

# List 1 - IOF814: Modelos Numéricos Aplicados a Processos Costeiros e Estuarinos

December 14, 2017

**Aluno:** Danilo Augusto Silva  
**Nº USP:** 7279456  
**Data de Entrega:** 31 de Outubro/2017

Informações gerais quanto a estrutura da lista:

codes/: contém os códigos elaborados para os exercícios;  
data/: contém os arquivos de input para alguns códigos e  
outputs/: contém os arquivos de saída dos códigos, armazenados em subpastas designada para cada questão, bem como o arquivo original .tex e .pdf desta lista, com os desenvolvimentos das discretizações e respostas dissertativas.

**Exercício 1** Baseado em uma condição inicial de repouso, a influência do vento em toda a coluna de água só foi observado a partir de 30 minutos de simulação. Desta forma, as imagens apresentadas são do último instante de tempo simulado, após um tempo de aquecimento do modelo para estabilidade do mesmo.

A principal diferença entre as simulações realizadas para cada latitude, se dá a partir de 30m de profundidade, onde a orientação dos vetores sofre uma deflecção maior conforme a latitude aumenta. Para 30°S os vetores a 30m são quase zonais, com um pequeno ângulo de deflecção para a esquerda do sentido da corrente (Fig 1.1). Já para os ângulos 45°S e 60°S, essa deflecção aumenta, rumando para uma orientação para noroeste (Fig 1.2 e 1.3).

Essa variação na deflecção também é observada em camadas mais rasas, onde os vetores sofrem uma deflecção sentido horário, passando de sudoeste (Fig. 1.1)para oeste (Fig 1.3).

Desta forma, concluímos que o aumento da latitude influenciará a resposta do oceano a um vento homogêneo e uniforme, no sentido de defletir as correntes geradas no sentido horário da propagação do vento.

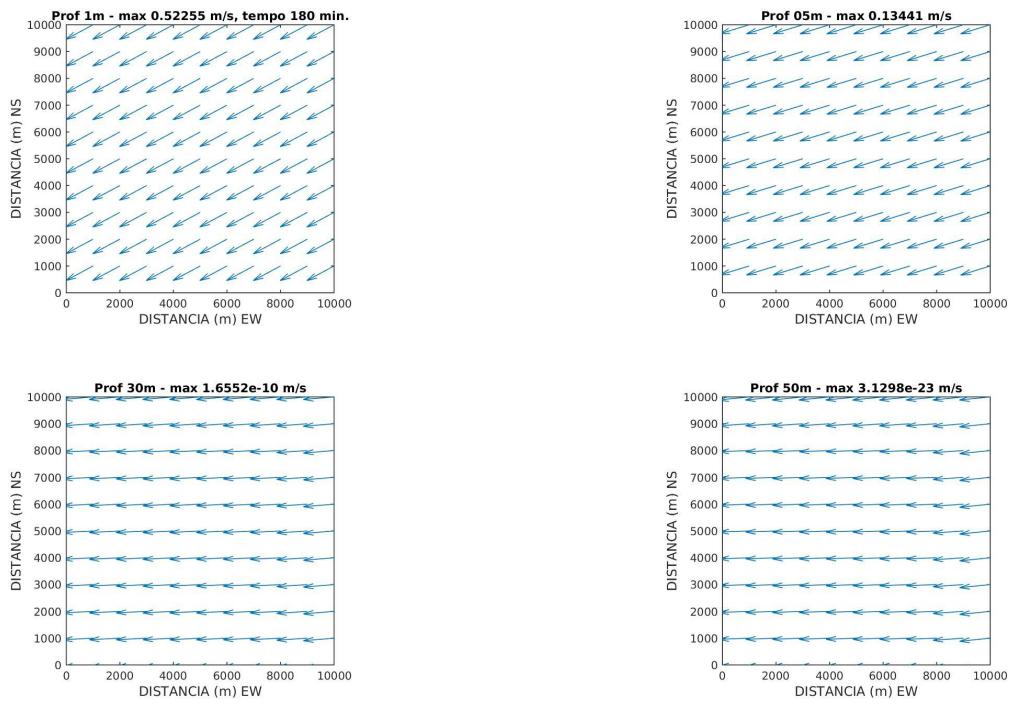


Fig 1.1 - reposta do oceano a um vento homogêneo de NE nas profundidades de 1m, 5m, 30m e 50m.

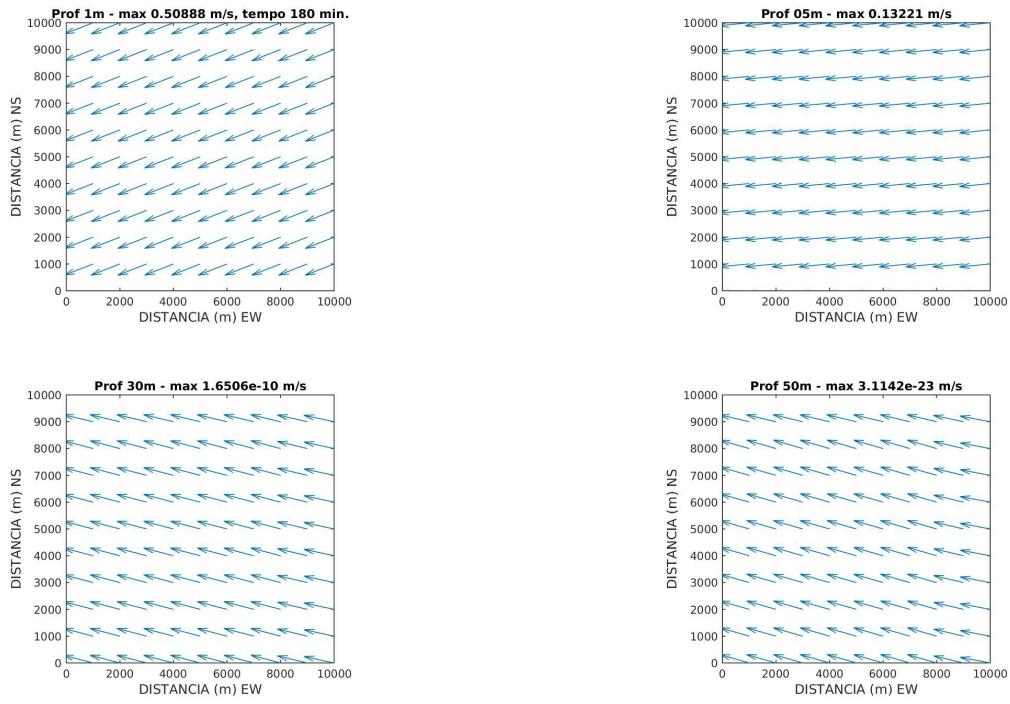


Fig 1.2 - reposta do oceano a um vento homogêneo de NE nas profundidades de 1m, 5m, 30m e 50m.

