

# List 2 - IOF814: Modelos Numéricos Aplicados a Processos Costeiros e Estuarinos

November 24, 2017

**Aluno:** Danilo Augusto Silva  
**Nº USP:** 7279456  
**Data de Entrega:** 24 de Novembro/2017

Informações gerais quanto a estrutura da lista:

codes/: contém os códigos elaborados para os exercícios;

data/: contém os arquivos de input para alguns códigos e

outputs/: contém os arquivos de saída dos códigos, armazenados em subpastas designada para cada questão, bem como o arquivo original .tex e .pdf desta lista, com os desenvolvimentos das discretizações e respostas dissertativas.

.....

**Ex1** Considerando as equações dadas no enunciado, podemos eliminar a variação da tensão de cisalhamento do vento na direção meridional, e, desta forma, reduzimos a equação da vorticidade para:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \beta = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\tau_{ox}}{rho_o H} \right) - \frac{r}{\rho_o H} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Discretizando (1) utilizando uma grade alternada do tipo B de Arakawa, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\psi_{j+1,k+1}^n + \psi_{j+1,k}^n - \psi_{j-1,k-1}^n - \psi_{j-1,k}^n}{4\Delta x} \right) \beta = & -\frac{1}{2\rho_o H \Delta y} \left( \tau_{ox,j+1,k+1}^n + \tau_{ox,j-1,k+1}^n + \tau_{ox,j+1,k-1}^n + \tau_{ox,j-1,k-1}^n \right) + \\ & -\frac{r}{\rho_o H} \left( \frac{\psi_{j+1,k}^n - 2\psi_{j,k}^n + \psi_{j-1,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{j,k+1}^n - 2\psi_{j,k}^n + \psi_{j,k-1}^n}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Isolando o termo  $\psi_{j,k}^n$  de (2), obteremos:

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}^n = & \left[ \frac{1}{2\rho_o H \Delta y} \left( \tau_{oxj+1,k+1}^n + \tau_{oxj-1,k+1}^n + \tau_{oxj+1,k-1}^n + \tau_{oxj-1,k-1}^n \right) + \right. \\ & \frac{\beta}{4\Delta x} \left( \psi_{j+1,k+1}^n + \psi_{j+1,k}^n - \psi_{j-1,k-1}^n - \psi_{j-1,k}^n \right) + \\ & \left. + \frac{r}{\rho_o H} \left( \frac{\psi_{j+1,k}^n + \psi_{j-1,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{j,k+1}^n + \psi_{j,k-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right] \Bigg/ \frac{2r}{\rho_o H} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Calculou-se a função de corrente, baseado na Eq(3) e, a partir das relações entre u e v com as derivadas espaciais de  $\psi$ , obteve-se resultados para a elevação da superfície livre e corrente no Hemisfério Norte.

Nota-se (Fig 1.1) uma elevação positiva no canto superior direito da grade teórica elaborada com um desnível na região oposta. Quanto a circulação gerada pelo vento considerado (Fig1.2), nota-se uma circulação horária, que corresponde com o padrão do grande giro subtropical do Atlântico Norte.

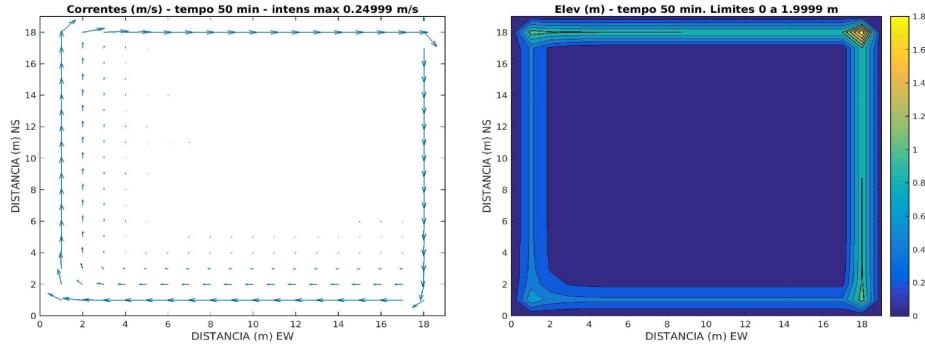


Fig 1.1 - Campo de correntes (esquerda) e elevação da superfície livre do mar (direita) para o último instante de tempo modelado pela função de corrente.

