树上题目与杂题选讲

by tsx

CF1394D

- 有一棵 n 个点的树，第 i 个点有参数 a_i, b_i。（$1 \le a_i, b_i \le 10^6$）
- 现在要求把这棵树剖分成若干条链（链包括端点），使每条边恰好出现在一条链中，且要求链上的点的 b_i 单调不降或单调不增。一条链的权值定义为链上所有点的 a_i 之和。
- 求在所有剖分方案中，链的权值之和最小为多少。
- $1 \le n \le 2 \times 10^5$。

CF1394D sol

- 注意到这里并不真正关心每条链具体是什么，我们只关心每个点被几条链经过。
- 给每条边 (u,v) 定向，表示这条边所在的链中 b_i 增加的方向。若 $b_u \neq b_v$，那么定向已经确定，否则可以任意定向。
- 定向之后我们可以直接贪心连接得到所有链。那么，每个点 u 的权值被算的次数就是它的入度和出度的最大值。
- 所以就可以树形dp，记 $f_{u,0/1}$ 表示只考虑 u 的子树，且 u 到父亲的边指向的点是/不是 u，此时的答案最小是多少。
- 转移对所有孩子 v，按 $f_{v,1}-f_{v,0}$ 从小到大排序，之后枚举 u 的入度转移即可。
- 时间复杂度 $O(n\log n)$。

loj6669

- 这天，她创造了一个有 n 个节点的二叉树。节点的编号从 1 到 n，其中 1 是二叉树的根节点。
- 不过，她不记得这棵二叉树具体长什么样子了，她只记录了二叉树上任意两个节点之间的距离。你可以通过向她询问有关距离的信息来还原这棵二叉树，两个节点之间的距离定义为它们之间最短路上的边数。
- 你可以向 Nauuo 询问不超过 30000 次有关距离的信息。你只需要告诉她 $2\sim n$ 号节点的父亲的编号就可以了。
- $n\leq 3000$。

loj6669 sol

- 首先每个点跟 1 号点问一次，就可以知道深度。
- 之后按照深度从小到大的顺序依次找到每个点的父亲。
- 记我们当前考虑的点是 u。对目前的树重链剖分，每次问根所在的重链链底的点与 u 的距离，那么结合深度我们可以知道 u 位于哪个轻子树里，递归进去即可。
- 重链剖分可以每次暴力重构，时间复杂度 $O(n^2)$。

uoj618

- 河狸们居住在 N 个岛上。这些岛从 1 到 N 编号，并通过 $N-1$ 座双向连接的桥连通。这些桥的编号为 1 到 $N-1$。桥 i 连接岛 A_i 和 B_i。通过桥可以在任意岛之间穿梭。每个岛上有一只河狸定居。
- 有时，在某些岛上居住的河狸们要聚集到一个岛上开会。当一场会议的出席者确定了之后，满足以下条件的一个岛就被选为开会地址：
- 参会者为了到达这个岛开会所需要经过桥的数量的总和是最小的。
- 这里，当会议的出席者确定时，每位出席者都会经过最少数量的桥前往开会所在岛。
- 会议出席者都希望会议的候选岛很多。当一场会议的出席者确定时，这场会议的**期待值**等于满足以上条件的岛的个数。对于每个从 1 到 N 的整数 j（包括两端），你想知道当有 j 位河狸参会时，这场会议的最大期待值是多少。
- 给定这些岛的信息，写一个程序计算对每一个参会河狸数，这场会议的最大期待值是多少。
- $1 \le N \le 2 \times 10^5$。

uoj618 sol

- 可以发现，候选岛就是参会者所在岛的重心。由重心的性质，若 j 为奇数答案恰为 1，若为偶数则为两个重心所在的链。
- 反过来考虑，我们假设已经定好了这条链，那么要求就是链两端的子树大小 $\geq j/2$。
- 固定 j，考虑一个点能够成为一条链的端点，当且仅当以这个点为根时，去掉最大的儿子子树之后剩下的点数 $\geq j/2$。
- 从大到小枚举 j，题目变为维护一个集合 S，每次往集合 S 中加入一个点或者查询目前 S 中的直径长度，这是经典问题，可以直接维护 S 中当前的直径，每次更新即可。
- 时间复杂度 $O(n\log n)$ 或 $O(n)$，取决于算两点距离的速度。

