財務演算法

作業一：BIS 市場風險標準法資本計提

財金所 周庭瑋 R07723079
Email:a0938660179@gmail.com
Github: https://github.com/weiooo/

目錄

一、作業內容說明

本次作業需要依據巴塞爾協定中標準法計算架構下的敏感性基礎法(Sensitivity-based method, SBM)來計算每一筆交易所需計提的市場風險資本，透過此方法以捕捉系統性的市場風險，而市場風險又下分三項風險，分別為 Delta 風險資本、Vega 風險資本以及 Curvature 風險資本，並須考慮其相關性彙整。

此次作業的計算問題需考慮兩筆交易的資本計提，問題如下：

(1) 一大型先進經濟體電信股股票歐式陽春型買權，賣出 1000 股部位。

(2) 若同時加入另一同條件之賣權，賣出 1000 股部位，則合併需多少資本。

敏感性基礎法將部位的市場風險分為七大類別，由於上述兩筆交易皆涉及股票選擇權，故需計算出權益風險(EQR)下的 Delta, Vega, Curvature 風險資本，此外，由於利率變動也會影響此金融商品的價值，所以還需計算出一般利率風險(GIRR)下的風險資本，不過由於涉及到的計算較為複雜，故在此作業練習中僅計算權益風險下的總風險資本，亦即權益風險下的 Delta、Vega 與 Curvature 風險資本，並將三者總和計算出總風險資本。

二、相關計算公式

每一類別的風險，可將相似的風險因子集合成 Bucket，之後要再依據 Buckets 內與 Buckets 間的相關性將其風險彙整，而因為上述問題兩筆交易中的選擇權標的資產相同，故在以下計算僅需計算 Bucket 內彙整，而不需考慮 Buckets 間的風險彙整。

- Delta 風險資本

$\boxed{\text{Step1}}$ 計算 delta 風險量

$$s_k = \frac{V_i(1.01EQ_k) - V_i(EQ_k)}{0.01}$$

EQ_k 表示為的 k 個風險因子，在此例中的風險因子即為標的資產價格，故上式在衡量選擇權價格對於標的資產價格變動的敏感性，此外，需要注意的是計算出數值的單位為金額而非比例。

$\boxed{\text{Step2}}$ 將 delta 風險量乘上風險權數，得加權敏感性(Weighted Sensitivity, WS)。

$$WS_k = RW_k \times S_k$$

根據 Basel 文件，大型先進市場電信股票權數為 35%。

$\boxed{\text{Step3}}$ 將同一 Bucket 內的加權敏感性(WS)用以下公式作彙整。

$$K_b = \sqrt{\max(0, \sum_k WS_k^2 + \sum_k \sum_{k \neq l} \rho_{kl} WS_k WS_l)}$$

在將買權與賣權的兩筆交易計算作彙整時，由於標的資產皆為同一電信股的股票，故上式的參數ρ_{kl}可直接帶入 1 來作計算。

$\boxed{\text{Step4}}$ 最後，因為是兩筆同標的物的選擇權交易，故毋須考慮 Bucket 間彙整計算，因此 Delta 風險資本可直接計算如下：

$$Delta\ \ risk\ \ capital = \sqrt{\sum_b K_b^2}$$

- Vega 風險資本

Equity 之 Vega Risk 的風險因子，為標的權益現貨的隱含波動度，並以到期日為維度。此例中的選擇權到期時間為 9 個月，由於題目僅提供 6 個月與 12 個月的隱含波動度資訊，故我們需透過內插公式計算出 9 個月的隱含波動度。

因此在計算 Vega Risk 時會有兩個風險因子，分別為 6 個月與 12 個月的隱含波動性，需先個別計算出兩種天期的 Vega，之後再作彙整。

$\boxed{\text{Step1}}$ 計算不同到期日的 Vega

$$vega = \frac{\partial V_i}{\partial \sigma_i}$$

$$vega_{6m} = \frac{\partial V(S, K, T,\ \sigma_{9m}(\sigma_{6m}, \sigma_{12m}),\ r, y)}{\partial \sigma_{6m}}$$

$$vega_{12m} = \frac{\partial V(S, K, T,\ \sigma_{9m}(\sigma_{6m}, \sigma_{12m}),\ r, y)}{\partial \sigma_{12m}}$$