**Exercício 2** Um modelo de duas camadas consiste em um modelo teórico, onde o oceano pode ser aproximado para duas camadas de densidades diferentes e constantes em cada camada (Figura 2.1).

Sendo assim, não há cálculos de corrente vertical, como em um modelo 3D, onde somente são

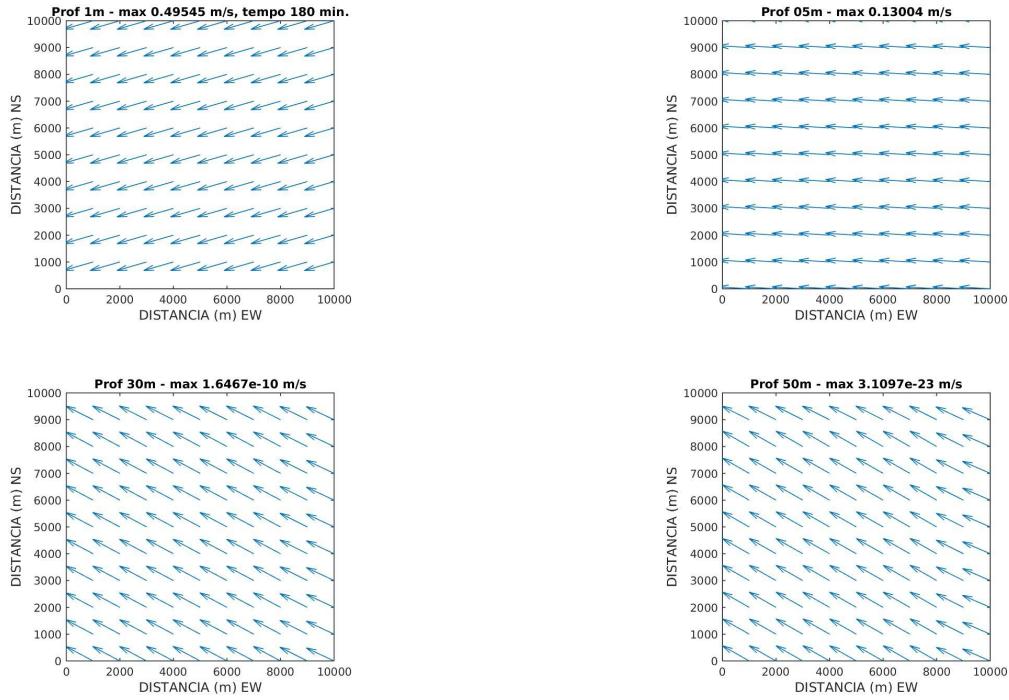


Fig 1.3 - reposta do oceano a um vento homogêneo de NE nas profundidades de 1m, 5m, 30m e 50m.

apresentadas as médias da velocidade vertical em cada camada.

As tensões envolvidas nas camadas estão relacionadas a fricção entre camadas, na interface entre elas. No limite superior da camada superior, a tensão de cisalhamento do vento é uma das principais forçantes em inserir energia no sistema oceânico, gerando movimento, enquanto que no limite inferior da camada inferior, o atrito com o fundo oceânico é o principal mecanismo em remover essa energia.

A desvantagem desta aproximação teórica está justamente em não representar movimentos verticais de forma realista. Entretanto, suas vantagens superam tal limitação ao estudarmos ondas internas, com propagação entre interfaces de diferentes densidades.

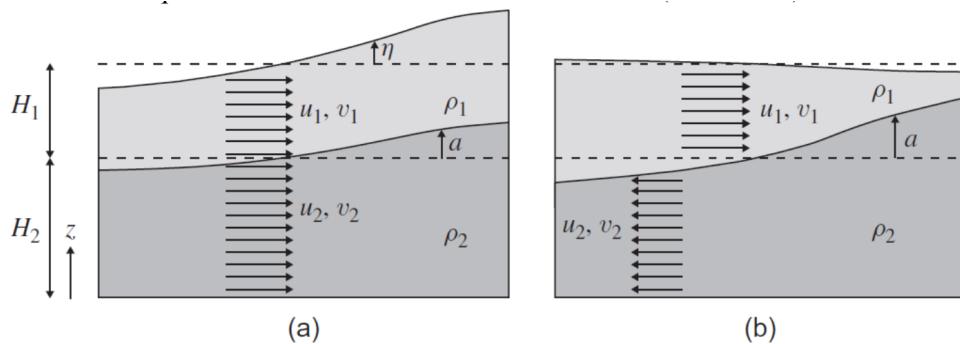


Fig 2.1 - Modelo de duas camadas.

**Exercício 3** Lembrando que a equação da velocidade vertical é dada por:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w \quad (1)$$

e a equação da conservação do sal é dada por:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} + \frac{\partial vS}{\partial y} + \frac{\partial wS}{\partial z} = D_H \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) + D_v \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + F_s \quad (2)$$

Sabendo que a coordenada sigma se tornará a nova coordenada vertical do sistema de coordenadas e partindo da seguinte relação para a coordenada sigma:

$$\sigma = \frac{z - \zeta}{D}, \text{ sendo: } D = H + \zeta \quad (3)$$

Podemos reescrever as derivadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial(\frac{z-\zeta}{D})}{\partial z} \quad (4)$$

Para resolver a derivada em (4), fazemos:

$$\frac{\partial(\frac{z-\zeta}{D})}{\partial z} = \frac{D \frac{\partial(z-\zeta)}{\partial z} - \frac{\partial D}{\partial z}(z - \zeta)}{D^2} = \frac{D}{D^2} = \frac{1}{D} \quad (5)$$

Desta forma, aplicando (5) em (4), obtemos, enfim, a derivada parcial em z como uma derivada parcial sigma:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{1}{D} \quad (6)$$

Realizando procedimento semelhante, mas derivando em x e em y, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_z = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_\sigma + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial(\frac{z-\zeta}{D})}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_\sigma + \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \sigma \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_z = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_\sigma + \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \sigma \frac{\partial D}{\partial y} \right) \quad (8)$$

