程序设计中的一些数学问题

宁华

2020.3.10

建模方法和步骤

- 1、模型准备
- 2、建立模型
- 3、模型求解
- 4、编程实现

具体应用

- 1、百钱买百鸡
- 2、Josephus问题
- 3、骑士巡游
- 4、Catalan数
- 5、Nim
- 6、图论建模
- ……

百钱买百鸡

- 大约在公元5世纪，数学家张邱建在他的《算经》中提出了一个闻名于后世的百钱百鸡问题：
- 鸡翁一，值钱五；
- 鸡母一，值钱三；
- 鸡雏三，值钱一。
- 百钱买百鸡，翁、母、雏各几何？

百钱买百鸡

- 0(n^3)
- 0(n^2)
- 0(n)

拓展1

- 如果是 N 钱买 N 鸡呢？

- N <= 10^18

拓展2

- 如果是 N 钱买 M 鸡呢？

拓展3

- 公鸡 7 元一只，母鸡 4 元一只，小鸡 3 元一只。各种鸡的数量有无穷多只。

- 现在有 N 元钱，要求：
- （1）钱要恰好全部花光；
- （2）如果把一只公鸡、一只母鸡、一只小鸡看作一套，要求购买的套数尽可能多。
- （3）在套数尽可能多的情况下，要求购买的鸡的总数尽可能多。

- 问：在满足上述条件的情况下，公鸡、母鸡、小鸡各买了多少只？如果无解，则输出 -1

- N ≤ 10^18

拓展4-1

- 公鸡 a 元一只，母鸡 b 元一只，小鸡 c 元一只。a、b、c 两两不同。各种鸡的数量有无穷多只。
- 现在有 N 元钱，要求：
- （1）钱要全部花光；
- （2）如果把一只公鸡、一只母鸡、一只小鸡看作一套，要求购买的套数尽可能多。
- （3）在套数尽可能多的情况下，要求购买的鸡的总数尽可能多。
- 问：在满足上述条件的情况下，公鸡、母鸡、小鸡各买了多少只？
- 如果有多种方案，则输出购买公鸡数目最多的那种。如果仍有多种方案，则输出购买母鸡数目最多的那种。
- 如果无解，则输出 -1
- N ≤ 10^5。

拓展4-2

- 公鸡 a 元一只，母鸡 b 元一只，小鸡 c 元一只。a、b、c 两两不同。各种鸡的数量有无穷多只。(a>b>c)
- 现在有 N 元钱，要求：
- （1）钱要全部花光；
- （2）如果把一只公鸡、一只母鸡、一只小鸡看作一套，要求购买的套数尽可能多。
- （3）在套数尽可能多的情况下，要求购买的鸡的总数尽可能多。
- 问：在满足上述条件的情况下，公鸡、母鸡、小鸡各买了多少只？如果有多组解，输出字典序(x,y,z)最小的那组(x,y,z 依次表示公鸡、母鸡、小鸡的购买数量)。输出如果无解，则输出 -1
- 多组数据
- 1≤T≤100, 0≤n≤10^9, 1≤c<b<a≤10^9

Josephus问题

- 丢手绢问题

Josephus问题

- 猴子选大王

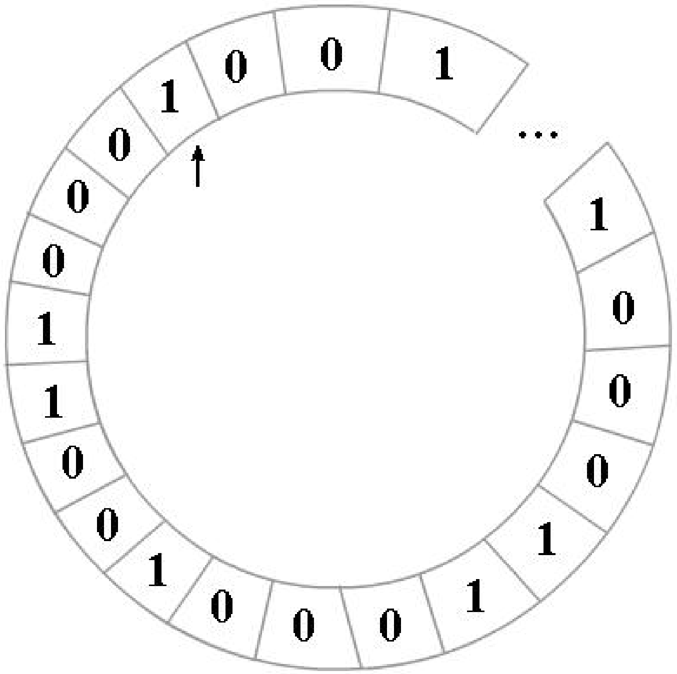
- 环形
- 1, 2, . . . , n
- 报到 m 的出局

- 最终剩下猴子的编号？

- n, m <= 1000

Josephus问题

- 解法：数组或链表模拟
- O(nm)