由於 6 個月的隱含波動度的變化會影響 9 個月隱含波動度的數值，故 6 個月的 vega 即是計算 6 個月隱含波動度變化對於選擇權價值的影響，同理，12 個月的 vega 也是相同的計算方式。

$\boxed{\text{Step2}}$ 將 Vega 風險量乘上風險權數，得加權敏感性。

$$WS_k = RW_k \times S_k$$

$$WS_{6m} = 0.35 \times Implied\ \ volitilty_{6m}$$
$$WS_{12m} = 0.35 \times Implied\ \ volitilty_{12m}$$

$\boxed{\text{Step3}}$ 將同一 Bucket 內的加權敏感性用以下公式作彙整。

(1) 首先計算 Intra-Bucket 彙整的相關性

根據 Basel 文件(MAR21.94)非 GIRR 風險類別下的 Intra-Bucket 彙整相關性公式如下

$$\rho_{kl} = \min[\rho_{kl}^{(Delta)} \times \rho_{kl}^{(option\ maturity)}, 1]$$

- $\rho_{kl}^{(Delta)}$：Delta risk 中，風險因子 k 與 l 的相關性。
- $\rho_{kl}^{(option\ maturity)} = \exp\left(-\alpha \frac{|T_k - T_l|}{\min[T_k, T_l]}\right), \quad \alpha = 1\%$

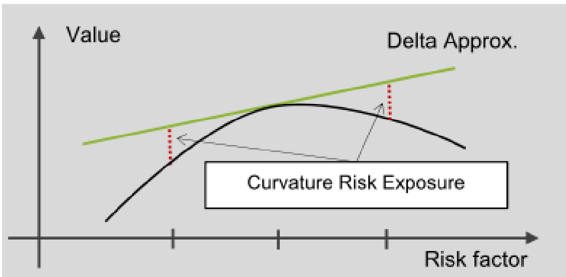
(2) 計算出相關性後，再用以下公式作彙整

$$K_b = \sqrt{\max(0, \sum_k WS_k^2 + \sum_k \sum_{k \neq l} \rho_{kl} WS_k WS_l)}$$

$\boxed{\text{Step4}}$ 最後因毋須考慮 Bucket 間彙整計算，故 Vega 風險資本可直接計算如下：

$$Vega\ risk\ capital = \sqrt{\sum_b K_b^2}$$

- Curvature 風險資本



Ref：Minimum Capital Requirements for Market Risk_Nagler&company

Curvature Risk 主要是反映金融商品價值對風險因子的變化，產生的非線性效果。以權益選擇權為例，便是計算選擇權真實價值的變動，減去 Delta 估計的價值變動，以數學式表示如下：

$$CVR_k = V_i(S_k \pm dS_k) - V_i(S_k) - RW_k^{Curvature} \times s_{ik}$$
$$dS_k = 0.35 \times S_k$$

$\boxed{\text{Step1}}$ 分別計算當價格上、下震盪時的 Curvature 資本需求

$$CVR_k^+ = -\sum_i \{V_i\left(x_k^{RW(Curvuture)^+}\right) - V_i(x_k) - RW_k^{Curvature} \times s_{ik}\}$$
$$CVR_k^- = -\sum_i \{V_i\left(x_k^{RW(Curvuture)^-}\right) - V_i(x_k) - RW_k^{Curvature} \times s_{ik}\}$$

在此風險因子 k 即為標的資產的價格，故$V_i\left(x_k^{RW(Curvuture)^+}\right)$為當標的資產價格上升時計算出的選擇權的價值，而$RW_k^{Curvature}$等於 Delta 的風險權數(以此例為 35%)，因此上式便是計算出在 Delta 線性補捉時沒有捕捉到的部分。

