线性规划与网络流

Larunatrecy

目录

线性规划问题

线性规划问题（Linear Programming，简称 LP）指的是约束条件和目标函数均为线性的规划问题。
对于一组变量 $x_1 \sim x_n$，如果所有的约束均形如 $\sum A_{j,i}x_i \le b_j$（或 $=, \ge$），并且目标函数形如最小化（或最大化）$\sum c_i x_i$，我们就称这是一组线性规划。
实数型线性规划问题存在多项式算法，但实际应用中更常使用的是单纯形算法（均与本次主题无关）。
整数型线性规划问题是 NP-Hard 的，方便起见本文略去对整数性的探讨，在绝大多数题目中也是不重要的。

标准型

我们称如下的线性规划形式为标准型：

$$\max \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{2}$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \tag{3}$$

其中 $\mathbf{x}$ 为长度为 n 的向量来表示变量，$\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 的矩阵表示每一个约束的系数，$\mathbf{b}$ 为长度为 m 的向量表示每个约束的常数，$\mathbf{c}$ 为长度为 n 的向量表示目标函数中变量的系数。

标准型

所有线性规划均可化为标准型。

- 如果某个约束是 $\geq$，可以同乘 -1 化为 $\leq$。
- 如果某个变量 x 的取值是 $\geq -a$，那么用 $x+a$ 取代替 x。
- 如果某个变量 x 的取值没有约束，可以引入两个新变量 $x', x'' \geq 0$，用 $x' - x''$ 代替 x。

线性规划对偶

考虑如下的线性规划问题

$$\min \mathbf{b}^T\mathbf{y} \tag{4}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{c} \tag{5}$$

$$\mathbf{y} \geq 0 \tag{6}$$

该问题称为上述标准型的 **对偶问题**。

引理 (弱对偶定理)

若 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 分别是原问题和对偶问题的一组可行解，则 $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$

引理 (强对偶定理)

若 $\mathbf{x}$ 是原问题的最优解，则对偶问题也存在最优解 $\mathbf{y}$，且满足 $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$

线性规划对偶

对偶问题的性质：

- 对称性：对偶问题的对偶是本身。
- 最优性：$\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 分别是原问题和对偶问题的一组可行解，且 $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \le \mathbf{b}^T\mathbf{y}$，则 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ 就是最优解。
- 无界性：若原问题无有解最优解，那么对偶问题无可行解，反过来也成立。

最大流

最大流的线性规划描述如下：

$$\max f_{t,s} \tag{7}$$

$$\forall (u,v) \in E, 0 \le f_{u,v} \le c_{u,v} \tag{8}$$

$$\forall i, \sum_{(u,i)\in E} f_{u,i} - \sum_{(i,v)\in E} f_{i,v} = 0 \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

其中 (u,v) 表示一条边，$f_{u,v}$ 代表流量，$c_{u,v}$ 是流量限制。
对于要求某个式子恰好等于某个数的约束，直接拆成两个对偶后会在所有式子里会呈现 $y_1 - y_2$ 的形式，这时可以用 $y' = y_1 - y_2$ 来代替，不同的是此时的 y' 是可以取遍 R 的。

最大流

我们设 $f_{u,v} \le c_{u,v}$ 的对偶变量是 $d_{u,v}$，
$\sum_{(u,i)\in E} f_{u,i} - \sum_{(i,v)\in E} f_{i,v} = 0$ 的对偶变量是 p_i（取值任意），其对偶形式为

$$\min \sum_{(u,v)\in E} d_{u,v} c_{u,v} \tag{11}$$

$$\forall (u,v) \in E, d_{u,v} + p_v - p_u \ge 0 \tag{12}$$

$$p_s - p_t \ge 1 \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

通过平移使得 $p_t = 0$，此时可以说明一定存在一组最优解使得 $p_i, d_{u,v} \in \{0,1\}$，此时如果用 d_u 描述是否与 S 连通，$d_{u,v}$ 表示这条边是否割掉，则该式的组合意义与最小割相同，也就是最大流-最小割定理。

