

1. qoj8235 Top Cluster

题意：

给定一个有边权的树，每个点有点权 w_i ，保证 w 中的数互不相等。

有询问，每次询问给出 x, k ，令 $S = \{w_i | dis(x, i) \leq k\}$ ；你要求出 S 中第一个没有出现的数。 $n, q \leq 5 * 10^5$ 。

做法：

考虑怎么判断 $0, 1, 2, 3, \dots, M - 1$ 全部出现。令 p_i 是权值 $= i$ 的点编号，则需要让 $dis(p_0, x), dis(p_1, x), dis(p_2, x), \dots, dis(p_{M-1}, x) \leq k$ 。

结论：取出 $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{M-1}$ 中距离最远的两个点 u, v ，则只需要判断 $\max(dis(u, x), dis(v, x))$ 是否 $\leq k$ 。

可以反证，若存在 i 使得 $dis(i, x) > dis(u, x), dis(v, x)$ ，考虑以 x 为根然后分类讨论 i, x, u 的位置关系即可。

于是维护对每个前缀记录一个 $pair$ 表示最远的两个点，每次询问二分 M 即可。

2. IMO 2020 D1T3

题意：

有 $4n$ 个小球，编号依次为 $1, 2, 3, \dots, 4n$ 。每个球有一个颜色，保证共有 n 种颜色且每种颜色出现四次。请构造一个把 $4n$ 个球分成两半的方案，使得：

1. 两部分编号之和相等。
2. 每种颜色在每一端都会出现两次。

做法：

尝试强化编号之和的条件：把 $1, 4n$ 组成一对， $2, 4n - 1$ 组成一对 \dots 。让每一对数都在同一部分里，且两部分都会有 n 对数。

考虑建图，把颜色看成点，把每一组看成边。具体的，设 c_i 是点 i 的颜色，对于一对数 u, v 我们在 c_u, c_v 间连一条边。求出欧拉回路，回路中奇数步的边分到第一部分，偶数步的边分到第二部分。可以发现这样的构造是满足条件的。

3. CF843D Dynamic Shortest Path

题意：

给定一张边正权的有向图。有两种操作：

1. 给定 v , 查询 1 到 v 最短路。
2. 给出 k 条边的编号, 将它们的边权加 1 。

$n, m \leq 10^5, \sum k \leq 10^6, q \leq 2000$ 。

做法：

我们设 d_i 是当前 1 到 i 的最短路。边权修改后需要求出新的 d 。

考虑把每个边 (u, v, w) 的边权 w 重新赋成 $w + d_u - d_v$, 可以发现这样每条边仍然是正权, 且跑出单源最短路后, 设这一遍得到的是 dis , 那新的 d 值其实就等于 $d_i + dis_i$ 。

发现 dis 有一个很好的性质: $dis \leq n$ 。因为每条边加 1 只会让最短路至多加 n 。于是直接把 dijkstra 过程中用的堆替换成 vector 即可。

复杂度 $O((n + m)(\log n + q) + \sum k)$ 。

4. topcoder13518 CityRebuild

(ps: 关于 topcoder, 它已经死了)

题意：

给定 H, W , 考虑 $(0, 0)$ 到 (H, W) 围成的矩形。给定平面上的 n 个点。对每一个给定的点你都要画一个等腰直角三角形, 满足给定的点是该斜边的中点, 且斜边与 x 轴/ y 轴平行, 且该三角形在大矩形内。

还需要画的每个三角形大小相等, 且画出的三角形间两两不交。你想求出这个大小最大能是多少。

$n \leq 50$ 。

做法：

二分答案。可以把你画的三角形拆成两个小三角形。[画图] 2-SAT 解决。

5. acmicpc19464 King's Road

题意：

给定序列 a 以及定值 m , 满足 $a_i < m$ 。

现在我们会建立一张完全图, 两个点间的边边权为: $(a_i + a_j) \bmod m$ 。

求最小生成树的边权和。

$$n \leq 2 * 10^5。$$

做法：

[介绍 borvuka]

问题转化成至多 $\log n$ 次：给定颜色序列 c ，需要对每个 i 求出 $c_i \neq c_j$ 的 j 中 $(a_i + a_j) \bmod m$ 最小者。