$\boxed{\text{Step2}}$ 依據 Bucket 對應的相關係數，彙整 Bucket 資本需求。

$$K_b^+ = \sqrt{\max(0, \sum_{\mathrm{k}} \max(CVR_k^+, 0)^2 + \sum_k \sum_{l \neq k} \rho_{kl} CVR_k^+ CVR_l^+ \varphi\,(CVR_k^+, CVR_l^+))}$$

$$K_b^- = \sqrt{\max(0, \sum_{\mathrm{k}} \max(CVR_k^-, 0)^2 + \sum_k \sum_{l \neq k} \rho_{kl} CVR_k^- CVR_l^- \varphi\,(CVR_k^-, CVR_l^-))}$$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0, y < 0 \\ 1, & otherwise \end{cases}$$

$$K_b = \max(K_b^+, K_b^-)$$

Intra-Bucket Curvature 的相關性(ρ_{kl})為 Delta 計算相關性的平方。

$\boxed{\text{Step3}}$ 最後，因為毋須考慮 Bucket 間彙整計算，故 Curvature 風險資本可直接計算如下：

$$Curvature\ \ risk\ \ capital = \sqrt{\max(0, \sum_b K_b^2)}$$

三、成果展示

在程式碼的編寫上，使用了 class 定義 Optioninfo 這個類別來存入選擇權的交易資訊，包含股票價格(S)、履約價(K)、到期年限(T)、利率(r)、波動度(σ)、選擇權類型(Type)、買入或賣出(pos)以及交易股數(shares)，此外，也在此類別中定義了相關的計算函數，如:計算 Delta、Vega、Curvature 與總風險資本函數。

(一)程式碼說明

- 一開始先依據 BS 模型公式定義了計算歐式選擇權價格的函數，函數的輸入參數包含了股價(S),履約價(K),到期年限(T),利率(r),波動度(sigma),類別(Type)以及交易的股數(shares)。

```
import numpy as np
from scipy import stats

def EuropeanOption(S, K, T, r, sigma, Type, shares):

    d1 = (np.log(S/K) + (r + 0.5 * sigma**2)*T)/(sigma * np.sqrt(T))
    d2 = d1 - sigma * np.sqrt(T)

    if (Type == 'c'):
        call = S * stats.norm.cdf(d1,0.0,1.0) - K * np.exp(-r*T) * stats.norm.cdf(d2,0.0,1.0)
        return call * shares

    else:
        put = K * np.exp(-r*T) * stats.norm.cdf(-1*d2,0.0,1.0) - S * stats.norm.cdf(-1*d1,0.0,1.0)
        return put * shares
```

- 定義一線性內插函數，以供後面計算使用

```
def interpolate(T1,r1,T2,r2,t):
    if (T2 < T1):
        T1, T2 = T2, T1
        r1, r2 = r2, r1

    r = r1 + (r2-r1) * (t-T1) / (T2-T1)
    return r
```

- 定義 Optioninfo 類別來存入選擇權的相關資訊使用，需要輸入的參數在函數中皆有作說明。

```
class Optioninfo:

    def __init__(self, S, K, T, r, sigma, Type, pos, shares):

        self.S = S              # S     : stock price
        self.K = K              # K     : strike price
        self.T = T              # T     : time to maturity (year)
        self.r = r              # r     : interest rate
        self.sigma = sigma      # sigma : volatility of underlying asset
        self.Type = Type        # Type  : 'c' for call; 'p' for put
        self.pos = pos          # pos   : 'l' for long; 's' for short position
        self.shares = shares    # shares: shares of underlying asset
```

而 Optioninfo 類別下除了__init__函數外，還包含了四個計算風險資本的函數：

```python
# function for calculating delta, vega, gamma
def delta(self):
    V0 = EuropeanOption(self.S, self.K, self.T, self.r, self.sigma, self.Type, self.shares)
    V1 = EuropeanOption(self.S*1.01, self.K, self.T, self.r, self.sigma, self.Type, self.shares)
    delta = (V1-V0) / 0.01 * (lambda x : -1 if x == 's' else 1)(self.pos)
    self.deltavalue = delta

    WS_delta = delta * RW # Weighted Sensitivity
    self.WS_delta = WS_delta
    Kb_delta = (max(0, (WS_delta ** 2))) ** 0.5

    return Kb_delta
```