拓展1

- n, m <= 10, 000, 000

- 0, 1, 2, ……, m-2, m-1, m, m+1, m+2, ……, n-3, n-2, n-1
- ……, n-2, 0, 1, 2, ……,

- $X' = (X+m) \bmod n$

- $F[1]=0;$
- $F[i]=(F[i-1]+m) \bmod i \quad (i>1)$

- $O(n)$

拓展2

- m=2的特殊情况
- n < 2^31, m = 2

- 把 n 的2进制数看成首尾相连的环，把这个数的整体左移一位使得最高位变成最低位就是问题的答案了！

拓展3

Description

有一群进化程度很高的猴子，它们不再通过群殴产生猴王，而是采用一种非常文明的方法选出新的猴王。

猴群里有 n 只猴子，它们在篝火旁围坐成一个圈：其中一只猴子是 1 号，沿顺时针方向依次是 2 号、3 号、……、 n 号，然后回到 1 号。由上一代猴王说出一个数字 m（这里保证 (n-1) 是 (m-1) 的倍数），从 1 号猴子开始按顺时针依次报数，当报到 m 的时候，刚刚报 1、2、...、m-1 的猴子出局；再从刚报到 m 的猴子的顺时针方向下一个还在圈里的猴子开始重新从 1 开始按顺时针报数，……如此重复，直至剩下一只猴子，它就成为新的猴王。

例如，当 n=7、m=3 时，依次出局的猴子序号是 1、2、4、5、7、3，最后剩下 6 号是新猴王。

有一只小猴子很想当上猴王，它想知道自己开始应该是几号才能最后成为新的猴王。

你能帮助它吗?

Input

一行两个正整数 n、m

Output

一个整数，表示小猴子最初在几号位置可以使其最终当选为新猴王。

Sample Input

7 3

Sample Output

6

Data Size

30%的数据：$2 \le m \le n \le 10^3$

50%的数据：$2 \le m \le n \le 10^6$

100%的数据：$2 \le m \le n < 2^{63} - 1$, 数据保证$(n-1)$是$(m-1)$的倍数。

拓展4

Description

有一群进化程度很高的猴子，它们不再通过群殴产生猴王，而是采用一种非常文明的方法选出新的猴王。

猴群里有 n 只猴子，它们在篝火旁围坐成一个圈：其中一只猴子是 1 号，沿顺时针方向依次是 2 号、3 号、……、 n 号，然后回到 1 号。

选举方法如下：

第 1 轮：从 1 号猴子开始按顺时针依次报数，从 1 开始报数，报到 1 就停止且报到 1 的猴子出局；

第 2 轮：从上一轮刚出局猴子的顺时针方向下一个还在圈里的猴子开始重新从 1 开始按顺时针报数，报到 2 就停止且报到 2 的猴子出局；

……

第 k 轮：从上一轮刚出局猴子的顺时针方向下一个还在圈里的猴子开始重新从 1 开始按顺时针报数，报到 k 就停止且报到 k 的猴子出局；

……

第 n-1 轮：从上一轮刚出局猴子的顺时针方向下一个还在圈里的猴子开始重新从 1 开始按顺时针报数，报到 n-1 就停止且报到 n-1 的猴子出局。

此时只剩下一只猴子，它就成为新的猴王。

有一只小猴子很想当上猴王，它想知道自己开始应该是几号才能最后成为新的猴王。

你能帮助它吗？

多组数据。

Input

第一行：一个整数 T，表示数据组数。

接下来 T 行，每行一个正整数 n

Output

共 T 行，每组数据的答案占一行。

Sample Input

```
2
2
3
```

Sample Output

```
2
2
```

Hint

$1 \le T, n \le 5000$

拓展5

问题描述

恰逢 H 国国庆，国王邀请 n 位大臣来玩一个有奖游戏。首先，他让大臣们围成一圈，然后按顺时针方向给大臣依次编号为 1 、2、……、n 号。接下来，一轮游戏开始：按顺时针方向，从 1 号大臣开始报数，报到 2 的大臣暂时出局；再从刚暂时出局大臣的顺时针方向下一个还在圈里的大臣开始重新报数，报到 2 的大臣暂时出局……如此重复，直至剩下一个大臣，该轮游戏结束。假设最后剩下大臣的编号为 k，则刚刚暂时出局的大臣中，所有编号大于 k 的大臣将每人获得 1 个金币，然后永久出局。所有编号小于 k 的大臣将回到原位，开始新一轮的游戏。