**Ex2** A simulação de um sistema hidrodinâmico 1D foi realizado, utilizando-se o seguindo conjunto de equações pra águas rasas:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -H \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

Assumindo um canal na direção y, simulando o Canal de São Sebastião (CSB), podemos discretizar (4) e (5), considerando os efeitos difusivos e decaimento:

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} = -g \left[ \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n}{2\Delta y} \right] + D \left[ \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta y^2} \right] - rv_j^n \quad (6)$$

Isolando o termo renovado  $v_j^{n+1}$ , obtemos:

$$v_j^{n+1} = v_j^n - g \frac{\Delta t}{\Delta y} (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) + 2D \frac{\Delta t}{\Delta y^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) - 2rv_j^n \Delta t \quad (7)$$

Para a equação (5), discretizamos e isolando o termo  $\eta_j^{n+1}$ :

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^{n-1}}{2\Delta t} = -H \left[ \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta y} \right] \Rightarrow \eta_j^{n+1} = \eta_j^{n-1} - 2H \frac{\Delta t}{\Delta y} (v_{j+1}^n - v_j^n) \quad (8)$$

O código [ex02.m](#) modela as equações (7) e (8), obtendo os resultados apresentados abaixo.

No início da simulação (Fig 2.1, esquerda), observamos as condições de contorno a sul e norte da grade, e o sinal propagando-se para o interior do canal. Como consequência dessa propagação de sinal de  $\eta$ , há geração de uma corrente negativa nos contornos sul e norte.

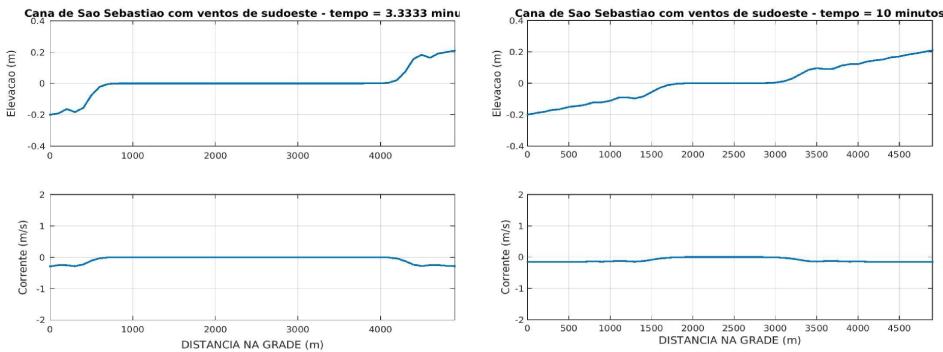


Fig 2.1 - Elevação da superfície livre do mar (esquerda, superior) e corrente (esquerda, inferior) para o instante de tempo de 3.4min e para o instante de 10min a direita.

Ambos os sinais convergem para o interior do canal (Figura 2.1, direita) e, ao se encontrarem, há uma soma destrutiva dos sinais que tende a equilibrar as oscilações da superfície livre e uma parte deste sinal é refletida de volta aos contornos (Figura 2.2, esquerda). Desta forma, com as integrações no tempo, o observado é que a superfície entra em equilíbrio (Figura 2.2, direita).

