

1 课程设计任务 1

1、考虑如图 1 所示的宇宙飞船控制系统模型。设计一个超前校正装置 $G_c(s)$ ，使得主导闭环极点的阻尼比 ξ 和无阻尼自然频率 ω_n 分别为：0.5 和 2rad/s，超调量小于 30%。

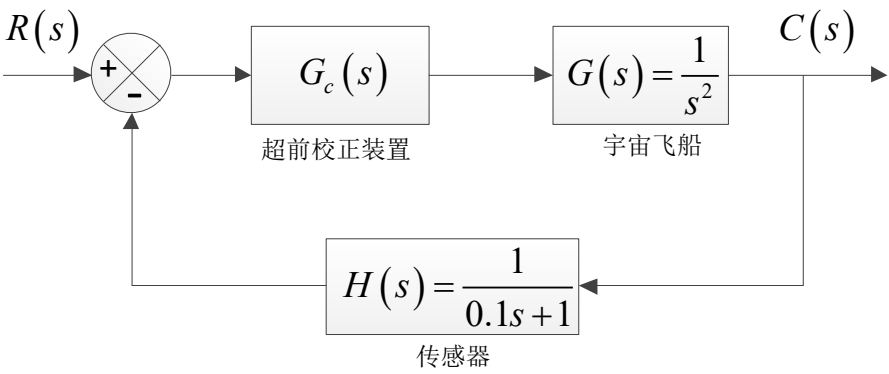


图 1 宇宙飞船控制系统

2、图 2 给出了一个姿态-速度控制系统模型的方框图，设计一个适当的校正装置，使得主导闭环极点位于： $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$ 。

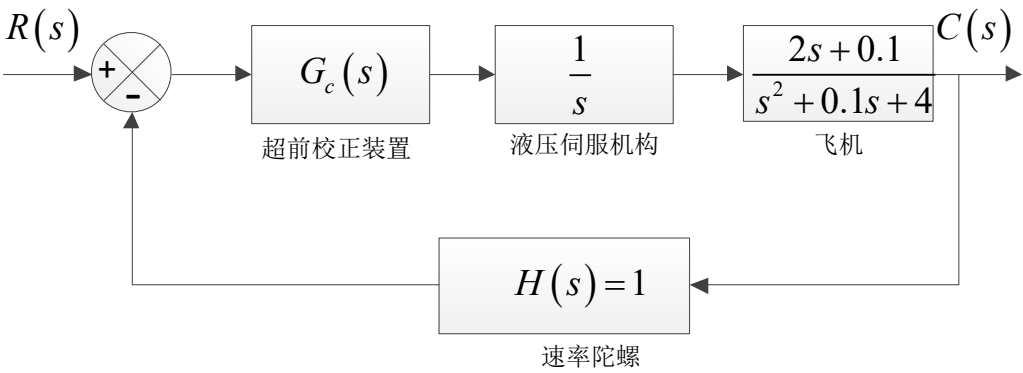


图 2 姿态-速率控制系统

注释：采用根轨迹校正进行控制器设计。

2 课程设计任务 2

导弹俯仰通道控制模型（简化模型）如下式所示：

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \omega_z - \frac{qSC_y^\alpha}{mV}\alpha - \frac{qSC_y^{\delta_z}}{mV}\delta_z + \frac{g}{V} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{qSLm_z^\alpha}{J_z}\alpha + \frac{qSLm_z^{\bar{\omega}_z}}{J_z}\frac{L}{2V}\omega_z + \frac{qSLm_z^{\delta_z}}{J_z}\delta_z - \frac{(J_y - J_x)\omega_y\omega_x}{J_z}\end{aligned}\quad (1)$$

针对该控制模型，利用 PID 控制进行控制器设计，使得导弹攻角 α 能够跟踪指令攻角 α_c 。

具体参数如下：

$$C_y^\alpha = 0.2667*57.3, \quad C_y^{\delta_z} = 0.0525*57.3;$$

$$m_z^\alpha = -0.0082*57.3, \quad m_z^{\bar{\omega}_z} = -0.022*57.3, \quad m_z^{\delta_z} = -0.0191*57.3;$$

特征长度为 $L=1\text{m}$ ，特征面积 $S=0.0065\text{m}^2$;

导弹质量： $m = 5.2144\text{kg}$;

转动惯量： $J_z = 0.1897$; $J_y = 0.1897$; $J_x = 0.0073$;(kg.m²)

导弹速度： $v = 100\text{m/s}$; 飞行动压： $q = 6125\text{kg}/(\text{m.s}^2)$;

