{P}}) \leq N_t \log M - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp\left(-\mathbf{E}_{\tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}} \mathbf{E}_{\mathbf{n}} \frac{\|\mathbf{c}_{mk} + \mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2}{\sigma^2}\right). \quad (4-64)$$

首先我们考虑对 \mathbf{n} 的期望:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{E}_{\mathbf{n}} \frac{\|\mathbf{c}_{mk} + \mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2}{\sigma^2} \\
 &= \frac{\mathbf{c}_{mk}^H \mathbf{c}_{mk}}{\sigma^2} \\
 &= \frac{\mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{t}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{H}}_{\mathbf{w}} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{t}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk}}{\sigma^2}. \quad (4-65)
 \end{aligned}$$

然后，对 $\tilde{\mathbf{H}}_w$ 的期望可以写为

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{H}}_w} \mathbb{E}_{\mathbf{n}} \frac{\|\mathbf{c}_{mk} + \mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2}{\sigma^2} \\
 &= \frac{\mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}}^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}_{\tilde{\mathbf{H}}_w} \tilde{\mathbf{H}}_w^H \Sigma_{\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{H}}_w \right) \Sigma_{\mathbf{t}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk}}{\sigma^2} \\
 &= \frac{\mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}}^{\frac{1}{2}} \text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}}) \Sigma_{\mathbf{t}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk}}{\sigma^2} \\
 &= \frac{\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{r}})}{\sigma^2} \mathbf{e}_{mk}^H \tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk}
 \end{aligned} \tag{4-66}$$

由此，上界的证明完成。 \square

4.8 附录C：函数凹性的证明

证明 为了证明下界的凹性，我们将式(4-15) 改写为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_L(\tilde{\mathbf{P}}) &= N_t \log M - N_r \left(\frac{1}{\ln 2} - 1 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left[- \sum_q \ln \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \text{Tr}(\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4-67}$$

当 g_i 为凹函数时， $-\log \sum_i \exp(-g_i)$ 是凹函数^[103]。因此，式 (4-67) 的凹性依赖于 $\ln \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \text{Tr}(\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H) \right)$ 的凹性。其中，后者容易证明，因为 $\text{Tr}(\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H)$ 是 $\tilde{\mathbf{P}}^H \Sigma_{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{P}}$ 的凹函数。同理可证，上界(4-16)亦为凹函数。 \square

接下来，我们证明定理4.6:

证明 与定理 4.5的证明过程类似，这里需要先将平均互信息的下界重新写为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_L(\tilde{\mathbf{P}}) &= N_t \log M - N_r \left(\frac{1}{\ln 2} - 1 \right) \\
 &\quad - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left[- \sum_q \ln \left(1 + \frac{r_q}{2\sigma^2} \text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{P}}^H \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{V}_{\mathbf{P}} \Sigma_{\mathbf{P}}^2) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4-68}$$

可以看出 $\text{Tr}(\Sigma_{\mathbf{t}} \mathbf{V}_{\mathbf{P}}^H \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{V}_{\mathbf{P}} \Sigma_{\mathbf{P}}^2)$ 是正的，而且关于 $\Sigma_{\mathbf{P}}^2$ 是凹函数。

因为功率分配向量 λ 可以写为

$$\lambda = \text{diag}(\Sigma_{\mathbf{P}}^2) \tag{4-69}$$

其相对于 λ 的梯度可以写为

$$\nabla_{\lambda} \mathcal{I}_L = \text{diag} \left(\frac{\partial \mathcal{I}_L}{\partial \Sigma_{\mathbf{P}}^2} \right). \tag{4-70}$$

应用矩阵微分技术^[138]，式(4-68)相对于 λ 的梯度由式(4-29)给出。用同样的方法，式(4-16)的梯度容易推倒得到，由式(4-32)给出。□

4.9 本章小结

本章讨论发端根据信道的统计相关参数设计最大化平均互信息的预编码调制方法。平均互信息本身难以计算，使得以此为目标的优化问题难以求解。本章提出了平均互信息的下界和上界，发现推导出的下界加上一个确定常数后能够非常好的近似平均互信息。与此同时，下界的计算复杂度比直接计算平均互信息少6个数量级以上。为了有效优化下界，通过分析最优预编码结构，提出优化功率分配和信号设计的两步迭代算法，对问题进行高效求解。数值仿真验证了所提算法的收敛性。与已有预编码方法相比，所提方法在平均互信息指标和编码后的BER指标上性能增益突出。同时发现预编码能够获得的性能增益与信道相关性有关，相关性越强所能获得的增益越大。例如，在采用QPSK的 4×4 实测微蜂窝信道下，与传统方法相比，最大增益超过4 dB。

第5章 干扰可控的预编码调制优化设计

控制网络干扰、共用频率资源 (spectrum sharing) 是近年来的研究热点。通过允许收发机占用已有系统 (例如: 数字电视广播) 的频谱资源, 可以显著提升频谱资源的利用率^[42,145-148]。已有系统的用户具有更高的优先级, 它们的服务质量应优先得到保障。在保障其服务质量的情况下, 可以通过设计预编码提升收发机的传输速率^[149-153]。

频谱共享方案实施的前提是能够保证系统中的已有用户不受干扰, 传输性能不会恶化。考虑图5.1所示的传输场景, 包括发射机 (Tx)、接收机 (Rx) 和已有系统的 n 个用户。收发机(Tx-Rx)与这些用户同时同频共用频率资源。如果将用户 i 可以接受的最大干扰功率记为 γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 在保证干扰功率满足约束的条件下, 探索收发机间的理论传输极限是无线通信中非常重要的问题。在高斯输入信号的假设下, 带有发射功率和干扰功率约束的信道容量求解是凸优化问题。因此, 容量的计算及达到容量的预编码算法相对容易得到^[150,151,154]。

虽然理论上说高斯信号具有容量可达的特点, 但在实际系统中高斯信号从来没有实现过。基于高斯信号设计的预编码方法应用于实际系统不但无法改善系统性能, 反而还会导致性能更加恶化。因此, 考虑实际调制信号, 以最大化调制约束的互信息^[113]为准则的预编码设计方法是今年来的研究热点^[115,121,155-157]。

互信息函数本身是具有多个局部极值点的非凹函数, 因此最大化互信息的预

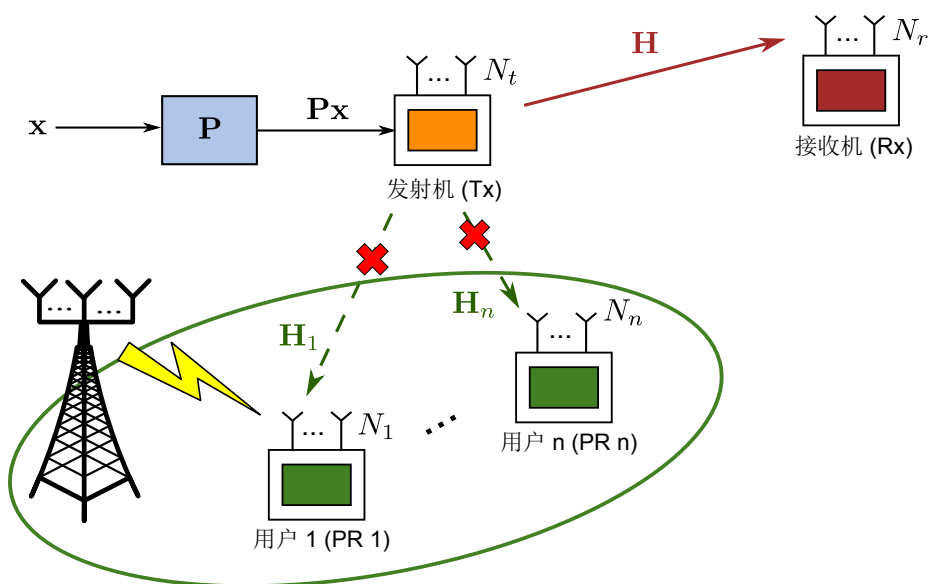


图 5.1 干扰可控传输的系统模型; 发射机 (Tx) 和接收机 (Rx) 的通信占用已有的频谱资源, 通过预编码的设计控制对网络中已有多个用户产生的干扰

编码设计并不是一件容易的事情^[121]。到目前为止，已有工作大多讨论的是在点对点MIMO环境下最大化互信息的方法，还从未考虑过存在干扰约束的频谱共享条件下的设计。从数学的角度看，前者是后者在干扰约束不起作用时的特例^①。

已有最大化互信息的预编码算法大多将待设计的预编码分解为三个部分：左酉矩阵、功率分配矩阵和右酉矩阵。利用点对点MIMO信道下最大化互信息的性质，可以得到闭合表达式的左酉矩阵。然后，不同的算法利用不同的迭代方法求解其余的两个部分。遗憾的是，这种分解方法难以推广到存在干扰约束的频谱共享情况，因为原先得到的闭式左酉矩阵的结论此时不再成立。当然，将已有算法进行适当推广，我们很容易通过以下步骤得到干扰约束下预编码问题的一个可行解：

- 1) 利用已有的点对点MIMO信道下的预编码算法设计出忽略干扰约束情况下的最优（或近似最优）预编码；
- 2) 将得到的预编码矩阵进行归一化，使其满足所有干扰约束。

我们称这一方法为启发式算法。随后我们将说明，与本章所提的全局最优算法得到的解相比，该启发式算法会导致极大的性能损失。

本工作与已有文献方法的不同之处体现在两个方面。第一，将最大化互信息的预编码方法从点对点MIMO信道推广到了带有干扰约束的频谱共享情况；第二，对最大化互信息问题提出了全新的优化求解框架。我们首先将预编码问题重新表述为在多个相交的椭圆集合上最大化由若干双线性函数组合成的非凸优化的问题。采用凸凹包络法得到了这一问题的松弛问题。通过在不断缩小的求解空间上对松弛问题求解，我们提出了最大化互信息的BAMIO方法（Branch-and-bound Aided Mutual Information Optimization, BAMIO）。算法采用分支定界的思路，能够从任意起始点出发得到问题的全局最优解。同时讨论了两种加速收敛的方法，并比较了几种可能的松弛方法对算法的影响。

数值仿真验证了所提方法得到的性能与复杂度的折衷关系。只需极低的计算代价，所提BAMIO算法就可以得到精度非常高的解。同时发现与已有算法相比，我们的方法具有巨大性能优势，能够使实际系统逼近传输性能限。

值得注意的是，这里干扰可控预编码设计是在频谱认知环境下展开的研究，延续当前本领域相关文献的做法^[149–153]，没有专门考虑主用户对次用户的干扰。这些文献指出，依据不同的干扰条件，可以采取不同的方法对待主用户对次用户的干扰。当主用户对次用户的干扰较弱时，次用户的接收机可以将来自主用户的干扰视为白噪声，从而对次用户的信号进行解调译码；当干扰较强时，在一些频

① 例如： $n = 0$ 或 $\gamma_i = +\infty$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。关于这类问题的求解详见第3章和第4章

谱认知的传输场景下（如移动通信用户利用数字电视广播的频谱），如果次用户的接收端可以通过某种方式提前获取主用户传输的信息，可以采取干扰消除的办法避免主用户对次用户的干扰。

针对干扰既没有弱到可以完全视为白噪声，又没有途径提前获取主用户的传输信息进而实现干扰消除的更为一般的情况，如何综合考虑这一传输问题目前仍是难题。一种可行的方案是采用收发协同来处理干扰。通过将主用户与次用户的收发机分别进行协同发射与协同检测译码，实现对干扰的有效管理，从而进一步提升频谱效率。关于这一思路，请参见专利[158]。

5.1 系统模型

5.1.1 收发信号模型

考虑图5.1所示的传输场景：带有 N_t 个天线的发射机（Tx）与带有 N_r 个天线的接收机（Rx）通信的同时需要控制其对网络中多个用户的干扰。假设待考虑的用户总数为 n ，其中第 i 个用户的接收天线数为 N_i ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

令 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N_t}$ 表示具有零均值单位协方差的发射信号，即 $\mathbf{E}(\mathbf{x}\mathbf{x}^H) = \mathbf{I}$ ，则接收机和网络中的用户收到的信号可以分别表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{H}_i\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_r \times N_t}$ 和 $\mathbf{H}_i \in \mathbb{C}^{N_i \times N_t}$ 分别表示由发射机到接收机和由发射机到第 i 个用户的信道矩阵； $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_r}$ 和 $\mathbf{n}_i \in \mathbb{C}^{N_i}$ 表示零均值圆对称，方差分别为 $\sigma^2\mathbf{I}$ 和 $\sigma_i^2\mathbf{I}$ 的高斯噪声向量。在系统设计中引入预编码矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{N_t \times N_t}$ 的目的，一方面是希望提升发射机和接收机的传输速率，另一方面是控制发射机到网络中多个用户的干扰。

发射机的最大传输功率限制为 γ ，也就是说预编码矩阵要满足如下约束条件

$$\text{Tr}(\mathbf{P}^H\mathbf{P}) \leq \gamma.$$

收发机（Tx-Rx）归一化的信噪比定义为^[114]

$$\text{SNR} \triangleq \frac{\gamma}{N_t} \cdot \frac{\text{Tr}(\mathbf{H}^H\mathbf{H})}{N_r\sigma^2}.$$

输入信号 \mathbf{x} 取自于等概率离散调制集合，集合的势为 M 。在接收机已知信道矩阵 \mathbf{H} 的前提下，收发机间传输速率的极限（调制约束下的互信息）的表达式为

$$I(\mathbf{P}) = K - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \mathbf{E}_{\mathbf{n}} \left\{ \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left(-\frac{\|\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{e}_{mk} + \mathbf{n}\|^2 - \|\mathbf{n}\|^2}{\sigma^2} \right) \right\} \quad (5-1)$$

其中常数 K 等于 $N_t \log M$; $\mathbf{e}_{mk} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k$, \mathbf{x}_m 和 \mathbf{x}_k 分别表示使用多天线时调制信号的第 m 和第 k 个可能。它们均包含 N_t 个符号, 当其角标由1变化到 M^{N_t} 时, 遍历发射符号的所有可能性。

直接最大化式(5-1)给出的互信息, 从数值计算的角度来看代价是比较大的。难点主要集中在以下三个方面: 第一, 互信息式(5-1)没有闭合表达式。已有文献^[115]只能给出在信道矩阵 $\mathbf{I}(\mathbf{P})$ 和预编码矩阵 \mathbf{H} 均为对角矩阵时, 高信噪比下互信息的近似表达式。第二, 式(5-1)中相对于向量 \mathbf{n} 的数学期望表明互信息的计算需要评估 $2N_r$ 重从负无穷到正无穷的积分。这里的每一重积分都没有闭式解, 需要通过大量的数值计算获得。第三, 为加速收敛, 对互信息的优化一般需要利用其梯度作为搜索方向。互信息的梯度是最小均方误差矩阵 (MMSE) ^[116], 参见第3章。实际调制信号的MMSE是一个比互信息更加难以计算的参量, 利用它的计算代价相对较大。在第3章, 我们采用的办法是通过Monte Carlo和数值积分的方法来估计互信息及其梯度MMSE矩阵。当输入输出的信号维度较小时, 这种方法的计算量还是可以承受的, 但随着维度的不断增加, 计算的代价将越来越大。

为了解决计算上的问题, 同时简化采用调制约束下互信息准则的预编码设计, 在第4章的研究内容的基础上, 我们得到了完全信道信息下互信息的近似表达式^[159]

$$\mathcal{I}_A(\mathbf{P}) = K - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left(-\frac{\mathbf{e}_{mk}^H \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{e}_{mk}}{2\sigma^2} \right) \quad (5-2)$$

在任意信噪比条件下提供了互信息的精确近似。与计算互信息的表达式(5-1)相比, 式(5-2)的计算复杂度降低了几个数量级。例如: 对于采用QPSK调制的 2×2 和 4×4 的MIMO信道来说, 计算 $\mathcal{I}_A(\mathbf{P})$ 的CPU时间仅为计算 $\mathcal{I}(\mathbf{P})$ 的 5.9×10^{-5} 和 9.6×10^{-6} 。此外, 与直接最大化互信息得到的最优预编码相比, 最大化 $\mathcal{I}_A(\mathbf{P})$ 得到的解在高信噪比和低信噪比下是完全一样的, 也就是说, 具有渐近最优性。大量的仿真实验已经表明, 对于既非高也非低的信噪比值, 最大化互信息与最大化近似表达式 $\mathcal{I}_A(\mathbf{P})$ 的区别完全可以忽略^[159]。

