Solution

Larunatrecy

目录

A. 崩坏世界的歌姬 (collapse)

题目大意

计算有多少长度为 n 的排列，满足不存在相邻两个数的和是 m 或 $m+1$。

$1 \le m \le 10^7, 1 \le n \le 10^9$。

吐槽环节

$n, m \leq 10$

阶乘枚举然后 check。
期望得分：10。

$n, m \le 20$/

直接状压，复杂度 $O(2^n n^2)$
期望得分：20。

$n \leq 10^7, m \leq 3000$

考虑如果两个数和是 m 或 $m+1$ 就连一条边，会形成一条长度为 m 的链，链上相邻的元素排列里不能相邻。

容斥，钦定若干链上的相邻元素在排列里相邻，这样会形成若干条链，我们可以将所有链以及剩下 $n-m$ 个元素任意排列，注意如果某条划分出来的链长 >1 那么是有两种放置方式的。。

设 $dp_{i,j}$ 表示链上前 i 个元素，划分成 j 条链的方案数，转移形如：

$$dp_{i,j} = dp_{i-1,j-1} + 2\sum_{l=2}^{i} dp_{i-l,j-1}$$

最后的答案是 $\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}(n-m+i)!$

复杂度 $O(m^3)$ 期望得分：40。

前缀和优化后是 $O(m^2)$，期望得分：60 分。

$n \le 10^9, m \le 3000$

分块打表求阶乘，期望得分 80 分。

$n \le 10^9, m \le 10^5$

一条链的生成函数 $F(x) = x + \sum_{n\ge 2} 2x^n = 2(\frac{1}{1-x} - 1) - x = \frac{x+x^2}{1-x}$

$$
\begin{aligned}
ans &= \sum_{i=1}^{m} [x^m] (\frac{x+x^2}{1-x})^i (i+n-m)!(-1)^{m-i} && (1)\\
&= \sum_{i=1}^{m} [x^m] x^i (\frac{2}{1-x} - 1)^i (i+n-m)!(-1)^{m-i} && (2)\\
&= \sum_{i=1}^{m} [x^{m-i}] \sum_{j=0} \binom{i}{j} 2^j (1-x)^{-j} (-1)^{i-j} (i+n-m)!(-1)^{m-i} && (3)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0} \binom{i}{j} 2^j \binom{j+m-i-1}{m-i} (-1)^{i-j} (i+n-m)!(-1)^{m-i} && (4)
\end{aligned}
$$

可以卷积在 $O(m \log m)$ 时间内求出，期望得分 90 分。

$n \leq 10^9, m \leq 10^7$

设 $F = \frac{x+x^2}{1-x}, G = \sum_{i=1}^{m}(i+n-m)!(-1)^{m-i}x^i$，那么答案就是 $[x^m]G(F(x))$。

G 是一个幂函数的累加，故是微分有限的，F 是短分式幂 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，故 F 是代数幂级数，所以 G 复合 F 也是微分有限的，故可以整式递推，且递推阶数是 $O(\max\{\deg P, \deg Q\})$ 级别的，通过较为繁杂的计算可以手动解出递推式。当然也可以消元、爆搜等方式解出递推式，设 $d = n - m$ 是一个常数，最后的递推式是

$ans_m = ans_{m-1}(m+c+1) - ans_{m-2}(m+3d-2) + ans_{m-3}(5-m+d) + ans_{m-4}(m+d-3)$

复杂度 $O(m)$，期望得分 100。

1. A. 崩坏世界的歌姬 (collapse)
2. B. 色彩褪去之后 (color)
3. C. 每个人的结局 (ending)

B. 色彩褪去之后 (color)

题目大意

给定一个 $n \times m$ 的循环网格，左右边界是连着的，上下边界是连着的，你可以给每个格子染上 R,B,G 中的一种颜色，要求每种颜色连通，且 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 分别是 R,B,G，且三种颜色的格子个数分别是 c_1, c_2, c_3。

吐槽环节

这题比较魔怔。
解空间也比较大，所以可能有各种乱搞都能过。

正解

不妨设 $c_1 \le c_2 \le c_3$。
只要求两个连通的情况下是一个经典问题，可以用双极定向解决。
那么我们的核心想法就是尽可能保证 $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 点双连通。
而网格图上的性质是比较好的，我们从 R 对应的颜色的格子开始，每次贪心的选择一个格子扩展，这里可以按照距离 G, B 的距离的较小值排序。并且我们人为规定优先拓展那些形状是“角”（即有两个相邻的被用过的格子）的格子，这样拓展就会呈现一行一行或者一列一列的形状，当然为了保证连通我们可以预先预留一些格子不被拓展。这样的拓展方式性质是比较好的，基本不会出现一些不点双连通的情况。
进一步的，我们因为保证了 c_1 是最小的，所以如果出现了不点双连通的情况，那么剩下的格子数量一定是 $O(n+m)$ 的，通过大量平凡的分类讨论可以说明正确性。
拓展完了之后使用双极定向求解即可，但是可想而知 corner case 比较多，复杂度 $O(\sum nm)$。

1. A. 崩坏世界的歌姬 (collapse)
2. B. 色彩褪去之后 (color)
3. C. 每个人的结局 (ending)

C. 每个人的结局 (ending)

题目大意

给定 n 个矩形，你可以把矩形分成三类，使得每一类矩形的交非空，求方案数 $\bmod 10^9+9$。

吐槽环节

$n \leq 16$

3^n

特殊性质 A

3^n

特殊性质 B

此时有一维是没用的，我们只需要考虑区间的问题。
设右端点最小的区间的右端点是 a，左端点最大的区间的右端点是 b，则有 $a < b$，并且这两个区间的类别一定不一样，并且记忆点 x_1, x_2 一定分别满足 $x_1 = a, x_2 = b$，因为更小或更大是不优的。
此时对于每个区间，如果其包含了 x_1, x_2 中的 k 个点，那么有 k 中方案对 x_3 不产生约束，一种方案对 x_3 产生约束。
我们要求产生约束的区间的交非空，一个简单的做法是考虑点-边容斥，计算每个点被覆盖的方案数减掉边被覆盖到的方案数即可。

正解

延续上一个做法的想法，我们求出最小的右边界 L，最大的左边界 R，最小的上边界 D，最大的下边界 U，那么 $L \le R, D \le U$，并且一定有 $c_L \ne c_R, c_U \ne c_D$。
此时本质不同的情况只有两种：$c_L = c_D = 1, c_U = c_R = 2$ 或者 $c_L = 1, c_D = 2, c_U = c_R = 3$，其余的都可以通过旋转和翻转得到。
对于第一种，$c_L = c_D = 1, c_U = c_R = 2$，我们也可以得到一定有 $(x_1, y_1) = (L, D), (x_2, y_2) = (R, U)$。同样的对于一个矩形，如果其包含了 x_1, x_2 中的 k 个点，那么有 k 中方案对 x_3 不产生约束，一种方案对 (x_3, y_3) 产生约束。类似点-边容斥，可以用平面图欧拉定理把贡献拆到每个点、边、格子上，之后每个矩形的贡献都可以扫描线，维护支持区间乘法的线段树解决。
另一种情况其实也差不多的，只是可能贡献矩阵不太一样，做法还是拆开容斥，然后扫描线。
复杂度是 $O(n \log n)$。

Thanks!