uoj33

- 有一棵 n 个结点的有根树 T。结点编号为 $1, \dots, n$，其中根结点为 1。树上每条边的长度为 1。我们用 $d(x, y)$ 表示结点 x, y 在树上的距离，$LCA(x, y)$ 表示 x, y 的最近公共祖先。
- 对于结点 $u, v\ (u \neq v)$，令 $a = LCA(u, v)$，定义 $f(u, v) = \gcd\big(d(u, a), d(v, a)\big)$。
- 对于所有 $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$，求出有多少对 $(u, v)\ (u < v)$，满足 $f(u, v) = i$。
- $n \le 2 \times 10^5$。

uoj33 sol

- 首先莫反，把求的东西变为 $k|\gcd\big(d(u,a),d(v,a)\big)$，也就是 $k|d(u,a)$，$k|d(v,a)$。
- 考虑有根树点分治，记当前分治的连通块大小是 m，最浅点为 u，重心为 g，我们需要求出所有过 g 的路径的答案。
- 首先，以 g 为 lca 的答案是好求的。我们只需要对 g 的每个子节点 v，v 的子树中每个点求出深度，记录到桶中，接着对倍数求和，贡献答案即可。
- 否则，lca 会在 g 到 u 的链上，枚举这个点是 t，那么对于 t 的其它子树（不在 u 到 g 的链上）依旧对每个点求出深度并记录到桶里。
- 对于 $k \le \sqrt{m}$，我们对每个 $0 \le j < k$ 预处理 g 中子树中深度 $\bmod k = j$ 的点的个数，那么就可以 $O(1)$ 计算答案。
- 对于 $k > \sqrt{m}$，我们可以暴力遍历 g 子树的深度数组，时间复杂度为 $O(\sqrt{m})$。
- 所以一次计算时间复杂度为 $O(m\sqrt{m})$。
- 总时间复杂度为 $O(n\sqrt{n})$。

CF830E

- 有 n 台机器，每个机器有一个设定值 d_i，它可以定为任意非负整数。当某一台机器的设定值为 d_i 时，它每秒会消耗 d_i^2 的能量，如果某一对机器 y,z 通过电线直接连接，每秒会产生 $d_y \times d_z$ 的能量。
- 现在，给出机器和电线的连接情况，试问是否存在一种设定 n 个机器的设定值的方案，使得 $\exists i, d_i \neq 0$ 且能量的总生产值大于等于总消耗值。
- 若存在给出一组方案，你需要保证 $d_i \in [0,10^6]$，可以证明若存在非负整数解，一定存在保证 $d_i \in [0,10^6]$ 的解。
- $n,m \leq 10^5$。

CF830E sol

- 不等式 $ab \le pa^2 + qb^2$，其中 $pq = 1/4$。这可以视为边 (a, b) 会对点 a 和点 b 分别贡献 p 和 q。
- 如果最终有一种贡献方案使得每个点的权值 ≤ 1 且存在一个权值 < 1，那么一定无解。如果有一种贡献方案使得每个点的权值 ≥ 1，那么一定存在一种非零的实数分配方案使得每个不等式都取到等号，从而有解。
- 那么每次删掉一个叶子以及与它相连的边，并且通过这条边将这个叶子的权值变为 1 即可，最后看是否能让每个点的权值 ≥ 1。
- 为了让每个 d_i 都是 $[0,10^6]$ 的整数，我们接下来分类讨论。
- 若存在一个点 u 度数 ≥ 4，那么令 $d_u = 2$，与 u 相连的点 v 都有 $d_v = 1$，其它为 0 即可满足条件。
- 若存在两个点 u, v 度数 ≥ 3，将 u, v 之间的链的值都为 2，与 u, v 直接相连且不在链上的值为 1，其余为 0 即可满足条件。
- 若所有点度数 ≤ 2，也就是树为一条链，那么让每条边向端点均贡献 $\frac{1}{2}$ 可知这种情况无解。

CF830E sol

- 只剩下恰有一个点度数为 3 的情形，按照这个点连出的三条链的长度讨论。
- 我们可以手动模拟从链底往上填得到的权值，可以发现，当三条链长度至少为 $(2,2,2)$，$(1,3,3)$，$(1,2,5)$ 时有解，否则无解。
- 时间复杂度 $O(n)$。