最小费用流

最小费用流：

$$\min \sum_{(u,v)\in E} f_{u,v}w_{u,v} \tag{15}$$

$$\forall (u,v)\in E, -f_{u,v} \ge -c_{u,v} \tag{16}$$

$$\forall i, \sum_{(u,i)\in E} f_{u,i} - \sum_{(i,v)\in E} f_{i,v} = b_i \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

其中 (u,v) 表示一条边，$f_{u,v}$ 代表流量，$w_{u,v}$ 代表费用,$c_{u,v}$ 是流量限制，b_i 代表某个点需要从源点/汇点额外连的边的流量。

最小费用流

还是用 $d_{u,v}, p_i$ 分别表示两个条件的对偶，可以得到：

$$\max \sum_{(u,v)\in E} -d_{u,v}c_{u,v} + \sum_{i\in V} b_i p_i \tag{19}$$

$$\forall(u,v) \in E, -d_{u,v} + p_v - p_u \leq w_{u,v} \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

其中 (u,v) 表示一条边，$f_{u,v}$ 代表流量，$w_{u,v}$ 代表费用,$c_{u,v}$ 是流量限制，b_i 代表某个点需要从源点/汇点额外连的边的流量。

最小费用流

注意到 c 为正数，$d_{u,v}$ 越小越好，那么 $d_{u,v} = \max(0, p_v - p_u - w_{u,v})$，整理一下可以得到

$$\max \sum_{(u,v)\in E} -\max(0, p_v - p_u - w_{u,v})c_{u,v} + \sum_{i\in V} b_i p_i \tag{22}$$

令 $b_i = -b_i$，同时取反可以得到：

$$\min \sum_{(u,v)\in E} \max(0, p_v - p_u - w_{u,v})c_{u,v} + \sum_{i\in V} b_i p_i \tag{23}$$

那么反过来，如果我们得到了形如这样的式子，就可以再对偶回去得到一个可以费用流的式子。

1. 线性规划问题与对偶原理
2. 常见对偶模型与例题
   - 常见对偶模型
   - 例题
3. 其他网络流杂题

[ZJOI2013] 防守战线

题目描述

战线可以看作一个长度为 n 的序列，现在需要在这个序列上建塔来防守敌兵，在序列第 i 号位置上建一座塔有 C_i 的花费，且一个位置可以建任意多的塔，费用累加计算。有 m 个区间 $[L_1, R_1], [L_2, R_2], \cdots, [L_m, R_m]$，在第 i 个区间的范围内要建至少 D_i 座塔。求最少花费。
对于 100% 的数据，$n \le 1000$，$m \le 10000$，$1 \le L_i \le R_i \le n$，其余数据均 ≤ 10000。

[ZJOI2013] 防守战线

设 p_i 表示前 i 个位置放置了多少个塔，那么限制即

$$p_i - p_{i-1} \geq 0 \tag{24}$$

$$p_{R_i} - p_{L_i - 1} \geq D_i \tag{25}$$

我们可以向最优化式子里加入 $\infty \max(0, p_{i-1} - p_i)$ 来实现 $p_i - p_{i-1} \geq 0$，第二个是类似的，那么此时就转化为了上面的标准形式：

$$\sum_i \infty \max(0, p_{i-1} - p_i) + \sum_i \infty \max(0, p_{L_i - 1} - p_{R_i}) + \sum_i (C_i - C_{i+1}) p_i$$

可以费用流解决。

「2022 集训队互测」卑鄙的下毒人

题目描述

有一个长度为 n 的全 0 序列 c_i 和 m 个区间 l_i, r_i，每次可以花费 k 的代价让 c_i 加一，操作完后你还需要花费 $\max(0, a_i - \sum_{j=l_i}^{r_i} c_j)$ 的代价，问总代价的最小值。

$n, m \le 5 \times 10^5, k \le 5$。

「2022 集训队互测」卑鄙的下毒人

和上一个题差不多，设 p 为前缀和，那么要最小化 $\sum_i \infty \max(0, p_{i-1} - p_i) + k(p_n - p_0) + \sum_i \max(0, p_{l_i - 1} - p_{r_i} - (-a_i))$ 由于这模型中从源点连出来的边的流量上界为 k 所以最多流 k 次，并且最初的图是一个 DAG 可以直接拓扑，使用原始对偶求解即可。

