1. CF1375H Set Merging (前置知识：分块)

题意:

- 给定长度为 n 的序列 a，最初有 n 个集合 $\{a_1\},\{a_2\},\ldots,\{a_{n-1}\},\{a_n\}$。
- 接下来给定 q 个询问，每次询问给出 l,r，你需要通过若干次操作制作出集合 $\{a_l,a_{l+1},\ldots,a_{r-1},a_r\}$。注意：操作过程中集合总数不能超过 $2.2\cdot 10^6$。
- 操作是指：你可以合并两个集合 A,B，但要满足 $\max\limits_{u\in A} u<\min\limits_{u\in B} u$。注意：合并后集合 A,B **依然存在。**

$n\le 2^{12},q\le 2^{16}$ 。

做法:

交换一下值域和下标，我们要解决的是，对一个序列只考虑值在 $[l,r]$ 的位置的信息，从左往右加起来的结果。且这个"信息"不满足交换律，只满足结合律。

分块，对每个块将其内部值离散化后尝试算出 $f_{l,r}$ 为：值在 $[l,r]$ 的信息加起来的结果。这个不难分治解决，有 $T(n)=2T(n/2)+\frac{n^2}{2}$ ，所以这一部分就是 $\frac{n}{B}*B^2=nB$ 的。每次询问把对应的信息加起来就好了，就是 $q*\frac{n}{B}=\frac{qn}{B}$ 的。取 $B=\sqrt{q}$ 即可平衡至 $n\sqrt{q}$ 。

1.1 P10540 [THUPC 2024 决赛] 古明地枣的袜子

题意:

你需要维护一个序列 $a_1,\ldots,a_n$ 。

给定一个操作序列 $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ ，操作 (x,y) 表示将 $a_1,\ldots,a_x$ 的值加上 y 。

共 m 次查询，每次查询给出 l,r ，问对初始值为 0 的序列 a 依次执行操作 $(x_l,y_l),\ldots,(x_r,y_r)$ ，最后 $\max\limits_{i=1}^{n} a_i$ 的值。

$n,m\le 5*10^5,TL=10s$ 。

做法:

TBD

2. qoj6304 Rectangle (前置知识：单侧递归线段树)

题意：

给定 n 个矩形，现在你需要选择三条不同的直线，使得每个矩形都被至少一条直线穿过。

每条直线表达式必须为 $x = a$ 或 $y = a$ ，且 $a \in Z \cap [1, 10^9]$ 。请计算方案数，对 998244353 取模。

多测， $\sum n \le 2 * 10^5, TL = 8s$ 。

做法：

只考虑一 x 两 y 的情况，其余都是对称或容易的。对 x 轴扫描线，那么问题变成：每次加入/删除一个线段，同时查询取两个点覆盖所有线段的方案数。

分析一下，不妨计算第一个点位置 $\le A = \min r$ ，第二个点 $\ge B = \max l$ 的方案数，若 $A \ge B$ 再减掉 $\binom{B-A+2}{2}$ 即可。

考虑第一个点的位置 x 对第二个点 y 的限制，对于一个线段 $[l, r]$ 我们已经让 $x \le r, y \ge l$ 了，所以只是当 $x < l$ 时会有 $y \le r$ 的限制。

考虑维护一个序列 b_x ，表示所有满足 $x = l - 1$ 的线段的 r 最小值，那么 x 处 y 就需要 $\ge B$ ， $\le b$ 的后缀 min 。不难通过线段树二分算出合法的 x 的区间。现在相当于是，设 c 是 b 的后缀 min 数组，要算 c 的区间和，这可以用单侧递归的技巧维护。当然这里只是方便陈述，实际上得先离散化下来，计算的时候就稍微有点区别。

复杂度 $O(n \log^2 n)$ 。

idea:分析若干线段的交的问题可以把它们的最大 l 最小 r 拉出来观察。

3. LOJ3666 「JOI 2022 Final」沙堡 2（前置知识：无）

题意：

从前有一个沙堡，沙堡可以使用一个 $H \times W$ 的二维矩形表示，其被划分成若干个 1×1 的小格子，格子高度互相不同。

JOI 君在沙堡上游走，他可以从任意一个点出发，向上下左右四个方向行走，必须满足他行走的路径单调下降。

出于一些原因，JOI 君想知道，在他所有可能的行走路径中，恰好覆盖了一个子矩形的路径数有多少条。

$HW \le 5 * 10^4$ ，TL=4s。

做法：

像这种数合法矩形/合法区域的问题，一个很好的思路是找到一些更易于统计的量来转化问题。

eg: P7295 通过欧拉定理把算联通块转化成了算点+区域-边。

回到这个题。先思考怎么 check 一个矩阵合法，就是对每个点，向与它相邻且比它大的点里最小的连一条边。如果刚好连成一条链就 win 了，但"连成一条链"这个东西是很难直接刻画的。但你发现根据连边方式这个肯定是一个内向森林，那只要有恰好一个点入度为 0，就一定是链了。

