

# 数据结构进阶

grass8cow

# 自我介绍

选手何钒佑，主要 id grass8cow, cf id grass8sheep。

生涯成就：

NOI 2024 金牌，WC 2024 金牌(rk4)，APIO 2023 银牌。

初三时以全省第二名的成绩进入省队。

连续四年 CSP-S&NOIP 一等奖，且 AK NOIP2023,CSP-S 2022

cf rating 2728,at rating 2708

# 声明

不会讲 LCT, ETT, Top tree 等超纲/不常用知识。

准备了一些非常难且不超纲的数据结构题。

(以下每种算法都容易通过baidu得到练手题)

# Part1:polylog 的算法

# 重链剖分

给定一棵树，每个点有点权。

需要支持：链加，链和，子树加，子树和。

tips: siz 最大的儿子被称为重儿子。

# 可持久化线段树

给定序列  $a$ 。你需要回答一些询问。

每次询问给出  $l, r, k$ ，求出  $a[l], a[l+1], \dots, a[r]$  中第  $k$  大的值。

tips: 利用没有懒标记的线段树的灵活性。

ex: 给定一棵树，点有点权，每次求一条路径上的第  $k$  大值？

# 李超线段树

现有二元组集合  $S$ ，初始为空。你需要支持修改和查询。

修改：给定  $k, b$ ，在集合  $S$  中加入  $(k, b)$ 。

查询：给定  $x$ ，求  $kx+b$  的最大值。

tips：对线段树的每个节点记录一个二元组，使得每次查询得到的最大值都是正确的。

ex: 如果限制二元组只能对一个区间的  $x$  起作用该怎么办？

# 吉司机线段树

给定序列  $a$ ，需要支持查询和修改。

修改：给定  $l, r, z$ ，对于  $l \leq i \leq r$ ， $a_i := \min(a_i, z)$

查询： $a$  的区间和。

tips：在线段树每个节点维护最大值及对应的个数，以及次大值。



# 单侧递归线段树

给定序列  $a$ ，需要支持修改和查询。

修改：给定  $x, z$ ，使  $a[x] := z$

查询：序列的前缀最大值个数。

tips: 问题在于合并信息是困难的。合并时做一些查询。

ex: 能不能做到更低的复杂度（吉司机线段树）

# 线段树合并

例题：现在有若干二元组集合  $S[i]$ 。

需要支持三种操作：

1. 给定  $i, x, z$ ，把  $(x, z)$  插入  $S[i]$  中。
2. 给定  $i, j$ ，把  $S[i]$  合并进  $S[j]$  中，再清空  $S[i]$ 。
3. 给定  $i, l, r$ ，查询  $S[i]$  中  $l \leq x \leq r$  的二元组的  $z$  之和。

tips: 可以做到单  $\log$ ，但可以先想想更劣的方法（启发式合并）

ex: 单论这个题，能不能用更朴素的方法做到相同的复杂度？

# 折半警报器

有一张无向图，初始没有边，每个点有点权（正整数）。

令  $W(x)$  是  $x$  所在连通块的点权大小之和。

给出若干三元组  $(x,y,z)$ 。

进行若干次操作，每次找到编号最小的三元组满足  $x,y$  不连通且  $W(x)+W(y)\geq z$ ，连接边  $x,y$ 。

找到三元组的同时输出其编号。

tips:  $A+B\geq z$  必要条件  $A\geq z/2$  or  $B\geq z/2$

ex: gym102331F

# cdq 分治

三维偏序:

给定若干三元组  $x[i], y[i], z[i]$  , 满足  $x[i]$  互不相同,  $y[i]$  互不相同,  $z[i]$  互不相同。

请计算有多少对  $i, j$  使得  $x[i] < x[j], y[i] < y[j], z[i] < z[j]$

tips: 分治思想是灵活的

ex: 单论这个题, 有没有单  $\log$  的做法 (hard;容斥)

# 点分治/边分治

例题：给定一棵树，边有边权。给定  $k$ 。

你希望求出：有多少不同的简单路径的边权和为  $k$ ？

tips: 处理路径相关问题

ex1: 点分树

ex2: 假设边权全部为 1，你能对于  $k=1,2,3,\dots,n$  都求出答案吗？（假设你会 FFT）

# Part2:sqrt 的算法

# 分块

给定一个序列，需要支持询问。

每次给定一个区间，求出其众数。

tips: 分块只是一种思想，具体应用是灵活的；块长也是灵活的

# 根号分治

给定序列  $a$ 。需要支持修改和查询。

修改：给定  $l, k, z$ ，把  $a[l], a[l+k], a[l+2k]..$  加上  $z$

查询：给定  $x$ ，查询  $a[x]$

tips: 对  $k$  进行分治。



# 莫队

给定序列  $a$ 。需要支持询问：

每次询问给定  $l, r$ 。令  $t[x]$  是  $a[l], a[l+1], \dots, a[r]$  中等于  $x$  的数的个数。

需要求出  $t[x]^2$  的和。

tips: 离线，对询问进行适当的排序。优雅的暴力。

适用范围：难以合并信息的情境

# 树上莫队

给定一棵树，每个点有颜色。

有询问，每次需求出一条路径上所有点的不同颜色个数。

tips: 欧拉序

# 莫队二次离线

给定一个序列。

若干次查询，每次需要求区间逆序对个数。

tips: 莫队的过程中需要计算一些东西。不需要即时算，可以将其离线。

# 回滚莫队

给定序列，有若干询问。

每次询问给定区间，求出区间内相同的数的最远间隔距离。

tips:不好处理删除时怎么办？

Thanks for listening