Modelo analítico: Estuário Bem Misturado

1- Perfil Vertical de Velocidade

A zona de mistura (ZM) de um estuário *bem misturado* (estuário do rio Caravelas – BA), localizado em região de baixa descarga fluvial, forçado por meso maré de sizígia, é apresentado na Figura 1 (de acordo com Schettini & Miranda (2010)), com a ZM estendendo-se até 25 km estuário acima. Considerando-se que o estuário é lateralmente homogêneo (tipo D) com largura constante (B=cte) vamos calcular o perfil vertical estacionário de velocidade, u=u(x,t), em relação a. um sistema cartesiano ortogonal (Oxz) com os eixos Ox e Oz orientados positivamente em direção à boca do estuário e no sentido oposto à aceleração da gravidade (g), respectivamente, e com origem (z=0) na superfície, e com largura (B) e profundidade uniformes (-h), respectivamente.

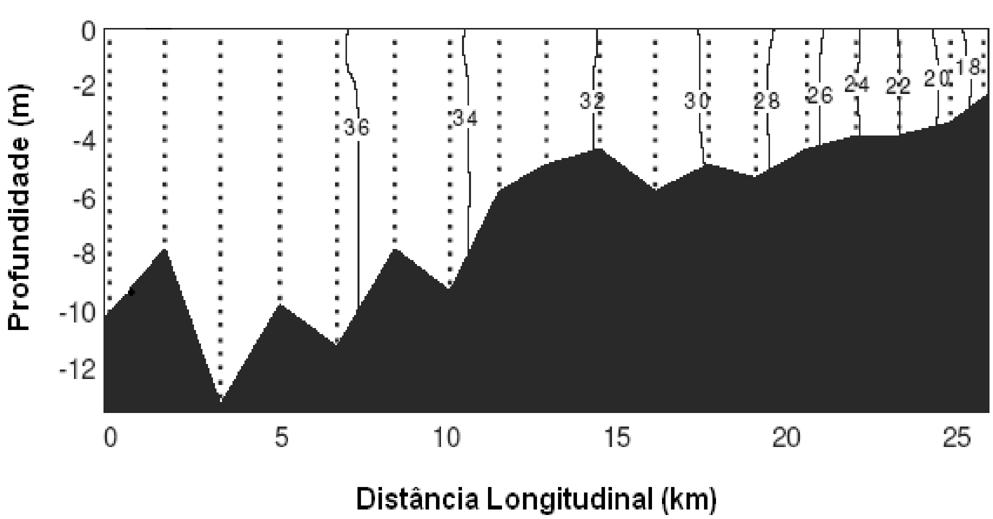

Figura 1- Distribuição longitudinal quase estacionária da salinidade no estuário do rio Caravelas (BA).

1.1 – Equação do Movimento

Como a velocidade é expressa por u=u(x,t) a aceleração de um elemento de volume, $(\frac{du}{dt})$, se compõe da aceleração local, $(\frac{\partial u}{\partial t})$, mais a aceleração advectiva, $(u\frac{\partial u}{\partial x})$. Portanto, levando-se em conta as forças geradoras e dissipativas, a equação do movimento, em termos de força por unidade de massa, é expressa por:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{g}{\rho}\int_z^{\eta}\frac{\partial \rho}{\partial x}dz+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial z}(BN_z\frac{\partial u}{\partial z})], \quad (1)$$

ou levando-se em conta que B=cte e adotando-se para o coeficiente cinemático de viscosidade turbulenta, N_z, $[N_z]=[L^2T^{-1}]$, um valor constante e representativo de um valor médio na coluna de água, a equação do movimento (1) simplifica-se para:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial \eta}{\partial x}-\frac{g}{\rho}\int_z^{\eta}\frac{\partial \rho}{\partial x}dz+N_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (2)$$

1.1 – Solução da Equação (2): Estuário Bem Misturado

A simulação do perfil vertical de velocidade deste tipo de estuário já foi estudada com base no ajuste logarítimo considerando também sua variação em função do tempo, u=u(z,t) (Fig. 5.7, p. 165). A seguir vamos apresentar uma solução analítica do perfil vertical de velocidade no estado estacionário com base na equação do movimento (eq. 2), com as seguintes simplificações: movimento não acelerado e o equilíbrio entre o componente barotrópico da força de gradiente de pressão e o atrito gerado pelo cisalhamento vertical de velocidade, resultando na seguinte equação do movimento:

$$0 = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + N_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad (3)$$

com duas incógnitas; $u=u(z)$ e $\eta=\eta(x)$.