于是转而统计"恰好一个点入度为 0" 的子矩阵个数。那每个点的入点和什么有关系呢？其实只和以它为中心的 5*5 区域和子矩阵的交有关系！

剩下的部分就不难了，很容易设计出一个 $O(\min(n,m)nm)$ ，即 $O(N\sqrt{N})$ 的算法。

4 LOJ3494 「JOISC 2021 Day3」保镖（前置知识：凸包）

题意：

JOI 街是一条贯通东西的长街。我们将其抽象为一条数轴。

从现在起，将有 N 个贵宾（VIP）来到 JOI 街并大逛特逛。VIP 们以 1 到 N 编号。VIP i $(1 \le i \le N)$ 将会在时刻 T_i 从坐标 A_i 前往坐标 B_i。其速度是每单位时间 1 单位长度。
如果 $A_i < B_i$，VIP i 将会以不变的速度在正方向上移动。类似地，如果 $A_i > B_i$，VIP i 将会以不变的速度在负方向上移动。

一个保镖的工作是在 JOI 街上巡逻并保护 VIP 们。为了保护一个 VIP，很有必要和 TA 一起逛一会街，同时保护 TA。当然，允许保镖在他们逛街逛到一半时才开始保护，或在他们逛街结束前就停止保护。开始和停止保护的时刻**不必为一个整数**。
特别地，尽管可能有多个 VIP 在同一坐标，保镖也最多只能保护一个 VIP。

保镖可以在 JOI 街上以每单位时间最多 1 单位长度的速度随意走动。在他们停止保护一个 VIP 之后，可以去到另一个地方再开始保护另一个 VIP。如果一个保镖和 VIP i 一起逛街，那么 VIP 将会对他们一起走过的距离的每单位长度给保镖 C_i 元小费。这里保证 C_i 是偶整数。

作为一个安保公司的员工，您正在计划 Q 份保护 VIP 的方案。这些方案以 1 到 Q 编号。对于方案 j $(1 \le j \le Q)$，一个保镖在时刻 P_j 时从坐标 X_j 开始工作。您的任务是分别最大化每个方案中的保镖能够得到的总小费。

请您编写一个程序对于给定的 VIP 和保镖的信息，计算每一个方案中保镖的最大总小费。

在此题的限制下，可以证明答案一定是个整数。

$n \le 2800$ ，$q \le 3 * 10^6$,TL=25s

做法：

考虑把 (x,t) 转化成 $(t+x,t-x)$ ，则每个保镖相当于从某个起点开始向上/向右走，然后有一个网格图，每个边有边权 w ，如果在上面走 t 步权值就会加 wt ，要得到尽量大的权值。

可以发现走的策略一定是向上走若干步，到某条横线上再往右走到第一个格点 or 先向上再向右，走到这个格点之后就只会沿着网格的边走了，那设 $dp_{i,j}$ 是从 i 行 j 列的点出发得到的最大权值。设 X,Y 是从这个点往上的第一行和往右的第一列，以第一种走法为例，大概是 $\max\limits_{i \ge X} dp_{i,Y} + w_{i,Y}(v_Y - y)$ 的形式。枚举 Y ，从 n 到 1 枚举 X ，那每次会从凸包里加入 $(-w_{X,Y}, dp_{X,Y} + w_{X,Y} v_Y)$ 这个点，你发现由于 dp 数组是有单调性的，我们用栈维护凸包，每次加入点时可以直接把横坐标更大的点弹掉。然后查询时在凸包上二分即可。

5. qoj4094 히스토그램 (前置知识：笛卡尔树，凸包，闵可夫斯基和)

题意：给定一个柱状图，由 n 个底为 1 的矩形并排而成，第 i 个矩形高为 h_i 。你需要取至多 K 个不交的矩形，使得其面积和最大，且每个矩形都被包含在柱状图内。