若干轮游戏之后，将不再有大臣永久出局，此时游戏结束，所有剩下的大臣将每人获得 2 个金币。

国王想知道，最终他需要支付多少个金币？

输入

一个整数 n

输出

一个整数，表示国王需要支付的金币个数。

样例输入

5

样例输出

8

样例解释

共有 5 个大臣。

第一轮：依次暂时出局的大臣编号是 2、4、1、5，最后剩下 3 号，则 4、5 号大臣每人获得 1 个金币，永久出局；

第二轮：圈里剩下的猴子为 1、2、3 号，依次暂时出局的大臣编号是 2、1，最后剩下 3 号，没有大臣永久出局。剩下的 3 个大臣每人获得 2 个金币。

国王一共需要支付 2×1+3×2=8 个金币。

数据范围

10% 的数据：n <= 100

100% 的数据：n <= 10^7

拓展6

问题描述

若干个人站成一圈，从某个人开始，按顺时针方向，从 1 开始报数，报到 m 的人就被杀掉，然后下一个人重新开始从 1 报数，每次报到 m 的人就被杀掉，……

现在有一圈人，k 个好人站在一起，k 个坏人站在一起，并按顺时针方向依次编号，好人编号为 1,2,……,k，坏人编号为 k+1, k+2, …… , 2k。从编号为 1 的好人开始报数。你要确定一个最小的 m，使得 k 个坏人先被杀死前而没有杀死一个好人，这样等坏人全部被杀光之后，就不用再杀人了。

