杂题选讲

by tsx

CF1514E

- 交互题，给出 n，交互库有一张 n 个点的竞赛图。
- 你有两种询问：
  - 询问 x 到 y 单向边方向，询问次数限制 $9n$。
  - 询问 x 到点集 $\{s_i\}$ 中是否存在 $x \to s_i$ 方向的边，询问次数限制 $2n$。
- 最后需要给出竞赛图每两点 u, v 是否存在 u 到 v 的路径。
- $n \le 100$。

CF1514E sol

- 首先利用增量法找出一条哈密顿链。
- 具体来说，假设我们已经有了 $[1,i-1]$ 区间里的一条哈密顿链 $a_1 \to \cdots a_{i-1}$，那么对于点 i，我们只需要找一个 k，满足 $a_k \to i \to a_{k+1}$ 即可。可以看出这个 k 是可以二分得到的。
- 接下来，我们需要把强连通分量缩点，从前往后遍历哈密顿链上的点 i，然后询问点 i 到所有 i 之前的点是否有出边，如果有出边，那么 i 与 i 的前驱一定处在一个强连通分量中，把它们合并即可。
- 时间复杂度 $O(n\log n)$。

CF1535F

- 对于字符串 a,b，你可以进行下列操作：
- 选择其中任意一个字符串的子串，并将其从小到大排序。
- 我们定义 $f(a,b)$ 为字符串 a,b 进行上述操作使 $a=b$ 所需的最小次数，特别的，如果无论如何都不可能使 $a=b$，$f(a,b)=1337$。例如：
- 给定 n 个长度相等且互不相同的字符串 $s_1,s_2,\cdots,s_n$。求出

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} f(s_i,s_j)$$

- $\sum_i |s_i| \le 2\times 10^5$。

CF1535F sol

- 首先如果两个串每个字符的数量不一样肯定没法变成相同的，所以按每个字符数量先把字符串分组，对每一组分别做。
- 那么此时 $f(a,b)$ 只有两种取值 1,2。
- $f(a,b)=1$ 当且仅当 a 和 b 只在某个区间 $[L,R]$ 中不同，且已经有一个串排好序了。
- 那么枚举这个排好序的串 $a=a_i$，之后枚举它的每个极长升序区间，算出有多少串只与它在这个区间上不同。

CF1535F sol

- 建正串和反串 Trie，并且枚举 a_i 的极长区间 $[l,r]$，那么我们只需要找出与 a_i 在前缀和后缀上均相同的串，这可以视为两个 Trie 的子树交，也就是二维数点。
- 时间复杂度 $O(\sum|s_i|\log n)$。

CF1508D

- 给定平面上 n 个点，第 i 个点坐标为 (x_i, y_i) 点权为 a_i，其中任意三点均不共线。
- 你可以执行以下操作若干次：
- 选择两个不同的下标 i, j，交换 a_i, a_j，然后以点 i 与点 j 之间连一条线段。
- 要求最终形成的图中不存在相交线段（交于端点处不认为相交，相同线段认为相交），并且满足 $a_i = i$。
- 给出任意一种方案或者报告无解。
- $n \le 2000$。

CF1508D sol

- 首先忽略掉所有已经 $a_i = i$ 的点。
- 那么我们随便取出一个点 s，我们可以让它上面的数 a_s 直接到它应该在的点 a_s，那么此时点 s 上又出现了一个新的数，我们重复这个过程直到 $a_s = s$ 为止。
- 由于这些线段从同一个点出发，它们不可能在端点之外相交。
- 如果把排列视作若干个环，那么这个过程解决了 s 所在的环。
- 但问题是没法再选定其它 s，还能不保证交叉了，所以我们只能考虑在这个过程之前去调整排列，将它变为一个大环。
- 如果将两个环中的元素交换，那么它们就会变成一个环。由于我们的这些线段不能与和 s 相连的线段冲突，所以我们将它们限制在，关于 s 极角排序后，相邻的点之间。

CF1508D sol

- 所以最后的做法是，按 s 极角排序后，对每两个相邻的元素，若它们不在一个环中，那么交换这两个元素，把它们变成同一个环。最后从 s 一直找 a_s 就好了。
- 用并查集维护连通性即可。
- 时间复杂度 $O(n\log n)$。