$n \le 5*10^5, K \le 3$ 。

做法：

先建出笛卡尔树，约定 $[l_x, r_x]$ 是 x 代表的区间，$k_x = r_x - l_x + 1, b_x = k_x h_x$ 。

先看 $k=2$ ，对于取的每个矩形，取关键点为 $[xl, xr]$ 中 h 最小的那个。考察这两个点的位置关系，如果不是祖孙的话，直接把 b_x 加起来就好了；否则枚举祖先，需要查它子树内 $b_x - h_f k_x$ 的最大值。排成 dfn 序，使用线段树，在每个节点建立 $[l,r]$ 构成的凸包，这样复杂度是 $O(n\log n)$。然后考虑 $k=3$ ，仍然是分类讨论，发现最难的情况是一个点 z 子树内有两点 x, y 且 x, y 没有祖孙关系，贡献为 $(b_x + b_y) + b_z - h_z(k_x + k_y)$ 。直接做是非常困难的，我们尝试以式子为核心，放宽对点的位置关系的限制，你发现 x 对 z ，y 对 z 的影响都是达到了上限的，所以我们可以把 z 放宽到任意位置，不影响答案！现在只需要 x, y 不是祖先关系。求出 p_a 代表 $k_x + k_y = a$ 的合法点对中 $h_x + h_y$ 的最大值即可。不妨设 $r_x < l_y$ ，我们把 $[r_x + 1, n]$ 用线段树拆成 $O(\log n)$ 段，把 (k_x, b_x) 这个点放进每一段代表的节点；再把 (k_y, b_y) 丢进 l_y 代表的节点到根的所有节点。

最后在每个节点上对两种点做闵可夫斯基和即可，因为不在上凸包上的 $(k_x + k_y, b_x + b_y)$ 都是用不到的！这里 p_x 不一定全部正确，但答案肯定是正确的，因为最后也只需保留 (x, p_x) 的上凸壳。复杂度 $O(n\log n)$ 。

idea: 不影响答案时放宽限制的技巧。

6. gym103428C Assign or Multiply（前置知识：离散对数，哈希，树状数组）

题意：

给定 p, n 。初始有变量 $x = 1$ 。

有 n 次操作，每次操作给出两个数 $op, z(0 \le z < p)$ 。如果 $op = 1$ 则 $x := z$ ，否则 $x := xz \bmod p$ 。

你可以重排操作的顺序。你想知道：有多少数 i 满足 $0 \le i < p$ 且 i 不能成为 x 的最终值？

$p \le 2 * 10^5, n \le 10^6$ 。

做法：

先求出 p 的原根，转化成一个模意义下的 01 背包问题。

每次加入一个物品，需要找到所有 $dp_x = 1$ 和 $dp_{(x+a) \bmod p} = 0$ 的位置。直接找是困难的，但我们注意到，$dp_x = 0$ 且 $dp_{(x+a) \bmod p} = 1$ 的位置数量是相等的！理由是 $(x, (x+a) \bmod p)$ 形成了若干个环，每个环上 01 个数和 10 个数一定相同。

于是把 dp 复制两份，找出 $[0, p)$ 和 $[a, p+a)$ 中所有不相同的位置即可。BIT 维护哈希数组，每次二分算 lcp 即可，复杂度 $O(n \log^2 n)$ 。

idea： 我很喜欢的一个题。处理动态的串基本只能哈希，视情况用 ds 来维护这个哈希值。

7. qoj7980 **区间切割**（前置知识：线段树二分）

题意：

有 n 个区间 $[L_i, R_i]$，然后有 m 次切割操作，每次操作由三元组 (x, l, r) 描述，对 $i \in [l, r]$ 进行如下操作：

- 如果 $x \notin [L_i, R_i]$，什么都不做。
- 否则区间 i 将被切割为 $[L_i, x]$ 和 $[x, R_i]$ 两段，用较长的一段作为新的区间 i，如果长度相等选择 $[L_i, x]$。

求出每个区间在所有操作后的左右端点。为了简化问题，保证所有 x 构成 $1 \sim m$ 的排列。

$n \le 10^5, m \le 10^6, 1 \le l_i < r_i \le m$ 。

做法：

先扫描线一下，就是把每一刀转成在 l 处加入，$r+1$ 处删除。

怎么快速的把这个线段最后的样子找出来呢？有效的刀似乎是很多的啊。

神来之笔：考虑取线段的三等分点 m_1, m_2 ，那如果有一刀劈在 $[m_1, m_2]$ 就会导致线段长度至少变成原来的 $\frac{2}{3}$！而 $< m_1$ 的刀只会影响 l ，$> m_2$ 的刀只会影响 r 。

那考虑找到 $[m_1, m_2]$ 中最先的刀，这是可以用线段树维护的，相当于是维护序列 b_x 表示 x 这一刀劈的时间，如果没这一刀就设成 INF。求区间 min 即可。我们设这个时间是 t 。