「2021 集训队互测」机器

题目描述

给定一个图，有一个源点和 n 个中间点，从源点向点 i 连了 p_i 条边，第 j 条边容量为 1，费用为 $-a_{i,j}$；从点 i 向源点连了 q_i 条边，第 j 条边容量为费用为 $-b_{i,j}$; 还有 m 条边，从每个 u_i 向 v_i 连容量为 ∞，费用为 $h_{u_i} - h_{v_i}$ 的边，求该图的最大费用循环流。$n, p_i, q_i \leq 2000, m \leq 2 \times 10^4$。

「2021 集训队互测」机器

这次是给了费用流，我们直接对偶可以得到：

$$\min \sum \infty \max(0, p_{u_i} - p_{v_i} + h_{u_i} - h_{v_i}) \tag{26}$$

$$+ \sum_i \sum_j \max(0, p_S - p_i - a_{i,j}) + \max(0, p_i - p_S - b_{i,j}) \tag{27}$$

认为 $p_S = 0$，后式可以看成一个关于 p_i 的函数 $f_i(p_i)$，而前式相当于要求

$$p_{u_i} - p_{v_i} + h_{u_i} - h_{v_i} \le 0 \tag{28}$$

$$p_{u_i} + h_{u_i} \le p_{v_i} + h_{v_i} \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

「2021 集训队互测」机器

定义 $p_i' = p_i + h_i$，则原问题变成了一个广义的保序回归问题，可以通过一些证明说明变量均取到整数且满足如下性质：

- 如果要求所有数均区在 $\{a,b\}(a,b)$，且最优解中没有位于 (a,b) 内的数，此时的最优解是 $p^\star$，那么存在一组最优解 p 使得 $p^\star$ 是 p 向 (a,b) 取整的结果。

那么做整体二分，每次求出仅考虑 $\{mid, mid+1\}$ 时的最优解，这个就是一个最小权闭合子图，然后把两部分递归即可。

CF1765J Hero to Zero

题目描述

给定两个长度为 n 的非负整数数组 a 和 b。考虑一个 $n \times n$ 的矩阵 $c_{i,j} = |a_i - b_j|$ $(i \in [1,n], j \in [1,n])$，你的任务是以最少的分数将矩阵 $c_{i,j}$ 变成一个零矩阵，即矩阵中的每个元素都是 0 。你的初始分数是 0 。

你可以对矩阵 c 进行以下操作：

- 将第 i 行的所有元素 -1，你的分数 +1；
- 将第 j 行的所有元素 -1，你的分数 +1；
- 将第 i 行第 j 列的元素 $c_{i,j}$ -1，你的分数 +1；
- 将第 i 行的所有元素 +1，你的分数 -1；
- 将第 j 行的所有元素 +1，你的分数 -1；

输出你获得的最小分数。

$2 \le n \le 2 \cdot 10^5$，$0 \le a_i, b_j \le 10^8$。

CF1765J Hero to Zero

设 p_i, q_j 分别表示第 i 行，第 j 列被减掉的数量，那么

$$\sum p_i + \sum q_j + \sum (c_{i,j} - p_i - q_j) = \sum c_{i,j} - (n-1)(\sum p_i + \sum q_j)$$

前面是常数，后面我们列出线性规划式子形如：

$$\max \sum p_i + \sum q_j \tag{31}$$

$$p_i + q_j \le c_{i,j} \tag{32}$$

注意这里的 p_i, q_i 是无限制范围的变量，对偶后会得到等式。

CF1765J Hero to Zero

对偶之后的式子形如：

$$\min \sum_{i,j} c_{i,j} x_{i,j} \tag{33}$$

$$\forall i, \sum_{j} x_{i,j} = 1 \tag{34}$$

$$\forall j, \sum_{i} x_{i,j} = 1 \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

这就是一个最小权完美匹配的模型。
因为 $c_{i,j} = |a_i - b_j|$，这个显然排序后对位匹配即可。

[World Tour Finals 2022]Welcome to Tokyo!

题目描述

有一个长度为 n 的数轴和 m 个区间 $[l_i, r_i]$，可以标记最多 k 个位置，求最多能使多少个区间覆盖了至少一个标记。

对于 $k = 1 \dots n$ 求解。

$1 \le n, m \le 10^6$。

[World Tour Finals 2022]Welcome to Tokyo!

