



# 一些碎碎念

由于本人比较菜，所以讲的内容也都比较简单，请各位手下留情（

# 国王游戏

给定  $n + 1$  个二元组  $(a, b)$  (从 0 到  $n$  标号, 元素都是正整数), 第二百零个元素不能变位置, 可以重排其它元素。设  $c_i = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} a_j}{b_j}$ , 最小化

$$\max_{i=1}^n c_i$$

来源: NOIP2012 提高组

# 国王游戏

考虑交换相邻两项，只会影响到它们两个的  $c$ 。那么就可以考虑这两个如何排列更优。

设其二元组分别为  $(a_0, b_0)$  和  $(a_1, b_1)$ ，那么不交换时答案为

$\max(\frac{1}{b_0}, \frac{a_0}{b_1})$ ，交换则是  $\max(\frac{1}{b_1}, \frac{a_1}{b_0})$ ，如果不交换不劣，通分一下则

有  $\max(b_1, a_0 b_0) \leq \max(b_0, a_1 b_1)$ 。

讨论一下大小关系，可以得到按  $a_i b_i$  比较即可。排序后直接模拟。

# 梅深不见冬

给定一棵  $n$  个点的树，点有正整数点权  $w_i$ 。对于每个点  $i$ ，求出向其放  $w_i$  个梅花所需要准备的最小梅花数。

放梅花的规则如下：Alice 沿着这棵树的某一个欧拉序行进，只有当 Alice 处于  $u$ ，且  $u$  的所有孩子  $v$  都放上了  $w_v$  个梅花后，才能在  $u$  上放梅花。不过 Alice 可以在任意时刻收回放在任意点上的梅花。

$n \leq 10^5$

来源：洛谷 P5521

# 梅深不见冬

设放完  $i$  的答案是  $a_i$ 。

由于沿着欧拉序走，所以对于某个节点只用把其子树看作一个整体。

$u$  的答案就是把它的孩子的  $(w_i, a_i)$  二元组拿出来，任意重排之后  $w$  的前缀和（不包含当前点）加上当前点的  $a_i$  的最大值。

类似上一题，交换相邻两个对其它的没有影响，因此考虑局部问题。设相邻的二元组分别为  $(w_0, a_0), (w_1, a_1)$ ，则分别的答案是

$\max(a_0, w_0 + a_1)$  和  $\max(a_1, w_1 + a_0)$ 。如果不交换更优，则

$\max(a_0, w_0 + a_1) \leq \max(a_1, w_1 + a_0)$ 。

就是  $(a_0 \leq a_1 \vee a_0 \leq w_1 + a_0) \wedge (w_0 + a_1 \leq a_1 \vee w_0 + a_1 \leq w_1 + a_0)$

化简一下，只有最后一个条件有用，就是  $w_0 + a_1 \leq w_1 + a_0$ 。于是按照  $w_i - a_i$  从小到大排序即可。

# 种树

A 城市有一个巨大的圆形广场，为了绿化环境和净化空气，市政府决定沿圆形广场外圈种一圈树。

园林部门得到指令后，初步规划出  $n$  个种树的位置，顺时针编号 1 到  $n$ 。并且每个位置都有一个美观度  $A_i$ ，如果在这里种树就可以得到这  $A_i$  的美观度。但由于 A 城市土壤肥力欠佳，两棵树决不能种在相邻的位置（ $i$  号位置和  $i+1$  号位置叫相邻位置。值得注意的是 1 号和  $n$  号也算相邻位置）。

最终市政府给园林部门提供了  $m$  棵树苗并要求全部种上，请你帮忙设计种树方案使得美观度总和最大。如果无法将  $m$  棵树苗全部种上，给出无解信息。

$$n \leq 2 \times 10^5$$

来源：2011 中国国家集训队命题答辩钱桥（洛谷 P1792）

# 种树

有一个朴素的贪心想法是每次选最优的并且能种的位置种上，但是这种想法有一个问题，就是一个  $A_i$  很大的位置不一定会被选。于是考虑何时不会选这样的位置，发现只有在这个位置两侧都被选的时候它才不会被选，因为如果只有一侧被选的话一定是不如它的。

