QFT 2025 年第一期

量子场论

作者：Thoria Tong

组织：ElegantLaTeX Program

时间：November 24, 2025

多少事，从来急；天地转，光阴迫。一万年太久，只争朝夕。

目录

本章节主要是来自《an introduction to quantum field theory》中的笔记，将根据课程内容添加余的量子场论体系内容。本文主要定位在于帮助本人强化记忆和理解，具体知识可看书。

第一部分

书本解读

第一章 Klein-Gorden Field

1.1 从量子力学到量子场论

从量子力学到量子场论，我们首先要问的是为什么我们不能直接对粒子进行量子化 (就像量子化非相对论粒子)。省流：解释了单粒子相对论性波动方程的负能态与负概率，同时对于多粒子态的因果性和不同数目粒子态间的转换。

1.1.1 振幅计算

考虑一个自由粒子从 x_0 处传播到 x 的过程。我们可以用路径积分的方法来计算这个过程的振幅。

首先考虑非相对论情况：

$$\begin{aligned}
U(t) &= \langle \boldsymbol{x}| e^{-i\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}t} |\boldsymbol{x_0}\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \boldsymbol{x}| e^{-i\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}t} |\boldsymbol{p}\rangle \langle \boldsymbol{p}\rangle \boldsymbol{x_0} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-i\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}t} e^{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp_x e^{-i\frac{p_x^2}{2m}t+ip_x(x-x_0)} \cdot \int dp_x e^{-i\frac{p_y^2}{2m}t+ip_y(y-y_0)} \cdot \int dp_x e^{-i\frac{p_z^2}{2m}t+ip_z(z-z_0)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\sqrt{\frac{2m\pi}{it}}\right]^3 e^{i\frac{m(x-x_0)^2}{2t}} \cdot e^{i\frac{m(y-y_0)^2}{2t}} \cdot e^{i\frac{m(z-z_0)^2}{2t}} \\
&= \left(\frac{m}{2\pi i t}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{i\frac{m}{2t}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

式中积分利用结论

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(ax^2+bx)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{ia}} e^{i\frac{b^3}{4a}} \tag{1.2}$$

for all x and t ,$U(t) \neq 0 \Rightarrow$ 可在任意短时间内传播任意长距离

利用狭相能量-动量关系式 $E = \sqrt{p^2+m^2}$ 代换上式中 E：

$$\begin{aligned}
U(t) &= \langle \boldsymbol{x}| e^{-i\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}t} |\boldsymbol{x_0}\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}t} \cdot e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \\
&\overset{\text{球坐标系下}}{=} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp\, d\theta\, d\phi\, \sin(\theta) p^2 e^{-i\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}t} e^{ipa\cos(\theta)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} p^2\, e^{-i\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}t} \int_0^{\pi} d\theta\, \sin(\theta) e^{ipa\cos(\theta)}
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin(\theta)\, e^{ipr\cos(\theta)}\, d\theta &= \frac{-1}{ipr} e^{ipr\cos(\theta)}|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{ipr}\left(e^{ipr} - e^{-ipr}\right) \\
&= \frac{2}{pr}\sin(pr)
\end{aligned}$$

引理 1.1 (第二类修正贝塞尔函数 (modified Bessel function of the second kind)$K_\mu(x)$)

这是贝塞尔函数的一种，通常用于解决涉及柱对称问题的微分方程，常见于物理学中的波动、热传导和量子力学等领域。修正贝塞尔函数满足修正贝塞尔方程：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(x^2+\mu^2)y=0 \tag{1.3}$$

其中 μ 是函数的阶数，x 是自变量，其在自变量 $x>0$ 时为实数，$x\approx\infty$ 时指数衰减 ($x\gg 1$ 时 $K_2(x)\approx\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}$)。特别的对于阶数为 2 的第二类修正贝塞尔函数 $K_2(x)$，我们有递推关系：

$$K_2(x)=K_0+\frac{2}{x}K_1(x) \tag{1.4}$$

经过系列推导可得：(待补充)

$$\int_0^\infty xe^{-\beta\sqrt{\gamma^2+x^2}}\sin(bx)\,dx=\frac{b\beta\gamma^2}{\beta^2+b^2}K_2(\gamma\sqrt{\beta^2+b^2}) \tag{1.5}$$