初始条件： $\alpha_0 = \omega_{z0} = \omega_x = \omega_y = 0$;

跟踪指令： $\alpha_c = 0.3\text{rad}$ 。

设计过程：

第一步：搭 Simulink 模型实现仿真验证，不能出现 matlab 脚本；

第二步：编写 matlab 脚本文件实现仿真验证，不能出现 Simulink 模型；

3 课程设计任务 3

3.1 直线一级倒立摆组成与控制原理

1、系统组成

便携式直线一级倒立摆实验系统总体结构如图 3 所示。

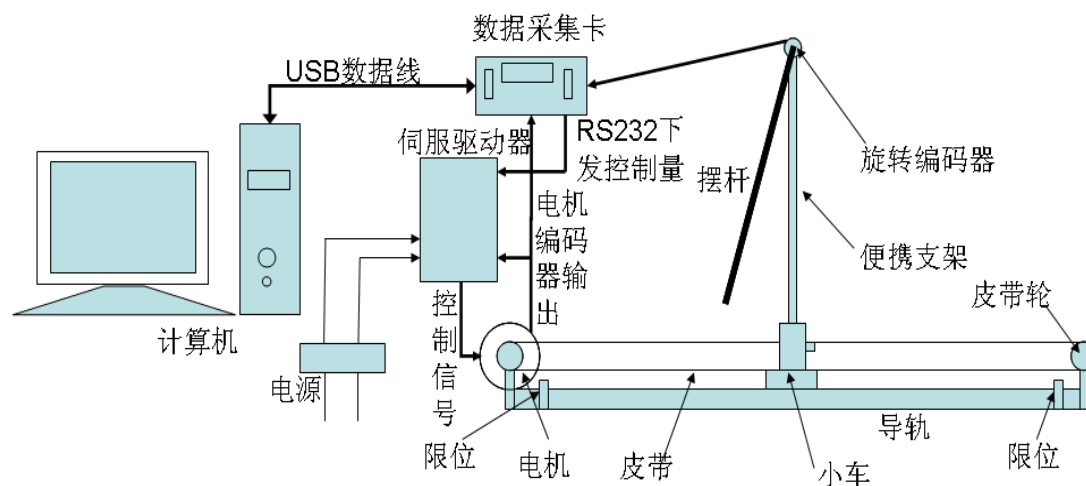


图 3 便携式一级倒立摆实验系统总体结构图

本实验系统的主体包括摆杆、小车、便携支架、导轨、直流伺服电机等。主体、驱动器、电源和数据采集卡都置于实验箱内，实验箱通过一条 USB 数据线与上位机进行数据交换，另有一条电源线接 220v 交流电源。便携支架为实验箱方便携带和安装而设计。移动实验箱时，可以扭下便携支架和小车之间的旋钮，将支架和摆杆放倒在实验箱内，简单的接线使得本系统方便做课堂演示与学生实际编程实验。

2、基本控制原理

本实验系统以自动控制中的经典控制和现代控制理论为理论基础。

便携式直线一级倒立摆的实验原理是：数据采集卡采集到旋转编码器数据和电机尾部编码器数据，旋转编码器与摆杆同轴，电机与小车通过皮带连接，所以通过计算就可以得到摆杆的角位移以及小车位移，角位移差分得角速度，位移差分可得速度，然后根据自动控制中的各种理论转化的算法计算出控制量。控制量由计算机通过 USB 数据线下发给伺服驱动器，由驱动器实现对电机控制，电机尾部编码器连接到驱动器形成闭环，从而可以实现摆杆直立不倒以及自摆起。其工作原理如图 4 所示。

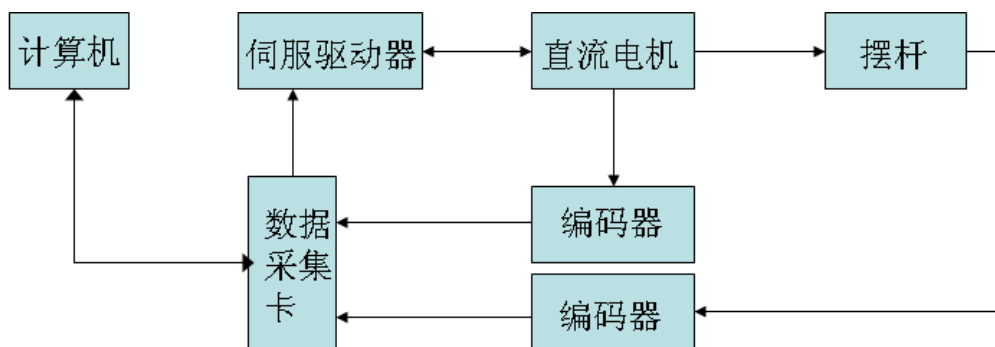


图 4 直线一级倒立摆工作原理图

倒立摆的控制目标有两个，一是稳摆，即使摆杆直立不倒；二是自摆起，即控制电机使摆杆左右摆动进入稳摆范围。整个过程是动态的，表现为小车的左右移动也就是电机的正反转。倒立摆系统的实时性很强，就是说它的速度比较快，所以采样时间较小，一般取 10ms 左右。