- 第一個函數為 delta()，意即計算 delta 風險資本，而過程皆依循上述公式作計算，其中較為需要注意的是選擇權買入與賣出，其 delta 數值在計算上會差一正負號，故程式碼中透過判別交易部位(pos)為買或賣來將計算數值作調整，當為賣出部位時，則需將原計算出的 delta 數值乘上負號，語法詳見上圖黃色標示處。
- 在計算單筆交易時，買入與賣出部位雖不影響其計算出的 delta 風險資本，不過會影響後方所計算出的 curvature 風險資本，以及影響彙整多筆交易計算出的結果。

```python
def vega(self):
    change = 0.01 # change
    sigma1 = interpolate(0.5, imvol_6m*(1+change), 1, imvol_12m, self.T)
    V0 = EuropeanOption(self.S, self.K, self.T, self.r, self.sigma, self.Type, self.shares)

    # vega_6m
    V1 = EuropeanOption(self.S, self.K, self.T, self.r, sigma1, self.Type, self.shares)
    vega_6m = (V1 - V0) / (imvol_6m * change)
    WS_vega_6m = RW * vega_6m * imvol_6m

    # vega_12m
    sigma1 = interpolate(0.5, imvol_6m, 1, imvol_12m*(1+change), self.T)
    V1 = EuropeanOption(self.S, self.K, self.T, self.r, sigma1, self.Type, self.shares)
    vega_12m = (V1 - V0) / (imvol_12m * change)
    WS_vega_12m = RW * vega_12m * imvol_12m
    self.WSvega = [WS_vega_6m, WS_vega_12m]

    # intra-bucket calculation for 6m and 12m
    alpha, Tk, Tl, rho_delta = 0.01, 0.5, 1, 1
    rho = min(1, rho_delta*np.exp(-1*alpha*abs(Tk-Tl)/min(Tk,Tl)))
    Kb_vega = (max(0,WS_vega_6m**2 + WS_vega_12m**2 + 2*rho*WS_vega_6m*WS_vega_12m))**0.5

    return Kb_vega
```

- 第二個函數為 vega()，意即計算 vega 風險資本。在計算上是將隱含波動度的變動設定為 1%，其餘步驟皆參照上述公式依序作計算。

- 計算 Vega 的 Intra-bucket 相關性有一參數為$\rho_{kl}^{(Delta)}$，以此次作業問題(1)而言，bucket 中兩風險因子分別為 6 個月與 12 個月的隱含波動度，因對應同一選擇權，且僅有單筆交易，故此參數在此計算上設定為 1，可見上圖黃色標示處。

```python
def curv(self):
    price_change = 0.35
    # when price goes up
    S1 = self.S * (1+price_change)
    V0 = EuropeanOption(self.S, self.K, self.T, self.r, self.sigma, self.Type, self.shares)
    V1 = EuropeanOption(S1, self.K, self.T, self.r, self.sigma, self.Type, self.shares)
    CVR_up = -((V1-V0)* (lambda x : -1 if x == 's' else 1)(self.pos) - self.deltavalue*0.35)

    # when price goes down
    S1 = self.S * (1-price_change)
    V1 = EuropeanOption(S1, self.K, self.T, self.r, self.sigma, self.Type, self.shares)
    CVR_down = -((V1-V0)* (lambda x : -1 if x == 's' else 1)(self.pos) + self.deltavalue*0.35)
    self.CVR_up, self.CVR_down = CVR_up, CVR_down

    Kb = max(((max(0,CVR_up))**2)**0.5, ((max(0,CVR_down))**2)**0.5)
    Kb_curv = (max(0, Kb**2))**0.5

    return Kb_curv
```

- 第三個函數為 curv()，計算 curvature 風險資本。
- 上圖黃色標示處，因買入與賣出選擇權，標的資產價格變動對其選擇權價值影響會相差一正負號，故如同計算 delta 數值時，透過判別交易部位(pos)為買或賣來將計算出的數值作調整。
- 上圖綠色標示處，即在 delta()函數中所計算出的 delta 風險量，從此處便可看出買入與賣出部位計算出的 delta 數值對於 curvature 數值的影響。

```python
def totalriskcap(self):
    totalriskcap = self.delta() + self.vega() + self.curv()

    return totalriskcap
```

- 最後一函數為 totalriskcap()，計算權益風險下的總風險資本，意即將上方三個函數所計算出的數值作總和，即可得之。

(二)產出結果分析

問題(1):一大型先進經濟體電信股股票歐式陽春型買權，賣出 1000 股部位。

- 首先，依據題目提供資訊，給定參數數值。

```python
r_6m, r_12m = 0.025, 0.028
imvol_6m, imvol_12m = 0.25, 0.30

S, K, T = 100, 100, 9/12
r_9m = interpolate(0.5, r_6m, 1, r_12m, T)
imvol_9m = interpolate(0.5, imvol_6m, 1, imvol_12m, T)

RW = 0.35 # risk weight
```