E, para t, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_z = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_\sigma + \frac{1}{D} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial t} (1 - \sigma) \quad (9)$$

Sendo assim, aplicamos as equações obtidas acima em (2), obtendo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{D} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial t} (1 - \sigma) + u \left[ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{Q_x}{D} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] + v \left[ \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{Q_y}{D} \frac{\partial S}{\partial \sigma} \right] + w \frac{1}{D} \frac{\partial S}{\partial \sigma} = D_H \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{Q_x}{D} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{Q_x}{D} \frac{\partial S}{\partial \sigma} + \frac{Q_x^2}{D^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \sigma^2} \right) \quad (10)$$

Sendo que:

$$Q_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \sigma \frac{\partial D}{\partial x} \quad Q_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \sigma \frac{\partial D}{\partial y} \quad (11)$$

E, para a velocidade vertical, consideramos que:

$$z = D\sigma + \zeta \quad (12)$$

Então,

$$w = \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{d(D\sigma + \zeta)}{dt} \rightarrow \frac{\partial[(H + \zeta)\sigma + \zeta]}{\partial t} + u \left[ \frac{\partial[(H + \zeta)\sigma + \zeta]}{\partial x} \right] + v \left[ \frac{\partial[(H + \zeta)\sigma + \zeta]}{\partial y} \right] \rightarrow D \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \left[ \frac{\partial D}{\partial x} \sigma + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + v \left[ \frac{\partial D}{\partial y} \sigma + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \quad (13)$$

Portando, teremos:

$$\frac{\partial w}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ D \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\sigma + 1) \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ u \left( \sigma \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] + v \left[ \sigma \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \quad (14)$$

**Exercício 04** Partindo de um sistema de equações hidrodinâmicas básicas em 3 dimensões e simplificada (sem termos advectivos e sem difusão horizontal):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^D u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^D v dz = 0 \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (15)$$

Com as seguintes condições de contorno na superfície:

$$\tau_{xs} = -\rho \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tau_{ys} = -\rho \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (16)$$

E, no fundo:

$$\tau_{xB} = K_b \rho u_D \tau_{yB} = K_b \rho v_D \quad (17)$$

Igualando (16) e (17), obtemos:

$$\left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right)_D + K_b u_D = 0 \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right)_D + K_b v_D = 0 \quad (18)$$

Definimos, assim, as transformadas das componentes de corrente ( $u$  e  $v$ ) através das auto-funções  $f_r$ , associadas aos auto-valores  $\lambda_r$ :

$$u_r = \frac{1}{D} \int_0^D u f_r(z) dz \quad v_r = \frac{1}{D} \int_0^D v f_r(z) dz \quad (19)$$

Aplicando o operador de transformada (19) nos termos de (15), obtemos:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - fv_r = -ga_r \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} a_r \frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{1}{D} \int_0^D f_r(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \frac{\partial v_r}{\partial t} + fu_r = -ga_r \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} a_r \frac{\partial p_a}{\partial y} + \frac{1}{D} \int_0^D f_r(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( N \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz \frac{\partial u_r}{\partial t} \quad (20)$$

onde:

$$a_r = \frac{1}{D} \int_0^D f_r(z) dz \quad (21)$$

Podemos determinar as auto-funções  $f_r$  e os auto-valores  $\lambda_r$  utilizando a representação da difusão como decaimento, sendo que o efeito será máximo na superfície e (18) no fundo será:

$$\frac{d}{dz} \left[ N f'_r(z) \right] = -\lambda_r f_r(z) \quad (22)$$

$$f_r(0) = 1 \quad (23)$$

$$f'_r(0) = 0 \quad (24)$$

$$N f'_r(D) + K f_r(D) = 0 \quad (25)$$

Desta forma, reescrevemos (20) como:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - f v_r = -g a_r \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{\rho} a_r \frac{\partial p_a}{\partial x} + \frac{\tau_{xs}}{\rho D} - \lambda_r u_r \frac{\partial v_r}{\partial t} + f u_r = -g a_r \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{1}{\rho} a_r \frac{\partial p_a}{\partial y} + \frac{\tau_{ys}}{\rho D} - \lambda_r v_r \quad (26)$$

Sendo que a determinação das componentes  $u$  e  $v$  são feitos através de expansões do tipo:

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} A_r f_r(z) v = \sum_{r=1}^{\infty} B_r f_r(z) \quad (27)$$

Da condição de ortogonalidade das auto-funções, podemos calcular os coeficientes das expansões:

$$\int_0^D f_r(z) f_s(z) dz = 0, r \neq s \int_0^D f_r^2(z) dz = I_r(D) - I_r(0) \text{ onde, } I_r(z) = N \left[ f' \frac{\partial f}{\partial \lambda} - f \frac{\partial f'}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_r} \quad (28)$$

Por fim,

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r u_r f_r(z) v = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r v_r f_r(z) \quad (29)$$

$$\phi_r = \frac{D}{I_r(D) - I_r(0)} \quad (30)$$

Com as transformadas das correntes, podemos escrever a equação da continuidade como:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{r=1}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x} (D a_r \phi_r u_r) + \frac{\partial}{\partial y} D a_r \phi_r v_r \right) = 0 \quad (31)$$

E, finalmente, obtemos a componente vertical da velocidade:

$$w + \sum_{r=1}^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial x} (\phi_r u_r \int_z^D f_r(z) dz) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi_r v_r \int_z^D f_r(z) dz) \right) = 0 \quad (32)$$

Portanto, as equações do modelo são substituídas pelas equações transformadas para  $\eta$ ,  $u$  e  $v$  obtidas no desenvolvimento do exercício.

**Exercício 5** Modelou-se a região de Santos para ventos variando a cada 3 horas, simulando uma condição de evento metereológico de passagem de sistemas frontais, com ventos do quadrante Sul com intensidade de  $10\text{m.s}^{-1}$ . Além disso, considerou-se uma elevação senoidal nos contornos abertos, simulando a maré. Desta forma, os resultados obtidos, embora inadequados para análises dentro da Baía de Santos, são apresentados abaixo.

O campo batimétrico (Fig 5.1) utilizado foi extraído do etopo1, onde utilizou-se os valores maiores que zero como região de continente, gerando-se as chaves 0 (para terra) e 1 (para mar), conforme Fig 5.2.