5.1.2 干扰可控的预编码问题

因为发射符号满足 $\mathbf{E}(\mathbf{x}\mathbf{x}^H) = \mathbf{I}$, 平均发射功率可以表示为

$$\text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{P})$$

同时, 第 i 个用户的平均接收功率表示为

$$\text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i \mathbf{P}).$$

采用式(5-2)引入的互信息近似，最大化收发机间互信息同时控制对多个用户干扰的问题就可以写为

$$\text{maximize} \quad \mathcal{I}_A(\mathbf{P}) \quad (5-3a)$$

$$\text{subject to} \quad \text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{P}) \leq \gamma \quad (5-3b)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i \mathbf{P}) \leq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5-3c)$$

其中不等式(5-3b)控制发射功率，不等式(5-3c)保证第*i*个用户的干扰小于阈值 γ_i 。

值得注意的是，问题(5-3)与第3章讨论的预编码问题有着紧密联系。当式(5-3)中的干扰约束不起作用的时候^①，问题(5-3)退化为

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \mathcal{I}_A(\mathbf{P}) \\ &\text{subject to} \quad \text{Tr}(\mathbf{P}^H \mathbf{P}) \leq \gamma. \end{aligned} \quad (5-4)$$

这一问题的求解可以通过将第3章所提出的两步迭代算法进行扩展，这里不再赘述。感兴趣的读者可以参考文献[159]。

现在可以清楚看出，这里讨论的问题(5-3)实际上包含了问题(5-4)这一特例，因而也就更加难解。本章的目的就是提出全新的BAMIO算法来求解问题(5-3)。当然了，这个新算法也同样适用于求解问题(5-4)。

5.2 研究现状

5.3 问题的重构与松弛

我们首先讨论问题(5-3)的重构，为下一部分讨论问题的松弛和求解做理论上的准备。

5.3.1 预编码调制问题的重构

根据矩阵迹的特性^[160]

$$\text{Tr}(\mathbf{X}^H \mathbf{Y} \mathbf{X} \mathbf{W}) = \text{vec}(\mathbf{X})^H \cdot (\mathbf{W}^T \otimes \mathbf{Y}) \cdot \text{vec}(\mathbf{X})$$

式(5-3a)可以改写为

$$\mathcal{I}_A(\mathbf{P}) = K - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp \left(-\text{vec}(\mathbf{P})^H \cdot (\mathbf{E}_{mk}^T \otimes \mathbf{H}^H \mathbf{H}) \cdot \text{vec}(\mathbf{P}) \right) \quad (5-5)$$

^① 例如当需要保障干扰的用户数为0，即 $n = 0$ ，或当干扰的阈值 $\gamma_i = +\infty$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

其中 \mathbf{E}_{mk} 为常数矩阵

$$\mathbf{E}_{mk} = \mathbf{e}_{mk} \mathbf{e}_{mk}^H / (2\sigma^2).$$

将矩阵 \mathbf{P} 的实部、虚部重新整理，可以写为列向量的形式

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \Re\{\text{vec}(\mathbf{P})\} \\ \Im\{\text{vec}(\mathbf{P})\} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N_t^2} \quad (5-6)$$

同时，定义常量矩阵 \mathbf{A}_{mk}

$$\mathbf{A}_{mk} = - \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{E}_{mk}^T \otimes \mathbf{H}^H \mathbf{H}\} & -\Im\{\mathbf{E}_{mk}^T \otimes \mathbf{H}^H \mathbf{H}\} \\ \Im\{\mathbf{E}_{mk}^T \otimes \mathbf{H}^H \mathbf{H}\} & \Re\{\mathbf{E}_{mk}^T \otimes \mathbf{H}^H \mathbf{H}\} \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

这样，表达式 (5-5) 可以重新表述如下

$$\mathcal{I}_A(\mathbf{P}) = K - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\mathbf{p}^T \mathbf{A}_{mk} \mathbf{p}) \quad (5-8)$$

其中 $\mathbf{p}^T \mathbf{A}_{mk} \mathbf{p}$ 称之为二次型，由定义可以写为

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A}_{mk} \mathbf{p} = -\text{Tr}(\|\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{e}_{mk}\| / 2\sigma^2)$$

因其对于任意矩阵 \mathbf{P} 都是非负的，根据定义可知， \mathbf{A}_{mk} 是负半定矩阵，表示为

$$\mathbf{A}_{mk} \leq \mathbf{0}.$$

同理，定义常量矩阵 \mathbf{B}_i

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \Re\{\mathbf{I} \otimes \mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i\} & -\Im\{\mathbf{I} \otimes \mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i\} \\ \Im\{\mathbf{I} \otimes \mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i\} & \Re\{\mathbf{I} \otimes \mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i\} \end{bmatrix} \quad (5-9)$$

可知 \mathbf{B}_i 是正半定矩阵，表示为

$$\mathbf{B}_i \geq \mathbf{0}.$$

这样，第 i 个主接收机的接收信号功率就可以写为

$$\mathbf{p}^T \mathbf{B}_i \mathbf{p} \geq 0.$$

基于式(5-5)-(5-9)的一系列定义，我们给出如下引理：

引理 5.1： 问题 (5-3) 可以表述为更加紧凑的形式：

$$\text{maximize} \quad K - \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\mathbf{p}^T \mathbf{A}_{mk} \mathbf{p}) \quad (5-10a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{p}^T \mathbf{p} \leq \gamma \quad (5-10b)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{B}_i \mathbf{p} \leq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5-10c)$$

符号 \mathbf{p} , \mathbf{A}_{mk} 和 \mathbf{B}_i 的定义分别由式(5-6), (5-7)和(5-9)给出; γ 和 γ_i 为正常数, 分别控制系统的发射信号功率和干扰功率。

因为 $\mathbf{A}_{mk} \leq \mathbf{0}$, 问题(5-10)是非凹问题, 求解遇到极大的障碍^[103]。从概念上看, 问题(5-10)需要在 $(n+1)$ 个相交的椭圆集合上求解一个最大化问题。因为零向量满足所有的约束条件, 所以讨论的问题总存在可行解。然而, 寻找问题的全局最优解却非常的困难, 因为当 \mathbf{A}_{mk} , $m, k = 1, \dots, M^{N_t}$ 为任意负半定矩阵时, 问题(5-10)包含了一类非确定多项式时间难 (non-deterministic polynomial-time hard, NP-hard) 问题^[161]。

为了便于表述, 我们进一步将待求解的(5-10)写为带有变量空间约束的最小化问题

$$v^{\text{MI}}(\mathcal{P}) = \text{minimize} \quad \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\mathbf{p}^T \mathbf{A}_{mk} \mathbf{p}) - K \quad (5-11a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{p}^T \mathbf{p} \leq \gamma \quad (5-11b)$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{B}_i \mathbf{p} \leq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5-11c)$$

$$\mathbf{p} \in \mathcal{P}. \quad (5-11d)$$

我们用符合 $v^{\text{MI}}(\mathcal{P})$ 表示问题(5-11)的最优值; 式(5-11d)表示变量空间约束, 它将优化变量约束在如下的空间内

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2N_t^2} | \mathbf{l}_p \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{u}_p\}$$

上式中的向量不等式表示逐元素的不等关系。其中, 下界 \mathbf{l}_p 和上界 \mathbf{u}_p 可以分别初始化为 $-\sqrt{\gamma} \cdot \mathbf{1}$ 和 $\sqrt{\gamma} \cdot \mathbf{1}$, 其中 $\mathbf{1}$ 表示元素全为一的列向量。这一初始化使得问题(5-10)与(5-11)完全等价, 因为(5-11d)定义的约束比(5-11b)更加松弛, 因此不起作用。

从所定义的变量空间大小的角度来看, 我们可以通过求解 $2N_t^2$ 个优化问题从而得到 \mathbf{l}_p 和 \mathbf{u}_p 更好的初始化方法。将向量 \mathbf{l}_p 的第 j 个元素表示为 $l_{p,j}$, 通过求解如下凸问题得到最优解:

$$\begin{aligned} l_{p,j} = \text{minimize} \quad & p_j \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{p}^T \mathbf{p} \leq \gamma \\ & \mathbf{p}^T \mathbf{B}_i \mathbf{p} \leq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5-12)$$

其中 p_j 是向量 \mathbf{p} 的第 j 个元素。因为约束的对称性，向量 \mathbf{u}_p 的第 j 元素 $u_{p,j}$ 可以初始化为 $-l_{p,j}$ 。

下面，我们开始讨论如何不断的减小变量的优化空间 \mathcal{P} ，由此提出能够满足任意求解精度的全局优化算法。为了便于理解所提方法的思路，我们下面先来介绍函数凸包络和凹包络及函数松弛的概念。

5.3.2 凸包络、凹包络及双线性函数的松弛

定义如下函数表示：

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Ω 是函数 g 的定义域。函数 g 的凸包络（convex envelope）是所有小于函数 g 的凸函数中最大的一个，表示为

$$\text{vex}_{\Omega}(g)$$

函数 g 的凹包络（concave envelope）是所有大于函数 g 的凹函数中最小的一个，表示为

$$\text{cav}_{\Omega}(g).$$

像 $p_i p_j$ 这样的函数称之为双线性函数（bilinear function）。二次函数就可以表示为多个双线性函数的加权和：

$$\mathbf{p}^T \mathbf{A}_{mk} \mathbf{p} = \sum_i \sum_j a_{mk,ij} \cdot p_i p_j \quad (5-13)$$

其中 $a_{mk,ij}$ 表示矩阵 \mathbf{A}_{mk} 的第 (i, j) 个元素。

双线性函数即不是凸函数也不是凹函数，是导致优化问题复杂难解的根本原因^[103]。通过包络函数，我们可以将双线性函数松弛为分段线性函数，这样有利于优化问题的求解。对于矩形定义域

$$\Omega = \left\{ (p_i, p_j) \in \mathbb{R}^2 \mid l_{p,i} \leq p_i \leq u_{p,i}, l_{p,j} \leq p_j \leq u_{p,j} \right\}$$

上的双线性函数

$$g(p_i, p_j) = p_i p_j$$

其凹包络函数和凸包络函数分别为^[162]

$$\text{vex}_{\Omega}(p_i p_j) = \max \left\{ l_{p,j} p_i + l_{p,i} p_j - l_{p,i} l_{p,j}, u_{p,j} p_i + u_{p,i} p_j - u_{p,i} u_{p,j} \right\}$$

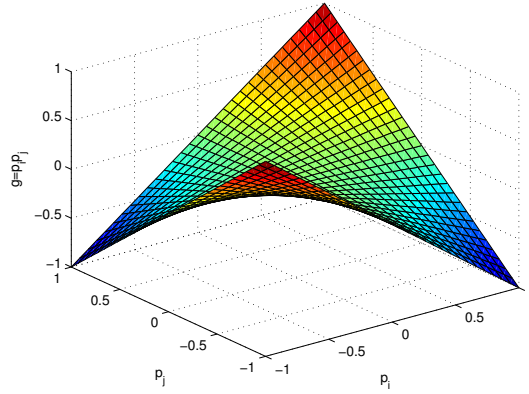
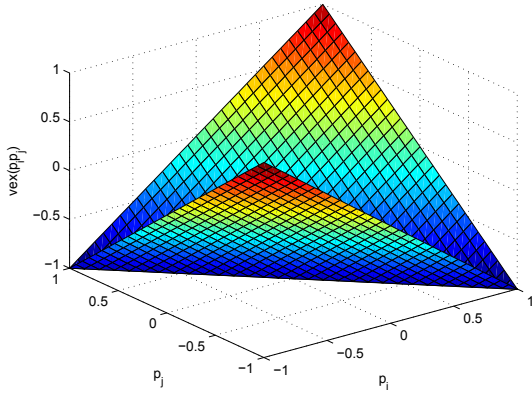
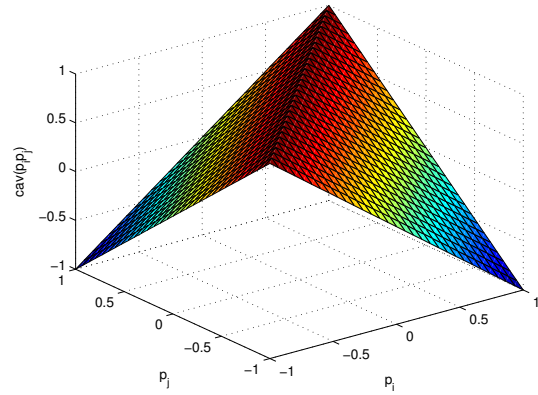

 (a) 双线性函数 $g(p_i, p_j) = p_i p_j$

 (b) 凸包络 $\text{vex}_\Omega(p_i p_j)$

 (c) 凹包络 $\text{cav}_\Omega(p_i p_j)$

 图 5.2 双线性函数 $g(p_i, p_j) = p_i p_j$ 及其凸包络和凹包络函数

$$\text{cav}_\Omega(p_i p_j) = \min \{u_{p,j} p_i + l_{p,i} p_j - l_{p,i} u_{p,j}, l_{p,j} p_i + u_{p,i} p_j - u_{p,i} l_{p,j}\}.$$

图5.2给出了双线性函数与其包络函数的示意图。其中，函数 $p_i p_j$ ， $\text{vex}_\Omega(p_i p_j)$ 和 $\text{cav}_\Omega(p_i p_j)$ 的定义域为

$$\Omega = \{(p_i, p_j) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq p_i, p_j \leq 1\}.$$

虽然双线性函数（图5.2(a)）既非凸函数也非凹函数，形式复杂，其凸包络（图5.2(b)）和其凹包络（图 5.2(c)）是函数特性非常好的分段线性函数。从优化求解的角度来看，如果能用二者替换双线性函数则有利于求解优化问题。

我们的思路是通过引入辅助变量 q_{ij} 来近似 $p_i p_j$ 。辅助变量 q_{ij} 定义在函数 $p_i p_j$ 的凸包络和凹包络之间，也就是满足如下不等式：

$$q_{ij} \geq l_{p,j} p_i + l_{p,i} p_j - l_{p,i} l_{p,j} \quad (5-14a)$$

$$q_{ij} \geq u_{p,j} p_i + u_{p,i} p_j - u_{p,i} u_{p,j} \quad (5-14b)$$

$$q_{ij} \leq u_{p,j} p_i + l_{p,i} p_j - l_{p,i} u_{p,j} \quad (5-14c)$$

$$q_{ij} \leq l_{p,j}p_i + u_{p,i}p_j - u_{p,i}l_{p,j}. \quad (5-14d)$$

将变量 q_{ij} , $i, j = 1, \dots, 2N_t^2$, 整理并写成矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2N_t^2 \times 2N_t^2}$, 则 (5-11) 基于变量空间 \mathcal{P} 的松弛优化问题就可以写为

$$\begin{aligned} v^{\text{rlx}}(\mathcal{P}) = \text{minimize} \quad & \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp [\text{Tr}(\mathbf{A}_{mk} \mathbf{Q})] - K \\ \text{subject to} \quad & \text{Tr}(\mathbf{Q}) \leq \gamma \end{aligned} \quad (5-15a)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{B}_i \mathbf{Q}) \leq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5-15b)$$

$$\mathbf{Q} - \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{p}^T - \mathbf{p} \cdot \mathbf{l}_p^T \geq -\mathbf{l}_p \cdot \mathbf{l}_p^T \quad (5-15c)$$

$$\mathbf{Q} - \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{p}^T - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_p^T \geq -\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p^T \quad (5-15d)$$

$$\mathbf{Q} - \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{p}^T - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_p^T \leq -\mathbf{l}_p \cdot \mathbf{u}_p^T \quad (5-15e)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad (5-15f)$$

其中向量 \mathbf{l}_p 和 \mathbf{u}_p 的第 i 个元素分别为 $l_{p,i}$ 和 $u_{p,i}$; 式(5-15c), (5-15d)和(5-15e)为逐元素的矩阵不等式; 式(5-15c)和(5-15d)分别对应式(5-14a)和(5-14b), 而式(5-15e)对应于式(5-14c)和(5-14d)。

问题(5-15)的目标函数为凸函数, 其约束条件为变量 \mathbf{Q} 和 \mathbf{p} 的线性函数, 因此是一个凸优化问题。它的全局最优值可以通过求解凸优化的典型算法, 如内点法 (interior-point method^[103]), 得到, 我们将该最优值记为 $v^{\text{rlx}}(\mathcal{P})$ 。

既然松弛问题的求解相对原问题要容易的多, 我们很自然的想要知道这二者之间关系, 也就是最优值 $v^{\text{rlx}}(\mathcal{P})$ 和 $v^{\text{MI}}(\mathcal{P})$ 的关系。

定理 5.1: 松弛问题 (5-15)的最优值是问题 (5-11)的下界, 也就是说:

$$v^{\text{rlx}}(\mathcal{P}) \leq v^{\text{MI}}(\mathcal{P})$$

同时, 随着变量空间 \mathcal{P} 的缩小, $v^{\text{rlx}}(\mathcal{P})$ 收敛到 $v^{\text{MI}}(\mathcal{P})$, 即