输入

一个 k

输出

一个满足题目要求的最小的 m

输入

一个 k

输出

一个满足题目要求的最小的 m

样例1

输入

3

输出

5

样例2

输入

4

输出

30

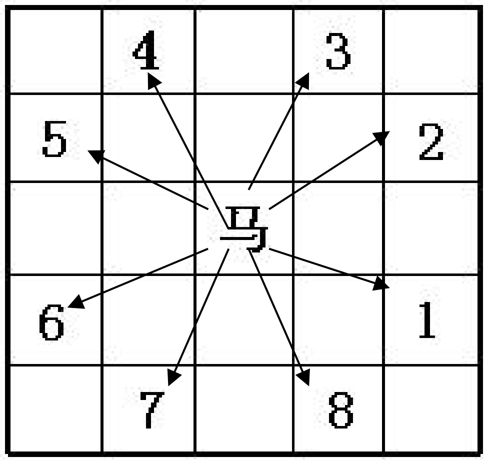
数据范围

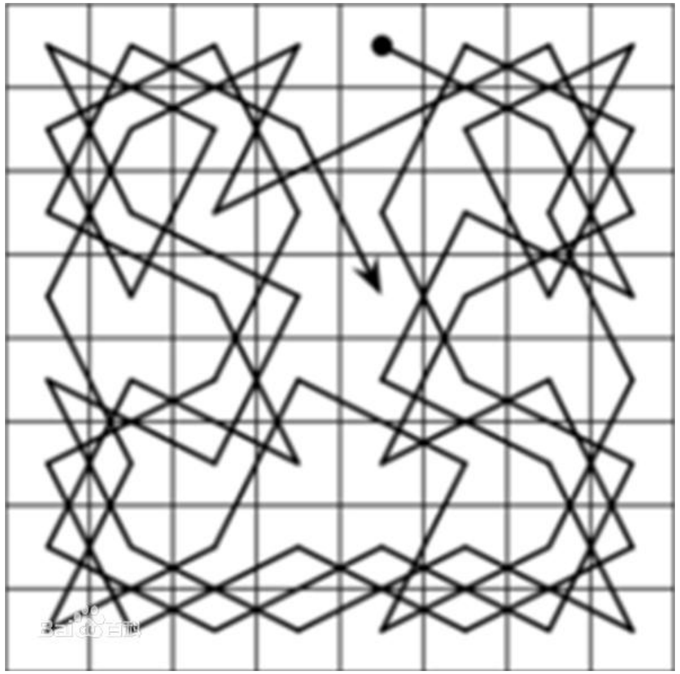
0 < k < 14

骑士巡游

- 问题描述：

  在n×n方格的国际象棋棋盘上，从任意指定的方格出发，为马（也称骑士knight）寻找一条走遍棋盘每一格并且只经过一次的一条路径。



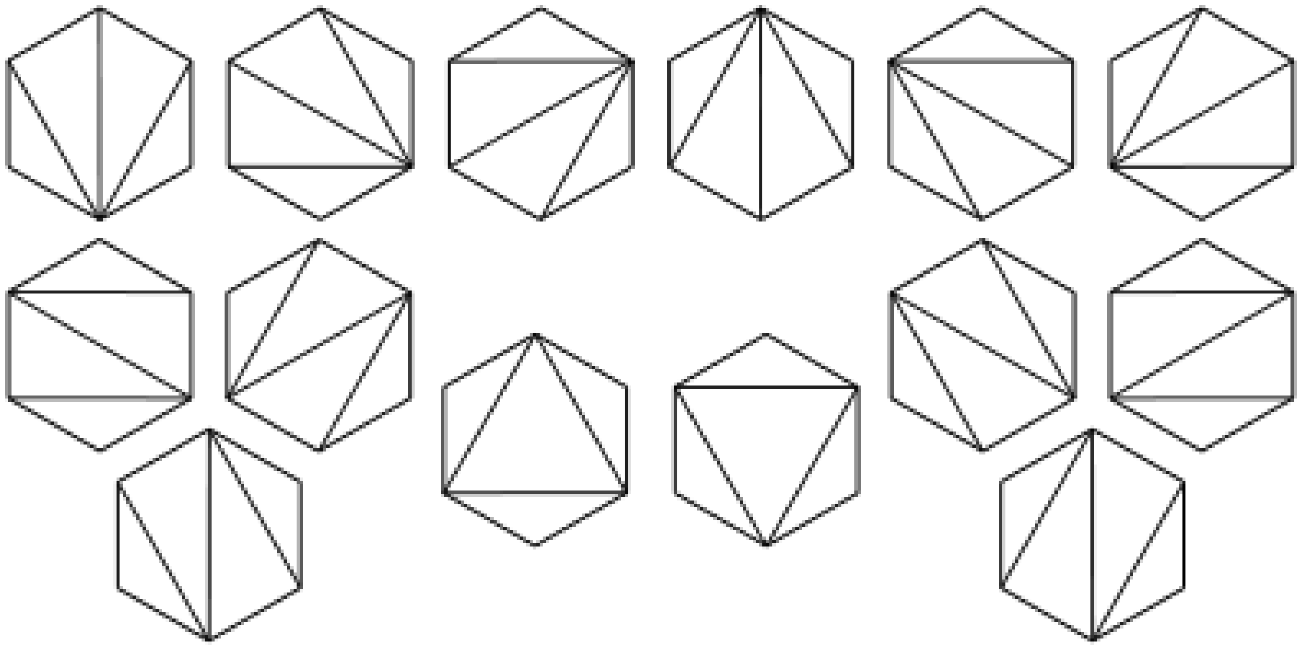


骑士巡游

- 贪心：Warnsdorff策略

Catalan

Catalan数由凸多边形的三角剖分问题引入。



Catalan

- 令h(0)＝1,h(1)＝1，Catalan数满足递推式
- h(n)= h(0)*h(n-1) + h(1)*h(n-2) + ... + h(n-1)h(0)   (n>=2)

- Catalan通项公式为
- h(n)=C(2n,n)-C(2n,n-1)   (n=0,1,2,...)
- h(n)=C(2n,n)/(n+1)
- 另类递推式
- h(0)=1
- h(n)=h(n-1)*(4n-2)/(n+1)   (n=1,2,...)

Catalan

- Catalan应用：出栈序列问题
- 一个栈(无穷大)的进栈序列为1,2,3,..n,有多少个不同的出栈序列?

常规分析

- 方法1：

常规分析

- 方法2：

非常规分析

问题的形象化描述

- 饭后，姐姐洗碗，妹妹把姐姐洗过的碗一个一个放进碗橱摞成一摞。一共有n个不同的碗，洗前也是摞成一摞的，也许因为小妹贪玩而使碗拿进碗橱不及时，姐姐则把洗过的碗摞在旁边，问：小妹摞起的碗有多少种可能的方式？