通过建立直线一级倒立摆的数学模型，我们得到其模型是可控的，所以我们可以通过自动控制原理课堂所学建立相应的控制器来实现本系统的控制，使它达到稳定。

3.2 直线一级倒立摆的建模与分析

本章的目的是让实验者掌握对直线一级倒立摆实际系统进行建模的基本方法，熟悉利用 MATLAB 对系统模型进行仿真分析，利用所学的控制理论对系统进行控制器的设计，并对系统进行实际控制验证，对实验结果进行观察和分析，直观的感受控制器的控制作用以及不同控制方法的设计过程与结果比较。

在控制系统的分析和设计中，首先要建立系统的数学模型。控制系统的数学模型是描述系统内部物理量（或变量）之间关系的数学表达式。

系统建模可以分为两种：机理建模和实验建模。实验建模就是通过在研究对象上加上一系列的研究者事先确定的输入信号，激励研究对象并通过传感器检测其可观测的输出，应用数学手段建立起系统的输入-输出关系。这里面包括输入信号的设计选取，输出信号的精确检测，数学算法的研究等等内容。机理建模就是在了解研究对象的运动规律基础上，通过物理、化学的知识和数学手段建立起系统内部的输入-状态关系。对于倒立摆系统，由于其本身是自不稳定的系统，实验建模存在一定的困难。但是忽略掉一些次要的因素后，倒立摆系统就是一个典型的运动的刚体系统，可以在惯性坐标系内应用经典力学理论建立系统的动力

学方程。下面我们采用其中的牛顿-欧拉方法和拉格朗日方法分别建立直线型一级倒立摆系统的数学模型。

在忽略了空气阻力和各种摩擦之后,可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统,如图 5 所示。

M 小车质量

m 摆杆质量

b 小车阻尼系数

l 摆杆转动轴心到杆质心的长度

I 摆杆惯量

F 加在小车上的力

x 小车位置

ϕ 摆杆与垂直向上方向的夹角

θ 摆杆与垂直向下方向的夹角（考虑到摆杆初始位置为竖直向下）

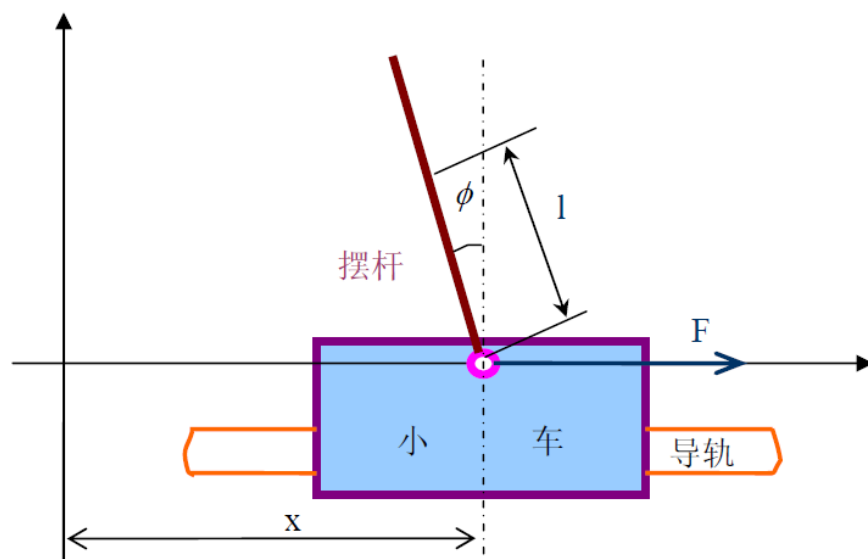


图 5 直线一级倒立摆模型

图 6 是系统中小车和摆杆的受力分析图（建模时忽略摩擦力）。其中, F 是作用在小车上的外作用力, N 和 P 为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直方向的分量, $b\dot{x}$ 是阻尼力。注意：在实际倒立摆系统中检测和执行装置的正负方向已经完全确定, 因而矢量方向定义如图 6 所示, 图示方向为矢量正方向。

