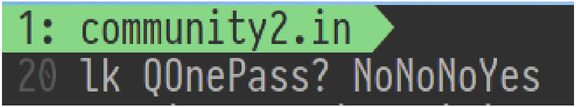
杂题选讲

lk

2024 年 6 月 24 日

按照惯例来个自我介绍

- CTSC2017 Fe
- WC2019 Cu
- HNOI2019 挂的分比拿的分多 45 & 计数题爆栈哥
- ISIJ2019 Ag (40+ac+ac)
- NOI2020 Ag (day1 50+72+56)
- WC2021 64+100+80
- THUSC2021 50+100+100+100
- NOI2021 day2 24+100+36
- CTT2021 前 3 天 T1 得分分别为 50.36,45,30
- ICPC 获得了亚军、亚军、亚军、亚军和银牌，并在 World Finals 中写三题挂 13 发。



Min 或 Max 2

- 有两个 $1 \dots n$ 的排列 $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n$。
- 有一个二元组 (x, y) 一开始 $(x, y) = (a_1, b_1)$，按顺序对于所有 $i = 2 \dots n$, 可以选择 $(x, y) = (\max(x, a_i), \max(y, b_i))$ 或者 $(x, y) = (\min(x, a_i), \min(y, b_i))$。
- 对于所有 k，有多少个 pair(x, y)，使得存在至少一种方案最后得到 (x, y)，且 $|x - y| = k$。
- $n \le 2 \cdot 10^5$.

题解

- 考虑对于一个 $(x, y) = (a_u, b_v)$，判断是否能得到它。
- 假设 $u < v$，则为了固定 x，只要 $i > u$ 则方案是确定的，那么只要知道 $i = u$ 时的 y，最后的值就确定了 (形如 $\min(\max(x, c), d)$)。
- 我们希望 $u < v$，那么 y 就只能是 c 或 d，那么我们只要求出 y 的最小值和最大值就知道是否能得到 c, d 了，这可以用一个值域线段树维护当前如果 $x = i$ 的时候 y 的 min 和 max。
- $u > v$ 的情况类似的先固定 y 即可。$u = v$ 只要能得到 (a_u, b_u) 这个状态且 $c \le b_u \le d$ 就行。

报数 III

- 给定一个 01 串 s，满足 s 以 1 开头。
- 求有多少以 1 开头的 01 串 s' 满足 $(s')_2 < (s)_2$，且 $\forall k \geq 2, 7 \nmid (s')_k$。
- $|s| \leq 10000$

题解

- 首先容易注意到只用判 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$，而 $k = 7$ 就只用判最后一位不是 0。同时容易发现对于 $k \le 6$ 的情况，$k^a \equiv k^{a \bmod 6} \pmod 7$。
- 然后我们首先就能设一个状态数 $n \cdot 7^6$ 的数位 dp，状态记每个 k 的 $(s')_k \bmod 7$，但是跑不过。
- 注意到 $4, 5, 6$ 进制等价于 $-3, -2, -1$ 进制，那么我们考虑知道了奇数位和偶数位分别的一二三进制的值，要求就是 $p + q \neq 0$ 且 $p - q \neq 0$。
- 我们直接枚举上界卡到第几位，然后就能对奇数位和偶数位算出 1,2,3 进制的值的状态数 (分别 7^3)，上面这条要求可以直接容斥，总复杂度 $O(n \cdot 21^3)$。

Equal Sums

- 给定 $l_1 \dots l_n, r_1 \dots r_n, L_1 \dots L_m, R_1 \dots R_m$，对于所有的 $N \le n, M \le m$，求有多少个序列 $x_1 \dots x_N, y_1 \dots y_M$ 使得 $l_i \le x_i \le r_i, L_i \le y_i \le R_i$, 且 $\sum x_i = \sum y_i$。
- $n, m, r, R \le 500$.

题解

- $O(n^2r^2)$ 的 DP 是容易的。多 log 还是多 sqrt 是有小概率过的。
- 正常点的做法是，设 $dp_{a,b,s}$ 表示只确定了 $x_1 \ldots x_a, y_1 \ldots y_b$，$\sum_i x_i - \sum_i y_i = s$ 的方案数。然后我们由于只需要 0，当 $s \geq 0$ 时我们加 y，否则加 x。这样每个方案只会被唯一顺序加出来，且任何时候 $|s| \leq \max(r, R)$.