设变量 x_i 表示是否有覆盖了位置 i 的标记，但是很难直接在线性规划的优化目标里表示至少一个的区间数量，所以我们引入变量 $y_i = \min(\sum_{j=l_i}^{r_i} x_j, 1) \Rightarrow y_i \le 1 \wedge y_i \le \sum_{j=l_i}^{r_i} x_j$

那么可以用线性规划描述为：

$$\max \sum y_i \tag{37}$$

$$\sum x_i \le k \tag{38}$$

$$y_i \le 1 \tag{39}$$

$$y_i - \sum_{j=l_i}^{r_i} x_j \le 0 \tag{40}$$

在最优情况下 $x_i, y_i \in \{0, 1\}$。

[World Tour Finals 2022]Welcome to Tokyo!

对偶后可以得到：D, p_i, q_i

$$\min k \times C + \sum p_i \tag{41}$$

$$\forall i, C - \sum_j [l_j \le i \le r_j] q_j \ge 0 \tag{42}$$

$$\forall i, p_i + q_i \ge 1 \tag{43}$$

最优情况下 $p_i = 1 - q_i, q_i \in \{0, 1\}$，故整理得：

$$\min k \times C + \sum (1 - q_i) \tag{44}$$

$$\forall i, C \ge \sum_j [l_j \le i \le r_j] q_j \tag{45}$$

可以看成是每个区间可以选择或不选，我们对于每个 C 都求出在任意位置被覆盖次数都 $\le C$ 的情况下，最多选择多少个区间，记为 $f(C)$，然后变成若干条直线，单点求最值，可以斜率优化或者李超树。

[World Tour Finals 2022]Welcome to Tokyo!

考虑怎么求 $f(C)$，对于一个固定的 C，这是一个经典问题，每次选择右端点最小的合法区间加入即可，这也可以告诉我们 $C=i$ 的最优方案是 $C=i+1$ 的最优方案的子集，可以增量维护。

用线段树维护左端点在某个范围内的区间的右端点的最小值即可，复杂度 $O((n+m)\log n)$。

1 线性规划问题与对偶原理

2 常见对偶模型与例题
- 常见对偶模型
- 例题

3 其他网络流杂题

[ARC107F] Sum of Abs

题目描述

N 个点 M 条边的无向图，每个点有两个权值 A_i 和 B_i。可以用 A_i 的代价删除第 i 个节点。并删除与这个点相连的边。一个极大连通块的权值定义为 B_i 的权值和的绝对值。
删除一些节点后，收益定义为所有极大连通块权值之和减去代价和。求最大的可能收益。
$n, m \leq 300$。

[ARC107F] Sum of Abs

经典的有 $|x| = \max(x, -x)$，即我们可以给每个连通块设置一个同符号，然后求最大值。

不妨假设所有点都被删除了，那么可以花费 $A_i + B_i$ 把 i 恢复成一个正点，花费 $A_i - B_i$ 恢复成一个负点，不妨把一个点 i 拆成两个 i^+, i^-。

那么现在就是 i^+, i^- 不能同时选，如果 i, j 有边那么 i^+, j^- 和 i^-, j^+ 不能同时选，求最大权独立集。

这是一个二分图，最小割即可。

[ARC122F] Domination

题目描述

给定 n 个红点和 m 个蓝点，要求移动蓝点，使每个红点的右上方都至少有 k 个蓝点。将位于 (x_1, y_1) 的蓝点，移动到 (x_2, y_2) 的代价为 $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 。求最小代价。

$1 \leq n, m \leq 10^5, k \leq 10$

[ARC122F] Domination

首先一个红点如果右上方还有红点，那么它就没用，把这些都删掉之后红点横坐标递增，纵坐标递减，此时每个蓝点可以覆盖的就是一段区间。

注意到一个点覆盖两个区间 $[l_1, r_1], [l_2, r_2]$ 的代价和不小于覆盖 $[l_1, r_2]$ 的，因此不妨认为一个点可以被多次使用，这不影响答案。考虑一个 dp，设 f_i 为覆盖前 i 个红色点且最后一个区间右端点为 i 的最小花费，转移时枚举左端点 j，以及选取的石头 k，转移为 $f_i = f_{j-1} + \max(x_i - x_k, 0) + \max(y_j - y_k, 0)$ 。