♡

那么(1.3) 又等于

$$\begin{aligned}U(t)=&\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty p^2\,e^{-i\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}t}\int_0^\pi d\theta\,\sin(\theta)e^{ipa\cos(\theta)}\\=&\frac{1}{2\pi^2r}\int_0^\infty dp\,p\,\sin(p\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|)e^{-it\sqrt{p^2+m^2}}\\=&\frac{1}{2\pi^2r}\cdot\frac{ritm^2}{-t^2+r^2}K_2(m\sqrt{r^2-t^2})\end{aligned} \tag{1.6}$$

由引理 1.1 我们有：$r^2\gg t^2$ 时 (光锥之外)，

$$U(t)=\frac{1}{w\pi^2}\cdot\frac{im^2t}{r^2-t^2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{m\sqrt{r^2-t^2}}}\cdot e^{-m\sqrt{r^2}-t^2} \tag{1.7}$$

尽管这个值很小但是同样不为 0，因果性同样违背。

而在量子场论中，一个粒子从 x_0 处传播到 x 处和反粒子从 x 传播到 x_0 处无法区分，因此散射振幅叠加后相消。(详见1.4)

1.2 经典场论

以下式子仅考虑单粒子态 (故只需一个 ϕ 描述)

1.2.1 Lagrangian Field Theory

区别于理论力学中的 Lagrangian Mechanics，场论中将时间 t 与空间坐标 q_i 平权，重写作用量 S:

$$S=\int L\,dt=\int\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)d^4x \tag{1.8}$$

其中 $\mathcal{L}$ 称经典场 $\phi(\boldsymbol{x})$ 的拉格朗日密度，同理由最小作用量原理：

$$\begin{aligned}0=&\delta S\\=&\int d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right\}\\=&\int d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right)-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi\right\}\end{aligned} \tag{1.9}$$

第二项积分在四维时空的边界上，由于初始条件 $\delta\phi=0$ 在边界是给定的，这一项积分结果为 0。又由于剩余积分项中 $\delta\phi=0$ 的任意性，由此要求大括号里为 0，即：

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0 \tag{1.10}$$

1.2.2 Hamitonian Field Theory

场论的拉格朗日公式特别适用于相对论动力学,因为所有的表达式都是显式的洛伦兹不变的。尽管如此,Peskin 在本书的第一部分中任使用哈密顿公式,因为这将使得过渡到量子力学更容易。在 Hamitonian Mechanics 中,我们通过勒让德变换将每一广义坐标 q_i 与广义动量 $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 耦合,类似的在场论中:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) \equiv & \frac{\partial L}{\partial \dot{(\phi)}(\boldsymbol{x})}=\frac{\partial}{\partial \dot{(\phi)}(\boldsymbol{x})} \int \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{y}), \dot{\phi(\boldsymbol{y})})\, d^3 y \\ \stackrel{\text{离散化}}{\sim} & \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}(\boldsymbol{x})} \sum_{\boldsymbol{y}} \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{y}), \dot{\phi}(\boldsymbol{y}))\, d^3 y \\ = & \pi(\boldsymbol{x})\, d^3 x \end{aligned} \tag{1.11}$$

其中 $\pi(\boldsymbol{x})=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\boldsymbol{x})}$ 称经典场 $\phi(\boldsymbol{x})$ 的共轭动量密度。由此带入勒让德变换得到哈密顿量:

$$H=\sum_{\boldsymbol{x}} p \boldsymbol{x} \dot{\phi}(\boldsymbol{x})-L=\int d^3 x\, [\pi(\boldsymbol{x}) \phi(\boldsymbol{x})-\mathcal{L}]=\int d^3 x\, \mathcal{H} \tag{1.12}$$