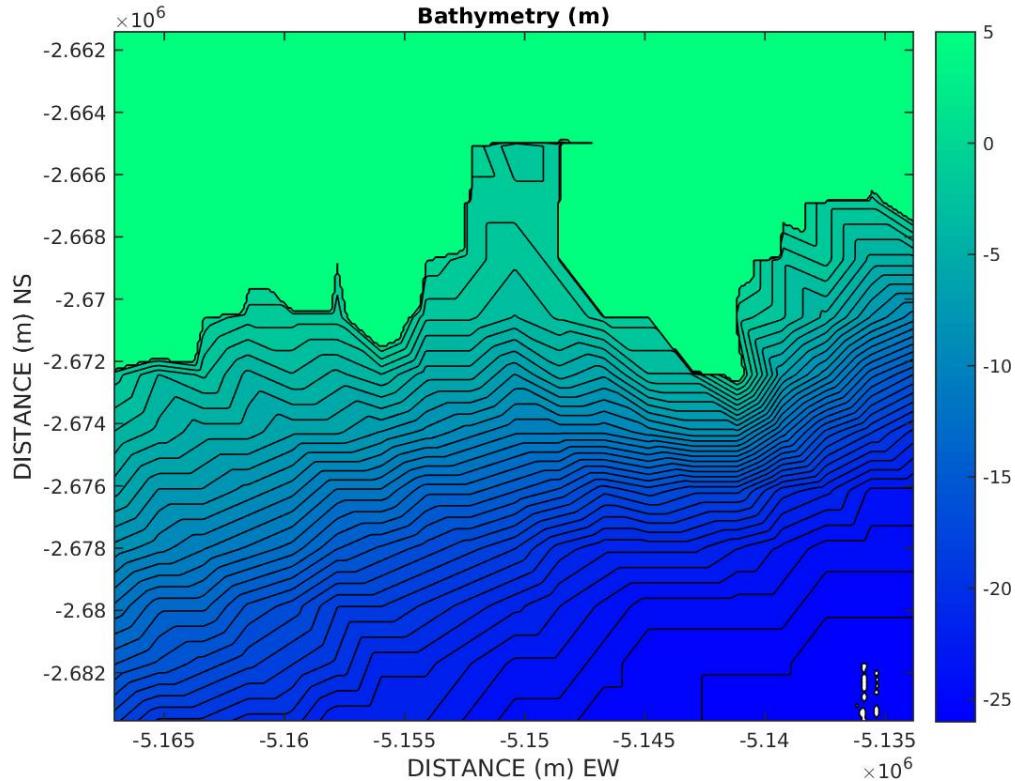


Fig 5.1 - Campo batimétrico extraído do ETOPO1.

Os campos de corrente e elevação da superfície livre do mar foram plotados sempre um instante anterior à mudança do vento, representando um instante de estabilidade do modelo, com o equilíbrio atingido. Foi analisado os campos de correntes em três profundidades: superfície, 5m e 10m.

Por algum motivo não identificado pelo aluno, o modelo não processou regiões mais costeiras, obtendo resultados somente na porção offshore do domínio modelado.

Por fim, as séries temporais em dois pontos de interesse foram analisadas (Fig 5.11 e 5.12), onde no ponto mais interno, dentro da Baía de Santos, não foram observadas correntes devido ao problema já discutido acima. Obtivemos então, somente uma série temporal válida para o ponto de interesse mais offshore, próximo ao contorno aberto do domínio modelado.

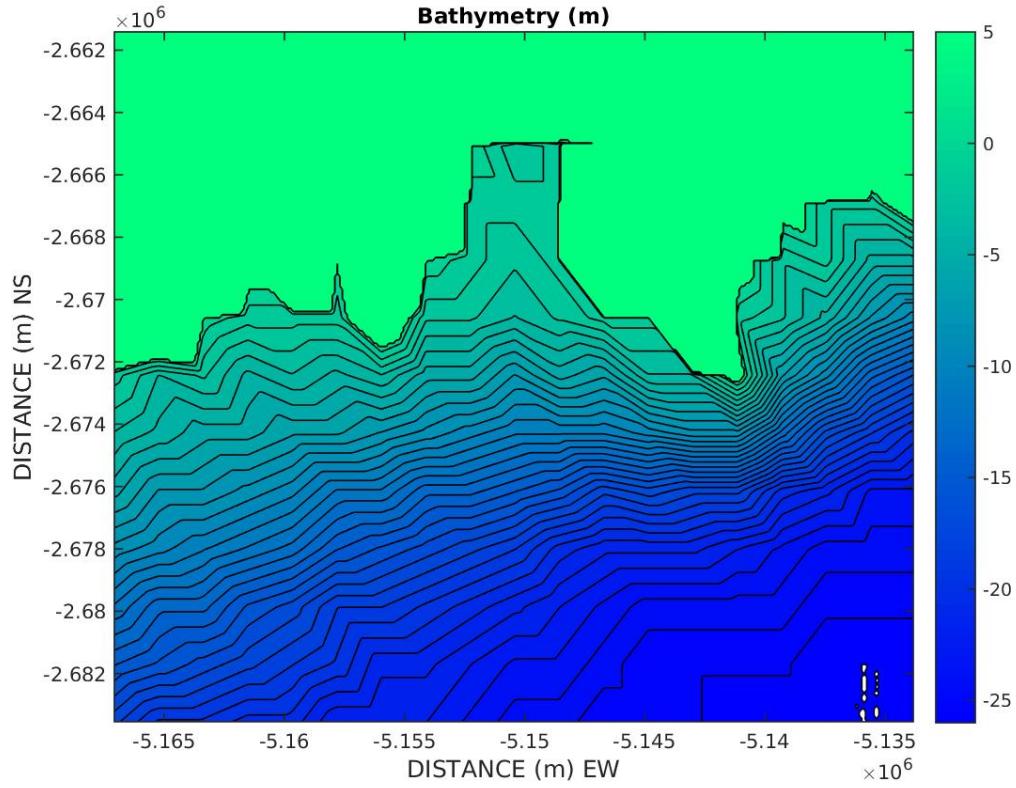


Fig 5.2 - Chaves utilizada para realizar cálculos somente nas células oceânicas.