- 題目提供的數值為 6 個月與 12 個月的資訊，不過要計算的選擇權為 9 個月到期，故需要透過內插公式計算出 9 個月的利率(r_9m)與隱含波動度(imvol_9m)。
- 根據 Basel 文件(MAR 21.77)，大型先進市場電信股票權數為 35%。

- 定義一變數 asset1，其類別為 Optioninfo，並根據交易資訊將參數給定，以問題(1)為例，S=100, K=100, T=9/12, r=r_9m, sigma=imvol_9m, Type=’c’(買權), pos=’s’(表示為賣出部位), shares=1000。

```
asset1 = Optioninfo(S, K, T, r_9m, imvol_9m, 'c', 's', 1000)
print('%-15s%s %10.4f'%('delta',':',asset1.delta()),
      '\n%-15s%s %10.4f'%('vega',':',asset1.vega()),
      '\n%-15s%s %10.4f'%('curvature',':',asset1.curv()),
      '\n%-15s%s %10.4f'%('total risk cap',':',asset1.totalriskcap()))
```

  - 透過呼叫類別中的函式以計算出此筆交易需計提的 Delta, Vega, Curvature 風險資本並合計出在權益風險下的總風險資本，結果參見下圖：

```
delta          : 20594.1283
vega           :  3249.7670
curvature      : 10517.2649
total risk cap : 34361.1602
```

問題(2):若同時加入另一同條件之賣權，賣出 1000 股部位，則合併需多少資本。

- 如同上題，定義一類別為 Optioninfo 的變數 asset2，並根據交易資訊將參數給定，S=100, K=100, T=9/12, r=r_9m, sigma=imvol_9m, Type=’p’(賣權), pos=’s’(表示為賣出部位), shares=1000。

```
asset2 = Optioninfo(S, K, T, r_9m, imvol_9m, 'p','s', 1000)
print('%-15s%s %10.4f'%('delta',':',asset2.delta()),
      '\n%-15s%s %10.4f'%('vega',':',asset2.vega()),
      '\n%-15s%s %10.4f'%('curvature',':',asset2.curv()),
      '\n%-15s%s %10.4f'%('total risk cap',':',asset2.totalriskcap()))
```

  - 透過呼叫類別中的函式以計算出此筆交易需計提的 Delta, Vega, Curvature 風險資本並合計出在權益風險下的總風險資本，結果參見下圖：

```
delta          : 14405.8717
vega           :  3249.7670
curvature      : 10517.2649
total risk cap : 28172.9037
```

- 問題(2)需計算的是，兩筆交易合併計提的風險資本，故須計算兩筆交易在各項風險下的資本彙整。在此作法為將上方兩變數 asset1, asset2 組成一 portfolio，並透過呼叫類別裏頭的函數，將欲使用到的數值儲存至 list 中。

```
# For Portfolio
portfolio = [asset1, asset2]
rho_12 = 1 # correlation between the underlying assets of asset1 & asset2

delta_list = []
vega_list = []
cvr_up_list = []
cvr_down_list = []

for i in range(len(portfolio)):
    delta_list.append(portfolio[i].WS_delta)
    vega_list += portfolio[i].WSvega
    cvr_up_list.append(portfolio[i].CVR_up)
    cvr_down_list.append(portfolio[i].CVR_down)
```

  - 由於此兩筆交易的標的資產相同，故上圖中的參數 rho_12 為 1。

- 首先是計算合併的 Delta 風險資本

```
# inter-bucket calculation
# Delta
d = np.array([delta_list])
corr = np.array([[1, rho_12], [rho_12, 1]])
port_delta = (max(0, np.sum(d.T * d * corr)))**0.5
```

  - 變數 d 儲存了兩筆交易的 delta 加權敏感性，意即上述公式中的WS_k，第一筆交易有一加權敏感性為WS_1，第二筆交易為WS_2，故 d 為一向量$[WS_1, WS_2]$，而 d^Td 則為一矩陣$\begin{bmatrix} WS_1^2 & WS_2WS_1 \\ WS_1WS_2 & WS_2^2 \end{bmatrix}$；corr 則為加權敏感性彼此間的相關係數，同一筆交易的相關性理當為 1，而因為兩選擇權的標的資產相同，故彼此的加權敏感性相關性也為 1，因此 corr 為一矩陣$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。
  - 將上述兩矩陣**對應元素相乘**得$\begin{bmatrix} WS_1^2 & WS_2WS_1 \\ WS_1WS_2 & WS_2^2 \end{bmatrix}$，而將此矩陣的元素總和數值開根號，便可得兩筆交易彙整的 Delta 風險資本，語法詳見上圖黃色標示處。