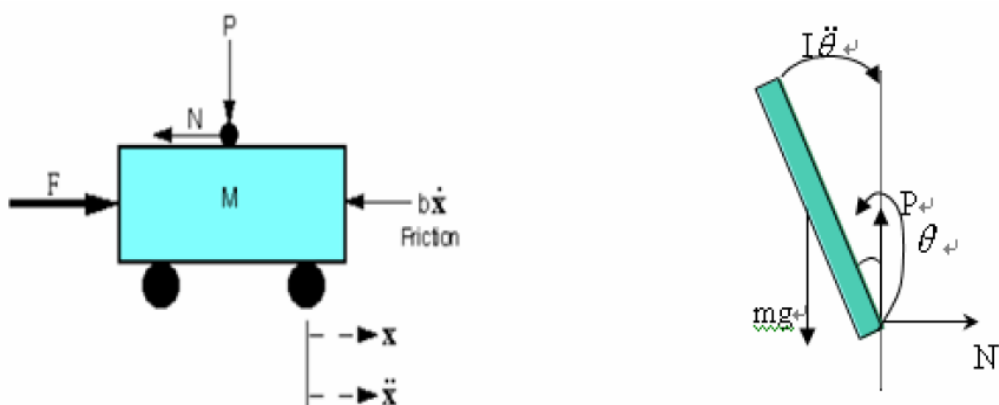


图 6 小车及摆杆受力分析图

分析小车水平方向所受的合力，可以得到以下方程：

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N \quad (2-1)$$

由摆杆水平方向的受力进行分析可以得到下面等式：

$$N = m \frac{d}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (2-2)$$

即：

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2-3)$$

把这个等式代入(2-1)式中，就得到系统的第一个运动方程：

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (2-4)$$

为了推出系统的第二个运动方程，我们对摆杆垂直方向上的合力进行分析，可以得到下面方程：

$$P - mg = m \frac{d}{dt^2} (-l \cos \theta) \quad (2-5)$$

$$P - mg = ml\ddot{\theta} \sin \theta + ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (2-6)$$

力矩平衡方程如下：

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (2-7)$$

注意：此方程中力矩的方向，由于 $\theta = \pi + \varphi$, $\cos \varphi = -\cos \theta$, $\sin \varphi = -\sin \theta$ ，故等式前面有负号。合并这三个方程（式(2-4)、式(2-6)和式(2-7)），约去 P 和 N ，得到第二个运动方程：

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (2-8)$$

设 $\theta = \pi + \varphi$, (φ 是摆杆与垂直向上方向之间的夹角), 假设 φ 与 1 (单位是弧度) 相比很小, 即 $\varphi \ll 1$, 则可以进行近似处理:

$$\cos \theta = -1, \sin \theta = -\varphi, \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$$

用 u 来代表被控对象的输入力 F , 线性化后两个运动方程如下 (线性化时忽略 2 阶小量):

$$\begin{cases} (I + ml^2)\ddot{\varphi} - mgl\varphi = ml\ddot{x} \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\varphi} = u \end{cases} \quad (2-9)$$

对方程组(2-9)式进行拉普拉斯变换, 得到方程组:

$$\begin{cases} (I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 \\ (M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \end{cases} \quad (2-10)$$

注意: 推导传递函数时假设初始条件为 0。由于输出为角度 φ , 求解方程组的第一个方程, 可以得到:

$$X(s) = \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s) \quad (2-11)$$

如果令 $v = \ddot{x}$, 根据方程组(2-10)的第一式, 可得:

$$\Phi(s) = \frac{ml}{(I + ml^2)s^2 - mgl} V(s) \quad (2-12)$$

把式(2-11)代入方程组(2-10)的第二式, 可得:

$$(M + m) \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s)s^2 + b \left[\frac{(I + ml^2)}{ml} - \frac{g}{s^2} \right] \Phi(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \quad (2-13)$$

整理后可得以外力作用力 F 为输入、摆杆与垂直方向的夹角 φ 为输出的传递函数:

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{q}s^3 - \frac{(M + m)mgl}{q}s^2 - \frac{bmgl}{q}s} \quad (2-14)$$

其中, $q = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2]$ 。

为了方便基于现代控制理论进行控制器设计，需建立倒立摆系统的状态空间模型。设系统状态空间方程为：

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX + Du\end{aligned}\quad (2-15)$$