上式由离散谱过渡到连续谱,其中 $\mathcal{H}$ 称哈密顿量密度。

例 1.1 以标量场 $\phi(x)$ 为例,将 $\phi(x)$ 视作广义坐标,按 L=T-V 的形式构建拉氏量:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2} \dot{\phi}-\frac{1}{2}(\nabla \phi)^2-\frac{1}{2} m^2 \phi^2=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)^2-\frac{1}{2} m^2 \phi^2=\frac{1}{2} \partial_\mu \phi\, \partial^\nu \phi \cdot \eta_{\mu \nu}-\frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{1.13}$$

上式使用西海岸度规 (+,-,-,-)。带入 E-L 方程 1.11 式,我们得到:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+m^2\right) \phi=0=\left(\partial_\mu \partial^\mu+m^2\right) \phi \tag{1.14}$$

这就是我们熟知的 K-G 方程 (但是在当前的语境下,这个场还是经典场,并未量子化)。进一步我们得到哈密顿量:

$$H=\int d^3 x\, \mathcal{H}=\int d^3 x\left[\frac{1}{2} \pi^2+\frac{1}{2}(\nabla \phi)^2+\frac{1}{2} m^2 \phi^2\right] \tag{1.15}$$

我们可以认为三个项分别是,在场在时间中移动的能量,在空间切变的能量,以及场自量。在第 2.3 节和第 2.4 节中,我们将进一步研究哈密顿量。

1.2.3 Noether's Theory

本节主要内容为探究经典场论中对称性与守恒律之间关系,可以证明,一种对称变换对应一种守恒量。在 K-G 场中,类比变分法对场进行一无穷小变换:

$$\phi(x) \rightarrow \phi^{\prime}(x)=\phi(x)+\alpha \Delta \phi(x) \tag{1.16}$$

其中 α 是无穷小参量,$\Delta\phi$ 是场构型的变化。如果在此变化下,拉格朗日量仅仅改变一表面项,对应的作用量是不变化的。如此,导出的运动方程也不变化。即:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}^{\prime}=\mathcal{L}+\alpha \Delta \mathcal{L}=\mathcal{L}+\alpha \partial_\mu \tag{1.17}$$

笔记 *初见这个变换形式会感觉极不自然,明明只需 $\Delta\phi$ 足以描述场的变化量,为什么要多此一举添加一个无穷小参量 α。不加 α 思路如下:*

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{L} = & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)} \Delta \partial_\mu \phi+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Delta \phi \\ = & \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)} \Delta \phi\right)-\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)}\right) \Delta \phi+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Delta \phi \\ \stackrel{E\text{-}L}{=} & \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)} \Delta \phi\right) \end{aligned}$$

类似理论力学的分析,作用量间相差一个关于时间和坐标的函数 $f(x,t)$ 对时间的全导数 $s'=s+\frac{d}{dt}f(x,t)$ 对 E-L 方程无影响。同理在此处作用量 S 变化一个表面项,对时空积分后得到一标量函数,不影响 S 的极值点

(亦不影响 E-L 方程)。

$$\Delta\mathcal{L}=\partial_\mu\mathcal{J}^\mu=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right)=0\Rightarrow j^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi-\mathcal{J}^\mu \tag{1.18}$$

此即诺特流 j^μ。

但是显然此处的 α 并不止是个可以随意消去的常数，如果我们假定 $\alpha=\alpha(\boldsymbol{x})$ 是局域的，则我们可以导出量子场论的规范不变性。*Ward* 恒等式（*Ward identity*），或更广义的 *Takahashi* 恒等式，是量子场论中规范对称性的直接结果。它表达了在量子层面，规范对称性所导致的守恒定律如何约束格林函数（关联函数）之间的关系。*Ward* 恒等式对于证明规范理论的可重整性、保证散射振幅的规范不变性以及理解物理态的幺正性至关重要。

定理 *1.1* (*Ward* 恒等式)

核心在于考虑积分测度的变化。

推导过程就是上述 1.19 式加上系数 α。

守恒律也可以用守恒荷表示。将 1.20 改写

$$\partial_\mu j^\mu=\partial_t\rho+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0 \tag{1.19}$$

借助电动力学里的经验我们我们将四维守恒流 j^μ 拆解为时间项和空间项得到连续性方程的形式，进而类比电荷守恒律我们对全空间进行积分：

$$Q=\int_{allspace}\partial_t\rho d^3x=\int j^0d^3x=-\int\vec{j}\cdot\vec{dS} \tag{1.20}$$