Mini Metro

- 有 n 个站台，从左到右编号为 $1 \dots n$，第 i 个站台初始有 a_i 个人。
- 每个时刻你都能进行任意次如下操作：喊一辆火车，把所有人里从左到右前 K 个接走 (不够 K 个则全接走)。
- 在每个时刻末，第 i 个站台会新来 b_i 个人，如果第 i 个站台人数超过 c_i 你就输了，你需要 t 个时刻都不输，求至少需要喊几辆火车。
- $n, t \leq 200, K, a_i, b_i, c_i \leq 10^9$

题解

- 容易发现当我们开始拉 i 站的人时，前面 $i-1$ 个站已经全都清空了。
- 考虑末尾加上一个 $a_{n+1}=c_{n+1}=+\infty$ 的站，让每辆车都一定会满载。
- 我们考虑记 $f_{i,j,k}$ 表示只考虑前 i 个站，存活到 j 时刻，初始状态为 $k(a_1 \dots a_i$ 或者全 $0)$ 最少需要的车数，要求所有车必须满载 (即不会拉 $i+1$ 站及之后的人)，如果不行则为 $+\infty$。答案就是 $f_{n+1,t,1}$
- 为了方便转移，我们类似的用一个 $g_{i,j,k}$ 表示在第 $j+0.5$ 时刻把 $1\dots i-1$ 全清空了的最少车数。
- 然后我们考虑转移。如果 $a_i+j\cdot b_i\le c_i$ 就可以从 $f_{i-1,j,k}$ 转移到 $f_{i,j,k}$，且只要 $f_{i-1,j,k}\ne\infty$ 就有 $g_{i,j,k}\leftarrow\lceil\frac{k\sum a_i+j\sum b_i}{K}\rceil$。
- 对于 $a_i+j\cdot b_i>c_i$ 或者 $f_{i-1,j,k}=\infty$ 的情况，我们可以枚举上次开始拉第 i 站人的时刻 t，然后在这个时刻我们还需要拉几车人，来让 i 站存活到 j 时刻，然后剩下的时间只用考虑前 $i-1$ 个站。g 的计算同样类似。

Number Discovery

- 构造一个序列：一开始为空，每次找出最小 k 个不在序列里的正整数 $a_1, \ldots, a_k$，把他们和 $\sum a_i$ 都加入序列末尾。
- 求 n 在序列里的位置。
- $k \le 10^6, n \le 10^{18}, T \le 10^5$

题解

- 容易证明按照 k^2+1 分段之后每一段只有恰好一个数是作为 $\sum a_i$ 被加进去的。
- 这样我们只需要求 x 所在段被这样加进去的是谁，就可以往前递归。
- 时间复杂度 $O(T\log n)$

Dreamoon Loves AA

- 有一个长度为 $n+1$ 的 AB 串，首尾为 A，除此之外还有 m 个 A，现在希望修改恰好 k 个 B 为 A，使得所有相邻 A 之间距离的极差最小。
- $n \le 10^{15}, m \le 400000, k < n - m$

题解

- 题意等价于，有 $m+1$ 个间隔 b_i，你可以拆分间隔恰好 k 次，最小化极差。
- 首先有一个显然的事情：拆分一定是尽量均匀，即拆成 $\lfloor \frac{b_i}{x} \rfloor, \lceil \frac{b_i}{x} \rceil$。
- 然后假设 $\min, \max$ 是 L, R，有两个条件（设 $K = m+k+1$ 为总段数）：
- $\sum \lceil \frac{b_i}{R} \rceil \le K \le \sum \lfloor \frac{b_i}{L} \rfloor, \exists x, \lceil \frac{b_i}{R} \rceil \le x \le \lfloor \frac{b_i}{L} \rfloor$
- 容易发现这两个条件是必要条件，加起来也是充分条件。
- 第一个条件可以二分出 L 的上界 L_0 和 R 的下界 R_0。第二个条件对于 L_0, R_0 不满足的情况只需要修改 L, R 之一。
- 问题转化为集合里 L_0, R_0，有一些 pair$(L, R)(L \le L_0 \le R_0 \le R)$ 从每个 pair 里选一个扔进集合最小化极差。
- 枚举最小值即可。

The End

Thanks!