- 一个有n个1和n个-1组成的字串，且前k个数的和均不小于0，那这种字串的总数为多少？

- P=A1A2A3……An，依据乘法结合律，不改变其顺序，只用括号表示成对的乘积，试问有几种括号化的方案？

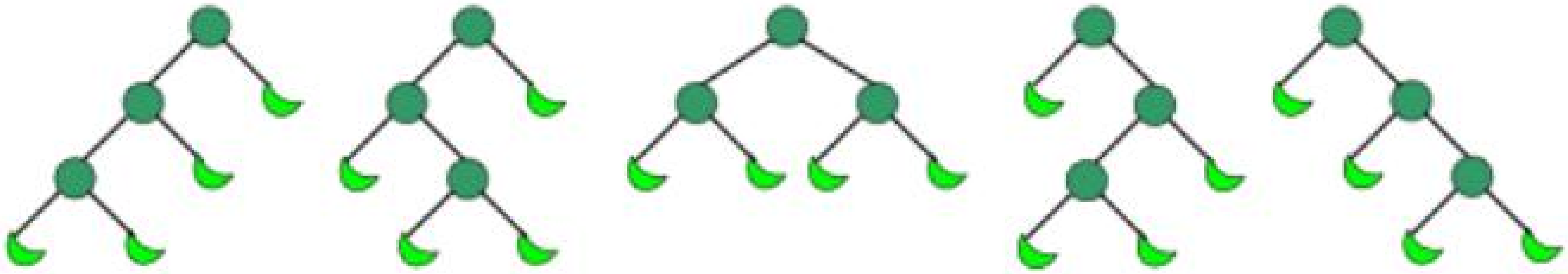
- ……

- n对括号有多少种匹配方式?

- 例如：
- 0对括号：[空序列] 1种
- 1对括号：() 1种
- 2对括号：()()、(()) 2种
- 3对括号：((()))、()(())、()()()、(())()、(()()) 5种
- 那么问题来了，n对括号有多少种正确配对的方式呢？

