

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - INSTITUTO OCEANOGRÁFICO  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM OCEANOGRAFIA FÍSICA  
IOF 5828 - HIDRODINÂMICA DA PLATAFORMA CONTINENTAL  
PROFESSOR: BELMIRO MENDES DE CASTRO FILHO  
LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - DEVOLUÇÃO: 28/11/17

1. As equações de águas rasas podem ser linearizadas em torno de um estado básico definido por:

$$(\bar{\eta}, \bar{u}, \bar{v}) = [\bar{\eta}(x), 0, \bar{v}]$$

tal que a componente de velocidade  $\bar{v}$  seja constante e esteja em equilíbrio geostrófico, isto é:

$$f\bar{v} = g \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}$$

- (a) Linearize as equações de águas rasas em torno desse estado básico. Suponha que  $H_o \gg |\bar{\eta}|$ , sendo  $H_o$  a espessura da coluna de água no estado de repouso;
- (b) Supondo uma plataforma continental ocupando a região  $x \geq 0$ , e que  $H_o$  é constante, simplifique o sistema linearizado obtido filtrando das possíveis soluções as ondas de Poincaré;
- (c) Utilizando o sistema simplificado, obtenha uma equação de onda para  $\eta'$ , a perturbação do nível do mar sobre o estado básico  $\bar{\eta}$ ;
- (d) Supondo solução harmônica com frequência  $\omega > 0$ , encontre a relação de dispersão para  $\ell > 0$  e para  $\ell < 0$ , sendo  $\ell$  o número de onda paralelo à costa;
- (e) Determine a estrutura normal à costa da onda obtida no item anterior. Qual deve ser a relação entre  $\frac{\omega}{\ell}$  e  $\bar{v}$ , nos casos  $\ell > 0$  e  $\ell < 0$ , para o hemisfério sul?

- (f) Qual a equação independente de  $\ell$  para a velocidade de fase das ondas em estudo, tanto para  $\ell > 0$  quanto para  $\ell < 0$ ?
- (g) Identifique e justifique qual tipo de onda está sendo estudada. Como se explica a existência de velocidade de fase paralela à costa negativa no hemisfério sul?
2. Combinando as equações inviscidas linearizadas para águas rasas, e desprezando o efeito da rotação da Terra, podemos obter a seguinte equação para o deslocamento da superfície livre do mar:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( H_o \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( H_o \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right] = 0$$

- (a) Obtenha a equação acima;
- (b) Para uma plataforma continental linearmente inclinada semi-infinita, cuja topografia é dada por:

$$H_o(x) = \alpha x, \quad x > 0, \quad \alpha > 0$$

sendo  $x$  a direção normal à uma costa reta infinita situada em  $x = 0$ , e para soluções harmônicas da forma:

$$\eta = \text{Re}[\eta_o(x)e^{i(\ell y - \omega t)}]$$

obtenha a equação diferencial para  $\eta_o$ ;

- (c) Resolva a equação diferencial para  $\eta_o$  utilizando polinômios de Laguerre e obtenha a relação de dispersão. Que tipo de onda aparece como solução?
- (d) Encontre as soluções para  $\eta$ ,  $u$  e  $v$  para o modo fundamental (“gravest mode”). Essa solução parcial foi obtida pela primeira vez em 1846, por Stokes. Discuta a validade e aplicabilidade dessa solução.

3. Para uma plataforma continental linearmente inclinada semi-infinita, obtenha a seguinte relação de dispersão para ondas livres:

$$\omega_n^3 - [f_o^2 + (2n + 1)g\alpha\ell]\omega_n - f_o g\alpha\ell = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

onde  $\omega_n$  é a frequência do enésimo modo,  $f_o$  é a frequência inercial,  $\alpha$  é a inclinação do fundo, e  $\ell$  é o número de onda na direção paralela à costa. Fazendo a aproximação  $\omega^2 \ll f_o^2$ , discuta a relação de dispersão resultante.

4. Confinamento de ondas pode ocorrer devido à presença de uma parede vertical que ocupa **parte** da coluna de água, como o talude continental, por exemplo. Essas ondas são chamadas **Ondas Duplas de Kelvin** (“Double Kelvin Waves”). Para uma topografia do tipo:

$$H_o(x) = \begin{cases} H_1 & \text{para } x < 0 \\ H_2 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

$H_1 < H_2$ , e utilizando a aproximação da camada rígida, pede-se:

- (a) Encontrar a solução para a amplitude da função de corrente  $\Psi(x)$ . Esquematize graficamente essa solução;
  - (b) Encontrar a relação de dispersão. Como é a propagação de fase em cada hemisfério?
5. No estudo de Ondas de Plataforma Continental (OPC) emprega-se, muitas vezes, a aproximação da camada rígida, isto é, assume-se que a divergência horizontal na superfície é desprezível.
- (a) Mostre que uma condição para a utilização da aproximação da camada rígida no estudo de OPC é:

$$\frac{f_o^2 L^2}{g \bar{H}} \ll 1$$

onde  $L$  é a largura e  $\bar{H}$  a profundidade média da plataforma continental. Como pode ser chamada a grandeza esquerda da desigualdade acima?

- (b) Mostre que outra forma de exprimir a desigualdade acima é:

$$\frac{\omega}{\ell} \ll \frac{g}{f_o} \frac{dH_o}{dx}$$

onde  $\omega$  é a frequência,  $\ell$  o número de onda paralelo à costa,  $H_o(x)$  a espessura da coluna de água no repouso e  $x$  a direção perpendicular à costa.

- (c) Essa aproximação seria justificável para estudos de OPC na Plataforma Continental Sudeste do Brasil? Justifique.