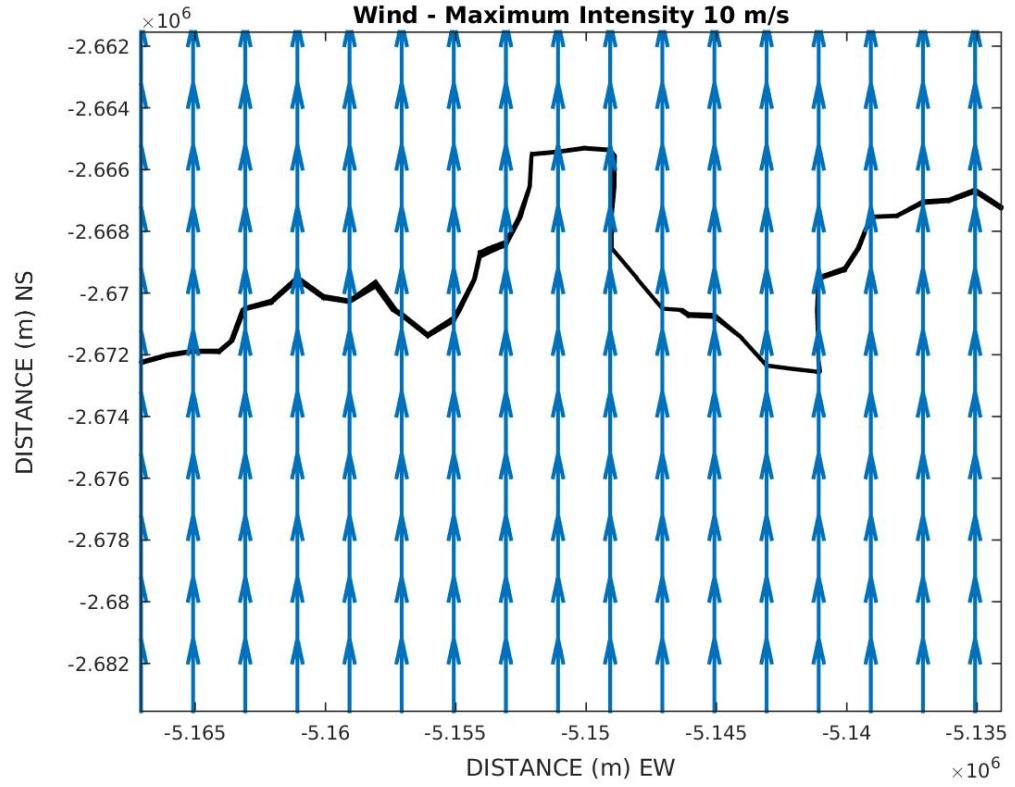


Fig 5.3 - Campo de ventos de sul utilizados nas primeiras horas de simulação.

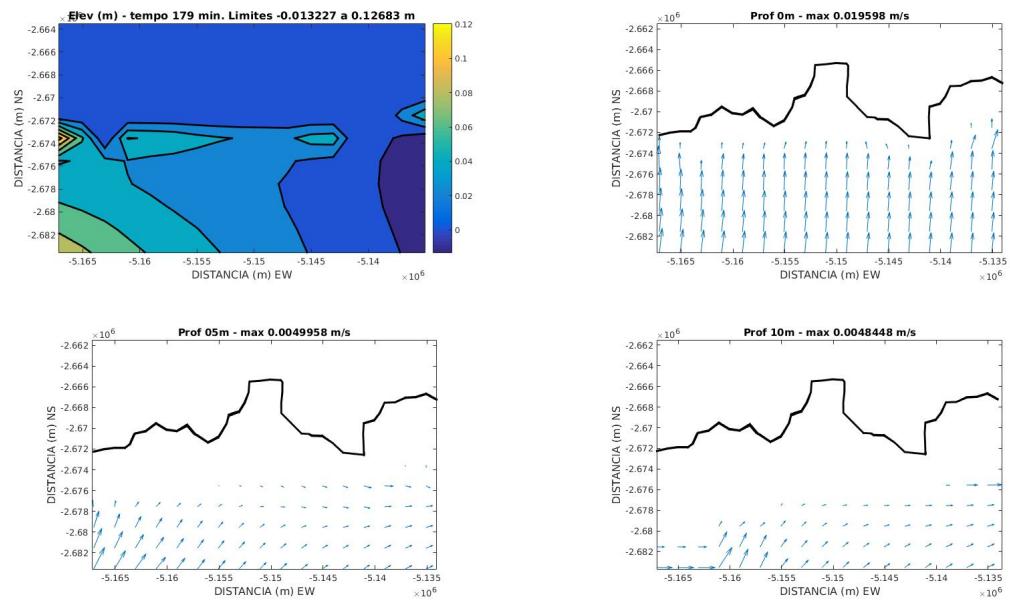


Fig 5.4 - Resposta do nível do mar (superior esquerdo) e do campo de correntes na superfície (superior direito), a 5 metros de profundidade (inferior esquerdo) e 10 metros de profundidade (inferior direito).

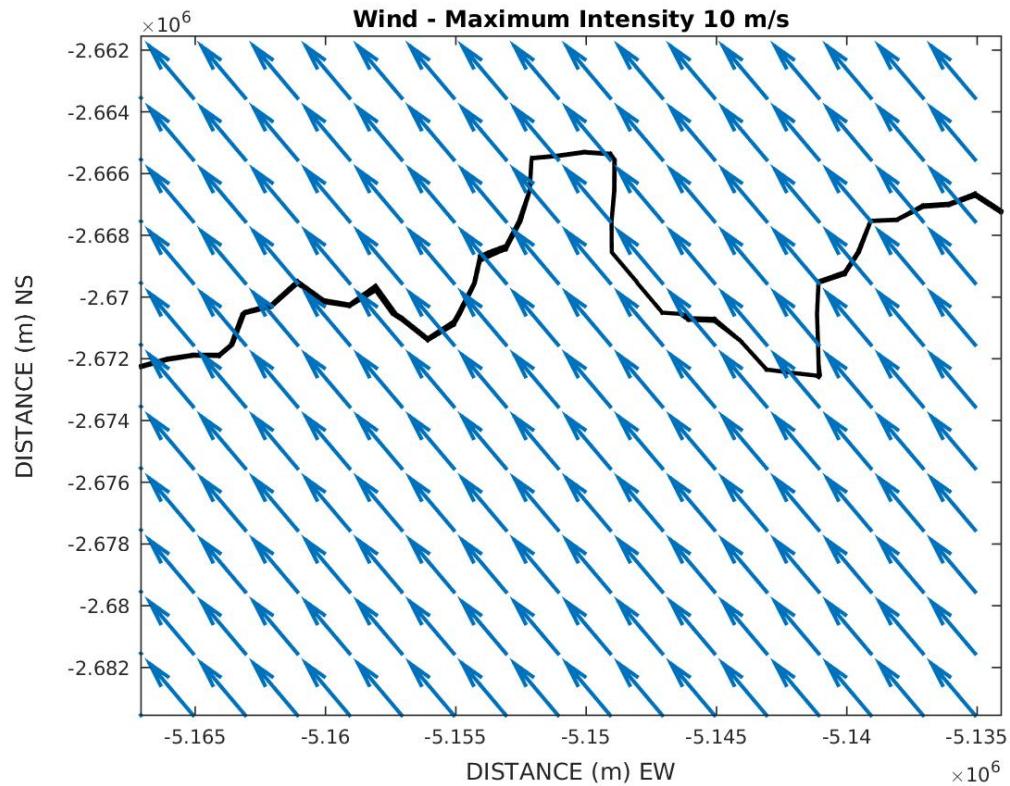


Fig 5.5 - Campo de ventos de sudeste utilizados entre 3 e 6 horas de simulação.