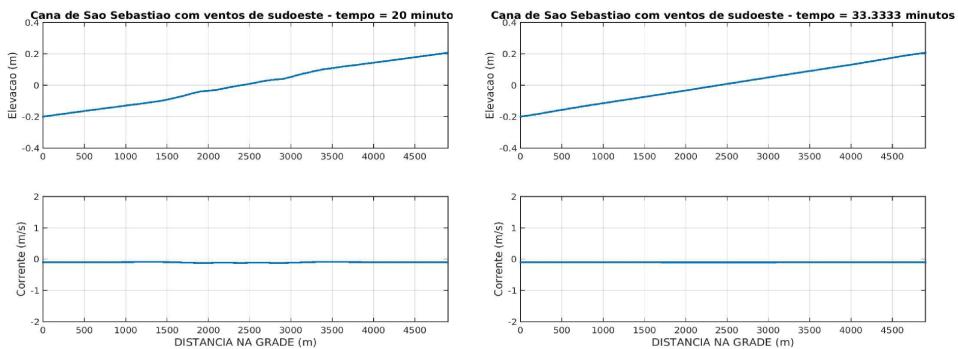


Fig 2.2 - Vide Fig2.1, mas para os instantes de tempo de 20min (esquerda) e 32.4min (direita).

**Ex3 - Parte A** Considerando as equações:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + D_h \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - RU \quad (10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + D_h \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) - RV \quad (11)$$

Uma grade B de Arakawa (Fig. 4), é uma grade alternada utilizada para modelar as equações hidrodinâmicas 2D, onde os pontos das componentes de velocidade ( $u, v$ ) são dados no centro das células e os pontos de elevação  $\eta$  são definidos nos cantos das células. Para fins acadêmicos, considera-se, nesta discretização, um índice para os três pontos ( $u, v$  e  $\eta$ ).

A discretização das equações 9, 10 e 11 segue os seguintes esquemas:

- Esquema explícito, centrado no tempo e no espaço para a **advecção**;
- Esquema explícito, avançados no tempo e centrado no espaço para a **difusão** e
- Esquema semi implícito para o **decaimento**.

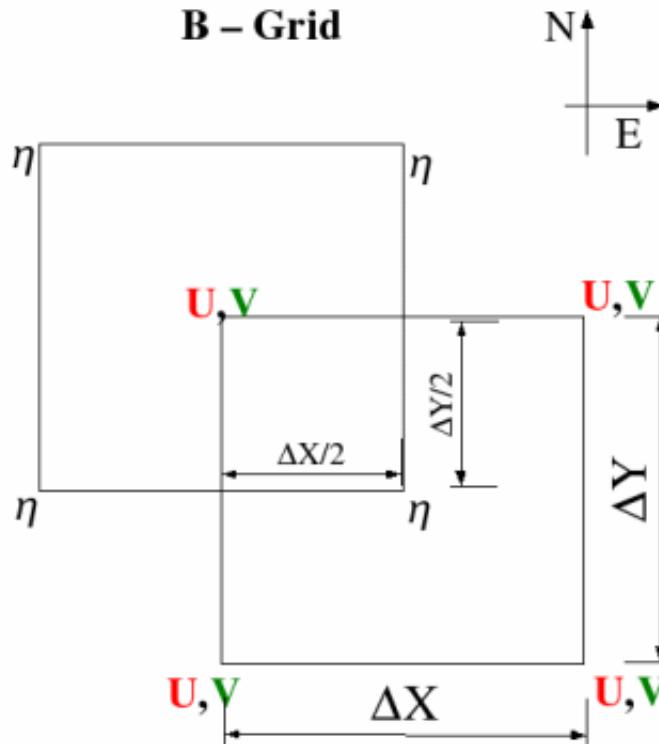


Fig 3.1 - Grade B de Arakawa, com pontos do tipo  $\eta$  localizados nos cantos das células e pontos do tipo  $u, v$  localizados no centro das células.

Ao programar as equações discretizadas, devemos inicialmente calcular as componentes de velocidade e, então, a aplicar a equação da continuidade. Desta forma, a discretização será apresentada desta forma, inicialmente para a componente  $u$ , seguida da componente  $v$  e, por fim,  $\eta$ .

Importante notar que a discretização das equações das componentes de velocidade ocorrem em um ponto de referência ( $j+1,k+1$ ), que corresponde a um ponto de  $u,v$ . Já a discretização da equação da continuidade é dada em um ponto  $(j,k)$ , por se tratar de um ponto do tipo  $\eta$ , conforme determina o esquema da grade B de Arakawa utilizada.