例 1.2 对于无质量 K-G 场 Lagrangian 密度为 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2$，对场 $\phi(x)$ 量进行平移操作 $\phi\to\phi+\alpha$，引起 Lagrangian 变化为 $\mathcal{L}\to\mathcal{L}'=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu(\phi+\alpha)\right)^2=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2=\mathcal{L}$。若要写出其诺特流，有 $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu=\mathcal{L}\to\partial_\mu\mathcal{J}^\mu=0$。对于最简单的情况

$$\mathcal{J}^\mu=0 \tag{1.21}$$

带入(1.18)和 $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2$：$j^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi=\partial_\mu\phi\Delta\phi$，而注意到

$$\phi\to\phi'=\phi+\alpha\Delta\phi=\phi+\alpha\Rightarrow\Delta\phi=1$$

于是有守恒流 $j^\mu=\partial_\mu\phi$。

例 1.3 若标量场为一复标量场，$\mathcal{L}=|\partial_\mu\phi|-m^2\left|\phi^2\right|=(\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi)-m^2\phi^*\phi$，做 U(1) 变换:

$$\phi\to\phi'=\phi\,e^{i\alpha}$$

那么拉格朗日密度变为

$$\mathcal{L}\to\mathcal{L}'=|\partial_\mu\phi|-m^2\left|\phi^2\right|=\mathcal{L}$$

且有：

$$\begin{cases}\phi'=e^{i\alpha}\,\phi\approx\phi+i\alpha\phi=\phi+\alpha\Delta\phi\\ \phi'^*=(e^{i\alpha}\phi)^*\approx\phi^*-i\alpha\phi^*=\phi^*+\alpha\Delta\phi^*\end{cases}$$

同(1.21)，我们有 $\mathcal{J}^\mu=0$。带回(1.18)，我们有：

$$\begin{aligned}j^\mu=&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\Delta\phi^*\\=&i\left[(\partial^\mu\phi^*)\phi-\phi^*(\partial^\mu\phi)\right]\end{aligned} \tag{1.22}$$

例 1.4 时空坐标平移与能动张量的引出。

将 4 维时空坐标做无穷小平移 $x'^\mu=x^\mu-a^\mu$，那么场量 $\phi'(x)=\phi(x+a)\overset{\text{taylor ex}}{=}\phi(x)+a^\mu\partial_\mu\phi(X)$，同理，$\mathcal{L}'=\mathcal{L}+a^\mu\partial_\mu\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}+a^\nu\partial_\mu(\delta^\mu_\nu\mathcal{L}(X))$。对比 $\mathcal{L}'=\mathcal{L}+\alpha\partial_\mu\mathcal{J}^\mu$，我们得到 $\mathcal{J}^\mu=\delta^\mu_\nu$。注意到此时指标不守

恒，因为我们忽略了 a^μ 和 α 的区别，将 a^μ 各个分量单独拿出我们有广义守恒流

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\nu\phi + \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{1.23}$$

此即体系能动张量。

对于四维闵氏时空，我们利用度规将指标降下：

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\sigma\mu}T^\sigma_\nu = \begin{pmatrix} \omega & \frac{S_1}{c} & \frac{S_2}{c} & \frac{S_3}{c} \\ cg_1 & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ cg_2 & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ cg_3 & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

其中 ω 表征体系能量密度，S_i 表征体系能流密度，g_i 为体系动量流密度，T^{11} 为应力张量。

同理我们带入守恒流方程(1.18)，我们有

$$T^\mu_{\nu,\mu} = \frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{1.25}$$

定义 1.1 (能动张量)

在电动力学里我们有，电荷密度和电流密度可以构成一个四维矢量，那么自然联想动量密度 (矢量) 和动量流密度 (张量) 是不是也可以组成一个张量 $T^{\alpha\beta}$。

在 *Winberg* 的引力与宇宙学中，能动张量的引入如下：

考虑一组由 n 标记的粒子，其能动四维矢量为 $p_n^\alpha(t)$，p^α 的密度定义为

$$T^{\alpha 0}(\boldsymbol{x},t) = \sum_n p_n^\alpha(t)\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t)) \tag{1.26}$$