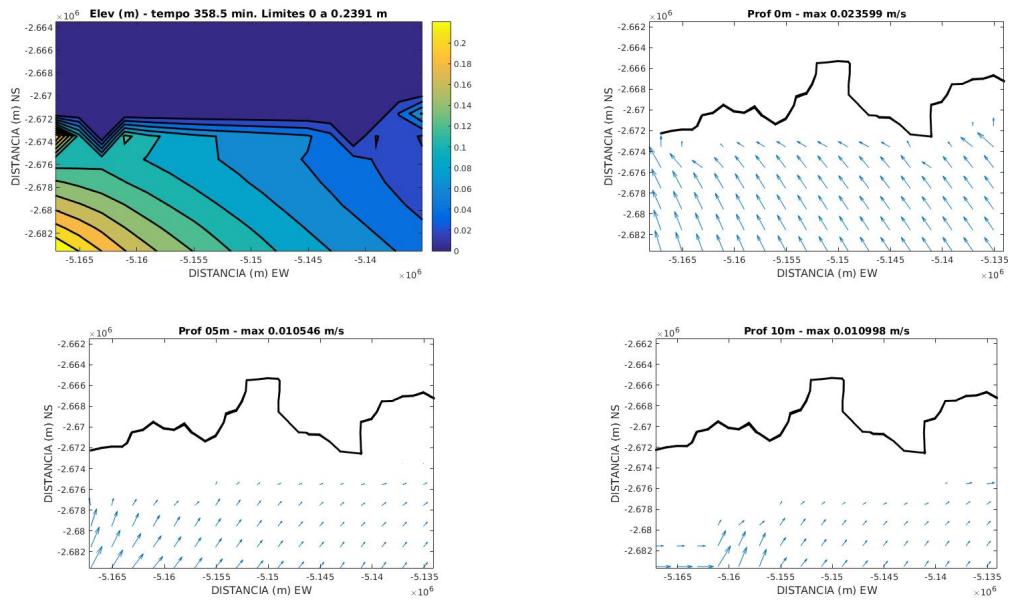


Fig 5.6 - Idem Fig 5.4

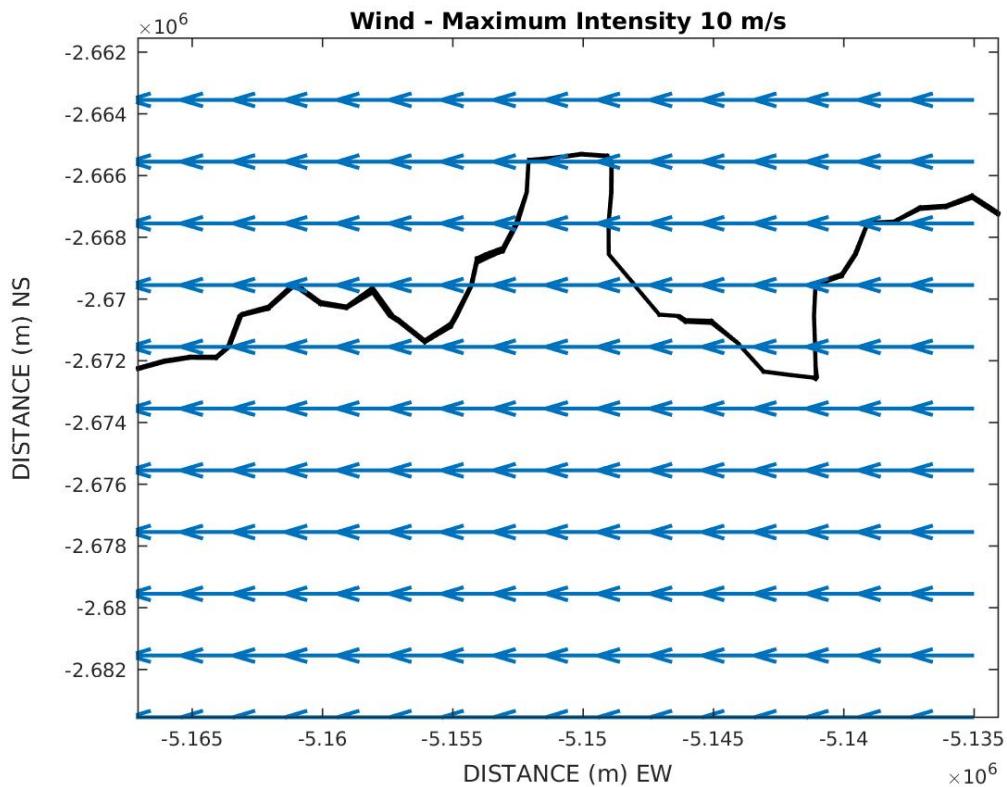


Fig 5.7 - Campo de ventos de leste utilizados entre 6 e 9 horas de simulação.