[ARC122F] Domination

考虑把每个石头拆成两个点，分别代表其 x 坐标和 y 坐标，然后分别从小到大排序。对于 x 坐标拆成的点，从排序后第 i 个连向 $i+1$，代价为 $x_{i+1}-x_i$，再连反向边，代价为 0 . 对于 y 坐标拆成的点，从排序后第 i 个连向 $i-1$，代价为 y_i-y_{i-1}，再连反向边，代价为 0 . 对于每个蓝点，从对应 y 点向 x 点连 0 边。那么从 y_j 到 x_i 的最短路就是，$\max(x_i-x_k,0)+\max(y_j-y_k,0)$ 。在此基础上连边 x_i, y_{i+1}，那么从 y_1 到 x_n 的最短路就是答案。

[ARC122F] Domination

对于 k 任意的情况，等价于找出 k 条路径覆盖就行了，在上图基础上限制蓝点的边流量为 1，其余边流量为 inf，求流量为 k 的最小费用最大流就可以了。

k 很小，用原始对偶求费用流即可。

[UTPC2024] Edge Coloring Problem

题目描述

给定一个 n 个点的 $n-3$ 正则图，求最小边染色数与一组方案。

$n \leq 300$

[UTPC2024] Edge Coloring Problem

考虑偶数的情况，此时答案的界是 $n-3$。
考虑补图中每个点的度数都是 2，即若干个环。不妨假设每个环都有偶数个点，此时补图可以被二染色，即是二分图。
设 $n=2k$，则二分图左右各有 k 个点，原图中的边形如：左右分别是一个 k 阶完全图，中间是一个 $k-2$ 阶正则二分图。
如果 k 也是偶数，我们可以在左右的二分图中分别构造 $k-1$ 组完美匹配。这里如何把一个完全图划分成若干完美匹配是 naive 的。
而中间的 $k-2$ 阶正则二分图也可以被划分成 $k-2$ 组完美匹配，这个证明考虑根据 Hall 定理一定存在完美匹配，求出任意一组删掉后还是正则二分图，归纳即可。
因此图可以被划分成 $k-1+(k-2)=n-3$ 组完美匹配，每组匹配内染色即可。

[UTPC2024] Edge Coloring Problem

如果 k 是奇数，我们可以把这个完全图划分成 k 组，每组是一个大小为 $(k-1)/2$ 的匹配和一个单点，并且总是可以让这 k 个单点互不相同。

同上中间的正则二分图可以找到 $k-2$ 组完美匹配，我们从中拿出一组，对于每条匹配边都可以匹配左右两个单点，这样就可以得到 $k+(k-2-1)=n-3$ 组完美匹配。

如果环长不都是偶数，假设有 c 个环的大小是奇数，c 一定是偶数。我们可以对每个环执行恰当的染色使得左右两个完全图各缺少了 c 条边。

那么我们将这 $2c$ 条边左右配对，不妨设 $(l_x,l_y),(r_x,r_y)$ 在一组，那么 l_x,l_y 和 r_x,r_y 一定不在一个环上，那么中间的四条边一定都存在。我们断掉 $(l_x,r_x),(l_y,r_y)$，连上 $(l_x,l_y),(r_x,r_y)$，然后假如这两条边在同一组完美匹配里出现了，我们直接把 $(l_x,l_y),(r_x,r_y)$ 断掉，连上 $(l_x,r_x),(l_y,r_y)$ 即可。

[UTPC2024] Edge Coloring Problem

最后是 n 是奇数的情况，因为每种颜色的边最多有 $\frac{n-1}{2}$ 条，那么至少要有 $n-2$ 种颜色，这个也是好取到的。

我们随便找一条不存在的边 (x, y)，连上这条边，然后新建一个 $n+1$，从 $n+1$ 向所有除了 x, y 外的点连边，这样变成了一个规模为 $n+1$，每个点度数为 $n-2$ 的偶数正则图，求出一组大小为 $n-2$ 的边染色后把与 $n+1$ 连的删掉即可。

Thanks!