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (v^{\text{rlx}}(\mathcal{P}) - v^{\text{MI}}(\mathcal{P})) = 0.$$

其中, ϵ 是一个包含空间 \mathcal{P} 的球 $\mathcal{B}(\epsilon)$ 的半径, 满足

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\epsilon).$$

证明 详见附录A: 定理 5.1的证明。 □

当 $\epsilon \rightarrow 0$, 我们可以进一步给出松弛问题 (5-15)的最优解结构:

推论 5.1: 当变量空间 \mathcal{P} 逐步缩小, 松弛问题 (5-15) 的解秩为一。此时, 求解问题 (5-15) 与求解问题 (5-11) 完全等价。

证明 详见附录A: 推论5.1的证明。 \square

定理 5.1 和推论 5.1 为下一节所介绍的全局最优BAMIO算法提供了理论基础。

5.4 基于全局优化的BAMIO算法

问题 (5-11) 是非凸优化问题, 传统优化方法将无法得到全局最优解。这一节我们讨论一种能够从任意起始点出发收敛到任意给定精度 δ 的全局优化算法BAMIO (Branch-And-bound aided Mutual Information Optimization)。BAMIO算法中的每一个迭代步骤对应一个变量空间 \mathcal{P} 。针对每一个变量空间, 可以得到问题 $v^{\text{MI}}(\mathcal{P})$ 的下界 $v^{\text{lb}}(\mathcal{P})$ 和上界 $v^{\text{up}}(\mathcal{P})$ 。同时该下界和上界满足如下关系:

$$v^{\text{lb}}(\mathcal{P}) \leq v^{\text{MI}}(\mathcal{P}) \leq v^{\text{up}}(\mathcal{P}).$$

当变量空间 \mathcal{P} 收缩时, 下界 $v^{\text{lb}}(\mathcal{P})$ 和上界 $v^{\text{up}}(\mathcal{P})$ 的间隔变得越来越小, 最终保证算法的全局收敛性。

5.4.1 原问题的下界和上界

采用包络函数的办法, 我们已经将原本非凸的问题 (5-11) 松弛成了凸问题 (5-15)。因为凸性的存在, 松弛问题可以以极低的计算复杂度得到全局最优解。同时, 我们已经证明松弛问题的最优值是原问题的下界 $v^{\text{lb}}(\mathcal{P})$ (参加定理 5.1)。

如果问题 (5-15) 的最优解 \mathbf{Q}^* 恰好秩为一, 则利用 \mathbf{Q}^* 可以直接得到问题 (5-11) 的全局最优解 \mathbf{p}^* , 并满足

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{p}^*(\mathbf{p}^*)^T.$$

此时, 下界 $v^{\text{lb}}(\mathcal{P})$ 恰好取到; 上界等于下界, 求解的相对误差

$$\left| \frac{v^{\text{up}}(\mathcal{P}) - v^{\text{lb}}(\mathcal{P})}{v^{\text{up}}(\mathcal{P})} \right|$$

恰好为零, 故小于任意预设精度 δ , 问题得到完美解决。需要注意的是, 这里定义的相对误差并不总小于一, 这是因为我们讨论的目标函数 (5-11a) 总小于零。

如果 \mathbf{Q}^* 的秩不为一, 我们可以利用 \mathbf{Q}^* 得到一个对原问题可行的秩一近似解 \mathbf{p} , 这一结果对应原问题的上界 $v^{\text{up}}(\mathcal{P})$ 。近年来文献中出现了多种寻找秩一近似解的方法, 例如利用 \mathbf{Q}^* 的主特征向量或采用高斯随机化方法。秩一近似的本质是

在 \mathbf{Q}^* 周围做局部搜索，得到一个秩为一的可行解。这一方法已经开始在不同的应用场景中使用，方法的详细步骤及性能分析参加文献[163,164]。

5.4.2 下界和上界的迭代收敛

BAMIO算法通过利用分支定界的思路得到全局最优解^[165–170]。首先针对初始变量空间 \mathcal{P}_1 求得对应的下界

$$L_1 = v^{\text{lb}}(\mathcal{P}_1)$$

及上界

$$U_1 = v^{\text{up}}(\mathcal{P}_1).$$

如果下界和上界满足条件

$$|(U_1 - L_1)/U_1| \leq \delta$$

算法终止；否则，将空间 \mathcal{P}_1 沿着其最长的边分为两个相等大小的空间 \mathcal{P}_2 和 \mathcal{P}_3 ，并满足

$$\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1.$$

接下来，针对新得到的两个空间计算对应的下界 $v^{\text{lb}}(\mathcal{P}_i)$ 和上界 $v^{\text{up}}(\mathcal{P}_i)$ ， $i = 2, 3$ 。

因为空间 \mathcal{P}_2 和 \mathcal{P}_3 比 \mathcal{P}_1 更小，其对应的松弛问题对原问题的近似就更好，即满足条件

$$\begin{aligned} \min \{v^{\text{lb}}(\mathcal{P}_2), v^{\text{lb}}(\mathcal{P}_3)\} &\geq L_1 \\ \min \{v^{\text{up}}(\mathcal{P}_2), v^{\text{up}}(\mathcal{P}_3)\} &\leq U_1. \end{aligned}$$

这样，下界和上界获得更新：

$$\begin{aligned} \min \{v^{\text{lb}}(\mathcal{P}_2), v^{\text{lb}}(\mathcal{P}_3)\} &= L_2 \\ &\leq v^{\text{MI}}(\mathcal{P}_1) \leq U_2 = \min \{v^{\text{up}}(\mathcal{P}_2), v^{\text{up}}(\mathcal{P}_3)\}. \end{aligned} \quad (5-16)$$

在这次迭代过后，下界和上界之间的相对误差更小了。如果满足

$$|(U_2 - L_2)/U_2| \leq \delta$$

算法迭代停止；否则，将对应于最小下界的变量空间沿着长边分为两半，并根据新的更小的空间求取下界和上界。

算法的每一次迭代将一个空间一分为二。经过 i 次迭代后，初始的空间 \mathcal{P}_1 被分解为 $(i+1)$ 个小空间。这些小空间所对应的松弛问题与原问题的近似程度更好，其下界和上界的相对误差

$$|(U_i - L_i)/U_i|$$

更小。采用这样的思路不断迭代，最终算法能够收敛到问题的全局最优解。完整的算法请见表5.1。

表 5.1 干扰可控的预编码调制算法流程

全局优化BAMIO算法	
1. 初始化	
a. 给定变量空间	
$\mathcal{P}_1 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2N_t} \mathbf{l}_p \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{u}_p\}$	
其中 \mathbf{l}_p 和 \mathbf{u}_p 或者分别设为 $-\sqrt{\gamma} \cdot \mathbf{1}$ 和 $\sqrt{\gamma} \cdot \mathbf{1}$ ，或者通过求解 (5-12) 得到；	
b. 将空间集合 \mathbb{P} 初始化为 \mathcal{P}_1 ；	
c. 令 $L_1 = v^{\text{lb}}(\mathcal{P}_1)$, $U_1 = v^{\text{up}}(\mathcal{P}_1)$, $i = 1$ ；给定求解预设精度 δ ；	
2. 当 $(U_i - L_i)/U_i \geq \delta$ 时	
a. 从空间集合 \mathbb{P} 中选出对于最小下界的变量空间 \mathcal{P} ；	
b. 将变量空间 \mathcal{P} 沿着最长的边切为大小相等的两个新的空间 \mathcal{P}_j 和 \mathcal{P}_k ；	
c. 将 \mathcal{P}_j 和 \mathcal{P}_k 加入集合 \mathbb{P} ，同时将 \mathcal{P} 去除；	
d. 计算第 i 次迭代的下界：	
$L_i = \min_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} v^{\text{lb}}(\mathcal{P})$	
及上界	
$U_i = \min_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} v^{\text{up}}(\mathcal{P}).$	
其中，下界 $v^{\text{lb}}(\mathcal{P})$ 可以通过求解问题 (5-15) 或 (5-17) 得到，上界通过秩一近似方法得到（细节参加第 5.4.1 节）；	
e. 令 $i = i + 1$	
3. 返回 δ-最优的预编码	

定理 5.2: 随着初始变量空间的迭代, \mathcal{P} 不断缩小, 由BAMIO算法给出的预编码最终成为问题 (5-3) 的全局最优解。同时, $\{L_i\}$ 和 $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, 收敛到问题 (5-3) 的负最优值。

证明 详见附录B: 定理5.2的证明。 □

通过选择预设的求解精度 δ , BAMIO算法提供了求解性能与复杂度(收敛时间)的折衷。求解精度 δ 越小, 得到的解性能越好, 同时收敛时间越长; 求解精度 δ 越大, 得到的解性能相对会越差, 同时收敛时间会越短。我们在仿真分析一节中详细讨论这一折中关系。

5.4.3 BAMIO算法的收敛加速

接下来讨论如何加速BAMIO算法的收敛速度。从两个不同的角度出发, 我们讨论两种不同的加速方法。对于每一次迭代, 我们首先考虑如何得到更好的松弛问题, 从而能够更好的近似原问题。然后, 我们考虑如何减小变量的搜索空间, 从而使求解更加快速。这两个方法有效的减少所提算法达到预设精度所需要的迭代次数, 从而加速算法的收敛。

5.4.3.1 改进松弛的精度

凸松弛(5-15)是通过将向量 \mathbf{p} 提升到矩阵空间

$$(\mathbf{p}, \mathbf{Q})$$

同时放松掉约束

$$\mathbf{Q} = \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

并增加一组线性不等式来约束 \mathbf{Q} 的范围。凸松弛提供了原问题的下界, 松弛的精度可以通过额外增加半正定约束 (positive semi-definite, PSD, constraint)

$$\mathbf{Q} \succeq \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

得到改进:

$$\begin{aligned} v^{\text{imp}}(\mathcal{P}) = \text{minimize} \quad & \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp [\text{Tr}(\mathbf{A}_{mk} \mathbf{Q})] - K \\ \text{subject to} \quad & \text{Tr}(\mathbf{Q}) \leq \gamma \end{aligned} \tag{5-17a}$$

$$\text{Tr}(\mathbf{B}_i \mathbf{Q}) \leq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{5-17b}$$

$$\mathbf{Q} - \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{p}^T - \mathbf{p} \cdot \mathbf{l}_p^T \geq -\mathbf{l}_p \cdot \mathbf{l}_p^T \quad (5-17c)$$

$$\mathbf{Q} - \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{p}^T - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_p^T \geq -\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p^T \quad (5-17d)$$

$$\mathbf{Q} - \mathbf{l}_p \cdot \mathbf{p}^T - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_p^T \leq -\mathbf{l}_p \cdot \mathbf{u}_p^T \quad (5-17e)$$

$$\mathbf{Q} \geq \mathbf{p}\mathbf{p}^T, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad (5-17f)$$

其中, $v^{\text{imp}}(\mathcal{P})$ 表示问题 (5-17)的最优值。

为了便于理解收敛加速的原因, 我们给出问题 (5-15)和(5-17)最优值的关系:

推论 5.2: 问题(5-17)的最优值是(5-11)的下界, 且比 (5-15)更紧, 即满足

$$v^{\text{rlx}}(\mathcal{P}) \leq v^{\text{imp}}(\mathcal{P}) \leq v^{\text{MI}}(\mathcal{P}).$$

新的松弛在变量空间缩小时同样能够收敛到原问题, 也就是说

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (v^{\text{imp}}(\mathcal{P}) - v^{\text{MI}}(\mathcal{P})) = 0$$

其中, ϵ 是一个包含空间 \mathcal{P} 的球 $\mathcal{B}(\epsilon)$ 的半径。

证明 详见附录B: 定理 5.2的证明。 □

因为 PSD约束是凸的, 问题(5-17)同样是凸问题。采用 $v^{\text{imp}}(\mathcal{P})$ 作为下界可以减少为达到预设求解精度 δ 所需要的迭代次数。

5.4.3.2 减小变量的搜索空间

BAMIO算法从初始化为

$$\mathcal{P}_1 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{2N_t} | \mathbf{l}_p \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{u}_p\}$$

的变量空间出发对原问题松弛, 进而获得容易求解的凸问题。随着迭代的不断进行, 该变量空间被不断的重新划分。针对新的更小的变量空间, 可以获得更优的松弛问题。变量空间定义了变量 \mathbf{p} 的范围, 可以通过进一步的缩减来加速收敛^[167]。

以第一次迭代为例。求解得到基于 \mathcal{P}_1 获得的凸松弛后, 可以得到原问题的下界 L_1 和上界 U_1 (参见第 5.4.1节)。若将式 (5-17)的目标函数表示为 $f(\mathbf{p})$, 可知它小于等于 U_1 。如果将不等式约束

$$f(\mathbf{p}) \leq U_1$$

加入式(5-17)已有的约束中，对变量 \mathbf{p} 的每一个元素可以得到其最大和最小值。这里的最大和最小值定义了新的、比 \mathcal{P}_1 更小的变量空间。由更小的变量空间切割后得到的子空间也就更小，从而，所需要的迭代次数就减少了。

通过大量的仿真发现，通过采用以上两种加速收敛的方法，达到某一预设精度所需要的迭代次数可以降低至少100倍。

5.4.4 与半定松弛的关系

半定松弛方法^[163,164]近年来得到了及其广泛的应用，探索松弛(5-17)与求解二次问题的半定松弛的关系是很有意义的。

半定松弛方法通过将变量 \mathbf{p} 扩展到矩阵空间 \mathbf{Q} ，并进一步放松掉约束

$$\mathbf{Q} = \mathbf{p}\mathbf{p}^T$$

从而得到：

$$v^{\text{sdr}} = \text{minimize} \quad \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp [\text{Tr}(\mathbf{A}_{mk}\mathbf{Q})] - K \quad (5-18a)$$

$$\text{subject to} \quad \text{Tr}(\mathbf{Q}) \leq \gamma \quad (5-18b)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{B}_i\mathbf{Q}) \leq \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5-18c)$$

$$\mathbf{Q} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T. \quad (5-18d)$$

在求解了上面的凸问题后，采用秩一近似的方法可以得到原问题的可行解。半定松弛的方法已经被成功应用于多种不同场合，关于这一方法的综述请参见文献[164]。问题(5-17)和问题(5-18)的关系由如下推论给出：

推论 5.3： 令 $v^{\text{imp}}(\mathcal{P})$ 和 v^{sdr} 分别表示问题(5-17)和 (5-18)最优值，则以下关系成立

$$v^{\text{sdr}} \leq v^{\text{imp}}(\mathcal{P}) \leq v^{\text{MI}}(\mathcal{P}). \quad (5-19)$$

证明 详见附录B：定理5.3的证明。 \square

基于式(5-18)的半定松弛方法可以得到一个确定求解精度的解。这个解无法通过不断迭代来改进，因为其变量 \mathbf{Q} 与 \mathbf{p} 无关，也就与变量空间 \mathcal{P} 无关。半定松弛方法无法保证全局最优性，因为其得到解的相对误差通常都不为零。

5.5 仿真分析

本节通过一系列的例子来说明BAMIO算法所提供的性能与计算复杂度的折衷，并讨论不同松弛方法对算法的影响，最后给出所提算法与基于高斯信号及启

发式算法的性能比较。

5.5.1 例一：性能与复杂度的折衷

本章所讨论的BAMIO算法能够从任意的起始点出发获得预设精度的全局最优解。这一节通过具体的例子来说明算法的收敛过程。我们首先来看系统只存在发射功率约束的情况，此时讨论的问题退化为MIMO信道的预编码问题。考虑如下具体的信道参数

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

这一信道在讨论MIMO的预编码调制的文献中出现多次^[121]，采用这一信道便于与已有工作进行横向比较。

发射功率约束的参数 γ 设为发射天线的数目，这样可以保证预编码并不改变发射信号的功率。输入信号 \mathbf{x} 采用QPSK调制，信噪比为-5 dB。

算法采用5.4.3节讨论的收敛加速方法。预设精度设为 $\delta = 0.005$ ，也就是说，当下界 L_i 和上界 U_i 满足条件

$$|(U_i - L_i)/U_i| \leq \delta$$

算法终止。图 5.3给出的是随着迭代 L_i 和 U_i 的收敛曲线。BAMIO算法每次迭代会得到一个可行的预编码，其性能对应获得的上界 U_i 。可以发现，在第129次迭代后获得了全局最优解；同时经过 10,000次迭代后，下界 L_i 得到了充分的提升，并验证了在第129次迭代获得的解精度满足要求。

调节参数 δ 能够实现性能与复杂度的折衷。图5.4给出的是对应不同预设精度 δ ，所得到的下界、上界以及达到求解精度所需要迭代次数。可以看出，随着预设精度越来越小，下界和上界的间隙也越来越小；与此同时，所需的迭代次数将越来越多。当 δ 接近零时，迭代次数的变化尤为明显。

