

## dp 的引入

- 背包
  - 贪心问题：
    - [P2240 【深基12.例1】部分背包问题 - 洛谷](#)
  - 01 背包：
    - [P1049 \[NOIP 2001 普及组\] 装箱问题 - 洛谷](#)
  - 完全背包：
    - [P1048 \[NOIP 2005 普及组\] 采药 - 洛谷](#)
  - 多重背包：
    - [P1833 樱花 - 洛谷](#)

## dp 介绍

- 状态、转移、边界条件、转移顺序
- 可以使用 dp 的题目所具备的重要性质：无后效性（之前如何到达该状态与之后没有关系）

## dp 分类

- 线性 dp：
  - 一维：
    - [P1091 \[NOIP 2004 提高组\] 合唱队形 - 洛谷](#)
    - 爬楼梯问题
      - 题目：有  $n$  阶楼梯，每次可以爬 1 阶或 2 阶，求有多少种方法爬到楼顶。
      - 状态定义： $dp[i]$  表示爬到第  $i$  阶的方法数。
      - 状态转移： $dp[i] = dp[i - 1] + dp[i - 2]$ 。
    - 最大子数组和
      - 题目：给定一个整数数组，求连续子数组的最大和。
      - 状态定义： $dp[i]$  表示以第  $i$  个元素结尾的最大子数组和。
      - 状态转移： $dp[i] = \max(dp[i - 1] + nums[i], nums[i])$ 。
  - 二维：
    - [P1439 【模板】最长公共子序列 - 洛谷](#)
  - 高维：
    - [P1004 \[NOIP 2000 提高组\] 方格取数 - 洛谷](#)
- 区间 dp：
  - [P1775 石子合并（弱化版） - 洛谷](#)

- 环形 dp:
  - [P1880 \[NOI1995\] 石子合并 - 洛谷](#)
- 树形 dp:
  - [P1352 没有上司的舞会 - 洛谷](#)
  - [P2014 \[CTSC1997\] 选课 - 洛谷](#)
- 图上 dp
- 状态压缩 dp:
  - [P2622 关灯问题II - 洛谷](#)

## dp 技巧入门

- 背包技巧（多重背包）：
  - 二进制拆分/单调队列：[P1776 宝物筛选 - 洛谷](#)
- 课堂作业:
  - [P4342 \[IOI1998\] Polygon - 洛谷](#)

## dp 技巧进阶

- 决策单调性:
  - [POJ\\_3017 -- Cut the Sequence](#)
    - 将一个序列分成若干段，每段的和不超过给定值  $M$ ，最小化每段的最大值之和。
  - [HDU Problem - 2829](#)
    - 给定一个长度为  $n$  的序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，你需要将其分成  $m + 1$  段（ $m$  是给定的参数），每段的代价为该段内所有子序列的乘积之和。具体来说，设第  $j$  段的子序列为  $a_{l_j}, a_{l_j+1}, \dots, a_{r_j}$ ，则该段的代价为：

$$\sum_{l_j \leq s < t \leq r_j} a_s \cdot a_t$$

总代价为所有段代价之和。你需要最小化这个总代价。

- 斜率优化:
  - [P3195 \[HNOI2008\] 玩具装箱 - 洛谷](#)
    - 给定一个长度为  $n$  的序列  $c_1, c_2, \dots, c_n$  和一个常数  $L$ ，你需要将其分成若干段，每段的代价为：

$$\left( \sum_{i=l_j}^{r_j} c_i + (r_j - l_j) - L \right)^2$$

总代价为所有段代价之和。最小化总代价。

◦ [P3628 \[APIO2010\] 特别行动队 - 洛谷](#)

- 给定一个长度为  $n$  的序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和三个常数  $A, B, C$ ，你需要将其分成若干段，每段的代价为：

$$A \left( \sum_{i=l_j}^{r_j} a_i \right)^2 + B \left( \sum_{i=l_j}^{r_j} a_i \right) + C$$

总代价为所有段代价之和。最大化总代价。

• 李超线段树：

◦ [P4254 \[JSOI2008\] Blue Mary 开公司 - 洛谷](#)

- 给定  $n$  次操作，分为两种：
  1. **插入**：插入一条直线  $y = kx + b$ 。
  2. **查询**：给定一个  $x$ ，求所有已插入直线在  $x$  处的最大值。

◦ 结合 dp： [P5785 \[SDOI2012\] 任务安排 - 洛谷](#)

- 设  $f_i$  表示前  $i$  个任务的最小费用，转移方程为：

$$f_i = \min_{0 \leq j < i} \left\{ f_j + S \cdot \left( \sum_{k=j+1}^n c_k \right) + \left( \sum_{k=j+1}^i t_k \right) \cdot \left( \sum_{k=j+1}^i c_k \right) \right\}$$

## dp 技巧进阶

• wqs 二分：

◦ [P2619 \[国家集训队\] Tree I - 洛谷](#)

- 给定一个无向图，求包含恰好  $k$  条白边的最小生成树。

◦ [P4983 忘情 - 洛谷](#)

- 一段区间的代价为：

$$\frac{\left( \left( \sum_{i=1}^n x_i \times \bar{x} \right) + \bar{x} \right)^2}{\bar{x}^2}$$

- 求长为  $n$  的序列分为  $m$  段的代价最小值。

• 数据结构优化：

◦ 树状数组：

- 最长上升子序列

◦ bitset：

- 传递闭包

- 线段树：
  - [P2605 \[ZJOI2010\] 基站选址 - 洛谷](#)
  - [Card Game - 题目 - QQJ.ac](#)
- 矩阵乘法优化：
  - 求斐波那契数列的第  $k$  项  $\bmod p$ 。
  - [P1939 矩阵加速（数列） - 洛谷](#)
  - [P5175 数列 - 洛谷](#)
    - $a_n = xa_{n-1} + ya_{n-2}$ , 求  $\sum_{i=1}^n a_i^2$ 。
  - [P3193 \[HNOI2008\] GT考试 - 洛谷](#)
    - 求出长度为  $N$  的不出现子串  $S$  的数字串个数。

## dp 技巧进阶进阶

- 一类特殊的 dp：
  - 给定  $a(i), b(i), c(i), d(i)$  函数，你要求出一个排列  $p$  使得下面的值最小：

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i, p_{i+1})$$

$$f(i, j) = \begin{cases} a(i) + b(j) & i < j \\ c(i) + d(j) & i > j \end{cases}$$

- [Problem - 704B - Codeforces](#)
- [P9197 \[JOI Open 2016\] 摩天大楼 / Skyscraper - 洛谷](#)
- dp 构建、数据结构优化：
  - [P10211 \[CTS2024\] 线段树 - 洛谷](#)
    - 给定一棵广义线段树，你要求出有多少种选择线段树区间（对应线段树上一个节点）的方案，使得对于给定的  $m$  组  $(a_i, b_i)$ ，区间  $[a_i, b_i)$  能够被若干选中区间的加减表示。
- dp of dp：
  - [P4590 \[TJOI2018\] 游园会 - 洛谷](#)
    - 对于每个  $k = 0, 1, \dots, |S|$ ，求出有多少种长度为  $N$  的【和  $S$  的 LCS 为  $k$ 】的  $\{N, 0, 1\}$  串， $|S| \leq 15, N \leq 1000$ 。