- 再來是計算合併的 Vega 風險資本

```
# Vega
v = np.array([vega_list])
alpha, Tk, Tl, rho_delta = 0.01, 0.5, 1, 1
rho = min(1, rho_delta*np.exp(-1*alpha*abs(Tk-Tl)/min(Tk,Tl)))
corr = np.array([[1,rho,1,rho],[rho,1,rho,1],[1,rho,1,rho],[rho,1,rho,1]])
port_vega = (max(0, np.sum(v.T * v * corr)))**0.5
```

- 變數 v 儲存了兩筆交易的 vega 加權敏感性，意即上述公式中的WS_k，由於計算 vega 時有兩風險因子，故第一筆交易有一加權敏感性為WS_{11}與WS_{12}，第二筆交易則為WS_{21}與WS_{22}，故 v 為向量$[WS_{11}, WS_{12}, WS_{21}, WS_{22}]$，$v^Tv$ 則為一 4*4 矩陣

$$\begin{bmatrix} WS_{11}^2 & WS_{11}WS_{12} & WS_{11}WS_{21} & WS_{11}WS_{22} \\ WS_{12}WS_{11} & WS_{12}^2 & WS_{12}WS_{21} & WS_{12}WS_{22} \\ WS_{21}WS_{11} & WS_{21}WS_{12} & WS_{21}^2 & WS_{21}WS_{22} \\ WS_{22}WS_{11} & WS_{22}WS_{12} & WS_{22}WS_{21} & WS_{22}^2 \end{bmatrix}$$

- corr 為加權敏感性彼此間的相關係數，Vega 計算相關係數公式為：

$$\rho_{kl} = \min[\rho_{kl}^{(Delta)} \times \rho_{kl}^{(option\ \ maturity)}, 1]$$

而在計算相關係數時，我將他們分為兩種情境計算(上圖紅色標示處)

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">同一筆交易(同選擇權 X)</td><td colspan="2">不同筆交易(不同選擇權 X, Y)</td></tr>
<tr><td>$\rho_{kl}^{(Delta)}$</td><td colspan="2">1
(因標的資產相同)</td><td colspan="2">$\rho_{12} = 1$
(X, Y 選擇權的 delta 相關性)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\rho_{kl}^{(option)}$</td><td>同風險因子</td><td>不同風險因子
(6m,12m)</td><td>同風險因子</td><td>不同風險因子
(6m,12m)</td></tr>
<tr><td>$e^0 = 1$</td><td>$e^{-0.01\times1} \approx 0.99$</td><td>$e^0 = 1$</td><td>$e^{-0.01\times1} \approx 0.99$</td></tr>
<tr><td>ρ_{kl}</td><td>1</td><td>≈ 0.99</td><td>1</td><td>≈ **0.99**</td></tr>
</table>

因此 corr 為一 4*4 矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0.99 & 1 & \mathbf{0.99} \\ 0.99 & 1 & \mathbf{0.99} & 1 \\ 1 & \mathbf{0.99} & 1 & 0.99 \\ \mathbf{0.99} & 1 & 0.99 & 1 \end{bmatrix}$。

- 最後，如同 Delta 計算彙整風險方式，將上述兩矩陣**對應元素相乘**所得矩陣的元素相加，將所得數值與 0 取大值並開根號，即為兩筆交易彙整的 Vega 風險資本，語法詳見上圖藍色標示處。

- 第三步驟是計算合併的 Curvature 風險資本

```
# Curvature
cvr_up = np.array(cvr_up_list)
phi = (cvr_up < 0) * (np.roll(cvr_up, 1) < 0)
Kb_up = (max(0, sum(np.square(np.maximum(cvr_up, 0)) +
        (rho_12**2) * cvr_up * np.roll(cvr_up, 1) * (phi != True).astype(int)))) ** 0.5

cvr_down = np.array(cvr_down_list)
phi = (cvr_down < 0) * (np.roll(cvr_down, 1) < 0)
Kb_down = (max(0, sum(np.square(np.maximum(cvr_down, 0)) +
          (rho_12**2) * cvr_down * np.roll(cvr_down, 1) * (phi != True).astype(int)))) ** 0.5

Kb = max(Kb_up, Kb_down)
port_curv = (max(0, Kb**2))**0.5
```