从上面的结果出发，我们希望能够通过数学模型直观的刻画出迭代次数 T 与预设精度 δ 的关系。我们通过两种数学模型量化这一关系。第一种是建立 T 和 δ 的指数模型

$$T = a_1 \cdot e^{a_2 \delta}.$$

对这一模型两边取自然对数得到

$$\ln T = \ln a_1 + a_2 \cdot \delta.$$

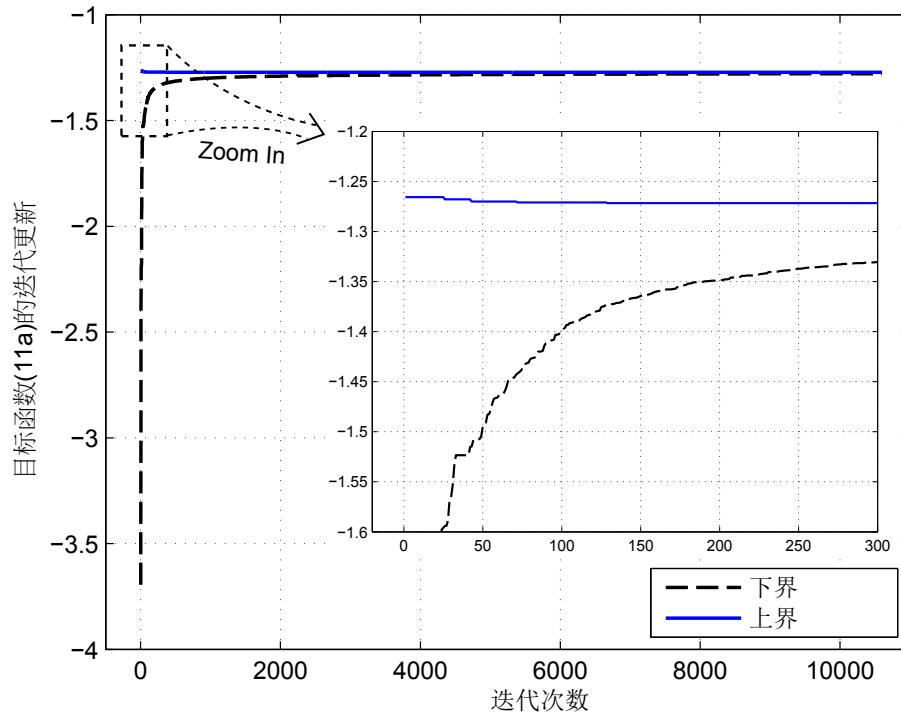


图 5.3 BAMIO算法对目标函数(5-11a)的迭代更新；输入信号为QPSK，信噪比为 -5 dB，预设精度 δ 为0.005.

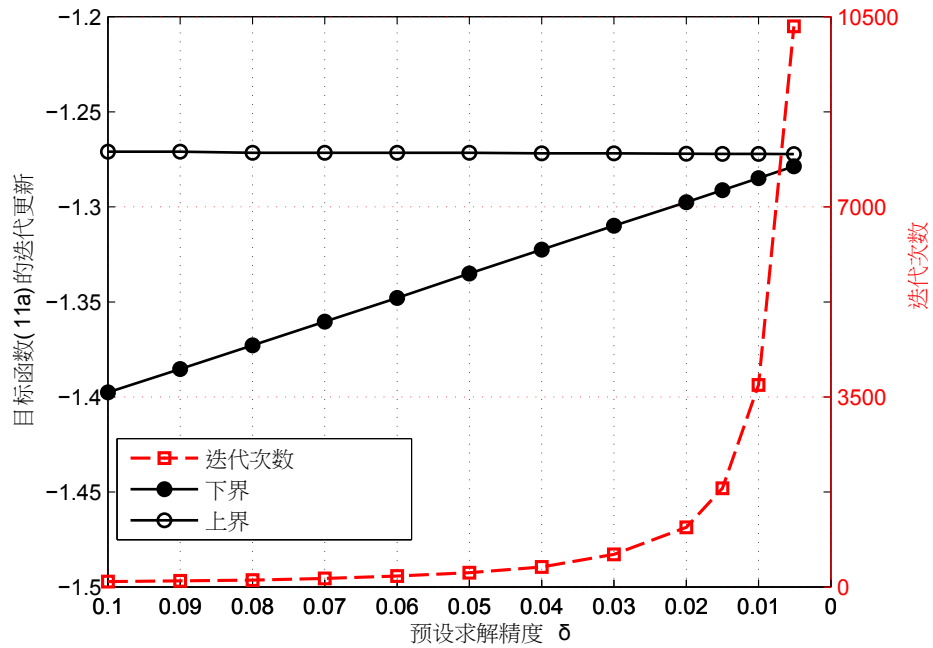


图 5.4 不同预设精度下所提算法得到的下界和上界及需要的迭代次数；输入信号为QPSK，SNR为-5 dB

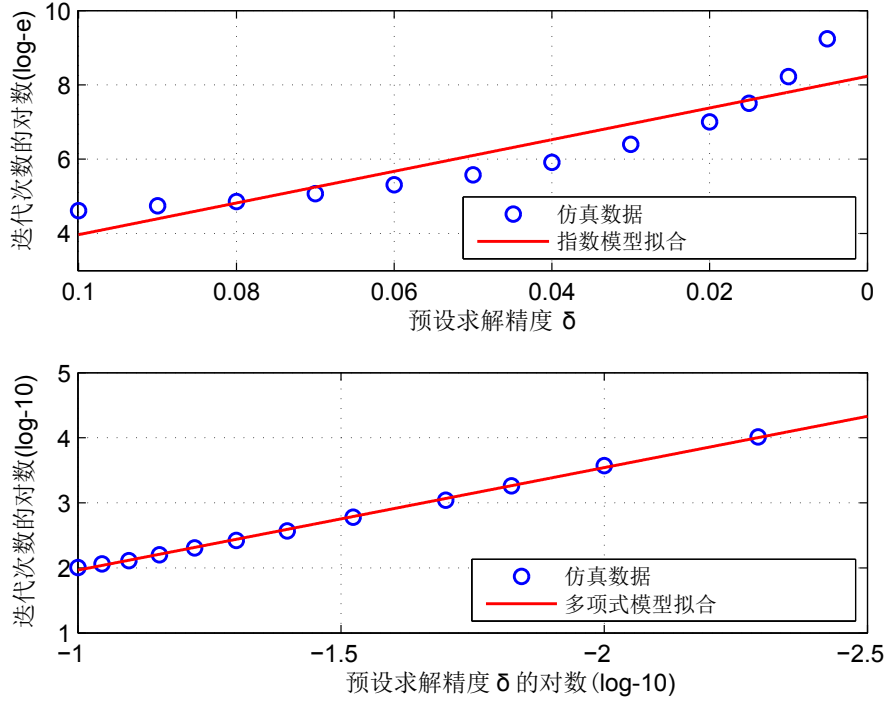


图 5.5 通过指数模型和多项式模型拟合迭代次数与预设精度的关系

也就是说，如果 δ 和 $\ln T$ 满足线性关系，则该指数模型成立。然而，图 5.5 上半部分通过回归分析得到的结果告诉我们：用指数模型来刻画 T 与 δ 的关系是不合适的。

下面我们来看迭代次数 T 与预设精度 δ 的多项式模型

$$T = a_1 \cdot \delta^{a_2}$$

是否成立。对等式两边取底为 10 的对数可以得到

$$\log_{10}(T) = \log_{10}(a_1) + a_2 \cdot \log_{10}(\delta).$$

这样一来，如果 $\log_{10}(T)$ 和 $\log_{10}(\delta)$ 满足线性关系则说明多项式模型是成立的。通过回归分析可以确定出 a_1 和 a_2 的参数，同时得到等式

$$T = 2.45 \cdot \delta^{-1.58}.$$

图 5.5 下半部分给出的结果表面多项式模型能够非常好的刻画迭代次数与预设精度的关系，这一结果同时也可以通过达到 99.9% 的 R^2 统计量（coefficient of determination^[171]）得以证实。直观来看，这里得到的关系表明每当预设精度提升 10 倍，例如 δ 由 0.1 提高至 0.01，迭代次数将增加 $10^{a_2} = 38$ 倍。

虽然迭代次数的增加比预设精度的提升快，但这并不意味着我们无法以低的计算开销获得全局最优解。通过观察并总结图 5.3 和图 5.4 给出的收敛曲线，我们

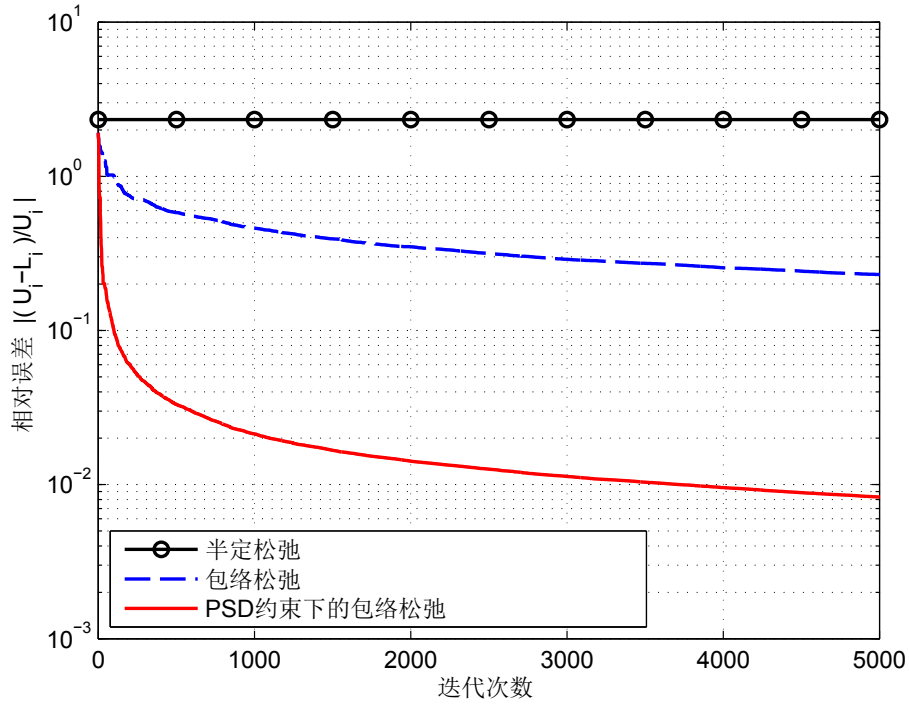


图 5.6 不同松弛方法相对误差的比较；输入信号是QPSK，SNR是-5 dB

可以得到如下结论：

1) 上界的收敛很快，只需几次迭代就不会继续减小，而下界的收敛相对较慢，需要多次迭代，最终使得上下界合拢。例如，10,000次迭代获得的上界为-1.272，而仅第一次迭代就达到了了99.5%的最优值，第100次迭代达到了99.9%的最优值。

2) 每次迭代得到的上界提供问题的可行解，它对应优化问题可达的目标值；每次迭代得到的下界从数学上给出当前解的性能。

3) 上界收敛速度非常快，这就表明可以利用所提算法以极低的计算代价获得近似最优的求解性能；也就是说，对于计算能力有限同时对求解精度要求不那么高的实际系统，可以只做几次迭代就可以获得非常好的解。

5.5.2 例二：不同松弛方法的比较

由推论5.2和推论5.3可知：不同的松弛方法性能不同。式(5-17)中带有PSD约束的凹凸包络松弛性能优于式(5-15)的没有PSD约束的凹凸包络松弛和式(5-18)的半定松弛SDR。我们通过下面的实例来验证这一结论。这里仿真所采用的信道参数与例一相同，三种松弛方法均采用高斯随机化方法获得秩一近似。随着迭代不断进行，三种松弛方法的相对误差由图 5.6给出。

正如第5.4.4节指出的，SDR方法通过引入与变量 \mathbf{p} 和 \mathcal{P} 不相关联的变量 \mathbf{Q} 来

求解问题，从而只能得到确定精度的解，无法通过迭代不断更新。然而，采用式(5-15)的包络松弛和式(5-17)带有PSD约束的包络松弛得到的解能够不断的迭代更新。其中，带有PSD约束因为下界得到改善，收敛速度会更快，参见推论5.2。

5.5.3 例三：不同预编码方法的性能比较

BAMIO算法的提出使得计算干扰约束下最优预编码和最大互信息成为可能。下面通过具体的例子来说明所提算法的性能。假设需要通过预编码对网络中的两个用户避免干扰，其中每个用户带有两个天线。收发机间的信道由式(5-20)给出，发射机到用户间的信道采用指数模型进行描述：

$$h_{i,jk} = \rho_i^{|j-k|}, \quad i = 1, 2 \quad (5-21)$$

其中 $h_{i,jk}$ 是矩阵 \mathbf{H}_i 的第 (j,k) 个元素， $j = 1, \dots, N_i$ ， $k = 1, \dots, N_i$ ， $\rho_i \in [0, 1)$ 。信道矩阵 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 由不同的参数生成： $\rho_1 = 0.95$ ， $\rho_2 = 0.85$ 。同时，发射功率约束 γ 等于 2，并考虑不同的干扰功率约束： $\gamma_i = +\infty, 0.2, 0.02$ 。当 γ_i 等于 $+\infty$ 时，干扰功率约束不起作用；当 γ_i 等于 0.2 和 0.02 时，每个用户所允许的最大干扰功率分别比发射功率低 10 dB 和 20 dB。这样一来，用户的干扰功率就被控制在可接受的范围之内了。

如果忽视实际输入信号与高斯信号的不同，采用基于高斯信号的假设设计满足干扰功率约束的预编码是一个凸优化问题，因而相对容易解决。我们将该方法命名为基于高斯假设的方法，下面通过大量例子来说明如果将基于高斯假设的方法应用于实际系统将导致性能的极度恶化。

直观来看，如果没有 BAMIO 这样的全局优化算法，可以在第 3 章开发的两步迭代算法的基础上进行适当的调整，得到如下的启发式预编码求解方法：

- 1) 采用文献中的已有算法，如[121,159]，针对没有干扰约束的问题(5-4)设计最优或近似最优的预编码；
- 2) 将第一步得到的解记为 $\tilde{\mathbf{P}}$ ，并通过乘以常系数使其满足所有的干扰约束：

$$\tilde{\mathbf{P}}^* = \frac{\tilde{\mathbf{P}}}{\sqrt{\max_{i=1, \dots, n} \text{Tr}(\tilde{\mathbf{P}}^H \mathbf{H}_i^H \mathbf{H}_i \tilde{\mathbf{P}}) / \gamma_i}}.$$

我们将这一方法称之为启发式算法，下面通过例子说明这一方法与能够得到全局最优解的 BAMIO 算法相比仍然导致极大的性能损失。

图5.7-图5.9是几种方法在不同干扰约束下的互信息性能。为了便于比较，几张图同时还给出了在相应情况下如果采用高斯输入所能够得到的容量上界。

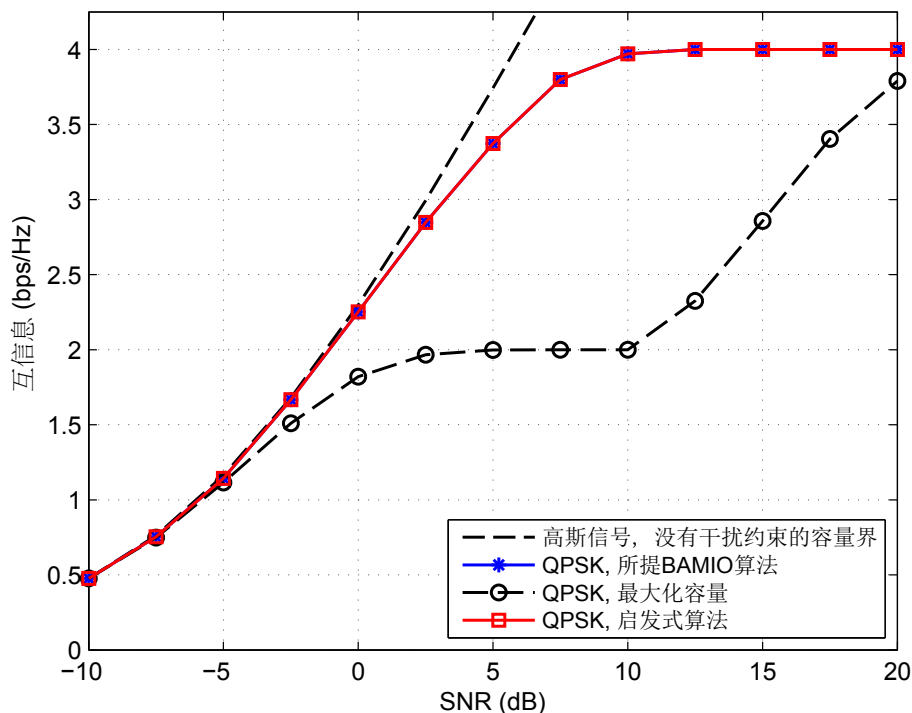


图 5.7 干扰可控环境下的不同算法互信息性能曲线；输入信号采用 QPSK 调制，发射功率约束 $\gamma = 2$ ，干扰功率约束暂不考虑，即 $\gamma_i = +\infty$ 。