- 有n个结点的不同二叉树的个数？

- 有n+1个叶子的不同二叉树的个数？（所有非叶子结点的度均为2）

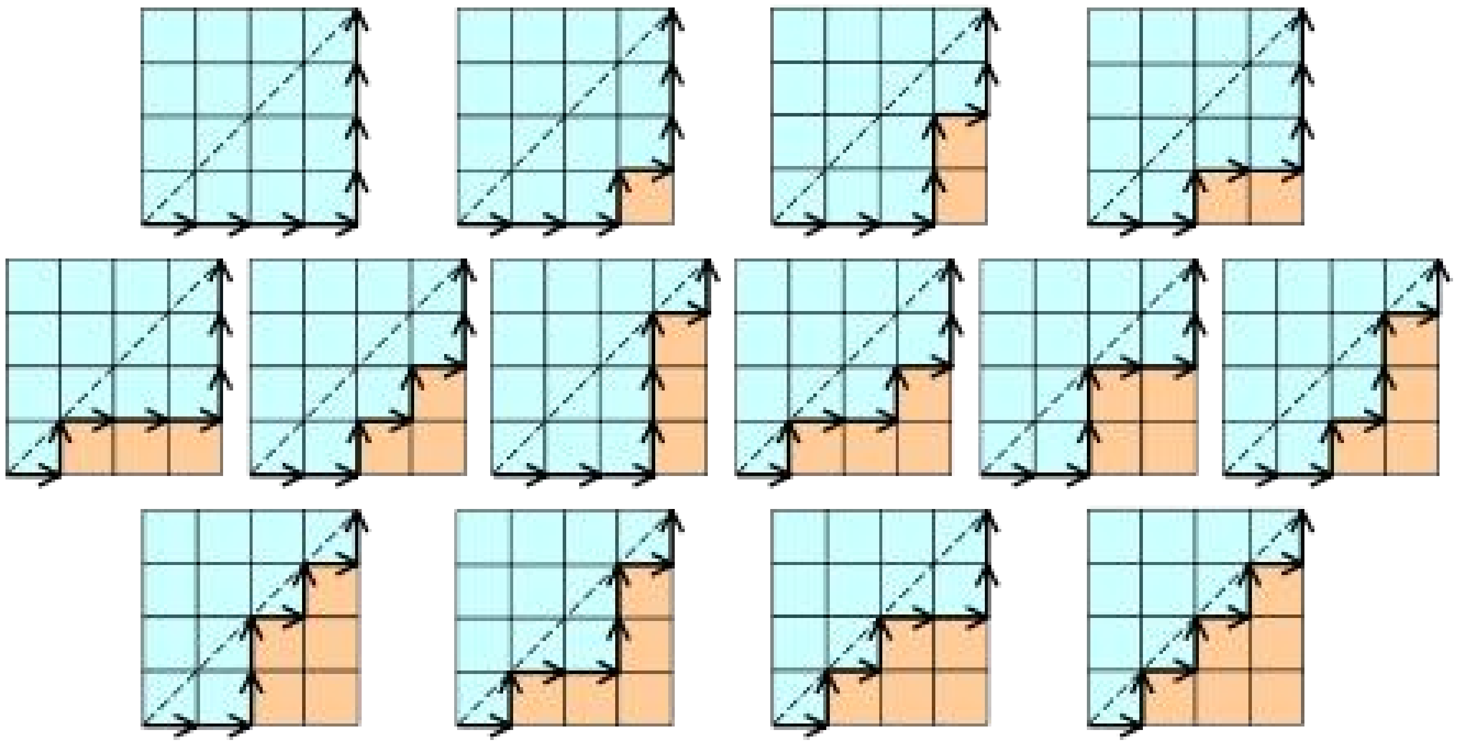


Catalan

- Catalan应用：买票问题

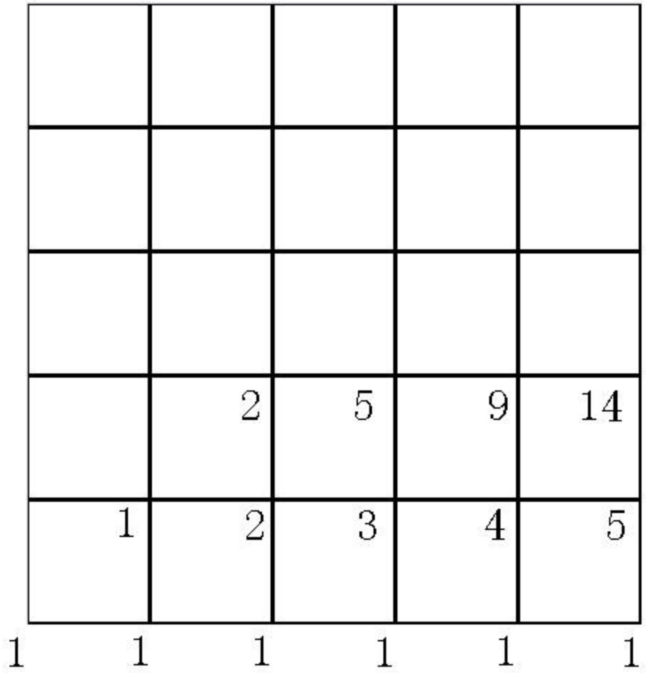
- 2n个人排队买票,其中n人持有100元钞票而其它n人持有50元钞票。假如售票处没有预备零钱,而每张票卖50元。问有多少种排队次序使得不需等待找钱?