方程组对 $\ddot{x}, \ddot{\phi}$ 解代数方程，可以得到如下方程组：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b\dot{x}}{I(M + m) + Mml^2} + \frac{m^2 gl^2 \phi}{I(M + m) + Mml^2} + \frac{(I + ml^2)u}{I(M + m) + Mml^2} \\ \dot{\phi} = \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} = \frac{-mlb\dot{x}}{I(M + m) + Mml^2} + \frac{mgl(M + m)\phi}{I(M + m) + Mml^2} + \frac{mlu}{I(M + m) + Mml^2} \end{cases}\quad (2-16)$$

整理后得到以外部作用力 $F(u$ 来代表被控对象的输入力 $F)$ 作为输入的系统状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + ml^2}{I(M + m) + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} \end{bmatrix} u\quad (2-17)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\quad (2-18)$$

以上建立了以外部作用力 F 为输入的状态空间模型，但是，本倒立摆实验系统电机控制模式为电机转动加速度，因此，还需要建立以电机加速度为输入的传递函数与状态空间模型。根据方程组(2-9)第一式，重写如下：

$$(I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x}\quad (2-19)$$

对于质量均匀分布的摆杆有：

$$I = \frac{1}{3}ml^2 \quad (2-20)$$

将式(2-20)带入(2-19)，可以得到：

$$(\frac{1}{3}ml^2 + ml^2)\ddot{\varphi} - mgl\varphi = ml\ddot{x} \quad (2-21)$$

化简得到：

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\varphi + \frac{3}{4l}\ddot{x} \quad (2-22)$$

设 $X = \{x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}\}$, $u' = \ddot{x}$ ，则可以得到以小车加速度作为输入的系统状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u' \quad (2-23)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \quad (2-24)$$

以小车加速度为控制量，摆杆角度为被控对象，此时系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{\frac{3}{4l}}{s^2 - \frac{3g}{4l}} \quad (2-25)$$

针对本倒立摆实验系统，系统参数如表 1 所示：

表 1 便携式直线一级倒立摆实际系统的物理参数

摆杆质量 m	摆杆长度 L	摆杆转轴到质心长度 l	重力加速度 g
0.0426 kg	0.305 m	0.1525 m	9.81 m/s ²

将表 1 中的物理参数代入式(2-23)所示的系统状态方程和式(2-25)所示传递函数中可得如下精确模型。

系统状态空间方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 48.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4.9 \end{bmatrix} u' \quad (2-26)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \quad (2-27)$$

系统传递函数：

$$G(s) = \frac{4.9}{s^2 - 48.3} \quad (2-28)$$

以上通过牛顿-欧拉法建立了一级直线倒立摆系统的数据模型，基于该控制模型，进行控制器设计与分析。

注释：在进行控制器设计时，如果基于现代控制理论，采用式(2-26)和(2-27)，如果采用经典控制理论，采用式(2-28)。如果有兴趣，请阅读全文，如果没有兴趣，请直接根据建立的系统模型进行控制器设计即可。

下面是采用经典控制理论进行倒立摆控制原理图，即设计图中 $G_c(s)$ 。设计得到的控制器的控制量不能太大，即 $G_c(s)$ 的输出不能太大。

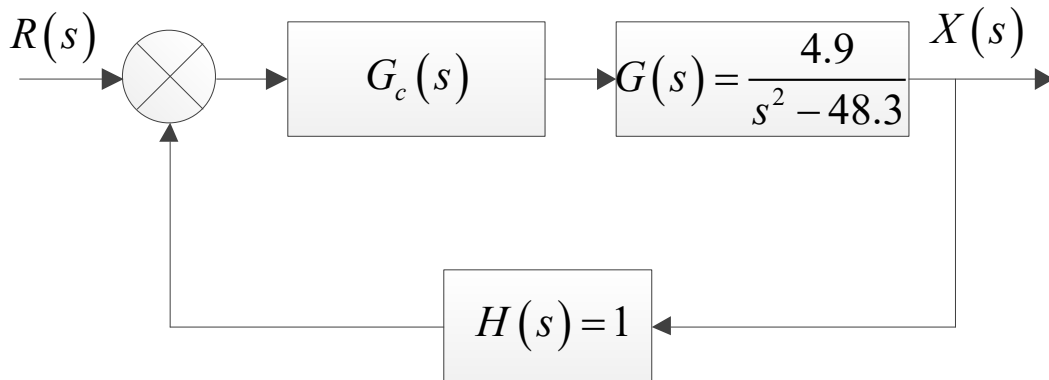


图 7 控制原理框图