当干扰约束不起作用时（相应结果见图5.7），所提BAMIO算法提供了求解问题(5-4)的全局最优解。此时，因为干扰约束不存在，启发式方法无须对解进行功率调整，将得到与BAMIO算法完全一样的最优结果。基于高斯输入的最大化容量设计得到的结果应用于实际输入信号性能非常差。这一结果也同时说明了高斯信号与实际输入信号的本质不同，从二者出发得到的预编码性能差异巨大。

当干扰约束起作用时，启发式方法通过降低发射功率满足干扰约束的同时也降低了传输速率。由图5.8和图5.9可以看出，干扰功率约束越严格，启发式方法的性能损失越大。例如：当信道编码的码率为3/4，启发式方法在 $\gamma_i = 0.2$ 和 $\gamma_i = 0.02$ 时的性能分别比BAMIO算法要差8.3 dB和 11.1 dB。

观察图5.7-图5.9中基于高斯最大化容量的方法可以发现它们都包含一个突变点，例如，图5.7，图5.8，图5.9的突变点分别为10 dB，12.5 dB和25 dB。突变点产生的原因在于假设的高斯信号与实际调制信号的极度不匹配。当信噪比小于突变点时，基于高斯的最大化容量方法使用信道质量好的信道，放弃使用信道质量差的信道（类似于注水方法）。这样就导致互信息小于2 bps/Hz；当信噪比大于突变点时，基于高斯的最大化容量方法开始使用信道质量差的信道，从而互信息大于2 bps/Hz。这样的方法在输入信号是高斯分布的时候是最优的，但用于实际系统时在不同的干扰约束下导致不同的性能恶化。例如，当信道编码码率为3/4，

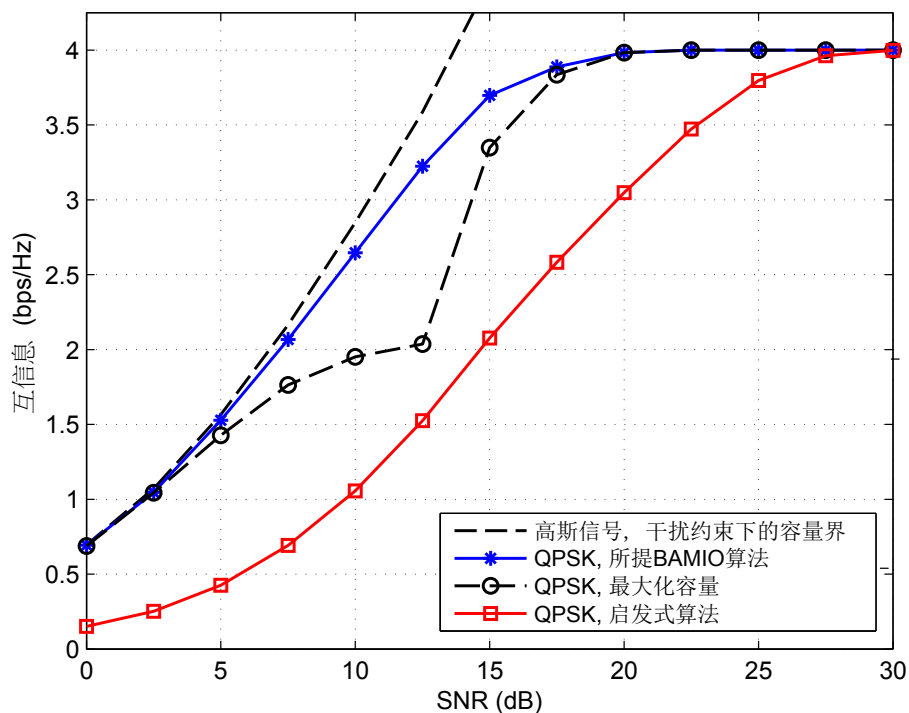


图 5.8 干扰可控环境下的不同算法互信息性能曲线；输入信号采用 QPSK 调制，发射功率约束 $\gamma = 2$ ，最大允许的干扰功率比发射功率小 10 dB，即 $\gamma_i = 0.2$ 。

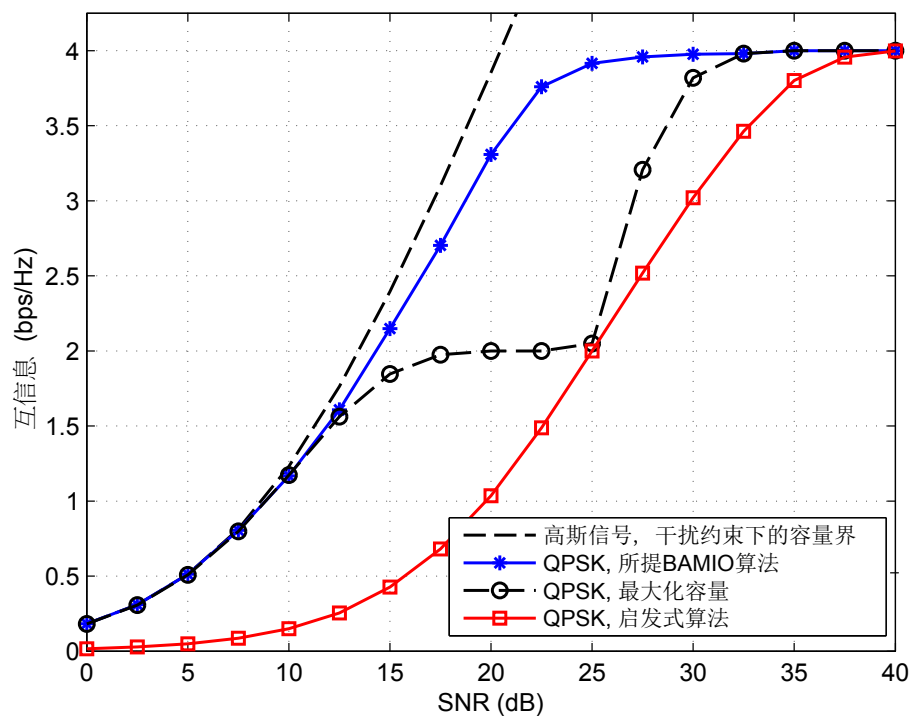


图 5.9 干扰可控环境下的不同算法互信息性能曲线；输入信号采用 QPSK 调制，发射功率约束 $\gamma = 2$ ，最大允许的干扰功率比发射功率小 20 dB，即 $\gamma_i = 0.02$ 。

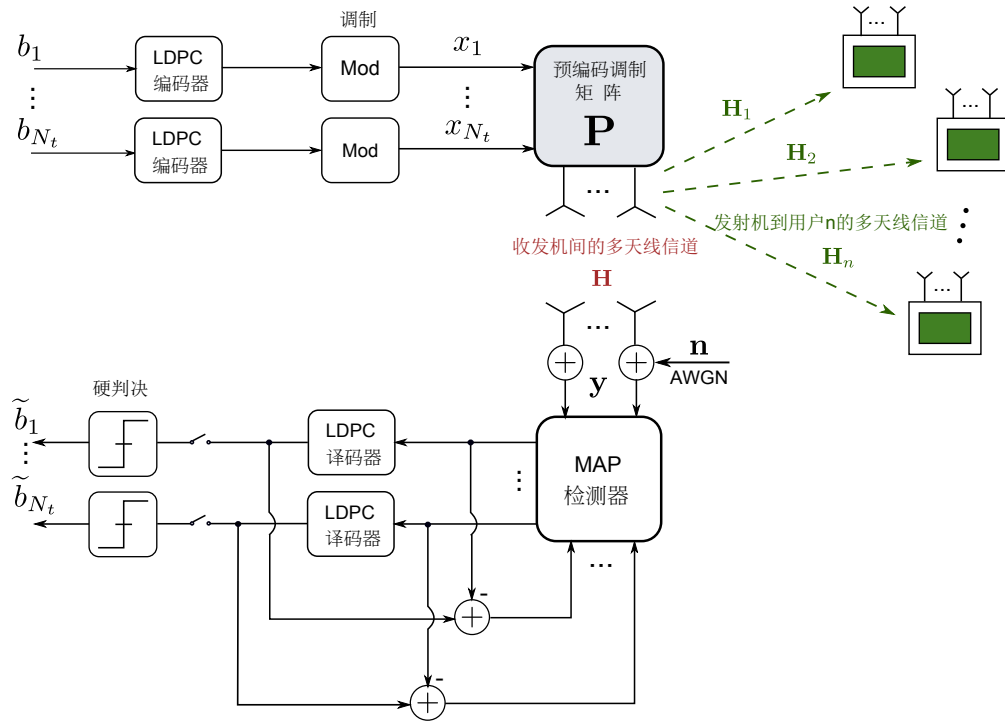


图 5.10 干扰可控预编码方法的BER性能评估框图

基于高斯信号的最大化容量方法在 $\gamma_i = +\infty, 0.2, 0.02$ 时，与BAMIO算法相比性能恶化分别为12.7 dB， 2.9 dB和 8.1 dB。

同时，由图5.7-图5.9可以看出，干扰约束的要求越苛刻，系统的可达速率就会越受限。例如，当SNR为5 dB时， $\gamma_i = +\infty, 0.2, 0.02$ 时，可达速率分别为3.74 bps/Hz， 1.53 bps/Hz， 0.51 bps/Hz。这样看来，如果希望收发机链路上获得满意的传输速率，应适当放宽干扰约束。

接下来比较上面几种方法在实际系统下的误码率性能。我们采用图5.10所示的收发机结构^[132]。值得注意的是文献[132]原有的交织器因本系统中LDPC编码的使用没有出现在图5.10中^[134]。发端的信号经LDPC编码后进行调制，映射到离散的星座点上。之后，经预编码模块 \mathbf{P} 进行信号的变换，适应信道后由 N_t 个天线发射。在接收端，最大后验检测器和译码器不断迭代并交互外信息直到收敛，以此方式估计发射信号。

仿真中采用的LDPC编译码模块取自软件包[135]，其码率设为3/4。最大后验检测器与LDPC译码器之间的迭代此时为5，编码后数据码长为7,200。图5.9中对几种算法的误比特率性能由图5.11给出。与图5.9给出的不同算法性能关系对应，所提BAMIO算法明显优于基于高斯信号的最大化容量方法和启发式方法。对比图5.9和图5.11可以看出，互信息曲线上的性能越好则误比特率曲线上的性能也越好。也就是说，我们采用互信息作为目标函数事实上为提升实际系统性能提供

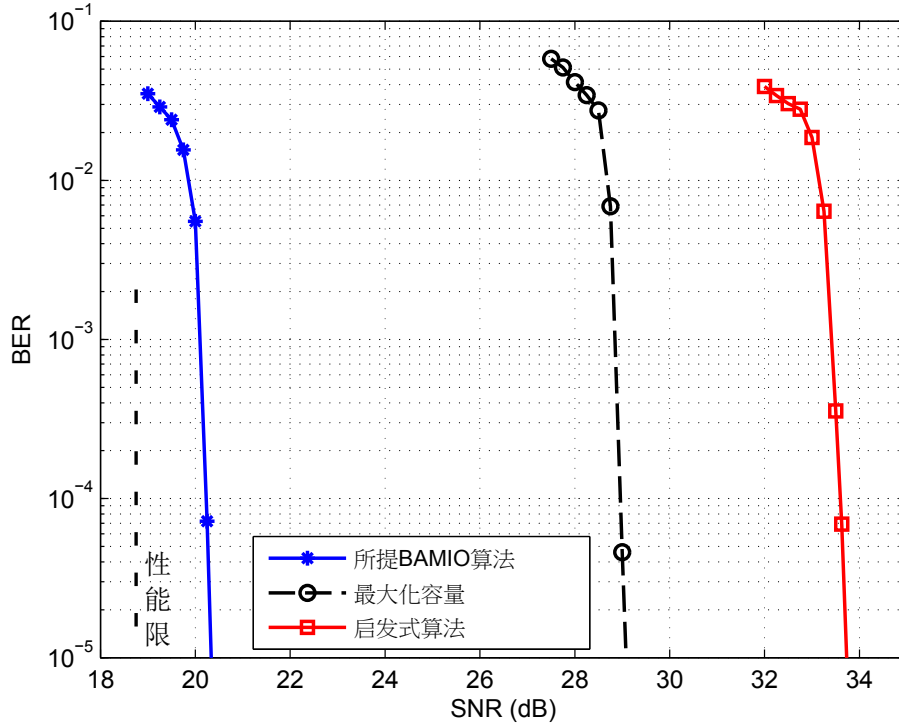


图 5.11 干扰可控预编码方法BER性能比较； QPSK调制，信道编码码率3/4，码长7,200，干扰约束 $\gamma_i = 0.02$

了一种绝佳的方案。

下面我们进一步来讨论系统中每个节点有4个天线时不同算法性能的差别。收发机之间的信道表示为

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Psi}_r \cdot \mathbf{\Psi}_t$$

其中 $\mathbf{\Psi}_r$ 和 $\mathbf{\Psi}_t$ 分别采用微蜂窝METRA模型中的收发相关矩阵^[88]。METRA模型是经由实际数据测试得到的信道模型，更为真实的反映了实际信道。发射机与用户之间的信道采用式(5-21)的指数模型，其参数设为 $\rho_1 = 0.95$ ， $\rho_2 = 0.85$ 。发射功率约束 γ 为4，可以保证采用预编码之后与之前的发射功率一致。干扰功率约束 γ_i ($i = 1, 2$)为 0.04，可以保证多个用户的最大接收功率比发射功率低20 dB。

图 5.12比较了BAMIO算法，最大化容量方法，启发式算法。可以看出，最大化容量方法的性能呈阶梯状上升。其原因在于该方法没有充分的利用信道资源。当SNR小于25 dB时，最大化容量方法仅使用一个子信道；当SNR在 25 dB和52.5 dB间时，它使用了两个子信道，并以此类推。当输入信号为高斯分布时这是容量可达的策略。然而，这一方法用于采用离散调制信号的实际系统则导致极大的性能损失。与此同时，启发式算法通过不断的减小发射功率来保证干扰功率满足约束。在低信噪比时比最大化容量方法差，在高信噪比时比最大化容量方法好。

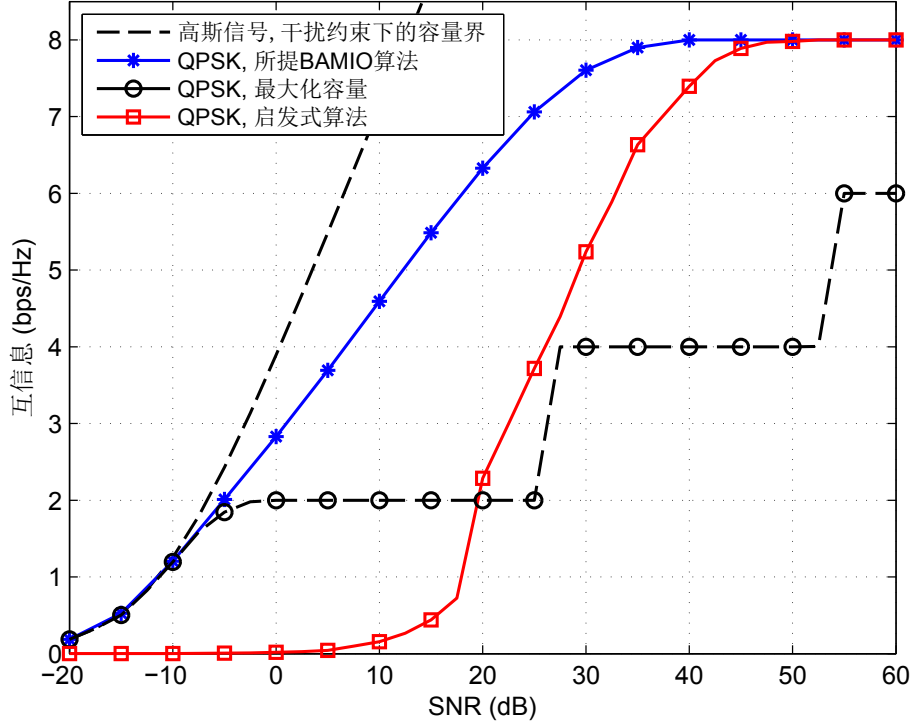


图 5.12 干扰可控环境下的不同算法互信息性能曲线；输入信号采用QPSK，发射功率约束 $\gamma = 4$ ，最大允许的干扰功率比发射功率小20 dB，即 $\gamma_i = 0.04$ ， 4×4 MIMO信道基于METRA相关模型