一开始就把 a 从小到大排序，这样满足 $a_j \geq m - a_i$ 的只会是一段后缀。

于是对每个前缀求出： a 最大的颜色和 a 次大的颜色，后缀同理。其实就比较容易了。

复杂度 $O(n \log^2 n)$ ，瓶颈在于 borvuka 本身。

6. CF1628E Groceries in Meteor Town

题意：

给定一棵树，边有边权，每个点是黑色/白色。

操作 1：把一个区间的点颜色赋黑。

操作 2：...赋白。

操作 3：询问，给定点 x ，现在想从 x 走到任意一个白色点，希望路径上边权的最大值最大。

$$n, q \leq 3 * 10^5。$$

做法：

建出 kruskal 重构树。

询问转化成有一棵二叉树，想找到一个白色点 u ，让 $lca(u, x)$ 深度尽量浅。

只需要求出所有白点的 lca ，记为 U ，答案就是 $lca(U, x)$ 了。

线段树，每个节点维护的信息就是所有白色点的 lca 。复杂度 $O((n + q) \log n)$ 。

更简单的方式是直接找到 dfn 最小/最大的白点，求这两个点的 lca 也可以得到 U 。

7. topcoder12330 CoinsGame

题意：

有一个 $n * m$ 的棋盘，某些格子存在障碍物，其余格子可以放或不放硬币。有若干次操作，每次指定上下左右一个方向，使所有的硬币尝试取移动一格。如果目标格子是障碍物就不移动，硬币被移出棋盘后会消失。此外，在操作过程中一个格子上可以有多枚硬币。求有多少种放硬币的方案，存在一系列操作，使至少一枚硬币被移出棋盘、至少一枚硬币留在

棋盘上。

$1 \leq n, m \leq 40$ 。

做法：

我们称两个格子 u, v 是等价的，当且仅当：在 u, v 都放了一枚硬币，无论怎么操作 u, v 都只会同时掉出棋盘。

发现如果 u, v 等价， v, w 等价那么 u, w 也是等价的，这里反证易得。

一个方案不合法，其实就等同于：选择的所有格子都在一个等价类里面。设一个等价类的格子个数为 t_i ，答案就是 $(2^{\sum t_i} - 1) - \sum (2^{t_i} - 1)$ 。

怎么判断 u, v 等价呢？根据题意我们能写出若干形如： u_1, v_1 等价则 u_2, v_2 等价的条件，这就可以建出一个图，图中每个点代表一对格子 (u, v) 。一个条件就可以看成是 (u_1, v_1) 到 (u_2, v_2) 的一条边。bfs 即可。复杂度 $O(n^2 m^2)$ 。

8. WF2014 I

题意：

给定平面上的 n 个点，如果两点距离小于等于定值 D 就在两点间连一条边。求这个图的最大团。

$n \leq 100$ 。

做法：

枚举选择的点中距离最远的两个点，令这两个点距离为 K ，首先我们就需要 $K \leq D$ 。

然后考虑分别以两个点为圆心， K 为半径画出的圆，我们选择的点一定会在两个圆的交以内。

考虑把两点间的线段连起来，这样我们把交的这个区域分成两半，发现同一半边的两个点距离一定 $\leq K$ 。

[画图]

转化成：现有一个二分图，求其最大独立集。不难证明这点数减去最大匹配。

复杂度 $O(n^4\sqrt{n})$, 但是跑不满。

9. CF1827E Bus routes

题意：

给定一棵 n 个树和 m 条路径，每条路径表示路径上的点可以两两到达。

现在想判断是否满足：任意两个点都可以通过不超过两条路径走到。

$n, m \leq 5 * 10^5$ 。

做法：

考虑一个度数 > 1 的点为根。可以发现我们取的两个点一定是叶子，否则调整更优。

接下来设 a_i 是点 i 一步能到达的最浅的点，可以发现如果两个叶子的 a 没有祖先关系就寄掉了。否则设 p 是 a_p 最深的那个叶子。

合法等价于每个叶子都能一步走到 a_p 。证明可以自己想想。

复杂度瓶颈在于求 a , $O((n + m) \log n)$ 。