为了解决这个问题，有一个很聪明的想法是说，我先选上这个很优的点  $i$ ，但是我保留一种后续不选它的可能性。具体方法是，删除这棵树和相邻的两个位置，在原位置加入一个权值为  $A_{i-1} + A_{i+1} - A_i$  的树，意思就是假如选择这个新树，就相当于不选  $i$  而选择其旁边的两个位置了。于是就转化成了一个较小的问题规模。这一般也被称作反悔贪心。每一步都是最优的，问题的转化是双向的（即可以反过来构造方案），所以总的也是最优的。



# Coins

有  $x + y + z$  个人，第  $i$  个人有  $A_i$  个金币， $B_i$  个银币， $C_i$  个铜币。要选出  $x$  个人获得其金币，选出  $y$  个人获得其银币，选出  $z$  个人获得其铜币。在不重复选某个人的情况下，最大化获得的币的总数。

$x + y + z \leq 10^5$ 。

来源：AGC018C

# Coins

可以先钦定每个人都拿金币，这样就变成了从一些人里选择  $y$  个人得到  $E_i = B_i - A_i$  的权值，选择  $z$  个人得到  $F_i = C_i - A_i$  的权值。

考虑每次加一个人拿银或铜，有以下四种情况：

- 加一个拿银的；
- 加一个拿铜的；
- 把一个拿银的变成拿铜的并加一个拿银的；
- 把一个拿铜的变成拿银的并加一个拿铜的；

用堆维护即可。

# Shop

- 有  $k$  个正整数  $a_1 \dots a_k$ 。
- 有  $n$  个操作，每个操作给定正整数  $t, i, b$ ，有三种可能：
  - 如果  $t = 1$ ，这个操作是将  $a_i$  赋值为  $b$ ；
  - 如果  $t = 2$ ，这个操作是将  $a_i$  加上  $b$ ；
  - 如果  $t = 3$ ，这个操作是将  $a_i$  乘以  $b$ 。
- 你可以从  $n$  个操作中选择最多  $m$  个操作，并按照一定顺序执行。
- 你的目标是最大化  $\prod_{i=1}^k a_i$  的值。
- $k, n \leq 10^5$ 。

来源：CF521D

# Shop

如果确定了执行的操作，执行顺序一定为赋值、加、乘。  
赋值操作只用保留最大的，并可以转化为加法。  
每个数的加法操作按从大到小顺序排序后可以转化为乘法。  
最后将所有乘法操作从大到小排序选前  $m$  个即可。

# Waterfront

现有  $n$  丛初始高度为  $h_i$  的灌木。每丛灌木每天都会生长  $g_i$  的高度。每天在灌木生长完毕后，园丁将对灌木剪枝  $k$  次。每次可以将任意一丛高度不小于  $x$  的灌木剪短  $x$  个单位。

求  $m$  天后最高的一丛灌木的高度的最小值。

$1 \leq n, m \leq 10^4, 1 \leq k \leq 1000$ 。

来源：eJOI2021

# Waterfront

考虑一个贪心，先尝试砍最后最高的灌木。能砍就一定砍它，砍不动了就可以直接得到答案。

问题在于什么时候砍。其实，尽量靠前的砍是最优的。可以调整法证明。于是可以维护每天已经用掉了多少次砍，每个灌木一个指针表示目前从哪天开始可以被砍。

每次找到最后最高的那个灌木，移动其指针，砍它。这个过程不超过  $Mk$  次。移动指针最多有  $NM$  次。

复杂度  $O(NM + Mk \log N)$ 。

## OWO

小蓝很喜欢 owo，他现在有一些字符串，他想将这些字符串拼接起来，使得最终得到的字符串中出现尽可能多的 owo。

在计算数量时，允许字符重叠，即 owowo 计算为 2 个，owowowo 计算为 3 个。请算出最优情况下得到的字符串中有多少个 owo。

$1 \leq n \leq 10^6$ ,  $1 \leq |s_i|$ ,  $\sum |s_i| \leq 10^6$ 。

来源：蓝桥杯

## OWO

首先字符串内部的先不管，容易统计。接下来只需考虑拼接构成的即可。字符串可以分为 10 类，前面分为 o, wo, x, 后面分为 o, ow, x, 或者单独一个 w (x 表示无法有效拼接)。