类比电荷密度 $\mathcal{J}^0 = \sum_n e_n\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t))$ 与电流密度 $\mathcal{J}^i = \sum_n e_n\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t))\frac{d\boldsymbol{x}_n^i(t)}{dt}$，我们写出

$$T^{\alpha i}(\boldsymbol{x},t) = \sum_n p_n^\alpha(t)\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t))\frac{d\boldsymbol{x}_n^i(t)}{dt} \tag{1.27}$$

两式统一为：

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n p_n^\alpha\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t))\frac{d\boldsymbol{x}_n^\beta(t)}{dt} \tag{1.28}$$

在特定的单位制下，我们有 $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{E}$，也即 $p_n^\alpha = E_n\frac{dx^\alpha}{dt}$，带入得到：

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n}\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t)) \tag{1.29}$$

从中我们可以看出 $T^{\alpha\beta}$ 是对称张量。改写上式为更加对称的形式 (变 δ^3 为 δ^4)：

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_n\int d\tau\, p_n^\alpha\frac{dx_n^\beta}{d\tau}\delta^4(x - x_n(\tau)) \tag{1.30}$$

其中每个量都是四维矢量，具有洛伦兹不变性，于是 $T^{\alpha\beta}$ 也具有洛伦兹不变性。♣

观察式子(1.27)，我们写出：

$$\begin{aligned} \partial_i T^{\alpha i} &= \sum_n p_n^\alpha(t)\frac{\partial}{\partial x_n^i}\frac{d\boldsymbol{x}_n^i(t)}{dt}\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t)) \\ &= -\sum_n p_n^\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\sum_n p_n^\alpha(t)\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t)) + \sum_n\frac{\partial p_n^\alpha(t)}{\partial t}\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t)) \\ &= -T^{0\alpha} + \sum_n\frac{\partial p_n^\alpha(t)}{\partial t}\delta^3(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_n(t)) \end{aligned} \tag{1.31}$$

简单移项后令 $\sum_n \frac{\partial p_n^\alpha(t)}{\partial t}\delta^3(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_n(t))=G^\alpha$ 为**力密度**，我们写出：

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=G^\alpha \tag{1.32}$$

由于动量守恒，p_n^α 为不随时间变换的常数，我们得到守恒方程：

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=0 \tag{1.33}$$

笔记 *根据该定义我们可以方便地给出自旋的定义，详见 Weinberg 引力与宇宙学。(待补充)*

1.3 谐振子视角下的 K-G 场

省流：从经典场论出发，我们将经典标量场 $\phi(\boldsymbol{x})$ 量子化，方法为将 $\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{x})$ 用符合二次量子化的算子语言重新表述。

对照经典对易关系，我们写出场量对易关系：

$$[\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})]=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y});[\phi(\boldsymbol{x}),\phi(\boldsymbol{y})]=[\pi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})]=0 \tag{1.34}$$

作为 ϕ 和 π 的函数，哈密顿量 H 也成为了算符。我们下个任务就是寻找其本征谱。我们尝试构造动量 p 空间下的 K-G 方程，即在傅里叶空间写出 Klein-Gordon 方程：

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{p},t) \tag{1.35}$$

其中 $\phi^*(\boldsymbol{p})=\phi(-\boldsymbol{p})$

1.4 四维时空中的 K-G 场理论

1.4.1 K-G 场的量子化

在经典场论中，K-G 场的哈密顿量为：

$$H=\int d^3x\left[\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \tag{1.36}$$

其中 π 为动量算符。我们将 ϕ 和 π 视作算符，满足对易关系：

$$[\phi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})]=i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y});[\phi(\boldsymbol{x}),\phi(\boldsymbol{y})]=[\pi(\boldsymbol{x}),\pi(\boldsymbol{y})]=0 \tag{1.37}$$