### Componente u ou Eq 10

$$\begin{aligned} \frac{U_{j+1,k+1}^{n+1} - U_{j+1,k+1}^{n-1}}{2\Delta t} + umed \left( \frac{U_{j+3,k+1}^n - U_{j-1,k+1}^n}{2\Delta x} \right) + vmed \left( \frac{U_{j+1,k+3}^n - U_{j+1,k-1}^n}{2\Delta y} \right) - fV_{j+1,k+1}^n = \\ -g \left[ \frac{(\eta_{j+2,k}^n + \eta_{j+2,k+2}^n) - (\eta_{j,k}^n + \eta_{j,k+2}^n)}{2\Delta x} \right] + \\ + D_h \left[ \left( \frac{U_{j+3,k+1}^{n-1} - 2U_{j+1,k+1}^{n-1} + U_{j-1,k+1}^{n-1}}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{U_{j+1,k+3}^{n-1} - 2U_{j+1,k+1}^{n-1} + U_{j+1,k-1}^{n-1}}{\Delta y^2} \right) \right] + \\ - R \left( \frac{U_{j+1,k+1}^n + U_{j+1,k+1}^{n+1}}{2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

### Componente v ou Eq 11

$$\begin{aligned} \frac{V_{j+1,k+1}^{n+1} - V_{j+1,k+1}^{n-1}}{2\Delta t} + umed \left( \frac{V_{j+3,k+1}^n - V_{j-1,k+1}^n}{2\Delta x} \right) + vmed \left( \frac{V_{j+1,k+3}^n - V_{j+1,k-1}^n}{2\Delta y} \right) + fU_{j+1,k+1}^n = \\ -g \left[ \frac{(\eta_{j+2,k+2}^n + \eta_{j,k+2}^n) - (\eta_{j+2,k}^n + \eta_{j,k}^n)}{2\Delta y} \right] + \\ + D_h \left[ \left( \frac{V_{j+3,k+1}^{n-1} - 2V_{j+1,k+1}^{n-1} + V_{j-1,k+1}^{n-1}}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{V_{j+1,k+3}^{n-1} - 2V_{j+1,k+1}^{n-1} + V_{j+1,k-1}^{n-1}}{\Delta y^2} \right) \right] + \\ - R \left( \frac{V_{j+1,k+1}^n + V_{j+1,k+1}^{n+1}}{2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

### Elevação do nível do mar $\eta$ ou Eq 9

$$\begin{aligned} \left( \frac{\eta_{j,k}^{n+1} - \eta_{j,k}^n}{2\Delta t} \right) + H \left( \frac{U_{j+1,k+1}^{n+1} + U_{j+1,k-1}^{n+1} - U_{j-1,k+1}^{n+1} - U_{j-1,k-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \\ H \left( \frac{V_{j+1,k+1}^{n+1} + V_{j-1,k+1}^{n+1} - V_{j+1,k-1}^{n+1} + V_{j-1,k-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

A vantagem, especificamente, da grade B de Arakawa é a facilidade em representar os termos de Coriolis, embora dificulte, como já demonstrado, a representação dos termos de gradiente de elevação e divergente de velocidade.

**Ex3 - Parte B** Consiste em um modelo de grade variável no tempo, onde a possibilidade de inundação ou ressecamento dos elementos de grade é uma importante característica quando modela-se regiões de planícies de maré ou com baixa declividade do terreno.

Considerando a solução clássica para este tipo de grade, apresentado em Flather & Heaps (1975), partimos das equações:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{rU \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \quad (15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{rU \sqrt{U^2 + V^2}}{D} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial (DU)}{\partial x} - \frac{\partial (DV)}{\partial y} \quad (17)$$

onde:

$D(x, y, t) = H(x, y) + \eta(x, y, t)$ : é a profundidade instantânea, sendo  $H$  a topografia do terreno e  $\eta$  a elevação do nível do mar e atentando-se ao fato que  $H$  é positivo para o oceano e negativo para o continente e  $\eta$  é positivo para cima e negativo para baixo.