CF1603D

- 对于给定的正整数 $l \le r$，定义 $c(l,r)$ 为满足下列条件的正整数对 (i,j) 的数量：
  - $l \le i \le j \le r$；
  - $\gcd(i,j) \ge l$。
- 给定正整数 $k \le n$。对所有满足 $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_k < x_{k+1} = n$ 的整数序列 $(x_1, \ldots, x_{k+1})$，计算 $\sum_{i=1}^{k} c(x_i + 1, x_{i+1})$ 的最小值。
- T 组数据，$1 \le T \le 3 \times 10^5$，$1 \le k \le n \le 10^5$。

CF1603D sol

- 首先注意到对 $l \le r < 2l$，有 $c(l,r) = r - l + 1$。
- 所以若 $k \ge 1 + \log n$，我们可以划分 $[1,1], [2,2], [3,4], [5,8], \ldots$。
- 那么我们就可以写出 dp，令 $f_{i,j}$ 表示将 $1 \sim j$ 划分 i 段的最小代价，那么转移形如 $f_{i,j} = \min_k \{f_{i-1,k-1} + c(k,j)\}$。
- 可以看出 c 有四边形不等式。设 $l_1 \le l_2 \le r_1 \le r_2$，对于每个有序对 (u,v)，它对 $c(l_1,r_1) + c(l_2,r_2)$ 的贡献一定小于等于它对 $c(l_1,r_2) + c(l_2,r_1)$ 的贡献。
- 显然 c 对区间包含是单调的，所以 dp 有决策单调性。
- 这里还有一个问题在于，如何计算出 $c(l,r)$。

CF1603D sol

- 经过推导可知， $c(l,r)=\sum_{d=l}^{r}s(\lfloor r/d\rfloor)$ 其中 $s(i)$ 为 $\varphi(i)$ 的前缀和。
- 那么我们可以快速移动端点。这是因为，当 l 移动时，求和只会改变 1 项，而当 r 移动时，只有 r 的因子 d 才会改变 $\lfloor r/d\rfloor$，所以这里可以做到 $O\big(d(r)\big)$。
- 利用分治求决策单调性的方法，可以做到 $O(n\log^3 n)$。
- 另一个方向是，考虑对 $c(l,r)$ 直接计算时，需要使用数论分块，所以单次需要 $O(\sqrt{n})$。
- 但我们这里询问很多，所以不妨把数论分块中算出的整块的值都预处理出来，那么在查询的时候就只需要看一下散块，时间复杂度为 $O(n\sqrt{n}+n\log^2 n)$。

ARC153E

- 对于一个各位数字均非零的正整数 X，定义 $f(X)$ 为如下过程所能得到的最小的 Y：
  - 对于初始为空的字符串 S，依次将 X 的十进制表示从左到右的每一位插入 S 的最前端或最后端。设 Y 为 S 表示的正整数。
- 给出 Y，问有多少个 X 满足 $f(X)=Y$。
- 答案对 998244353 取模。
- $Y<10^{200000}$。

ARC153E sol

- 首先来看对于一个 X，如何得到 $f(X)$。
- 如果 X 中含有 1，那么肯定将所有 1 都往前放，得到的字典序最小。也就是说，在 X 出现第一个 1 之后的所有数都已经确定了如何放， 1 往前放，其他数往后放。
- 那么在第一个 1 之前的部分也可以类似的讨论数字 2，所以结论就是所有前缀最小值往前放，其余数往后放。
- 接下来考虑 Y，那么我们尝试执行相反的过程。首先我们找到前缀的所有 1，将它们放到后面，放完之后，第一个 1 后面的数就不需要再考虑了。
- 注意，这些 1 开始一定要在 Y 的前缀，否则答案即为 0。
- 那么之后的考虑过程也相似，我们首先要求数 i 所在的位置一定是一个前缀，接下来我们将 i 任意放置到后面，并将第一个 i 后面的位置全都删掉。

ARC153E sol

- 记当前考虑到了数字 i，且目前串的右端点为 j 的答案为 $f_{i,j}$。枚举第一个 i 所在的位置 j'，那么放 i 的方案数是一个组合数，且仅取决于 $j-j'$，所以转移形如

$$f_{i+1,j'}=\sum_{j} f_{i,j}h_{j-j'}$$

- 是一个减法卷积。
- 时间复杂度为 $O(|\Sigma|n\log n)$。