Inicialmente, vamos considerar como um dado do problema o gradiente longitudinal da inclinação da superfície livre $(\frac{\partial \eta}{\partial x}) = \eta_x$, e o estuário é forçado pelo componente barotrópico da força de gradiente de pressão, $g(\frac{\partial \eta}{\partial x}) = g\eta_x$ e a seguir, considerando esse gradiente como incógnita, vamos adicionar uma segunda condição de contorno, denominada de *condição integral de contorno*, obtendo-se assim um sistema hidrodinâmico fechado (número de equações igual ao número de incógnitas).

Considerando-se que a descarga fluvial (Q_f) é um dado do problema, podemos adicionar na segunda solução a equação da continuidade integrada no volume, ou seja $u_f = \frac{Q_f}{B.h}$, com B e h denotando valores médios da largura e da profundidade, respectivamente, que é válida para condição estacionária. Essa condição também pode ser reescrita na forma de uma condição de contorno denominada condição integral de contorno (Miranda *et al*., 2012, p. 295):

$$u_f = \frac{1}{h}\int_{-h}^{0} u(z)dz, \qquad (4)$$

com a orientação do eixo Oz no sentido contrário ao da aceleração da gravidade e com origem (z=0) na superfície livre, e com z=-h denotando a coordenada do fundo. Observe que a dimensão do segundo membro da eq. (4) é $[LT^{-1}]$.

Para a solução da equação (3) é necessário também especificar as condições de contorno superior (z=0) e inferior (z=-h), que são apresentadas a seguir:

A-) <u>Condição de contorno superior</u>

Como o próprio nome indica essa condição de contorno implica no conhecimento da tensão de cisalhamento do vento na superfície do estuário que atua como uma forçante do movimento, expressa matematicamente por:

$$[A_z(\frac{\partial u}{\partial z})]_{Z=0} = \rho N_z[(\frac{\partial u}{\partial z})]_{Z=0} = \tau_W, \qquad (5)$$

Com A_z e N_z ($A_z=\rho N_z$) denotando os coeficientes dinâmico e cinemático de viscosidade cujas dimensões são $[A_z]=[ML^{-1}T^{-1}]$ e $[N_z]=[L^2T^{-1}]$, respectivamente.

B-) <u>Condições de contorno inferior</u>

A condição de contorno mais simples considera o atrito máximo no fundo (aderência no fundo). Esta condição de contorno é simulada por:

$$u(z)=u(-h)=0. \qquad (6a)$$

A segunda condição de contorno leva em conta uma condição de atrito moderado no fundo, τ_B, que é simulada por:

$$\tau_B = [A_z(\frac{\partial u}{\partial z})]_{z=-h}, \text{ ou } \tau_B = [\rho N_z(\frac{\partial u}{\partial z})]_{z=-h}, \qquad (6b)$$

com τ_B denotando a tensão de cisalhamento no fundo (z=-h) que pode ser simulada por diferentes expressões analíticas. Considerando as dimensões de A_z e N_z, verifica-se que a tensão de cisalhamento no fundo tem a seguinte dimensão: $[\tau_B]=[ML^{-1}T^{-2}]$.

Primeira solução: Gradiente barotrópico x atrito (cisalhamento vertical) + tensão de cisalhamento do vento na superfície e com atrito máximo no fundo.

O como sabemos o componente barotrópico da força de gradiente de pressão é dado por $(g\frac{\partial\eta}{\partial x}) = g\eta_x$, e como a equação do movimento (eq. 3) é de segunda ordem e com coeficientes constantes ela deve ser resolvida com duas integrações sucessivas:

a-) Primeira integração:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z}) = \frac{g}{N_z}\eta_x, \quad \partial(\frac{\partial u}{\partial z}) = (\frac{g}{N_z}\eta_x)\partial z, \text{ logo: } \frac{\partial u}{\partial z} = (\frac{g}{N_z}\eta_x)z + C_1 \qquad (9a)$$

b-) Segunda integração:

$$u(z) = \frac{1}{2}\frac{g}{N_z}\eta_x z^2 + C_1 z + C_2. \qquad (9b)$$

Esse resultado parcial tem duas constantes de integração C_1 e C_2, cujas dimensões são: $[C_1]=[T^{-1}]$ e $[C_2]=[L.T^{-1}]$; o conhecimento dessas dimensões é muito útil para confirmar as expressões analíticas que serão obtidas na solução do poblema.