Desta forma, a cada novo nível de tempo, é necessário testar a grade e seu valores para determinar se haverá inundação ou exposição do fundo. Este procedimento é realizado através de uma média ponderada entre os termos de  $D$ , onde, para um **contorno terrestre a oeste da região modelada**:

$$\begin{cases} (j-1) & \text{será ponto úmido, se } 0.5(D_{j-1} + D_j) \geq 0 \\ (j-1) & \text{será ponto seco, se } 0.5(D_{j-1} + D_j) < 0 \end{cases} \quad (18)$$

Em caso do ponto (j-1) se tornar um ponto úmido, o valor de elevação e corrente são extrapolados da região de oceano para as proximidades do contorno. Desta forma, podemos implementar o seguinte método de extração para elevação  $\eta$  e corrente:

$$\left( \eta_{j-1,k}^n \right)_{\text{extrapolado}} = 1\eta_{j,k}^n - \eta_{j+1,k}^n \quad (19)$$

$$\left[ \left( UD \right)_{j,k}^n \right]_{\text{extrapolado}} = 2(UD)_{j+1,k}^n - (UD)_{j+2,k}^n \quad (20)$$

Por fim, aplica-se (19) e (20) para renovar no tempo as variáveis no ponto (j-1). Um exemplo de aplicação, seria utilizar as variáveis extrapoladas da seguinte forma:

$$\eta_{j-1}^{n+1} = \left( \eta_{j-1}^n \right)_{\text{extrapolado}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left[ \left( UD \right)_j^n \right]_{\text{extrapolado}} - (UD)_{j-1}^n \right\} \quad (21)$$

Para um **contorno terrestre a norte da área modelada**, aplicamos o mesmo procedimento, onde:

$$\begin{cases} (k+1) & \text{será ponto úmido, se } 0.5(D_k + D_{k+1}) \geq 0 \\ (k+1) & \text{será ponto seco, se } 0.5(D_k + D_{k+1}) < 0 \end{cases} \quad (22)$$

Obteremos, então, o seguindo par de equações para elevação e corrente:

$$\left( \eta_{k+1}^n \right)_{\text{extrapolado}} = 1\eta_{k+1}^n - \eta_k^n \quad (23)$$

$$\left[ \left( VD \right)_{j,k}^n \right]_{\text{extrapolado}} = 2(VD)_{j,k-1}^n - (VD)_{j,k-2}^n \quad (24)$$

Renovando, enfim, a elevação para o contorno terrestre a norte com:

$$\eta_{j,k+1}^{n+1} = \left( \eta_{j,k+1}^n \right)_{\text{extrapolado}} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left\{ \left[ (VD)_{j,k+1}^n \right]_{\text{extrapolado}} - (VD)_{j,k}^n \right\} \quad (25)$$


---

**Ex4** O método dos mínimos quadrados (Least Square) trata-se um técnica de interpolação de dados em uma grade a partir de dados conhecidos (*in situ* ou saídas de modelos globais). Com isso, conseguimos impor condições iniciais mais adequadas aos modelos, principalmente em modelos operacionais, com informações mais próximas da realidade, a fim de obter resultados mais acurados como produto do modelo.

Trata-se uma técnica conhecida e bem formulada, facilmente resolvida numericamente por um esquema de sistema linear, conforme programado e comentado no código [ex04.m](#).

Abaixo são apresentadas as imagens com os dados originais uma grade teórica formulada (Figura 4.1, esquerda) e o produto da utilização do método, preenchendo toda a grade elaborada com dados interpolados a partir dos pontos conhecidos (Figura 4.1, direita).

A utilização deste método é muito bem conhecida e aplicada em modelos no mundo todo, onde são implementados modelos com assimilação de dados (*dado in situ* ou de satélite) ou aninhamento de grades com modelos globais. Sua facilidade de implementação e os ganhos em acurácia do produto modelado são os motivos de sua implementação, uma vez que as simulações não começarão a partir do repouso, como em modelos acadêmicos, mas sim a partir de condições que representam o mais próximo possível da realidade.

Desta forma, ao utilizarmos um modelo devidamente calibrado e validado, com condições iniciais que representam o estado inicial do sistema, obteremos produtos cada vez mais representativos ao real.