这使得 ϕ 和 π 可以被视作二次量子化的算符。

接下来，我们将 K-G 场的哈密顿量写成动量空间的形式：

$$H=\int d^3p\left[a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})\left(p^2+m^2\right)^{1/2}+\frac{1}{2}\left(a^\dagger(\boldsymbol{p})a^\dagger(-\boldsymbol{p})+a(-\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})\right)\right] \tag{1.38}$$

其中 $a^\dagger(\boldsymbol{p})$ 和 $a(\boldsymbol{p})$ 分别是粒子的产生和湮灭算符。

通过对哈密顿量进行重新整理，我们可以将其写成谐振子的形式：

$$H=\int d^3p\left[\omega_p\left(a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})+\frac{1}{2}\right)\right] \tag{1.39}$$

其中 $\omega_p=\sqrt{p^2+m^2}$ 是动量为 p 的粒子的能量。这样，我们就将 K-G 场的量子化问题转化为了无数个独立谐振子的量子化问题。每个动量模式 p 对应一个谐振子，其能级由 $a^\dagger(\boldsymbol{p})a(\boldsymbol{p})$ 的本征值决定。

1.5 小结

通过对 K-G 场的量子化，我们成功地将经典场论中的 K-G 方程转化为了量子场论中的谐振子模型。这一过程不仅揭示了场的量子性质，还为理解粒子的产生和湮灭提供了理论基础。未来的研究将进一步探讨相互作

用场论以及更复杂的量子场模型。

$$L_{\mu}^{\nu} \tag{1.40}$$

第二部分

课堂笔记

第二章 Spin-0 Quantum Field

2.1 Klein-Gorden Field

从量子力学到量子场论，我们首先要问的是为什么我们不能直接对粒子进行量子化 (就像量子化非相对论粒子)。省流：解释了单粒子相对论性波动方程的负能态与负概率，同时对于多粒子态的因果性和不同数目粒子态间的转换。

2.1.1 振幅计算

第三章 Action principle (principle of least action)

We note the action as $S[\phi(t)]$. We define the action as the integral of the Lagrangian over the path of the particle,for an example,

例 3.1 Consider a particle of mass m moving in a potential $V(x)$. The Lagrangian is given by $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$, where T is the kinetic energy and V is the potential energy. The action for a 1-dim path $\phi(t)$ from time t_1 to t_2 is then given by $S[\phi(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[\phi(t), \dot{\phi}(t)]dt = \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$.

3.1 How to implement the principle of least action (or variational principle)

For an ordinary function $f(x)$, we know that at the extremum point, the first derivative is zero, i.e., $f'(x) = 0$,minimizing $f(x)$ means$f'(x) = 0$ and $f''(x) > 0$. Then what about the functional $S[x(t)]$?

3.1.1 Euler's approach(direct method)

First we note that the action $S[x(t)]$ is a functional of $x(t)$, i.e., $S[x(t)]$ depends on $t, x, \dot{x}$.

引理 3.1 (Ostrogradsky's theorem)

Higher order derivatives of $S[x(t)]$ with respect to $x^{(n)}(t)$ are proved to be Unstable. To be added. ♡

Euler approximate a general curve by small straight line(ploygon) segments(x_i),then the variation of the action can be expressed as

$$\Delta S[\phi(t)] = \lim_{n\to\infty} [S[\phi(t)] - S[\phi(t_1), \phi(t_2), \ldots, \phi(t_n)]]$$

where $t_0, t_1, \ldots, t_n$ are the n points that divide the interval $[t_1, t_2]$ into n equal parts. i.e., $x_i = x(t_i), t_i = t_1 + i\Delta t$, with $\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{n}$. Then we can approximate the action with a Riemann sum:

$$S[x(t)] \approx \bar{S}[x_i] = \sum_{i=1}^{n} L[t_i, x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}]\Delta t \tag{3.1}$$

then

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial x_i} = \left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_i \Delta t + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right|_i - \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i-1}}\right|_{i-1} \tag{3.2}$$

Then he takes limit $n \to \infty$, i.e., $\Delta t \to 0$ while looking on $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$both parts go 0, $\frac{\partial S}{\partial x} \propto o(\Delta t)$ automatically holds. Therefore he only consider $\frac{\partial \bar{S}[x_i]}{\partial x_i}/\Delta t$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{S}[x_i]}{\partial x_i}/\Delta t =& L(t_i, x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}) + L_{x_i}(t_i, x_i, \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}) \\ :=& \frac{\delta \bar{S}}{\delta x(t)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

This is called the functional derivative/or variation of $S[x(t)]$ with respect to $x(t)$.