再考虑怎么算新的 l 和 r ，算 l 为例，就是找 $x < ml$ 的点中最大的满足 $b_x < t$ 的位置，线段树二分即可。复杂度 $O(n \log n \log m)$ 。

idea: 可以根据题目的性质，把操作分成容易维护的操作和出现次数不多的复杂操作，以降低复杂度

8. **LOJ571 Misaka Network 与 Accelerator**（前置知识：边分治,2-SAT）

题意：

从前有一棵 n 个点的树。你需要构造序列 x_i 满足 $x_i \in \{0,1\}$ ，且满足 m 个限制条件。

每个条件给出 a, type：

如果 $x_a = [\mathrm{type}/2]$，则任何距离 a 在 $[L,R]$ 之间的点 b 都满足 $x_b = \mathrm{type} \bmod 2$ 。

其中 L,R 是固定的，在一开始给出。

判断是否有合法解。

做法：

显然可以先边分治然后线段树优化建图跑 2-SAT，可以做到 $O(n\log^2 n)$ 。

但事实上，考虑边分治后我们要干的是一个点往一个区间连边，而根据题意，这个区间的长度是固定的。设 $p=R-L+1$ ，我们按 p 分块后，然后每次连边就是对一个块的后缀和另一个块的前缀连边。于是前缀优化建图即可，复杂度 $O(n\log n)$ 。

idea: 当操作的区间长度是一个固定的值 K ，可以让序列对 K 分块

9. ucup2.9H Quake and Rebuild(前置知识：分块)

题意：

有一棵 n 个点的以 1 为根的树。第 i 个点的父亲是 $fa_i(1 \le fa_i < i)$ 。

现在有 q 次操作，每次可以修改/查询。

修改：给定 l, r, z ，对 $l \le i \le r$ ，令 $fa_i := \max(1, fa_i - z)$ 。

查询：给出一个点集，求其虚树大小。

$n, q \le 2 * 10^5, TL = 3s$ 。

做法：

分块维护，对每个点记录 f_x, g_x 表示往上第一次跳到块外前跳到了哪个点，以及对应的步数。考虑修改，发现有效的整块修改只有 $O(n)$ 次，因为每个块进行 $O(\sqrt{n})$ 次修改后都会导致：所有点直接指向块外，即 $f_x = x$。散块直接改就好了。而真正的 fa_x 就打 tag 修改即可。

考虑查询，分成两部分：查 lca ，以及多少个点子树内存在关键点。

对于第一部分，就利用维护的 f_x 随便跳，直到在同一个块且 $f_x = f_y$ ，再在块内小跳即可。

对于第二部分，考虑从大往小扫每个块，并让关键点往上跳，跳到一起了就合并。

对于当前块，如果存在一对关键点满足 $f_x = f_y$ ，则我们直接暴力数块内的合法点，原因是此时至少有一对关键点合并了，总合并次数是 $O(\sum |S|)$ 的。

否则的话，直接用 g_x 算就好了。

idea: “弹飞绵羊” 类的分块题。

10. gym104065B Call Me Call Me（前置知识：分块，线段树，重构思想）

题意：

有一个人举办了派对。他有 n 个朋友，第 i 个朋友表示：如果编号在 $[l_i, r_i]$ 的朋友中有至少 k_i 个人要来，那他也要来。请问最后有多少朋友要来？

$n \leq 4 * 10^5$,TL=15s。

做法：

一个直接的做法是 KDT，但这太丑陋了。考虑 KDT 的复杂度是 $O(n\sqrt{n})$ ，我们尝试设计其他根号算法。

首先有一个直接的暴力做法，就是把每个区间插到线段树的 $O(\log n)$ 个节点上，每次删除掉 x 的时候，考虑包含 x 的所有节点，把放在该节点上的区间的权值全部进行更新。

尝试设立阈值 B ，让每个区间还需要的权值 $\leq B$ 时才插入线段树中。一个区间一满足条件就插入是难以做到的，但只要让插入时权值还 > 0 就好了。考虑删 B 个数只会让权值减少至多 B ，我们只需每次在删掉的数个数恰好为 B 的倍数时尝试加入，因为本来权值 $> B$ 的区间此时权值一定还 > 0 。

每个区间的权值只会进行至多 B 次更新，被尝试加入至多 $\frac{n}{B}$ 次，所以复杂度 $O(n(B + \frac{n}{B}))$ ，平衡一下就是 $O(n\sqrt{n})$ 的了。

idea: 我很喜欢的一个题，有另一个警报器叫折半警报器，而这个题的 trick 可以叫根号警报器。

同时，这个题也存在基于折半警报器的 $O(n \log^2 n)$ 做法，不过要更麻烦。