# 球放盒问题的 8 种情形

山东省实验中学
宁华

# 问题描述

- N 个 相同/不同 的球放到 M 个 相同/不同 的盒子里，允许/不允许 有空盒子，有多少种放法？

# 1、球不同、盒不同、可空

# 1、球不同、盒不同、可空

- $N^M$

2、球同、盒同、可空

# 2、球同、盒同、可空

- N 个球，M 个盒子
- 设 f(n,m) 表示 n 个球放到 m 个盒子里的方案数。
- 分情况讨论：
- （1）N < M
- f(n,m)=f(n,n)
- （2）N >= M
- ①有空盒子：f(n,m)=f(n,m-1)
- ②没有空盒子：f(n,m)=f(n-m,m)
- f(n,m)=f(n,m-1)+f(n-m,m)

- 其他的解释：
- 既然盒相同，我们不妨认为一个分球方案是按照球数从小到大排列的。
- 等效成把一个数 n 拆成 m 个数的和，并且这 m 个数单调不降。
- 设 f(n,m) 表示 n 拆成 m 份的方案数。
- 如果这么拆：$x1 + x2 + x3 + . . . + xm = n$ ( $x\ i \ge 0$ )
- 当 $x1 = 0$ 时， $x2 . . . xm$ 的拆法可以表示成 f(n,m−1)。
- 当 $x1 \ge 1$ 时，上式可以变成 $( x1 - 1 ) + ( x2 - 1 ) + . . . + ( xm - 1 ) = n - m$后面的拆法表示成 f(n−m,m)。
- 所以 $f(n,m)=f(n,m-1)+f(n-m,m)$

# 3、球同，盒同，不空

# 3、球同，盒同，不空

- N < M：
- 无解

- N >= M：
- f(n,m)=g(n-m,m) // 转换为 g：球同，盒同，可空

# 4、球同，盒不同，不空

# 4、球同，盒不同，不空

- （1）N < M 无解
- （2）N >= M
- 插板法
- c(n-1,m-1)

# 5、球同，盒不同，可空

# 5、球同，盒不同，可空

- x1+x2+……+xm=n
- (x1+1)+(x2+1)+……+(xm+1)=n+m

- c(n+m-1,m-1)

- 为了避免空盒，先在每个盒里假装放一个球，这样就有 n+m 个球。按照 “球同，盒不同，不空” 的方法放完了之后，再从每个盒子里面取走一个球，方案数不变。

# 6、球不同，盒同，不空

# 6、球不同，盒同，不空

- （1）$N < M$：无解
- （2）$N = M$：$f(n,m)=1$
- （3）$N > M$
- 指定某 1 个球，则：
- ①它和别的球共用一个盒
- $f(n,m)=f(n-1,m)*m$
- ②它自己独占一个盒
- $f(n,m)=f(n-1,m-1)$
- 所以 $f(n,m)=f(n-1,m)*m+f(n-1,m-1)$
- 初始化：$f[i][i]=1(i>=1)$, $f[i][1]=1(i>=1)$, $f[i][j]=0(i<j)$

# 7、球不同，盒同，可空

# 7、球不同，盒同，可空

- 枚举空盒子的数量：
- 一个空盒子都没有 + 有一个空盒子 + 有两个空盒子 + 有三个空盒子 + …… + 都装在一个盒子里。

- f(n,m)=sigma(g(n,i)) i=1,2,……,m // 转换为 g：球不同，盒同，不空

# 8、球不同，盒不同，不空

# 8、球不同，盒不同，不空

- 与“球不同，盒同，不空”的区别在于盒子不同
- 先按“球不同，盒同，不空”放完，再对盒子全排列编号
- f(n,m)=g(n,m)*m! // 转换为 g：球不同，盒同，不空