- 在一个n*n的地图中，只在下三角行走，不越过对角线，每次向右或向上走一格，从左下角到右上角有多少种走法？

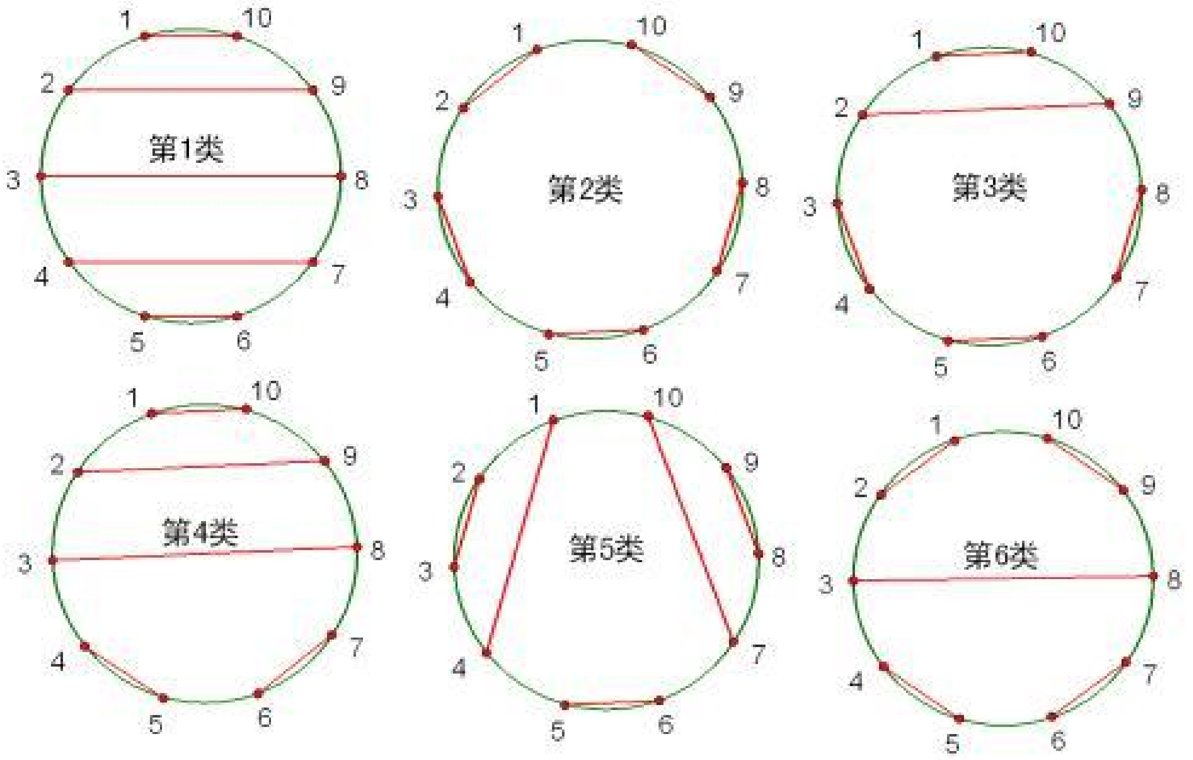


Catalan

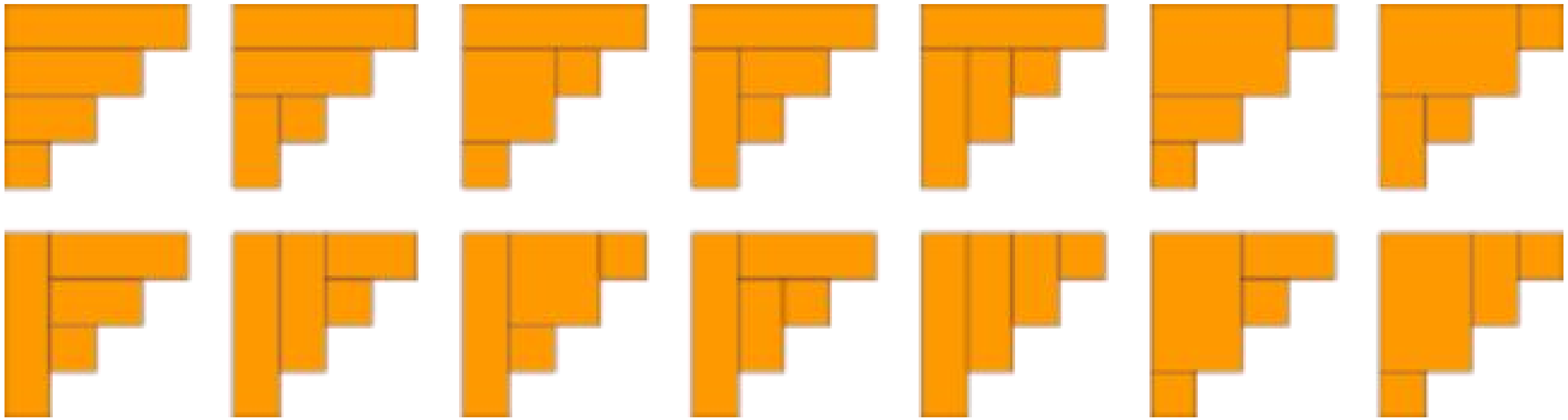
- 方法：递推/dp
- 复杂度为O(n^2)。



- 在圆上选择2n个点,将这些点成对连接起来使得所得到的n条线段不相交的方法数？



- 用n个长方形填充一个高度为n的阶梯状图形的方法个数？



常考笔试题

- 【阿里巴巴笔试题】16个人按顺序去买烧饼，其中8个人每人身上只有一张5块钱，另外8个人每人身上只有一张10块钱。烧饼5块一个，开始时烧饼店老板身上没有钱。16个顾客互相不通气，每人只买一个。问这16个人共有多少种排列方法能避免找不开钱的情况出现。

- 将问题转化为：带5块钱的排前面的个数总是要大于带10块钱的人的个数，即C(16，8)-C(16，7)

- 【腾讯笔试题】在图书馆一共6个人在排队，3个还《面试宝典》一书，3个在借《面试宝典》一书，图书馆此时没有了面试宝典了，求他们排队的总数？
- 将问题转化为：还书的人总是要大于或等于借书的人，即C(6，3)-C(6，2)

- 【阿里巴巴笔试题】12个高矮不同的人,排成两排,每排必须是从矮到高排列,而且第二排比对应的第一排的人高,问排列方式有多少种?

- C(12，6)-C(12，5)

- HDU 4828
- HDU 5184

- 上面一些问题有些是同构的，但有些却实在看不出联系来，他们的答案却都为卡特兰数。在《Enumerative Combinatorics》一书中，竟然提到了多达 66种组合问题和卡特兰数有关。

Nim

- Nim游戏是博弈论中最经典的模型（之一），它又有着十分简单的规则和无比优美的结论。
- Nim游戏是组合游戏(Combinatorial Games)的一种，准确来说，属于“Impartial Combinatorial Games”（简称ICG），在绝大多数组合数学教科书上都有介绍。

- 原题是给n堆石子，两人轮流取，每次可以在任一堆里取任意个石子，最后没有可取石子的人输掉比赛。

- 寻之扬学长曾做过一个取石子游戏程序。

例 POJ 2975

Nim

- 对于传统的Nim问题，可以用二进制的方法解决。
- 首先介绍异或运算，可以理解成按位的不进位加法 $1 \wedge 1=0 \wedge 0=0, 1 \wedge 0=0 \wedge 1=1$。
- 获胜策略是取完石子后保证所有石子数的异或为0。