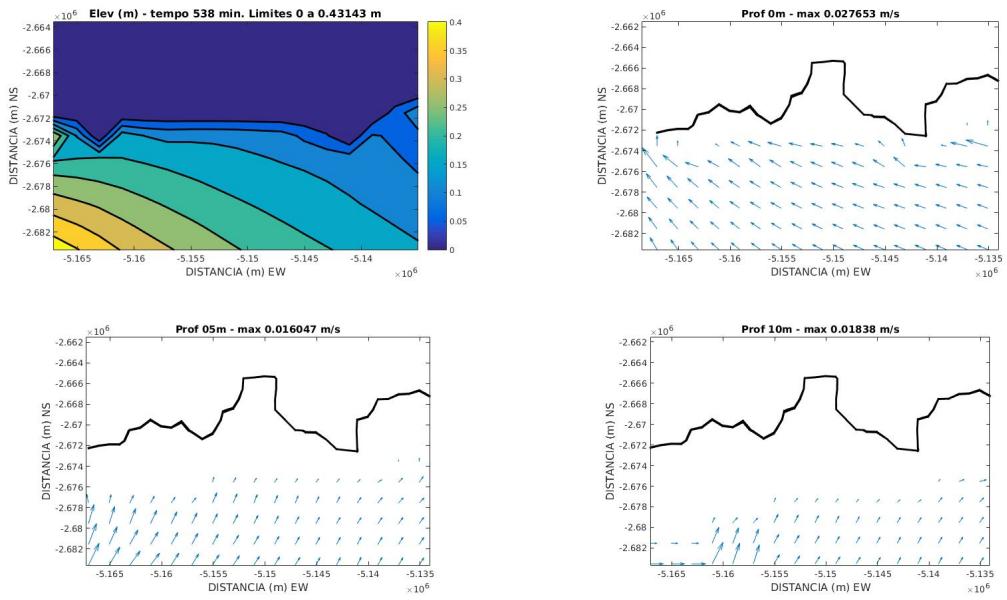


Fig 5.8 - Idem Fig 5.4

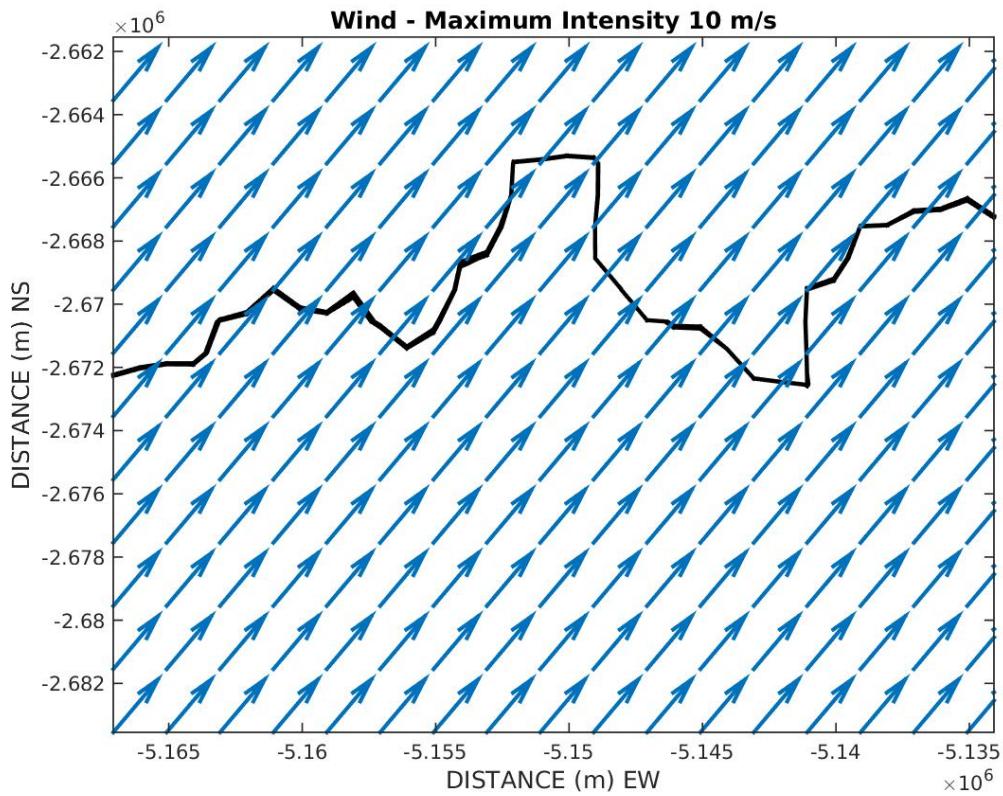


Fig 5.9 - Campo de ventos de sudeste utilizados nas 3 horas finais de simulação.