As constantes de integração C_1 e C_2 da solução geral (9b) são determinadas pelas condições de contorno superior (5) e inferior considerando inicialmente o atrito máximo no fundo (condição 6a). Com a aplicação dessas condições, seguem os seguintes resultados para C_1 e C_2:

$$[A_z(\frac{\partial u}{\partial z})]_{z=0} = \rho N_z[(\frac{g}{N_z})\eta_x z + C_1]_{z=0} = \tau_W, \qquad (10)$$

e dessa relação segue que $C_1 = \frac{\tau_W}{\rho N_z}$, com $[C_1]=T^{-1}$ (confirmando que essa expressão está com a dimensão correta). Uma vez obtida a primeira constante (C_1) a solução geral passa a ser expressa por:

$$u(z) = \frac{1}{2}\frac{g}{N_z}\eta_x z^2 + \frac{\tau_W}{\rho N_z} z + C_2. \qquad (11).$$

Para determinar a segunda constante de integração (C_2) vamos considerar o atrito máximo no fundo (6a) à solução parcial (eq. 11), ou seja, deve-se calcular u(-h)=0. Logo:

$$u(-h) = 0 = \frac{1}{2}\frac{g}{N_z}\eta_x h^2 - \frac{\tau_W}{\rho N_z} h + C_2, \qquad (12)$$

e, resolvendo-se esse resultado para a constante C_2, resulta:

$$C_2 = -\frac{1}{2}\frac{g}{N_z}\eta_x h^2 + \frac{\tau_W}{\rho N_Z} h, \qquad (13)$$

cuja análise dimensional $[C_2]=[LT^{-1}]$ mostra que essa expressão teórica está correta. Logo a solução do perfil teórico de velocidade, u=u(z), tem a seguinte expressão:

$$u(x) = \frac{1}{2}\frac{g}{N_z}\eta_x z^2 + \frac{\tau_W}{\rho N_z} z - \frac{1}{2}\frac{g}{N_z}\eta_x h^2 + \frac{\tau_W}{\rho N_z} h. \qquad (14)$$

Rearranjando-se as parcelas dessa solução por fatoração, segue a solução final da expressão analítica do perfil estacionário vertical de velocidade:

$$u(x) = \frac{1}{2}\frac{g}{N_z}\eta_x (z^2 - h^2) + \frac{\tau_W}{\rho N_z}(z + h). \qquad (15)$$

Verifica-se facilmente que essa solução satisfaz as condições de contorno (5) e (6a). A análise desse resultado mostra que essa solução se compõe de dois modos: o barotrópico e a tensão do vento, respectivamente. Essa solução pode também ser reescrita em termos da profundidade adimensional ($Z = \frac{z}{|h|}$):

$$u(Z) = \frac{1}{2}\frac{gh^2}{N_z}\eta_x (Z^2 - 1) + \frac{\tau_W h}{\rho N_z}(Z + 1), \qquad (16)$$

ou,

$$u(Z) = \frac{1}{2}\frac{gh^2}{N_z}[\eta_x(Z^2-1) + \frac{2\tau_W}{\rho gh}(Z+1)], \qquad (17a)$$

com $-1 \leq Z \leq 0$. Levando-se em conta que o coeficiente cinemático de viscosidade pode ser expresso como $N_z = \kappa U^* h$ (na condição $U^* >> u$, com U^* denotando a velocidade da maré e k e um coeficiente adimensional), essa solução analítica também pode ser reescrita como:

$$u(Z) = \frac{1}{2}\frac{gh}{\kappa U^*}[\eta_x(Z^2-1) + \frac{2\tau_W}{\rho gh}(Z+1)], \qquad (17b)$$

Verifica-se que essas soluções satisfazem identicamente as condições de contorno de superfície e de fundo. Em relação à forçante barotrópica, $\frac{\partial\eta}{\partial x} = \eta_x$, e da tensão de cisalhamento do vento τ_W, a velocidade pode ser forçada estuário abaixo (vazante) ou estuário acima (enchente) sempre que $\eta_x<0$ ou $\eta_x>0$, e na condição de vento nulo ($\tau_W=0$) essa solução simplifica-se para:

$$u(x,Z) = \frac{1}{2}\frac{gh}{\kappa U^*}\eta_x(Z^2-1). \qquad (18)$$

Nas condições em que a tensão de cisalhamento do vento é diferente de zero ($\tau_W \neq 0$) a sua influência sobre o perfil vertical (eq. 17b) vai depender da intensidade e da direção do vento ($\tau_{W>}>0$ ou $\tau_{W>}<0$).

A Figura 2 apresenta um perfil teórico obtido com a aplicação da equação (17b) com $\eta_x < 0$ e $\tau_W>0$ e também sem a tensão de cisalhamento do vento ($\tau_W=0$), indicando movimentos de vazante.

Nessa simulação (Fig. 2) foram utilizados os seguintes valores numéricos: U^*=0,5 m.s^{-1}, κ=5.0x10^{-3}, h=10 m; Nz=2,5x10^{-2} m^{2}s^{-1}; ρ=1020 kg m^{-3}; g=9,80 m s^{-2}; $\frac{\partial\eta}{\partial x} \approx \frac{\Delta\eta}{\Delta x} = 1{,}0x10^{-5}$ e τ_W=2.0x10^{-2} Pa.