在BAMIO算法的参照下，我们知道两种方法都不够好。因为在不违反发射功率和干扰功率约束的前提下，BAMIO算法能得到巨大的增益。

5.6 附录A：问题(5-11)和 (5-15) 最优值关系的证明

证明 (定理 5.1的证明) 我们首先证明松弛问题(5-15)的最优解是问题 (5-11)的下界。如果 q_{ij} , $i, j = 1, \dots, 2N_t^2$, 等于 $p_i p_j$, 也即

$$\mathbf{Q} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^T$$

问题 (5-15) 与(5-11)完全等价。这时因为根据矩阵的性质

$$\text{Tr}(\mathbf{A}\mathbf{Q}) = \text{Tr}(\mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{p})$$

结果两个优化问题的目标函数和其第一、二个约束条件完全相同；同时，约束条件 (5-15c)、(5-15d)、(5-15e) 因冗余而无效。

如果 q_{ij} 通过凸包络和凹包络做松弛，其可行域被放大。因此，优化问题可能获得对应更小的目标函数的更好的解，即 $v^{\text{rx}}(\mathcal{P}) \leq v^{\text{MI}}(\mathcal{P})$ 。

下面我们证明随着变量空间的缩小，两个问题彼此收敛。我们首先证明当 $\epsilon \rightarrow 0$ ，松弛变量 q_{ij} 收敛到双线性项 $p_i p_j$ 。将球 $\mathcal{B}(\epsilon)$ 的中心点记为 \mathbf{p} ，根据凹包络的定义^[162,172]可以得到

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{cav}_{\mathcal{P}}(\bar{p}_i \bar{p}_j) - \bar{p}_i \bar{p}_j) \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} (p_i p_j) - \bar{p}_i \bar{p}_j \right) \end{aligned} \quad (5-22)$$

其中 \bar{p}_i 和 \bar{p}_j 分别是向量 \mathbf{p} 的第 i 和 j 个元素。因为 $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\epsilon)$ ，下式成立

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} (p_i p_j) - \bar{p}_i \bar{p}_j \right) \\ &\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\mathbf{p} \in \mathcal{B}(\epsilon)} (p_i p_j) - \bar{p}_i \bar{p}_j \right) = 0 \end{aligned} \quad (5-23)$$

其中等式源于函数 $p_i p_j$ 的连续性。表达式 (5-22) 和 (5-23) 表明凹包络 $\text{cav}_{\mathcal{P}}(p_i p_j)$ 收敛于 $p_i p_j$ ，也就是说，

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} (\text{cav}_{\mathcal{P}}(p_i p_j) - p_i p_j) = 0.$$

同样可证，凸包络 $\text{vex}_{\mathcal{P}}(p_i p_j)$ 也收敛于 $p_i p_j$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}} (\text{vex}_{\mathcal{P}}(p_i p_j) - p_i p_j) = 0.$$

结合包络函数的收敛特性，新的被约束在凸包络和凹包络之间的松弛变量 q_{ij} 将收敛于双线性函数，即

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} q_{ij} = p_i p_j. \quad (5-24)$$

下面，我们来证明优化值 $v^{\text{rlx}}(\mathcal{P})$ 和 $v^{\text{MI}}(\mathcal{P})$ 随着优化空间的变小，亦满足收敛特性

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (v^{\text{rlx}}(\mathcal{P}) - v^{\text{MI}}(\mathcal{P})) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \frac{\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\text{Tr}(\mathbf{A}_{mk} \mathbf{Q}))}{\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\mathbf{p}^T \mathbf{A}_{mk} \mathbf{p})} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \frac{\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\sum_{i,j} a_{mk,ij} \cdot q_{ij})}{\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\sum_{i,j} a_{mk,ij} \cdot p_i p_j)} \right) \\ &= \frac{1}{M^{N_t}} \sum_{m=1}^{M^{N_t}} \log \frac{\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\sum_{i,j} a_{mk,ij} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (q_{ij}))}{\sum_{k=1}^{M^{N_t}} \exp(\sum_{i,j} a_{mk,ij} \cdot p_i p_j)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

上述步骤的推导利用了极限的性质。 \square

下面我们证明推论5.1:

证明 (推论5.1的证明) 根据式 (5-24), 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 被约束于凸包络和凹包络之间的松弛变量收敛于 $\mathbf{p}\mathbf{p}^H$ 。这样, 松弛问题的解矩阵就一定保证秩为1, 并满足(5-11)中的所有约束条件。同时, 问题(5-11)的最优值与 (5-15)一样。因此, 优化问题 (5-15)秩1的解同时也是优化问题 (5-11)的解。 \square

5.7 附录B: 优化问题(5-11)、(5-17)、(5-18)收敛性及最优值关系的证明

我们首先证明所提BAMIO算法的全局收敛性:

证明 (定理5.2的证明) 所提BAMIO算法采用分支定界的思路。随着优化空间 \mathcal{P} 的不断减小, 即 $\epsilon \rightarrow 0$, 如果分支定界法所依赖的下界和上界能够保证收敛, 则算法一定保证全局收敛^[165]。具体到我们所讨论的问题, 定理 5.1 和推论 5.1保证了我们所采用的是一定收敛的。 \square

接下来我们证明加入半正定约束能够改进基于凸、凹包络的松弛方法, 从而有助于提供更好的最优解:

证明 (推论 5.2的证明) 因为优化问题 (5-17)的可行域严格小于问题 (5-15)的可行域, 因此前者的最优值将大于后者, 从而更逼近原问题的解 $v^{\text{MI}}(\mathcal{P})$ 。推论 5.2 的第二部分是定理 5.1的直接推广。结论之所以成立是因为 $v^{\text{imp}}(\mathcal{P})$ 比 $v^{\text{rlx}}(\mathcal{P})$ 更接近 $v^{\text{MI}}(\mathcal{P})$ 。 \square

最后, 我们证明问题(5-17)和 (5-18)的解的关系:

证明 (推论5.3的证明) 因为正半定矩阵 $\mathbf{p}\mathbf{p}^T$ 和基于凸、凹包络的线性约束, 问题 (5-17)的约束定义了一个比 (5-18)更小的可行域。因此, (5-19)的第一个不等式成立。其第二个不等式由推论 5.2得到。 \square

5.8 本章小结

本章考虑了多天线信道下的干扰避免问题, 目标是提升收发端传输速率的同时避免对网络中使用相同频率的其他用户造成干扰。提出了针对实际调制信号干扰控制下的互信息最大预编码算法, 全局最优的求解了这一理论难题。本章内容

是第3章和第4章讨论方法的极大扩展，不仅考虑了更为复杂和实际的问题，而且提出了全新的优化理论框架来求解这一问题。

所讨论的预编码问题是严格非凸的，但所提BAMIO算法能够保证通过多次迭代收敛到全局最优。该算法通过将预编码问题重新表述，表示为一个在多个相交的椭圆集合上最大化多个双线性函数组合成的非凸优化的问题。采用凸凹包络法得到了这一问题的松弛问题。通过在不断缩小的求解空间上对松弛问题求解，证明了算法最终能够收敛到全局最优。我们同时讨论了两种加速收敛的方法，并比较了几种可能的松弛方法对算法的影响。

数值仿真验证了所提方法得到的性能与复杂度的折衷关系。只需极低的计算代价，BAMIO算法就可以得到精度非常高的解。仿真表明与传统方法相比，在采用1/2码率的信道编码、QPSK调制的 4×4 MIMO信道下，最大增益超过15 dB。

第6章 结束语

6.1 论文工作总结

本论文以下一代无线通信系统中的多天线技术为背景，围绕面向实际调制信号的预编码调制技术展开，通过调整 and 改变发射信号结构，实现对复杂无线信道的匹配，最终达到提升实际系统性能的目的。论文通过对预编码调制技术中的三个重要问题的思考而依次展开，从不同的角度提升现有无线通信系统的传输性能。为说明三个研究内容之间的关系，下面结合图6.1来分别介绍。

本文讨论的起点是现有的多天线技术。因为没有充分发掘发射信号的结构，实际构建的多天线系统与理论预期的传输性能存在差距。以LTE系统为例，现有系统的传输速率只能达到MIMO (2×2) 容量界的一半；同时，在频谱效率一定的情况下，与MIMO容量界的距离在10 dB以上。为了提升实际多天线系统的传输性能，研究构建预编码调制的设计模型，以最大化调制约束的互信息为设计准则，以复矩阵为优化变量，以功率为约束条件，由此得到的解不仅能够改善频谱效率，还能大幅降低误码率。

研究内容一在完全信道状态信息下，通过预编码调制方法实现信号与信道的有效适配，从而使实际系统性能逼近传输性能限，参加图 6.1。针对预编码设计存在大量极值点，优化过程复杂的问题，将待设计预编码分解为三个部分，其中第一部分（左酉矩阵）匹配无线信道，利用最优的信号发射方向；第二部分（功率分配矩阵）控制发射信号的功率，对调制星座点进行扩张和收缩；第三部分（右酉矩阵）对调制星座点进行旋转。所提预编码设计算法收敛快速、对起始点不敏感，能够获得高的性能增益。仿真表明，在采用QPSK的 2×2 MIMO衰落信道下性能逼近理论界。

研究内容二讨论如何利用信道的统计规律。通过统计信道信息下预编码调制的优化设计，研究最大化平均互信息的预编码调制方法，降低信息交互量，达到减少系统实现成本的目的。针对平均互信息计算复杂，难以优化求解的问题，导出具有渐近最优且计算复杂度低6个数量级以上的平均互信息下界和上界，同时发现导出的下界加上一个确定常数后能够非常好的近似平均互信息。在此基础上，通过分析最优预编码结构，提出了优化功率分配和信号设计的两步迭代算法，高效求解了最大化平均互信息问题。因为信道统计特性变化的时间尺度非常低，采用统计设计的方法就解决了预编码设计带来的信息交互开销的问题。与传统方法相比，在采用QPSK的 4×4 实测微蜂窝信道下，最大增益超过4 dB。

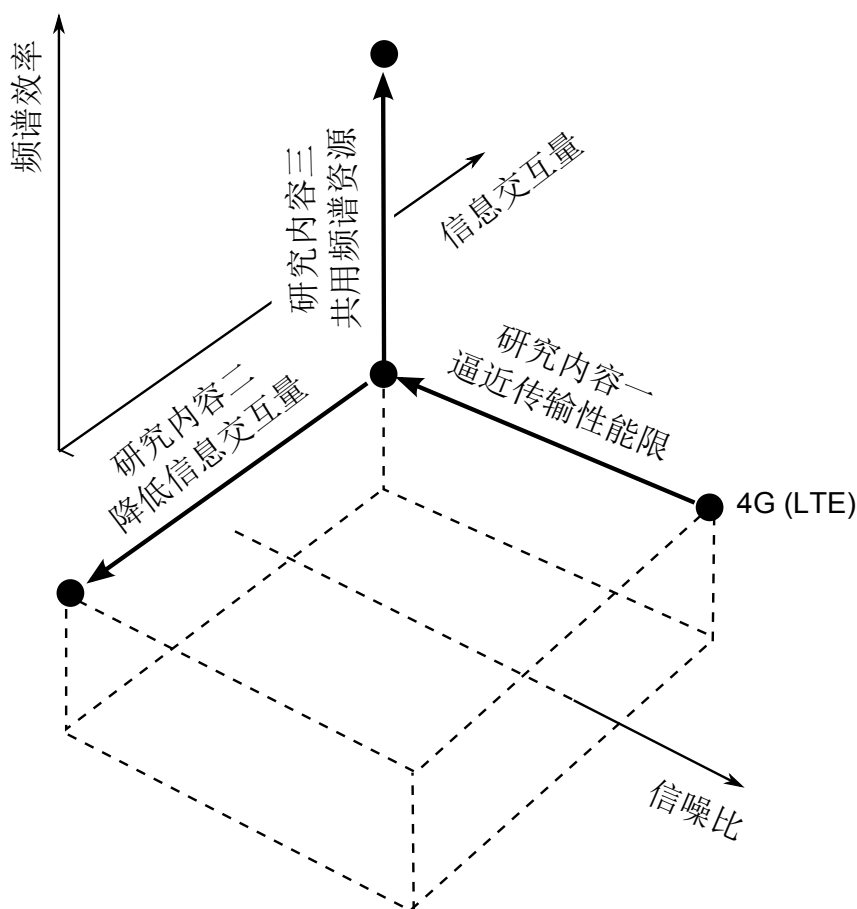


图 6.1 论文研究内容总结

研究内容三考虑频率资源共用，进一步提升频谱效率的预编码调制设计方法。频率资源共用最重要的问题是存在干扰，针对频率资源共用导致的干扰抑制难题，提出了一种基于凸凹包络法的优化方法，通过不断迭代缩小求解空间，有效克服了多极值NP难解问题，从而实现了提升收发端传输速率的同时有效约束了网络中共用频率资源用户的干扰功率，实现了用户间频率资源的共用。理论上证明了所提算法可达到全局最优，仿真表明与传统方法相比，在采用1/2码率的信道编码、QPSK调制的 4×4 MIMO信道下，最大增益超过15 dB。

6.2 下一步工作建议

本论文主要针对提升无线通信系统传输能力这一核心问题，围绕面向实际系统调制信号的预编码调制技术进行了研究。在现有研究成果的基础上，可以从以下几个方面进行进一步的探索：

1. 研究新传输场景下的预编码调制问题。本论文考虑了MIMO信道下完全信道状态信息、统计信道状态信息及干扰约束下的预编码调制设计。由于所讨论模型的可扩展性，可以继续研究中继信道（relay channels）、多址信道（multiple-

access channels)、广播信道(broadcasting channels)、干扰信道(interference channels)、窃听安全信道(wiretap channels)等场景下的传输问题,从而扩展所提方法的适用范围。

2. 研究配合更高阶调制和更多天线数目下的预编码调制问题。讨论更高阶调制(例如,16-QAM、64-QAM等)以及更多天线数目(例如, 8×8 、 16×16 等)下如何用可以接受的计算复杂度获得满足性能的预编码解。此时的设计可以从两个方面入手。一方面是限制预编码的结构,将预编码设计问题从本论文讨论的一般复矩阵限制为具有某种特殊的结构,从而在不会导致性能严重恶化的同时,极大的降低设计复杂度。另一方面是研究低复杂度的优化方法,通过少量的迭代和计算获得近似最优的预编码解。

3. 研究与其他高效传输技术相结合的预编码调制方法。例如,研究MIMO-OFDMA技术体制下的联合资源分配和预编码调制方法,从而有效利用无线传播环境所具有的时间、频率和空间资源;设计与自适应编码调制技术结合的预编码调制方法,从而在传输性能接近饱和时,采用更高阶的调制方式;讨论有限反馈下的预编码调制方法,设计预编码调制矩阵的集合,在反馈受限的情况下提升实际系统传输性能。

4. 研究非对称调制和非线性预编码调制方法。非对称调制的互信息计算较之对称调制来说是一样的,区别在于星座点的位置参数不同。事实上,本论文给出的仿真分析讨论通过预编码将某种调制信号(如BPSK、QPSK等)变换为非对称的调制信号,从而获得更大的互信息。这里所讨论的非对称调制受限于某种调制方式的线性变换,更一般的非对称调制甚至可以通过非线性变换得到,从而研究非线性预编码。针对实际调制信号的多天线非线性预编码到目前为止没有有效的理论和方法,值得进一步深入思考。

参考文献

- [1] 科学技术部. 国家“十二五”科学和技术发展规划, 2011.
- [2] International Telecommunications Union (ITU). Key ICT indicators for developed and developing countries and the world, 2011.
- [3] Brian M. Apple hits 25 billion App Store downloads. USA TODAY, 2012.
- [4] Sesia S, Toufik I, Baker M. LTE—The UMTS Long Term Evolution, 2009.
- [5] Lu J, Jia Y, Xing T, et al. Multidomain collaboration: A new framework of wireless networks with high transmission capacity. IEEE Wireless Commun., 2011, 18(4):13–21.
- [6] Whitney L. LTE subscribers to hit 200 million by 2015. CNET, CBS Interactive., 2010.
- [7] 工业和信息化部电信研究院. 2011年移动互联网白皮书, 2011.
- [8] Cisco. Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2011–2016. Cisco Visual Networking Index, 2012.
- [9] Choney S. Verizon has third data outage in a month. NBC News, 2012.
- [10] Wortham J. Customers Angered as iPhones Overload AT&T. The New York Times, Sep. 2011.
- [11] Metroka M. An introduction to narrowband AMPS. Proceedings of IEEE Globecom, 1991. 1463–1468.
- [12] European Telecommunications Standards Institute. GSM, 2011.
- [13] EIA/TIA-95 Rev A. Mobile station-base station compatibility standard for dual-mode wide-band spread spectrum cellular system, 1995.
- [14] Tse D, Viswanath P. Fundamentals of Wireless Communication. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [15] Viterbi A, et al. CDMA: Principles of spread spectrum communication, volume 129. Addison-Wesley Norwell, MA, 1995.
- [16] Furuskar A, Mazur S, Muller F, et al. EDGE: Enhanced data rates for GSM and TDMA/136 evolution. IEEE Personal Commun., 1999, 6(3):56–66.
- [17] Prasad R, Mohr W, Konhauser W. Third generation mobile communication systems. Artech House, Inc., 2000.
- [18] Safwat A, Mouftah H. 4G network technologies for mobile telecommunications. IEEE Network, 2005, 19(5):3–4.
- [19] Lera A, Molinaro A, Polito S, et al. End-to-end QoS provisioning in 4G with mobile hotspots. IEEE Network, 2005, 19(5):26–34.
- [20] Chen H, Guizani M, Wiley J. Next generation wireless systems and networks. Wiley Online Library, 2006.
- [21] Astély D, Dahlman E, Furuskar A, et al. LTE: the evolution of mobile broadband. IEEE Commun. Mag., 2009, 47(4):44–51.
- [22] Dahlman E. 3G evolution: HSPA and LTE for mobile broadband. Academic Press, 2008.