随后可以开始分类讨论并贪心。

一个拼接处最多只有一个新 owo 产生，一个串的最优情况是两侧都形成了 owo。因此可以先尝试拼两侧都能形成的 owo 的串，之后再拼只有一侧能形成 owo 的串，最后还要考虑一下 w。

似乎也可以用费用流描述。

建议调代码的时候一定要对拍。



# Broken Device

这是一道通信题。

你需要实现两个函数 Anna 和 Bruno 来实现以下功能：

- Anna 将得到一个长为  $N = 150$  的空白序列和一个不大于  $10^{18}$  的数字  $X$ ，这个函数需要为每一位赋予一个 0 或 1 的值来保存  $X$ ，其中序列中有  $K$  个位置是损坏的：无论设置为 0 还是 1，这些位置的值都恒为 0， $P$  数组保存着这些位置的下标；
- Bruno 将得到 Anna 操作后的序列，这个函数需要依靠这个序列来还原 Anna 得到的数字  $X$ 。

$K \leq 40$

来源：JOISC 2017 (qoj 可提交)

# Broken Device

首先，考虑将长度 150 的序列每两位分一段，每一段若有一个位坏掉就都是 0（称之为坏段），否则以三进制存储信息。这样的话，最多能有 40 个坏段，则只能表示出  $3^{35}$  级别的数，显然无法通过。

考虑随机化：让 Anna 和 Bruno 都使用同一个随机排列来遍历数组。我采用的是标准库里的 'mt19937'，如果种子一样，生成的序列也一样。也可以直接打表出一个随机排列。

这样可以使一些坏段拥有两个坏位，无法刻意构造卡坏段的数量。不过这样还是无法通过。

考虑将坏段利用起来：如果一个坏段有一个好位，并且将这个好位设置为 1 时，它和  $X$  当前三进制最低位的表示恰好相同，那么就可以利用上这个坏段表示三进制的一位。

不过要注意每一个位置需要将  $\{0, 1, 2\}$  到  $\{01, 10, 11\}$  的映射设置为一个关于这个位置随机的东西，不然  $X$  三进制下都是一个数可能就爆炸了。

然后就能过了，期望正确率很高。

这个题其实是有其它做法的，大家可以自行查看其它题解。

# Tautonym Puzzle

我们称一个字符串  $x$  是好的当且仅当  $x$  可以被表示为另外一个串  $y$  复制一遍得到, 即  $x = \overline{yy}$ 。

举个例子: 'aa' 和 'bubobubo' 是好的, 'a'、'abcabcabc' 和 'abba' 不是。

现在要求一个串  $s$  满足下列条件:

- $|s| \leq 200$
- 字符集大小为 100, 每个字符用  $[1, 100]$  的整数表示。
- 在  $s$  的所有的  $2^{|s|}$  个子序列中, 恰好有  $N$  ( $1 \leq N \leq 10^{12}$ ) 个串是好的, 其中  $N$  是给出的。

可以证明这样的  $s$  存在。

来源: AGC012C

# Tautonym Puzzle

当左侧与右侧互相之间没有相同字符时，符合条件的子序列个数就是左侧的加上右侧的。于是考虑预处理一些串和它们的子序列个数，并将  $n$  分解为这些数的和。

计算一个串的子序列个数是容易做到三次方的，在此不详细说了。之后的问题就是处理哪些序列了。

首先发现，全部相同的序列无法在限制内构造出  $n$ 。分析原因，发现是每次使  $n$  减小时减小的不够多。因此考虑多处理些序列，让答案分布的比较近。

之后实际测试得到，仅有两种字符的串就已经很均匀了，也能发现在串长为 53 左右时答案就在  $10^{12}$  左右。因此从小到大枚举串长，每个串长随机大约 800 个串并计算答案，如果答案没出现过就扔进 map 里。这样可以在 1s 左右跑完预处理。