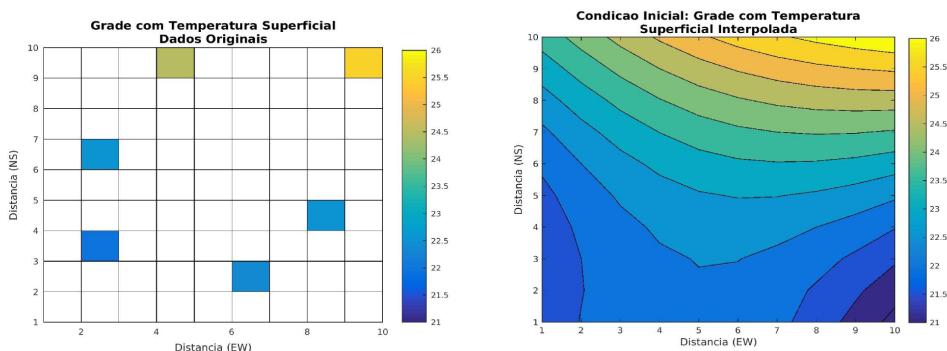


Fig 4.1 - Grade com dados conhecidos de temperatura (esquerda) e mesma grade com os dados interpolados pelo Método dos Mínimos Quadrados (direita).

---

**Ex5** Código do exercício localizado em [ex05.m](#) e as imagens a seguir são um resumo da simulação realizada.

O modelo numérico para a região de Santos foi realizado, utilizando-se dados batimétricos extraídos do etopo1 (Figura 5.1, esquerda) e um campo de vento teórico e homogêneo no espaço e tempo (Figura 5.1, direita) de sudoeste.

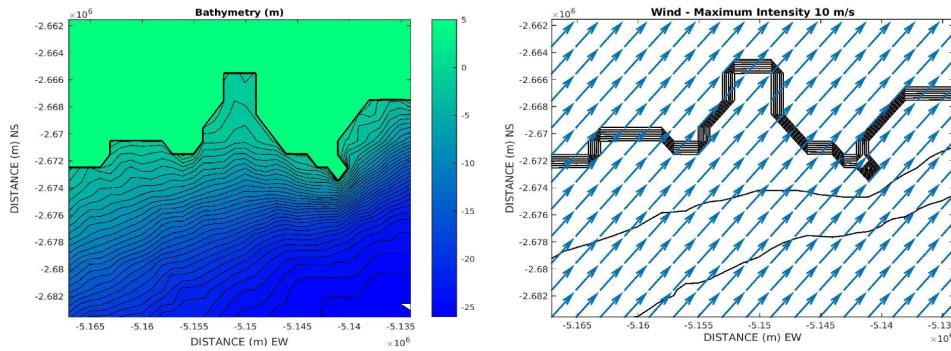


Fig 5.1 - Batimetria (esquerda) e campo de ventos (direita) utilizados na simulação deste exercício, compreendendo a região de Santos e parte da Plataforma continental adjacente.

Como resultado da simulação, observamos o campo de corrente gerado pelas forçantes (vento e elevação nos contornos) na primeira hora modelada (Figura 5.2) e as oscilações causadas. Nota-se que, as regiões com linha de costa situada a leste/nordeste há um acúmulo de água, causando uma sobre elevação da superfície livre associado ao vento de sudoeste e, para regiões com linha de costa a oeste/sudoeste, observamos um desnível da superfície livre.

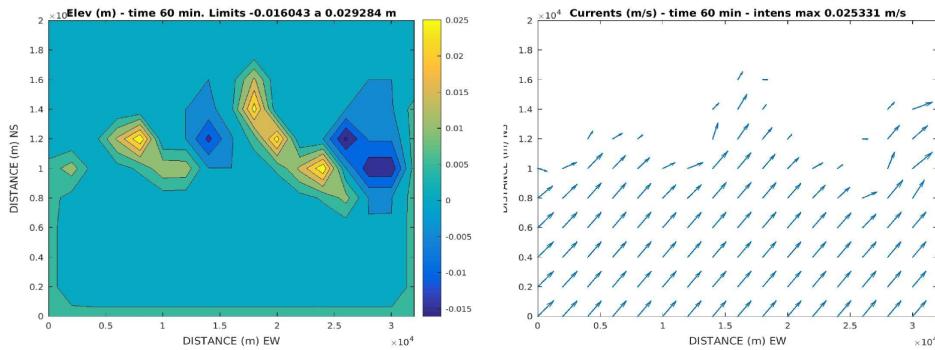


Fig 5.2 - Campo de elevação da superfície livre do mar (esquerda) e campo de correntes geradas (direita), para o instante de 60min de simulação.