  - 變數 cvr_up 與 cvr_down 分別儲存了兩筆交易在股票價格上下震盪時的 Curvature risk 風險資本，意即上述公式中的CVR_k^+與CVR_k^-。
  - 變數 Kb_up 與 Kb_down 分別為公式中的K_b^+與K_b^-，以K_b^+作說明，其公式如下：

$$K_b^+ = \sqrt{\max(0, \sum_{k} \max(CVR_k^+, 0)^2 + \sum_{k}\sum_{l \neq k} \rho_{kl} CVR_k^+ CVR_l^+ \varphi\,(CVR_k^+, CVR_l^+))}$$

    此處由於為簡化程式語法，所以沒有像彙整 Delta, Vega 風險時使用矩陣作計算，而是使用了 numpy 中的 roll 語法，透過平移 cvr_up 串列計算兩筆交易所彙整而得的加權敏感性K_b^+，不過這種方法在多筆交易時則不適用，語法詳見上圖黃色標示處。
  - 變數 phi 為公式中的$\varphi()$函數，先判斷兩串列對應元素是否皆為負的布林值，倘若兩元素(CVR_k^+, CVR_l^+)皆為負值，則透過 astype(int)語法，將布林值轉成數值 0，反之，則數值為 1，語法詳見上圖綠色標示處。
  - 同理，K_b^-也是相同作法，計算出K_b^+與K_b^-後，將兩者取其大者作為K_b 的數值，最後便可透過公式計算出兩筆交易彙整的 Curvature 風險資本。

- 最後，計算兩筆交易合併權益風險下的總風險資本，輸出結果如下：

```
print('%-15s%s %10.4f'%('delta',':',port_delta),
      '\n%-15s%s %10.4f'%('vega',':',port_vega),
      '\n%-15s%s %10.4f'%('curvature',':',port_curv),
      '\n%-15s%s %10.4f'%('total risk cap',':',port_delta + port_vega + port_curv))
```

```
delta          :  6188.2565
vega           :  6499.5340
curvature      : 21034.5298
total risk cap : 33722.3204
```

  - 兩筆交易(賣出買權與賣出賣權)彙整後所需計提的 Delta 風險資本約為 6188. 2565、Vega 風險資本約為 6499. 5340、Curvature 風險資本約為 21034. 5298，而三種風險總和計算出需計提的總風險資本為 33722. 3204。