- [23] Andrews J, Ghosh A, Muhamed R. Fundamentals of WiMAX: understanding broadband wireless networking. Prentice Hall, 2007.
- [24] Gesbert D, Bolcskei H, Gore D, et al. Outdoor MIMO wireless channels: Models and performance prediction. *IEEE Trans. Commun.*, 2002, 50(12):1926–1934.
- [25] Gesbert D, Shafi M, Shiu D, et al. From theory to practice: an overview of MIMO space-time coded wireless systems. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2003, 21(3):281–302.
- [26] Palomar D, Cioffi J, Lagunas M. Joint Tx-Rx beamforming design for multicarrier MIMO channels: A unified framework for convex optimization. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2003, 51(9):2381–2401.
- [27] Paulraj A, Gore D, Nabar R, et al. An overview of MIMO communications—a key to gigabit wireless. *Proc. IEEE*, 2004, 92(2):198–218.
- [28] Nee R, Prasad R. OFDM for wireless multimedia communications. Artech House, Inc., 2000.
- [29] Sampath H, Talwar S, Tellado J, et al. A fourth-generation MIMO-OFDM broadband wireless system: design, performance, and field trial results. *IEEE Commun. Mag.*, 2002, 40(9):143–149.
- [30] Bolcskei H. MIMO-OFDM wireless systems: basics, perspectives, and challenges. *IEEE Wireless Commun.*, 2006, 13(4):31–37.
- [31] 张丹华. 协作OFDMA系统无线资源管理关键技术研究[D]. 清华大学, 2011.
- [32] Deruyck M, Vereecken W, Tanghe E, et al. Comparison of power consumption of mobile WiMAX, HSPA and LTE access networks. *Proceedings of Telecommunications Internet and Media Techno Economics. IEEE*, 2010. 1–7.
- [33] Mehlführer C, Colom Colom Ikuno J, Šimko M, et al. The Vienna LTE simulators-Enabling reproducibility in wireless communications research. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2011, 2011(1):1–14.
- [34] Rusek F, Persson D, Lau B, et al. Scaling up MIMO: Opportunities and challenges with very large arrays. Accepted for publication in the *IEEE Signal Processing Magazine*, 2012..
- [35] 王京. 新一代无线通信系统的“绿色”思考, 2009.
- [36] Andrews J, Choi W, Heath R. Overcoming interference in spatial multiplexing MIMO cellular networks. *IEEE Wireless Commun.*, 2007, 14(6):95–104.
- [37] Gesbert D, Hanly S, Huang H, et al. Multi-cell MIMO cooperative networks: A new look at interference. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2010, 28(9):1380–1408.
- [38] Akyildiz I, Lee W, Vuran M, et al. NeXt generation/dynamic spectrum access/cognitive radio wireless networks: a survey. *Computer Networks*, 2006, 50(13):2127–2159.
- [39] Ghasemi A, Sousa E. Fundamental limits of spectrum-sharing in fading environments. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2007, 6(2):649–658.
- [40] Ji Z, Liu K. Cognitive radios for dynamic spectrum access—dynamic spectrum sharing: A game theoretical overview. *IEEE Commun. Mag.*, 2007, 45(5):88–94.
- [41] Ghasemi A, Sousa E. Interference aggregation in spectrum-sensing cognitive wireless networks. *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, 2008, 2(1):41–56.

- [42] Liang Y, Chen K, Li Y G, et al. Cognitive Radio Networking and Communications: An Overview. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 2011, 60(7):3386–3407.
- [43] Zheng L, Tse D. Diversity and multiplexing: A fundamental tradeoff in multiple-antenna channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2003, 49(5):1073–1096.
- [44] Heath R, Paulraj A. Switching between diversity and multiplexing in MIMO systems. *IEEE Trans. Commun.*, 2005, 53(6):962–968.
- [45] Love D, Heath R, Lau V, et al. An overview of limited feedback in wireless communication systems. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2008, 26(8):1341–1365.
- [46] Lau V, Liu Y, Chen T. On the design of MIMO block-fading channels with feedback-link capacity constraint. *IEEE Trans. Commun.*, 2005, 52(1):62–70.
- [47] Love D, Heath Jr R, Strohmer T. Grassmannian beamforming for multiple-input multiple-output wireless systems. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2003, 49(10):2735–2747.
- [48] Goldsmith A, Jafar S, Jindal N, et al. Capacity limits of MIMO channels. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2003, 21(5):684–702.
- [49] Cover T, Thomas J. *Elements of Information Theory*. 2 ed., New York: Wiley, 2006.
- [50] Foschini G. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas. *Bell labs technical journal*, 1996, 1(2):41–59.
- [51] Lin S, Costello D. *Error control coding: fundamentals and applications*. Pearson Education, 2004.
- [52] Spencer Q, Swindlehurst A, Haardt M. Zero-forcing methods for downlink spatial multiplexing in multiuser MIMO channels. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2004, 52(2):461–471.
- [53] Wang C, Au E, Murch R, et al. On the performance of the MIMO zero-forcing receiver in the presence of channel estimation error. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2007, 6(3):805–810.
- [54] Bohnke R, Wubben D, Kuhn V, et al. Reduced complexity MMSE detection for BLAST architectures. *Proceedings of IEEE Globecom*, volume 4, 2003. 2258–2262.
- [55] Wubben D, Bohnke R, Kuhn V, et al. Near-maximum-likelihood detection of MIMO systems using MMSE-based lattice reduction. *Proceedings of IEEE Int. Conf. Commun. (ICC)*, volume 2. IEEE, 2004. 798–802.
- [56] Tidestav C, AHLen A, Sternad M. Realizable MIMO decision feedback equalizers: structure and design. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2001, 49(1):121–133.
- [57] Proakis J G. *Digital Communications*. 5th ed., New York: McGrawHill, Inc., 2007.
- [58] Sklar B. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*. Upper Saddle River, New Jersey, 2003.
- [59] Vikalo H, Hassibi B, Kailath T. Iterative decoding for MIMO channels via modified sphere decoding. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2004, 3(6):2299–2311.
- [60] Guo Z, Nilsson P. Algorithm and implementation of the K-best sphere decoding for MIMO detection. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2006, 24(3):491–503.
- [61] Steingrimsson B, Luo Z, Wong K. Soft quasi-maximum-likelihood detection for multiple-antenna wireless channels. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2003, 51(11):2710–2719.

- [62] Mobasher A, Taherzadeh M, Sotirov R, et al. A near-maximum-likelihood decoding algorithm for MIMO systems based on semi-definite programming. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2007, 53(11):3869–3886.
- [63] Gresset N, Brunel L, Boutros J. Space-Time Coding Techniques With Bit-Interleaved Coded Modulations for MIMO Block-Fading Channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2008, 54(5):2156–2178.
- [64] Martinez A, Caire G, et al. Bit-Interleaved Coded Modulation. 2008..
- [65] Sampath H, Paulraj A. Linear precoding for space-time coded systems with known fading correlations. *Communications Letters, IEEE*, 2002, 6(6):239–241.
- [66] Love D, Heath Jr R, Santipach W, et al. What is the value of limited feedback for MIMO channels? *IEEE Commun. Mag.*, 2004, 42(10):54–59.
- [67] Serbetli S, Yener A. Transceiver optimization for multiuser MIMO systems. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2004, 52(1):214–226.
- [68] Love D, Heath R. Limited feedback unitary precoding for spatial multiplexing systems. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2005, 51(8):2967–2976.
- [69] Palomar D, Jiang Y. *MIMO Transceiver Design via Majorization Theory*. Delft, The Netherlands: Now Publishers, 2006.
- [70] Gesbert D, Kountouris M, Heath R, et al. Shifting the MIMO paradigm. *IEEE Signal Process. Mag.*, 2007, 24(5):36–46.
- [71] Vu M, Paulraj A. MIMO Wireless Linear Precoding. *IEEE Signal Process. Mag.*, 2007, 24(5):86–105.
- [72] Santipach W, Honig M. Capacity of a Multiple-Antenna Fading Channel With a Quantized Precoding Matrix. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2009, 55(3):1218–1234.
- [73] Payaró M, Palomar D P. On optimal precoding in linear vector Gaussian channels with arbitrary input distribution. *Proceedings of IEEE Int. Symp. Inform. Theory (ISIT)*, Seoul, Korea, 2009. 1085–1089.
- [74] Pérez-Cruz F, Rodrigues M, Verdú S. MIMO Gaussian Channels With Arbitrary Inputs: Optimal Precoding and Power Allocation. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2010, 56(3):1070–1084.
- [75] IEEE 80216e. Part 16: Air interface for fixed and mobile broadband wireless access systems. *IEEE Standards*, Oct., 2005.
- [76] Raleigh G, Cioffi J. Spatio-temporal coding for wireless communication. *IEEE Trans. Commun.*, 1998, 46(3):357–366.
- [77] Scaglione A, Giannakis G, Barbarossa S. Redundant filterbank precoders and equalizers. I. Unification and optimal designs. *IEEE Trans. Signal Process.*, 1999, 47(7):1988–2006.
- [78] Gray R. On the asymptotic eigenvalue distribution of Toeplitz matrices. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1972, 18(6):725–730.
- [79] Goldsmith A. *Wireless Communications*. Cambridge, U.K: Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [80] Bingham J. Multicarrier modulation for data transmission: An idea whose time has come. *IEEE Commun. Mag.*, 1990, 28(5):5–14.

- [81] Stuber G, Barry J, Mclaughlin S, et al. Broadband MIMO-OFDM wireless communications. *Proc. IEEE*, 2004, 92(2):271–294.
- [82] Kivanc D, Li G, Liu H. Computationally efficient bandwidth allocation and power control for OFDMA. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2003, 2(6):1150–1158.
- [83] Chuah C, Tse D, Kahn J, et al. Capacity scaling in MIMO wireless systems under correlated fading. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2002, 48(3):637–650.
- [84] Shiu D, Foschini G, Gans M, et al. Fading Correlation and Its Effect on the Capacity of Multielement Antenna Systems. *IEEE Trans. Commun.*, 2000, 48(3):502–513.
- [85] Shin H, Lee J. Capacity of multiple-antenna fading channels: Spatial fading correlation, double scattering, and keyhole. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2003, 49(10):2636–2647.
- [86] Chiani M, Win M, Zanella A. On the capacity of spatially correlated MIMO Rayleigh-fading channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2003, 49(10):2363–2371.
- [87] Oyman O, Nabar R, Bolcskei H, et al. Characterizing the statistical properties of mutual information in MIMO channels. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2003, 51(11):2784–2795.
- [88] Kermoal J, Schumacher L, Pedersen K, et al. A stochastic MIMO radio channel model with experimental validation. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2002, 20(6):1211–1226.
- [89] Kermoal J. Measurement, modelling and performance evaluation of the MIMO radio channel[D]. Aalborg, Denmark: Aalborg University, Aug., 2002.
- [90] Jorswieck E, Boche H. Transmission strategies for the MIMO MAC with MMSE receiver: Average MSE optimization and achievable individual MSE region. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2003, 51(11):2872–2881.
- [91] Sharif M, Hassibi B. On the capacity of MIMO broadcast channels with partial side information. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2005, 51(2):506–522.
- [92] Laneman J, Tse D, Wornell G. Cooperative diversity in wireless networks: Efficient protocols and outage behavior. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2004, 50(12):3062–3080.
- [93] Nosratinia A, Hunter T, Hedayat A. Cooperative communication in wireless networks. *IEEE Commun. Mag.*, 2004, 42(10):74–80.
- [94] Sendonaris A, Erkip E, Aazhang B. User cooperation diversity. Part I. System description. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, 51(11):1927–1938.
- [95] Jing Y, Jafarkhani H. Network Beamforming Using Relays With Perfect Channel Information. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2009, 55(6):2499–2517.
- [96] Zhang Y, Zheng G, Ji C, et al. Near-Optimal Joint Antenna Selection for Amplify-and-Forward Relay Networks. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2011..
- [97] Zeng W, Xiao C, Wang Y, et al. Opportunistic Cooperation for Multi-Antenna Multi-Relay Networks. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2010, 9(10):3189–3199.
- [98] Wang B, Zhang J, Host-Madsen A. On the capacity of MIMO relay channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2005, 51(1):29–43.
- [99] Bolcskei H, Nabar R, Oyman O, et al. Capacity scaling laws in MIMO relay networks. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2006, 5(6):1433–1444.

- [100] Zeng W, Zheng Y, Wang M, et al. Linear precoding for relay networks: a perspective on finite-alphabet inputs. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2012, 11(3):1146–1157.
- [101] Paulraj A, Nabar R, Gore D. *Introduction to Space-Time Wireless Communications*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2003.
- [102] Bertsekas D, Nedi A, Ozdaglar A, et al. *Convex analysis and optimization*. 2003..
- [103] Boyd S, Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2004.
- [104] Visotsky E, Madhow U. Space-time transmit precoding with imperfect feedback. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2001, 47(6):2632–2639.
- [105] Jafar S, Goldsmith A. Transmitter optimization and optimality of beamforming for multiple antenna systems. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2004, 3(4):1165–1175.
- [106] Soysal A, Ulukus S. Optimum power allocation for single-user MIMO and multi-user MIMO-MAC with partial CSI. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2007, 25(7):1402–1412.
- [107] Boutros J, Viterbo E. Signal space diversity: A power-and bandwidth-efficient diversity technique for the Rayleigh fading channel. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1998, 44(4):1453–1467.
- [108] Xin Y, Wang Z, Giannakis G. Space-time diversity systems based on linear constellation precoding. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2003, 2(2):294–309.
- [109] Collin L, Berder O, Rostaing P, et al. Optimal minimum distance-based precoder for MIMO spatial multiplexing systems. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2004, 52(3):617–627.
- [110] Vrineau B, Letessier J, Rostaing P, et al. Extension of the MIMO precoder based on the minimum Euclidean distance: A cross-form matrix. *IEEE J. Sel. Signal Process.*, 2008, 2(2):135–146.
- [111] Ngo Q, Berder O, Scalart P. Minimum Euclidean Distance-Based Precoding for Three-Dimensional Multiple Input Multiple Output Spatial Multiplexing Systems. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2012, 11(7):2486–2495.
- [112] Gallager R. *Information theory and reliable communication*. 1968..
- [113] Biglieri E. *Coding for Wireless Channels*. New York, NY: Springer, 2005.
- [114] Xiao C, Zheng Y R. On the Mutual Information and Power Allocation for Vector Gaussian Channels with Finite Discrete Inputs. *Proceedings of IEEE Globecom*, New Orleans, LA, 2008.
- [115] Lozano A, Tulino A, Verdú S. Optimum power allocation for parallel Gaussian channels with arbitrary input distributions. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2006, 52(7):3033–3051.
- [116] Guo D, Shamai S, Verdú S. Mutual information and minimum mean-square error in Gaussian channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2005, 51(4):1261–1282.
- [117] Palomar D, Verdú S. Gradient of mutual information in linear vector Gaussian channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2006, 52(1):141–154.
- [118] Wang M, Zeng W, Xiao C. Linear Precoding for MIMO Multiple Access Channels with Finite Discrete Inputs. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2011, 10(11):3934–3942.
- [119] Payaró M, Palomar D P. Hessian and Concavity of Mutual Information, Differential Entropy, and Entropy Power in Linear Vector Gaussian Channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2009, 55(8):3613–3628.