然后这个东西跑起来很优秀，随机了好久，最大也才 170。

这个题其实是有其它做法的，大家可以自行查看其它题解。

# Fliper

现有一个包含  $n$  块挡板的旧弹球机。

游戏在二维平面内进行，其中每块挡板与坐标轴所夹角总为  $45^\circ$ ，长度为 1 个单位。挡板用其中心坐标  $(x_i, y_i)$  和字符  $/$  或  $\backslash$  来表示。

小球在碰到挡板后，其运动方向将会旋转  $90^\circ$ 。注意，挡板的两面都可使小球的运动方向发生偏转。

不难发现，当小球处于弹球机中时，它只有两种结局：

- 沿着某一方向一直运动下去而不碰到挡板
- 处于若干个挡板的循环之中

在翻新弹球机的过程中，有四种颜色的染料可供选择。现要将弹球机中的每个挡板进行染色，使得每一个循环内经过每一种颜色的次数相同且为偶数。

请给出一种符合题意的染色方式，或证明这样的染色方式不存在。如果不存在，输出  $-1$ 。

$$1 \leq n \leq 5 \times 10^5。$$

来源：COCI 2021-2022 #5

# Fliper

构造题宣讲怎么能没有欧拉回路呢！

这个题看上去就非常欧拉回路的样子，所以考虑建图。

如果就把一个挡板拆两个点的话很不好处理染色，所以考虑点转边，一个挡板是连接两个循环的边然后给边染色。当然某个挡板的某一面可能不处于某个循环里，将其连向一个特殊点。

有解的条件，首先就是所有循环的长度是 8 的倍数，在这里就是每个点的度数都是 8 的倍数。

直接猜测满足这个条件即有解，尝试构造。

先跑一次欧拉回路，按照顺序奇偶性将边集分成两份，再对这两份边集分别跑一次欧拉回路，就将边集分成四份，分别染四种颜色就好。注意如果边集不连通了就对每个连通块分别跑就好。

容易发现度数一直满足要求。

注意如果特殊点度数有问题，要连接一些自环。

# Arrays and Palindrome

给定  $n, m, A_1, \dots, A_m$ , 保证  $\sum A_i = n$ 。构造两个序列  $a$  和  $b$ , 使得  $a$  是  $A$  的重排,  $\sum b = n$ , 其中的数都是正整数, 并且: 满足以下两个条件的长为  $n$  的数列, 所有元素必定是相同的。

- 最开始的  $a_1$  个元素, 接下来的  $a_2$  个元素, 更后面的  $a_3$  个……都是回文;
- 最开始的  $b_1$  个元素, 接下来的  $b_2$  个元素, 更后面的  $b_3$  个……都是回文;

来源: AGC001D

# Arrays and Palindrome

考虑  $a, b$  合法条件，其本质是一些回文的连边，要求最后图连通。连接的总边数是  $\sum \lfloor \frac{a_i}{2} \rfloor + \sum \lfloor \frac{b_i}{2} \rfloor$ ，所以如果  $A$  里面奇数个数大于二就无解了。

接下来考虑构造。直接钦定  $A$  中的奇数只能在两侧即可。错位设置  $b$ ，具体连边方式需要画画图体会一下。



# Hamiltonian

给定  $k \leq 60$ ，构造一张不超过 20 个点的无向图使得恰好有  $k$  个无序点对间存在哈密顿路径。

来源：gym103469

# Hamiltonian

直接构造看起来很困难很 adhoc。但没关系，我们可以打表！  
具体的，随机一些图，然后计算其有多少对点间有哈密顿路径，不断随机直到所有  $k$  都有了对应的图。  
随机一张图可以考虑在环上加一些边，调整一下参数即可在 10min 左右跑出来所有答案。

谢谢大家！祝大家在省选和 NOI 中取得好成绩！