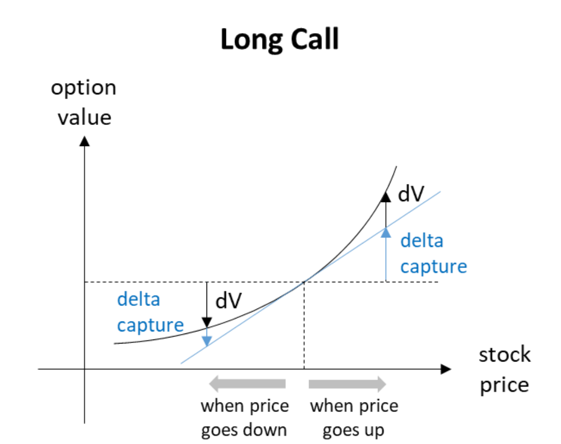
(三)其他情境比較

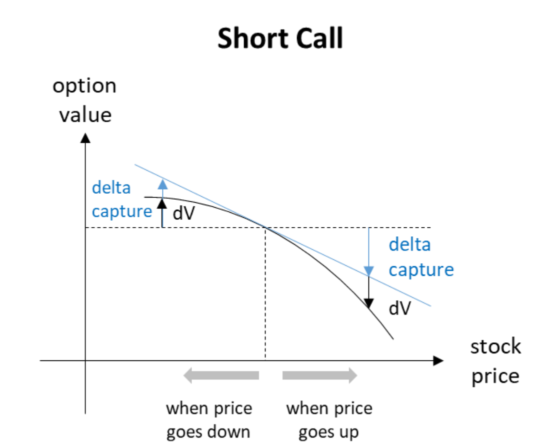
(1) 單筆交易

此部分我將單筆交易的根據交易部位為買入或賣出分成四種情境作討論，其標的資產與條件皆相同。

Risk capital	Long Call	Short Call	Long Put	Short Put
Delta	20594.1283	20594.1283	14405.8717	14405.8717
Vega	3249.7670	3249.7670	3249.7670	3249.7670
Curvature	0.0000	10517.2649	0.0000	10517.2649
Total	23843.8953	34361.1602	17655.6388	28172.9037

- 首先，可以看出當部位為買進或賣出相同選擇權時，對於其 Delta 風險資本是不影響的，由於計算公式中，會先將 Delta 加權敏感性(WS_k)數值作平方再開根號，故 delta 的正負不影響其最終算出的風險資本。
- 由於兩選擇權標的物相同，且其餘條件也都相同，故買權與賣權計算出的 Vega 風險資本皆相同。
- 從上表可發現當部位為賣出時才需計提 Curvature 風險資本，當買入部位時則 Curvature 風險資本為 0，而透過畫出選擇權價值與股票價格關係圖便可清楚了解 Curvarure 計算公式用意，下圖以買權為例：





當股票價格下跌時，從上圖可發現 delta 估計價值變動大於實際價值下跌差距，故在買入部位時，透過公式所計算出來的CVR^+與CVR^-為負值，因此最後計算出的K_b^+、K_b^-與K_b數值皆為 0，表示 delta 已捕捉足夠風險，Curvature 風險資本無須再計提。

當股票價格上漲時，從上圖可發現期權實際價值下跌差距大於 delta 估計價值變動，故在賣出部位時，透過公式所計算出來的CVR^+與CVR^-皆為正值，因此最後計算出K_b數值也為正值，表示這種狀況下需要計提 Curvature 風險資本以捕捉線性未估計到的部分。

(2) 兩筆交易彙整

建構四種投資組合，買進/賣出買權與買進/賣出賣權相互搭配，探討不同投資組合下的風險資本計算結果。

Risk capital	A. Long Call + Long Put	B. Long Call + Short Put	C. Short Call + Long Put	D. Short Call + Short Put
Delta	6188.2565	35000.0000	35000.0000	6188.2565
Vega	6499.5340	6499.5340	6499.5340	6499.5340
Curvature	0.0000	0.0000	0.0000	21034.5298
Total	12687.7906	41499.5340	41499.5340	33722.3204

- 從上表可看出，投資組合 A 與 D 其兩筆交易的 delta 數值有互抵效果，因此計算出的 delta 風險資本是下降的，反之投資組合 B 與 C 則 delta 無互抵效果。
- 四種投資組合下 Vega 風險資本皆同；而僅有投資組合 D 須計提 Curvature 風險資本，其餘投組皆無。
- 四種投資組合，在權益風險下投資組合 B 與 C 須計提的總風險資本是最多的，接下來為投資組合 D，而投資組合 A 須計提的風險資本最小。

四、學習心得

第一次接觸到巴塞爾協定相關議題，起初對於內容相當陌生，但經過這次實作練習後，對於市場風險標準法的資本計提過程，算是有了初步的了解，而在實作練習時也發現有許多計算上的細節需要注意，如 Bucket 的劃分、Bucket 相關性的計算、公式在程式碼上的編寫等等，故程式碼在編寫時也修正了好幾個版本。

不過也因為透過實作才深入了解到巴塞爾協定編制公式的一些巧妙設計，讓看似簡單的公式即可囊括交易上所面臨的各種情境，並且可看出巴塞爾協定對於風險變動的嚴謹，透過相關資本計提規範，以強化銀行資本品質及風險承擔能力。

這次作業練習的題目已相當簡化，但在程式編寫上仍不太容易，而如果是考慮到各種不同的交易型態，編寫上更是困難，因此可以感受到實務上在建置系統的困難性。最後，感謝教授的教導，讓學生得以了解當前產業實務上的狀況，以及有機會學習相關知識，作業在練習上可能會有疏漏之處，也煩請教授不吝指教，謝謝！

周庭瑋 2020/05/04