- [120] Lamarca M. Linear precoding for mutual information maximization in MIMO systems. *Proceedings of Int. Symp. on Wireless Commun. Syst. (ISWCS)*, 2009. 26–30.
- [121] Xiao C, Zheng Y R, Ding Z. Globally Optimal Linear Precoders for Finite Alphabet Signals Over Complex Vector Gaussian Channels. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2011, 59(7):3301–3314.
- [122] Grant M, Boyd S. CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 1.21, retrieved Apr., 2011. <http://cvxr.com/cvx>.
- [123] Sturm J. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, 1999, 11(1-4):625–653.
- [124] Absil P, Mahony R, Sepulchre R. *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*. Princeton University Press, 2008.
- [125] Manton J H. Optimization algorithms exploiting unitary constraints. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2002, 50(3):635–650.
- [126] Horn R, Johnson C. *Matrix Analysis*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1985.
- [127] Murnaghan F. *Lectures on Applied Mathematics: The Unitary and Rotation Groups*, volume 3. Washington, DC: Spartan Books, 1962.
- [128] Ding Y, Zhang J, Wong K. The amplify-and-forward half-duplex cooperative system: Pairwise error probability and precoder design. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2007, 55(2):605–617.
- [129] Ding Y, Zhang J, Wong K. Optimal Precoder for Amplify-and-Forward Half-Duplex Relay System. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2008, 7(8):2890–2895.
- [130] Behbahani A S, Merched R, Eltawil A M. Optimizations of a MIMO Relay Network. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2008, 56(10):5062–5073.
- [131] Mo R, Chew Y. Precoder design for non-regenerative MIMO relay systems. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2009, 8(10):5041–5049.
- [132] Hochwald B, Ten Brink S. Achieving near-capacity on a multiple-antenna channel. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, 51(3):389–399.
- [133] Koetter R, Singer A, Tuchler M. Turbo equalization. *IEEE Signal Process. Mag.*, 2004, 21(1):67–80.
- [134] Lu B, Wang X, Narayanan K. LDPC-based space-time coded OFDM systems over correlated fading channels: Performance analysis and receiver design. *IEEE Trans. Commun.*, 2002, 50(1):74–88.
- [135] Valenti M. Iterative solutions coded modulation library (ISCML). <http://www.iterativesolutions.com/Matlab.htm>.
- [136] Zhang X. *Matrix Analysis and Applications*. Tsinghua University Press, Beijing, 2004.
- [137] Hjørungnes A. *Complex-Valued Matrix Derivatives: With Applications in Signal Processing and Communications*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2011.
- [138] Magnus J, Neudecker H. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. 3 ed., New York: Wiley, 2007.
- [139] Xiao C, Wu J, Leong S, et al. A discrete-time model for triply selective MIMO Rayleigh fading channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2004, 3(5):1678–1688.

- [140] Xiao C, Zheng Y R. Transmit Precoding for MIMO Systems with Partial CSI and Discrete-Constellation Inputs. *Proceedings of IEEE Int. Conf. Commun. (ICC)*, 2009. 1–5.
- [141] Jorswieck E, Boche H. Channel capacity and capacity-range of beamforming in MIMO wireless systems under correlated fading with covariance feedback. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2004, 3(5):1543–1553.
- [142] Shin H, Win M, Lee J, et al. On the capacity of doubly correlated MIMO channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2006, 5(8):2253–2265.
- [143] Gradshteyn I, Ryzhik I. *Table of Integrals, Series, and Products*. 7 ed., New York: Academic, 2007.
- [144] Hassibi B, Marzetta T. Multiple-antennas and isotropically random unitary inputs: The received signal density in closed form. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2002, 48(6):1473–1484.
- [145] Mitola III J, Maguire Jr G. Cognitive radio: making software radios more personal. *IEEE Personal Commun.*, 1999, 6(4):13–18.
- [146] Haykin S. Cognitive radio: Brain-empowered wireless communications. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2005, 23(2):201–220.
- [147] Devroye N, Mitran P, Tarokh V. Achievable rates in cognitive radio channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2006, 52(5):1813–1827.
- [148] Ma J, Li Y G, Juang B. Signal processing in cognitive radio. *Proc. IEEE*, 2009, 97(5):805–823.
- [149] Goldsmith A, Jafar S, Maric I, et al. Breaking spectrum gridlock with cognitive radios: An information theoretic perspective. *Proc. IEEE*, 2009, 97(5):894–914.
- [150] Gastpar M. On capacity under receive and spatial spectrum-sharing constraints. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2007, 53(2):471–487.
- [151] Zhang R, Liang Y, Cui S. Dynamic resource allocation in cognitive radio networks. *IEEE Signal Process. Mag.*, 2010, 27(3):102–114.
- [152] Le L, Hossain E. Resource allocation for spectrum underlay in cognitive radio networks. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2008, 7(12):5306–5315.
- [153] Zhang L, Zhang R, Liang Y, et al. On the relationship between the multi-antenna secrecy communications and cognitive radio communications. *IEEE Trans. Commun.*, 2010, 58(6):1877–1886.
- [154] Zhang R, Liang Y. Exploiting multi-antennas for opportunistic spectrum sharing in cognitive radio networks. *IEEE J. Sel. Top. Signal Process.*, 2008, 2(1):88–102.
- [155] Caire G, Kumar K. Information theoretic foundations of adaptive coded modulation. *Proc. IEEE*, 2007, 95(12):2274–2298.
- [156] Wen C, Wong K. Asymptotic analysis of spatially correlated MIMO multiple-access channels with arbitrary signaling inputs for joint and separate decoding. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2007, 53(1):252–268.
- [157] Harshan J, Rajan B. On Two-User Gaussian Multiple Access Channels With Finite Input Constellations. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2011, 57(3):1299–1327.
- [158] 陶晓明, 曾维亮, 李少阳, 葛宁, 陆建华. 基于预编码调制的协同发送方法、接收方法以及通信装置. 专利公开号: 201210310910.0.

-
- [159] Zeng W, Xiao C, Lu J. A Low-Complexity Design of Linear Precoding for MIMO Channels with Finite-Alphabet Inputs. *IEEE Wireless Commun Letters*, 2012, 1(1):38–41.
 - [160] Horn R, Johnson C. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1994.
 - [161] Nemirovski A, Roos C, Terlaky T. On maximization of quadratic form over intersection of ellipsoids with common center. *Math. Program.*, 1999, 86(3):463–473.
 - [162] Al-Khayyal F, Larsen C, Van Voorhis T. A relaxation method for nonconvex quadratically constrained quadratic programs. *J. Global Optim.*, 1995, 6(3):215–230.
 - [163] Ma W, Ching P, Ding Z. Semidefinite relaxation based multiuser detection for M-ary PSK multiuser systems. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2004, 52(10):2862–2872.
 - [164] Luo Z Q, Ma W K, So A M C, et al. Semidefinite Relaxation of Quadratic Optimization Problems. *IEEE Signal Process Mag.*, 2010, 27(3):20–34.
 - [165] Horst R. A general class of branch-and-bound methods in global optimization with some new approaches for concave minimization. *J. Optim. Theory Appl.*, 1986, 51(2):271–291.
 - [166] Horst R, Tuy H. *Global Optimization: Deterministic Approaches*. 3 ed., Berlin, German: Springer-Verlag, 1996.
 - [167] Sahinidis N, Tawarmalani M. Accelerating branch-and-bound through a modeling language construct for relaxation-specific constraints. *J. Global Optim.*, 2005, 32(2):259–280.
 - [168] Weeraddana P, Codreanu M, Latva-aho M, et al. Weighted sum-rate maximization for a set of interfering links via branch and bound. *IEEE Trans. Signal Process.*, 2010, (99):1–1.
 - [169] Anstreicher K. Semidefinite programming versus the reformulation-linearization technique for nonconvex quadratically constrained quadratic programming. *J. Global Optim.*, 2009, 43(2):471–484.
 - [170] Linderoth J. A simplicial branch-and-bound algorithm for solving quadratically constrained quadratic programs. *Math. Program.*, 2005, 103(2):251–282.
 - [171] Myers R H. *Classical and Modern Regression with Applications*, volume 488. Belmont, CA: Duxbury Press, 1990.
 - [172] Bao X, Sahinidis N, Tawarmalani M. Multiterm polyhedral relaxations for nonconvex, quadratically constrained quadratic programs. *Optim. Methods and Softw.*, 2009, 24(4):485–504.

致 谢

在博士学位论文即将完成的这段时间，我的思绪时常难以平静。几年研究过程中，我经历过研究初期的彷徨和研究中期的焦虑。之所以能顺利走过这些研究路上的荆棘，我最希望致以诚挚感谢的是我的导师陆建华教授。陆老师渊博的专业素养，严谨的治学态度和开阔的思维方式对我产生着巨大的影响。他不仅让我掌握了基本的科研方法，更重要的是让我树立了积极的科研态度。在研究上，陆老师耐心细致的引导，为我指明前进方向，激励我奋发向上；在生活上，陆老师对我的关心和支持细致入微，令我终身难忘。

无线多媒体通信实验室的学术环境对本研究工作起到了很大的促进作用。特别感谢进入实验室以来，先后给予我细致指导和关怀的詹亚锋老师、裴玉奎老师、王有政老师、陶晓明老师和葛宁老师。正是你们无私的帮助，才使得我能在研究的道路上走的更远。感谢在论文完成过程中能够与樊平毅老师，林家儒老师，曾烈光老师、张有光老师、周世东老师和周祖成老师进行热情的讨论，正是你们有效的意见和建议，才使得本论文完成的更加顺利。

感谢朱宏杰、邢腾飞、贾亦真、张丹华等师兄对我的研究和生活上的热情帮助。感谢邓卉、张凯斌、肖潇、孙逸鹏、张潇、李扬、李少阳等同窗好友，与你们的交流让我的思路更加开阔。

在论文工作期间，我有幸在美国密苏里科技大学开展合作研究，得到肖承山教授和夫人郑亚虹教授的悉心指导与帮助。在这里学习和生活的过程对我产生了积极的影响，特此向这对无线通信领域的伉俪致以诚挚的感谢。

最后，特别感谢即将与我同时获得博士学位的妻子伍捷。共同在美丽的清华园读书生活的经历将永远珍藏在我们心底。感谢我们的父母，是你们在背后强有力的支持和无微不至的关怀使我能够安心研究并快乐生活，谢谢你们，愿你们永远健康。

本课题承蒙国家重点基础研究发展计划（973计划）资助，特此致谢。

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：_____ 日 期：_____

个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

个人简历

曾维亮，男，汉族，1985年1月出生于山西省大同市。2003年9月考入电子科技大学电子工程学院，2007年7月本科毕业并获得工学学士学位，同年9月免试保送清华大学电子工程系攻读博士学位至今。攻读博士学位期间，曾获得中国教育部学术新人奖，清华之友一腾讯创新特等奖学金，清华大学电子工程系学术新秀。

发表的学术论文

- [1] Zeng W., Xiao C., Lu J., Letaief K. B. Globally Optimal Precoder Design with Finite-Alphabet Inputs for Cognitive Radio Networks. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 30, no. 10, 2012. (SCI检索, IF2011: 5.445, 检索号: WOS:000310332300003)
- [2] Zeng W., Xiao C., Wang M., Lu J. Linear Precoding for Finite-Alphabet Inputs Over MIMO Fading Channels With Statistical CSI. *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 60, no. 6, pp. 3134-3148, 2012. (SCI检索, IF2011: 2.829, 检索号: WOS:000304154500033)
- [3] Zeng W., Zheng Y. R., Wang M., Lu J. Linear Precoding for Relay Networks: A Perspective on Finite-Alphabet Inputs. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 11, no. 3, pp. 1146-1157, 2012. (SCI检索, IF2011: 2.586, 检索号: WOS:000301509200030)
- [4] Zeng W., Xiao C., Lu J. A Low-Complexity Design of Linear Precoding for MIMO Channels with Finite-Alphabet Inputs. *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 1, no. 1, pp. 38-41, 2012. (EI检索, 检索号: 20122415103507)
- [5] Zeng W., Xiao C., Wang Y., Lu J. Opportunistic Cooperation for Multi-Antenna Multi-Relay Networks. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 9, no. 10, pp. 3189-3199, 2010. (SCI检索, IF2011: 2.586, 检索号: WOS:000283436800025)
- [6] Zeng W., Zhu H., Pei Y., Lu J. Optimal Design of Unequal-Protected Rateless Codes for Layered Streaming. *Journal of Internet Technology*. vol. 9, no. 5, pp. 387-392, 2008. (SCI检索, IF2011: 0.508, 检索号: WOS:000207999800014)

- [7] Zeng W., Xiao C., Lu J. On Interference-Aware Precoding for Multi-Antenna Channels with Finite-Alphabet Inputs. *IEEE Int. Conf. Commun. (ICC)*, Ottawa, Canada, 2012. (EI检索)
- [8] Zeng W., Wang M., Xiao C., Lu J. On the Linear Precoder Design for MIMO Channels with Finite-Alphabet Inputs and Statistical CSI. *IEEE Global Commun. Conf. (Globecom)*, Houston, TX, USA, 2011. (EI检索, 检索号: 20120814799288)
- [9] Zeng W., Xiao C., Wang M., Lu J. Linear Precoding for Relay Networks with Finite-Alphabet Constraints. *IEEE Int. Conf. Commun. (ICC)*, Kyoto, Japan, 2011. (EI检索, 检索号: 20113514286827)
- [10] Zeng W., Wang M., Xiao C., Lu J. On the Power Allocation for Relay Networks with Finite-Alphabet Constraints. *IEEE Global Commun. Conf. (Globecom)*, Miami, FL, USA, 2010. (EI检索, 检索号: 20110613650394)
- [11] Zeng W., Xiao C., Wang Y., Lu J. Opportunistic Relaying for Multi-Antenna Cooperative Decode-and-Forward Relay Networks. *IEEE Int. Conf. Commun. (ICC)*, Cape Town, South Africa, 2010. (EI检索, 检索号: 20103213140778)
- [12] Zeng W., Wang Y., Lu J. A Highly Efficient for Rateless Coding Aided Cooperative Cellular Networks. *IEEE Milit. Commun. Conf. (MILCOM)*, Boston, MA, 2009. (EI检索, 检索号: 20101712892867)
- [13] Zeng W., Pei Y., Wang Y., Lu J. Outage of Half-Duplex Cooperative Relay Networks Using Rateless Codes. *IEEE Int. Conf. Wireless Commun., Networking and Mobile Computing (WiCOM)*, Beijing, China, 2009. (EI检索, 检索号: 20100112610958)
- [14] Wang M., Zeng W., Xiao C. Linear Precoding for MIMO Multiple Access Channels with Finite Discrete Inputs. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 10, no. 11, pp. 3934-3942, 2011. (SCI检索, IF2011: 2.586, 检索号: WOS:000298328900043)
- [15] Wang M., Zeng W., Xiao C. Linear Precoding for MIMO Multiple Access Channels with Discrete-Constellation Inputs. *IEEE Global Commun. Conf. (Globecom)*, Houston, TX, USA, 2011. (EI检索, 检索号: 20120814799220)
- [16] Wang M., Zheng Y. R., Xiao C., Zeng W. A Low Complexity Algorithm for Linear Precoder Design with Finite Alphabet Inputs. *IEEE Milit. Commun. Conf. (MILCOM)*, Orlando, FL, USA, 2012. (EI检索)
- [17] Li S., Tao X., Zeng W., Lu J. Performance Evaluation of a Collaborative Method for Uplink MU-MIMO Systems. *IEEE Int. Conf. Wireless Information Technology*

and Systems (ICWITS), Maui, HI, USA, 2012. (EI检索)

研究成果

- [1] 詹亚锋, 曾维亮, 陆建华. 基于卷积运算的微波统一测控系统中的载波捕获方法: 中国, ZL 2008 1 0119661.0 (已授权)
- [2] 陆建华, 朱宏杰, 曾维亮, 裴玉奎. 一种基于增量喷泉的信息分发方法: 中国, 200810119661.0 (已授权)
- [3] 陆建华, 曾维亮, 陶晓明, 肖承山. 低复杂度的预编码调制矩阵生成方法及其预编码调制方法: 中国, 201110418759.8 (已申请)
- [4] 陶晓明, 曾维亮, 李少阳, 葛宁, 陆建华. 基于预编码调制的协同发送方法、接收方法以及通信装置: 中国, 201210310910.0 (已申请)

攻读博士学位期间参加的科研项目

- [1] 国家重点基础研究发展计划(973计划): 多域协同宽带无线通信基础研究(课题编号: No. 2007CB310601).
- [2] 国家重点基础研究发展计划(973计划): 智能协同宽带无线网络理论基础研究(课题编号: No. 2013CB329001).
- [3] 清华-高通联合研究计划“宽带无线通信预编码调制技术研究”.