Para o instante referente a metade do tempo simulado (Figura 5.3), observamos a propagação do sinal da elevação nos contornos para o interior da região modelada, onde a única subregião associada a um desnível da superfície livre situa-se mais leste do domínio, possivelmente associada, ainda, ao vento homogêneo de sudoeste. Quanto a circulação, observa-se uma intensificação da corrente a oeste do domínio com correntes mais fracas próximas aos contorno fechados.

Decorridos toda a simulação, o campo de elevação da superfície livre do mar (Figura 5.4, esquerda) mostra uma intensificação do cenário já discutido acima. Nota-se que, a leste do domínio modelado, há um acentuado desnível, atingindo valores próximos a  $-0.15m$  e, os maiores valores encontrados, correspondem ao sinal propagado da condição de contorno estabelecida no modelo, de  $0.25m$  em todos os contornos abertos. Para o campo de correntes (Figura 5.4, direita), encon-

tramos máximos valores de  $0.37 \text{ m.s}^{-1}$ , seguindo o mesmo padrão observado ao longo de toda a simulação, com correntes intensificadas nas regiões de maior gradiente de elevação do nível do mar.

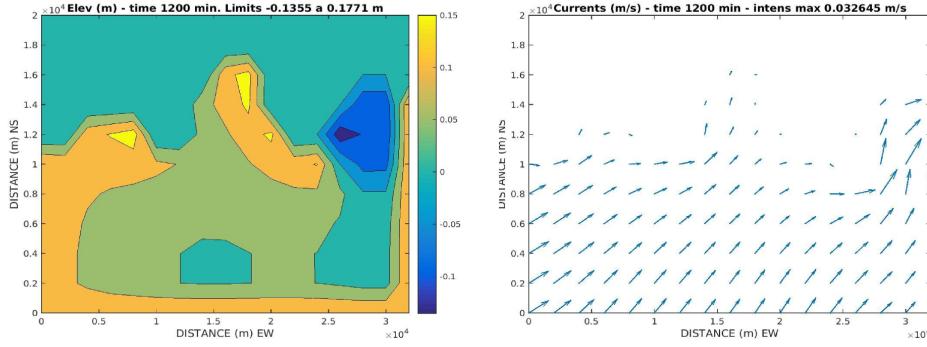


Fig 5.3 - Vide Fig 5.2, mas para o instante de 1200min.

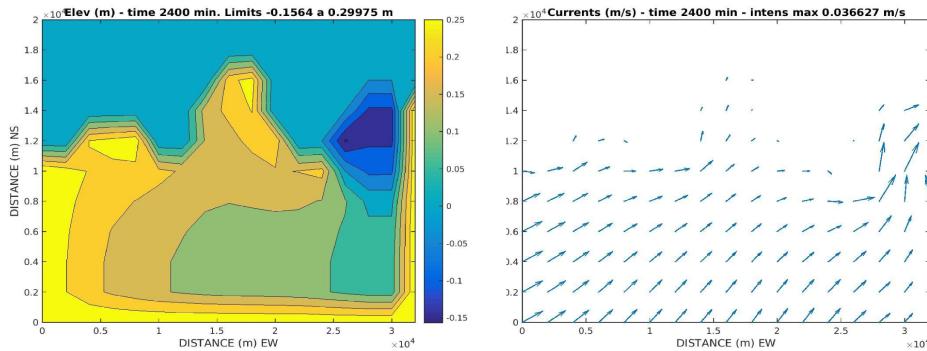


Fig 5.4 - Vide Fig 5.2, mas para o instante de 2400 min.