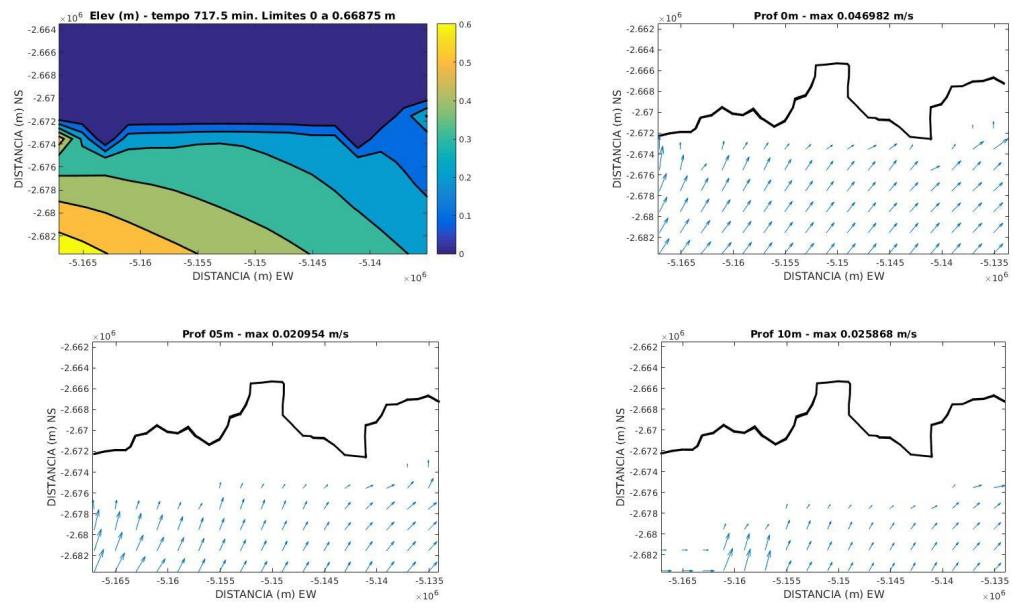


Fig 5.10 - Idem Fig 5.4

Coordenadas  $46.35^{\circ}\text{W}$ ,  $24.01^{\circ}\text{S}$

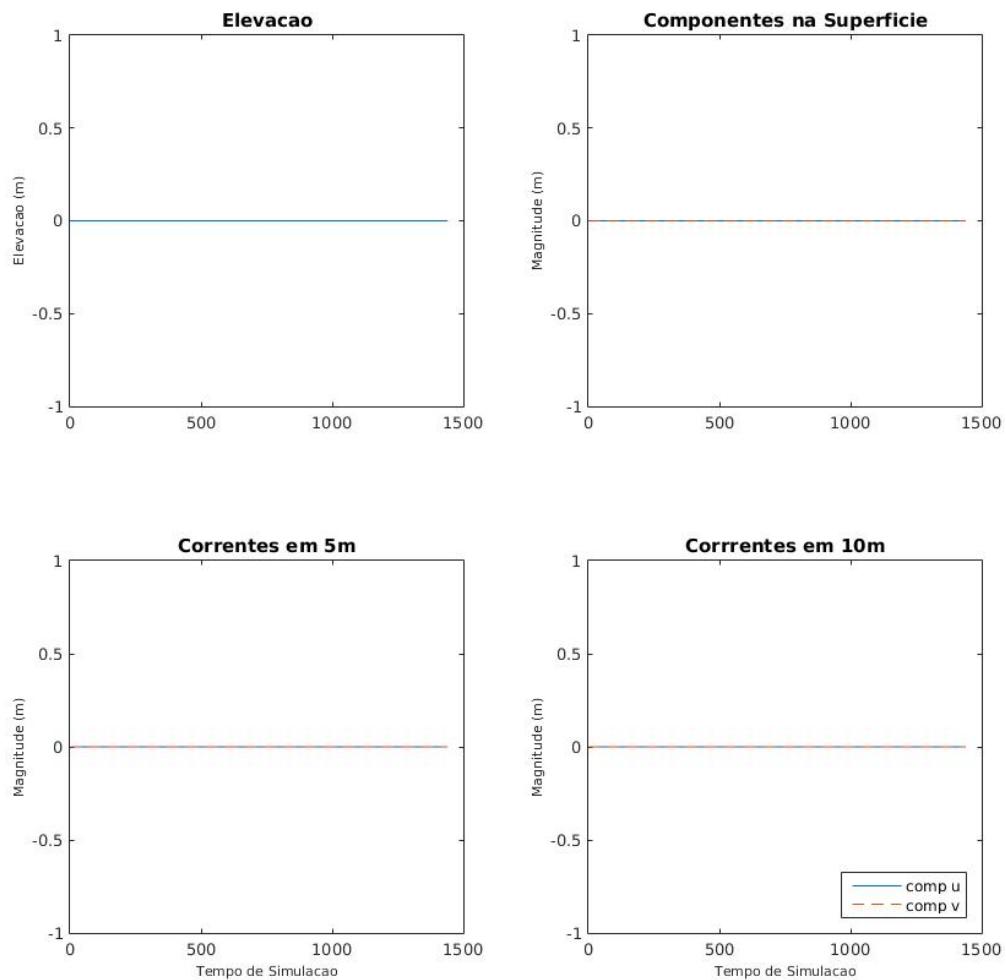


Fig 5.11 - Série temporal para região de interesse dentro da Baía de Santos, para os mesmos parâmetros apresentados na Fig 5.4.

Coordenadas  $46.35^{\circ}\text{W}$ ,  $24.10^{\circ}\text{S}$

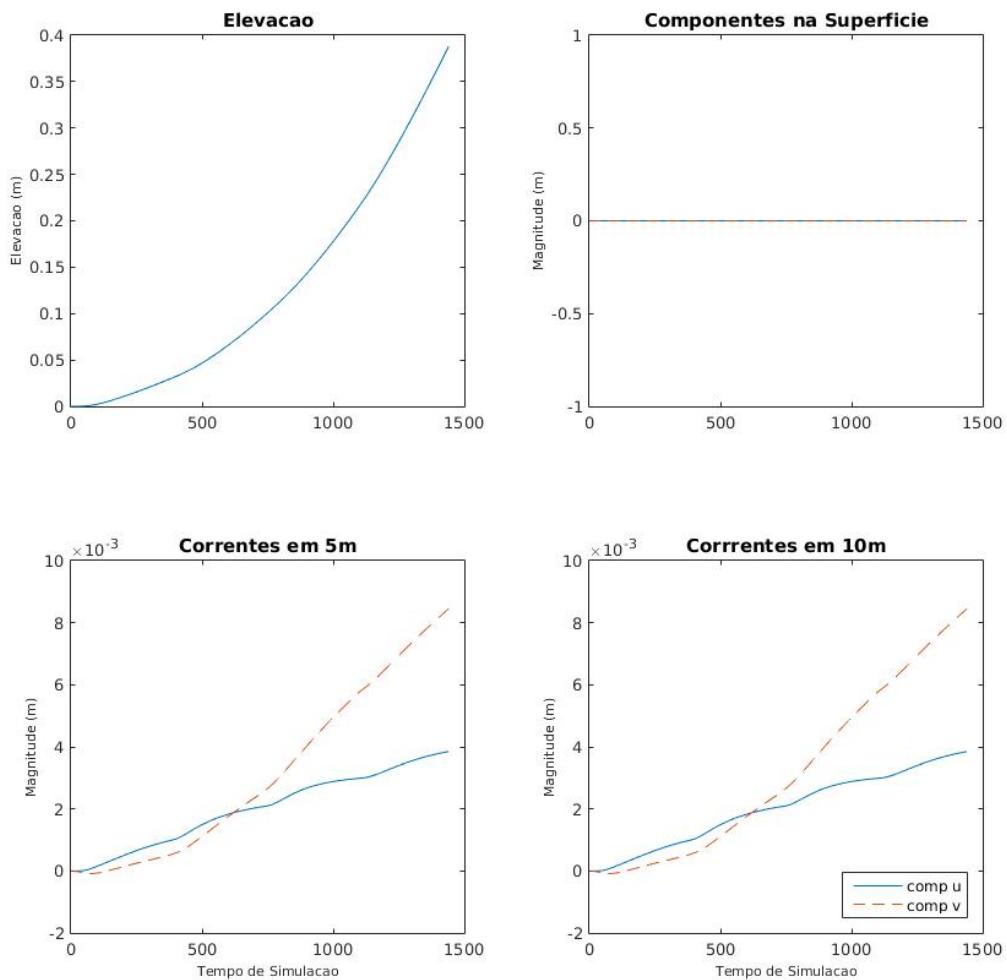


Fig 5.12 - Idem Fig 5.11, mas para ponto de interesse offshore.