3.1.2 Lagrange's method

Consider a small variation of the path $x(t)$ by adding a small function $h(t)$, namely $x(t) \to x(t) + h(t)$ with $h(t)$ to be "small".

Consider two small variations of the path $x(t)$

a. tha variation in both the strong and weak norm, i.e., $|h| \to 0 \quad \& \quad |h'| \to 0$
b. the variation only in the weak norm only, i.e., $|h| \to 0$

Lagrange assusmes that $h(t) = \epsilon\eta(t)$ with ϵ to be "small" and $\eta(t)$ is an arbitrary function that vanishes at the endpoints, i.e., $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. This seems natural and "innocent", but actually it forces $\dot{h}(t) = \epsilon\dot{\eta}(t)$to be "small" as well. So the strong norm variations are excluded here.

Then $S[x(t)+\epsilon\eta(t)] := S[x(t)] + \epsilon^1\delta S[x(t), h(t)] + \epsilon^2\delta^2 S[x(t), h(t)] + o(\epsilon^3)$ it requires that $\frac{\delta S[x(t),h(t)]}{\delta\epsilon} = 0 = \delta_1 S[x(t), h(t)]$.

Let's consider$\delta_1 S$,

$$
\begin{aligned}
S[x(t)+\epsilon\eta] &= \int_{t_0}^{t_{fin}} dt L[x(t)+\epsilon\eta(t), \dot{x}(t)+\epsilon\dot{\eta}(t)] \\
&= \int_{t_0}^{t_{fin}} dt \left\{L[x(t), \dot{x}(t)] + \epsilon\eta L_x + \epsilon\dot{\eta}L_{\dot{x}}(t) + o(\epsilon^2)\right\} \\
&= S[x(t)] + \epsilon\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\eta L_x + \dot{\eta}L_{\dot{x}}\right)\eta(t) \\
&= S[x(t)] + \epsilon\left(\eta L_x\right)\Big|_{t_0}^{t_{fin}} + \epsilon\int_{t_0}^{t_{fin}} dt\,\eta(t)\left(L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\right)
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

so we have

$$
\delta_1 S[x(t), h(t)] = \eta L_x|_{t_0}^{t_{fin}} + \int_{t_0}^{t_{fin}} dt\,\eta(t)\left(L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}}\right) \tag{3.5}
$$

.

EOM requires that $\delta_1 S[x(t), h(t)] = 0$ for arbitrary $\eta(t)$ that vanishes at the endpoints, so the boundary term vanishes.

Here we see ,it's natural to impose boundary conditions in time $\eta(t_0) = \eta(t_{fin}) = 0$.The same as in Euler's direct approach,this is called the Euler-Lagrange equation.

Here the function derivative $\frac{\delta S}{x(t)}$is defined as the coefficient of $\eta(t)dt$ inside the integral,the dt part "explains" why Euler's direct method needs to divide by Δt to get the functional derivative.

3.1.3 examples

$$
L = \frac{1}{2}\sum_i \dot{x}^i\dot{x}_i - V(\sqrt{x^i x_i}) \tag{3.6}
$$

It has rotation symmetry, i.e., $\Lambda^i{}_j x^i x^j = 0$ is invariant under $x^i \to x^i + \Lambda^i{}_j x^j$.If we consider an infinitesimal rotation,

$$
y^i = \Lambda^i{}_j \dot{x}^i\dot{x}_j = (\delta^i{}_j + \epsilon^i{}_j) \tag{3.7}
$$

Since

$$
y^i y^j = \Lambda^i{}_k\Lambda^j{}_l x^k x^l = x^i x^j + (\epsilon^i{}_k x^k x^j + \epsilon^j{}_l x^i x^l) + O(\epsilon^2) = x^i x^j \tag{3.8}
$$

we have $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$. Then the variation of the action is