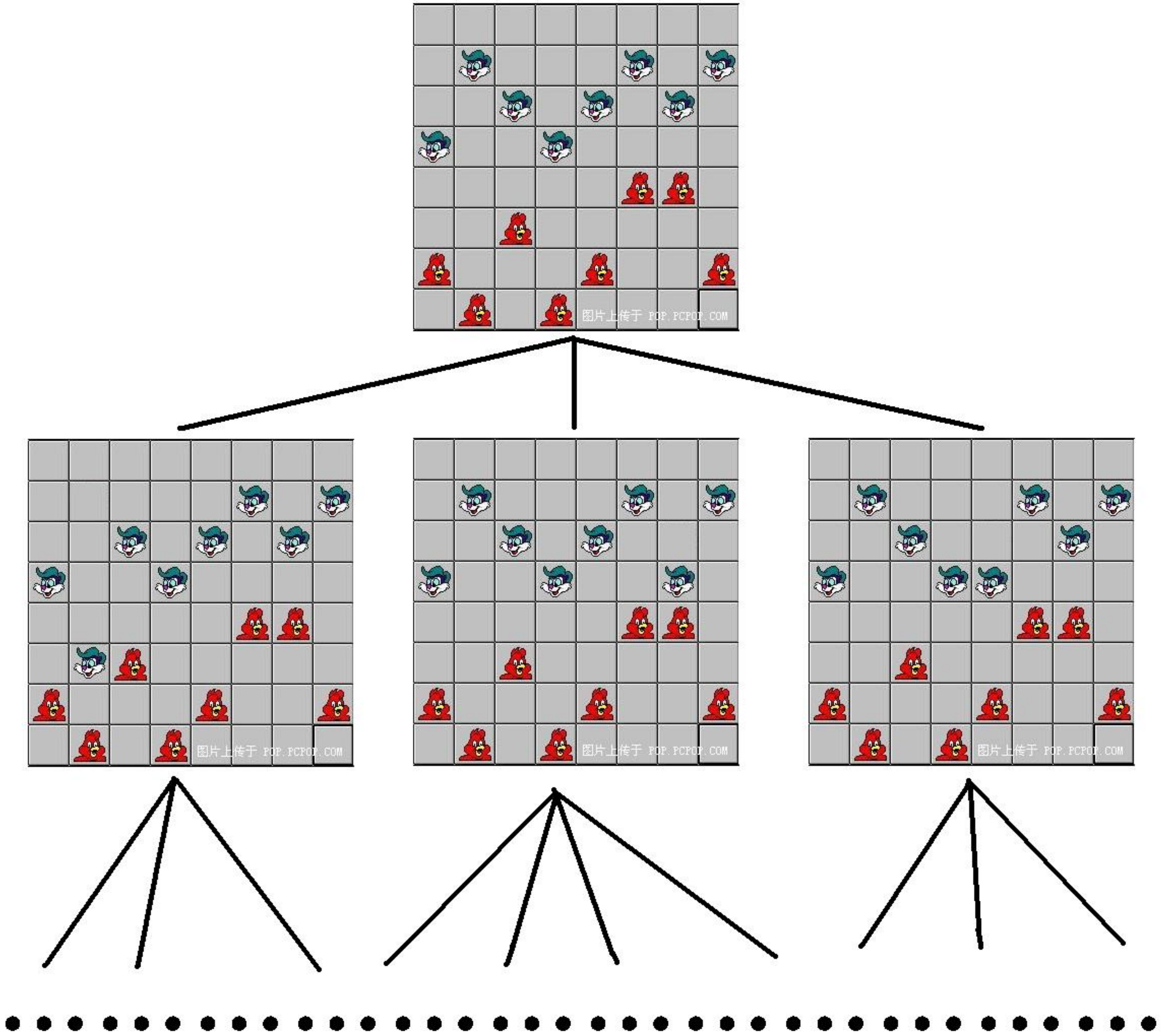
Nim

- Nim棋
- 在8×8的方格中，双方各有8个棋子。每局游戏开始时会随机产生一局棋。每个棋子只能向前直走，步数不限，但不能后退，也不能向旁边横着走，不许不走，也不能超越对手的棋子，即当走到对方棋子前面一格时，就走不动了。这样双方轮流走子，谁取得最后一次走子权算赢。换句话说，最后轮到该谁走子时，他却无子可走了，那么就算输了。

Nim

- 最简单的想法是博弈树。每个结点表示先手走的输赢状态。如果一个结点的所有后继都是先手赢，那么这个结点为先手输。只要有一个后继是先手输，那么这个节点为先手赢。

- 博弈树



The End.

Thanks.