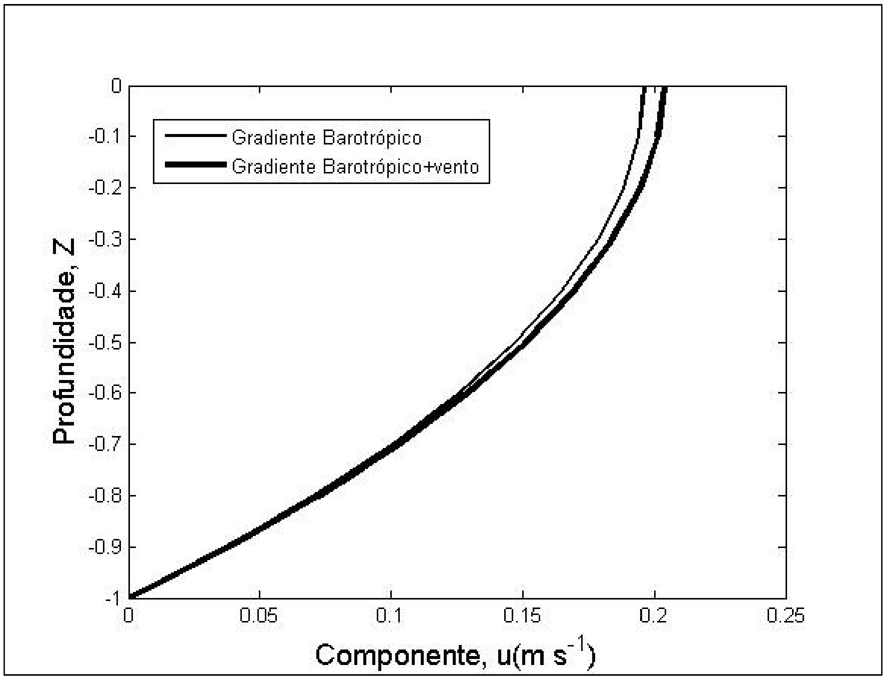

Figura 2 – Perfil vertical teórico com atrito de fundo máximo [u(x,-h)=0] com as forçantes: Gradiente barotrópico x atrito (cisalhamento vertical) + Tensão de cisalhamento do vento na condição de vazante (τ_{Wx}<0).

Na Figura 3 o perfil teórico também foi calculado considerando nula a tensão de cisalhamento do vento (τ_W=0), e foi comparado com dados experimentais do perfil quase-estacionário do estuário do rio Peruipe (BA), classificado como bem misturado durante a maré de sizígia, de acordo com Andutta *et al.* (2012).

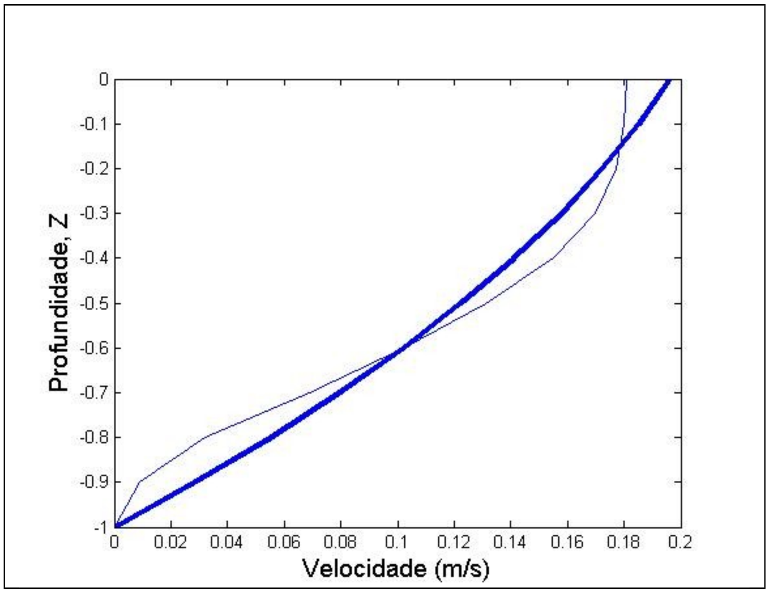

Figura 3-Comparação do perfil vertical teórico de velocidade forçado pelo gradiente barotrópico de vazante com os mesmos parâmetros utilizados na Figura 2, apenas com as seguintes exceções: $\frac{\Delta\eta}{\Delta x} = \eta_x = -2x10^{-6}$ e com τ_W=0. Perfís experimental (traço cheio) e teórico (traço fino).