定义 0.1

一一到上的同态映射称为同构 (*isomorphism*). 又称群同构. 同构 $\mu : G \to G'$ 称为群 G 上的自同构 (*automorphism*).

♣

定义 0.2

群 G 的子群 H 称为正规 (*normal*) 子群或不变 (*invariant*) 子群, 若

$$ghg^{-1} \in H, \quad \forall g \in G, h \in H$$

♣

定义 0.3

李代数 $\mathscr{G}$ 的子代数 $\mathscr{H}$ 称为理想 (*ideal*), 若

$$[A, \mu] \in \mathscr{H}, \forall A \in \mathscr{G}, \mu \in \mathscr{H}$$

♣

定理 0.1

$$\exp(sA) = \gamma(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, A \in V_e$$

$\gamma(s)$ 是由 A 决定的单参子群.

♡

定理 0.2

设 $\phi : \mathbb{R} \times G \to G$ 是由 $A \in V_e$ 对应的左不变矢量场 $\bar{A}$ 产生的单参微分同胚群, 则

$$\phi_t(g) = g \exp(tA), \quad \forall g \in G, t \in \mathbb{R}$$

♡

定理 0.3

$$Exp(A) = exp(A), \quad \forall A \in \mathscr{GL}(m)$$

♡

定理 0.4

设 G 是 $GL(M)$ 的李子群, 则其李代数元 $A, B \in \mathscr{G} \subset \mathscr{GL}(m)$ 的李括号 $[A, B]$ 对应的矩阵的对易子

$$[A, B] = AB - BA$$

♡

第一章 伴随表示和 killing 型

1.1 伴随表示

设 V 是 m($<\infty$) 维实矢量空间, 令

$$\mathscr{L}(V) \equiv \{\text{线性变换}\psi : V \to V\} \equiv \mathscr{T}_V(1,1)$$

则 $\mathscr{L}(V)$ 是 m^2 维矢量空间, 我们给其定义乘法

$$\psi\varphi := \psi \circ \varphi \quad \forall \psi, \varphi \in \mathscr{L}(V)$$

然后我们就可以定义李括号为

$$[\psi, \varphi] := \psi\varphi - \varphi\psi$$

从而使得 $\mathscr{L}(V)$ 成为 m^2 李代数.

定义 1.1

李代数同态映射 $\beta : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(V)$ 称为**李代数 $\mathscr{G}$ 的表示**

同一李群（李代数）可能有不同的表示, 本节介绍李群和李代数的伴随表示, 根据定义0.1, 对任意群 G 的群元可构造映射

$$I_g : G \to G \Longrightarrow I_g(h) := ghg^{-1}, \quad \forall h \in G$$

称为自同构映射, 对于李群而言, 这还是个微分同胚, 所以可以称为李群同构. 根据定义 $I_g(e) = e$, 所以这个映射在 e 点诱导的推前映射（切映射）是 $V_e \to V_e$ 的映射, 记为 $\mathscr{A}d_g$, 因为 V_e 就是 G 的李代数 $\mathscr{G}$, 故而 $\mathscr{A}d_g : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 是线性变换. 最后需要强调的一点, 虽然 I_g 作用到 e 为 e, 但是不代表 $\mathscr{A}d_g$ 会得到相同的切矢, 所以对应的曲线不同.

定理 1.1

设 $\mathscr{G}$ 是李群 G 的李代数, 则有

$$\exp(t(\mathscr{A}d_g A)) = g(\exp tA)g^{-1}$$

proof: 设 $\gamma(t) = \exp(tA), \gamma'(t) = g(\exp tA)g^{-1}$, 首先 $\gamma(t)$ 是单参子群, 且方程左面是 $\mathscr{A}d_g A$ 生成的, 见定理0.1, 下面我们证明 $\gamma'(t)$ 也是单参子群.

$$\gamma'(t+s) = g(\exp(t+s)A)g^{-1} = g(\exp(tA)\exp(sA))g^{-1} = g(\exp(tA)g^{-1}g\exp(sA)g^{-1} = \gamma'(t)\gamma'(s)$$

所以要想证明方程相等, 只需要证明 $\gamma'(t)$ 在恒等元的切矢为 $\mathscr{A}d_g$, 证明如下:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 [g\exp(tA)g^{-1}] = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 [I_g \exp(tA)] = I_{g*}\left.\frac{d}{dt}\right|_0 [\exp(tA)] = I_{g*}A = \mathscr{A}d_g A$$

定理得证.

定理 1.2

设 H 是李群 G 的正规子群 (定义见0.2),$\mathscr{H}$ 是 H 的李代数, 则

$$\mathscr{A}d_g B \in \mathscr{H}, \quad \forall B \in \mathscr{H}, g \in G$$

首先 B 是某个李代数, 会生成一个单参子群 $\exp(tB)$, 又因为是正规子群所以 $g\exp(tB)g^{-1} \subset H$, 可见生成的单参子群也是 H 的单参子群, 又因为

$$\exp(t(\mathscr{A}d_g B)) = g(\exp tB)g^{-1}$$

可见 $\mathscr{A}d_gB \in \mathscr{H}$

定理 1.3

设 $\mathscr{G}$ 是李群 G 的李代数, 则 $\forall A, B \in \mathscr{G}$ 有

$$[A, B] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathscr{A}d_{(\exp tA)}B)$$

设 ϕ 是由 A 产生的单参微分同胚群. 同定理0.4的证明

$$[A, B] = [\bar{A}, \bar{B}]_e = (\mathscr{L}_{\bar{A}}\bar{B})_e = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\phi_{-t*}\bar{B}_{\phi_t(e)})$$

因为定理0.2, 有 $\phi_t(e) = e(\exp(tA)) = \exp(tA)$, 则有 $\bar{B}_{\phi_t(e)} = L_{\exp(tA)*}B$, 则

$$[A, B] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} [(\phi_{-t} \circ L_{\exp(tA)})_*B]$$

另一方面有

$$I_{\exp(tA)}(g) = \exp(tA)g\exp(-tA) = \phi_{-t}[\exp(tA)(g)] = \phi_{-t}[L_{\exp(tA)}(g) = (\phi_{-t} \circ L_{\exp(tA)})(g)$$

即 $I_{\exp(tA)} = \phi_{-t} \circ L_{\exp(tA)}$, 代入前面式子

$$[A, B] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (I_{\exp(tA)*}B) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathscr{A}d_{\exp(tA)}B)$$

定理 1.4

设 H 是连通李群 G 的连通李子群,$\mathscr{H}$ 和 $\mathscr{G}$ 分别是 H 和 G 的李代数, 则 H 是 G 的正规子群 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的理想 (理想的定义见0.3).

证明

1. $(\Rightarrow)$ 由定理1.2知 $\mathscr{A}d_{\exp(tA)}B \in \mathscr{H}, \quad \forall A \in \mathscr{G}, B \in \mathscr{H}, t \in \mathbb{R}$ 根据定理1.3,$[A, B] \in \mathscr{H}$, 根据理想的定义,$\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{G}$ 的理想.
2. $(\Leftarrow)$

   引理 1.1

   只要 H 是连通李群的连通李子群, 则 $\forall h \in H, \exists B_1, B_2, \cdots \in \mathscr{H}$ 使得 $h = \exp(B_1)\exp(B_2)\cdots$(有限个指数之积)

   引理就交给数学家证明吧.

   当 $h = \exp(B), B \in \mathscr{H}$ 时

   $$ghg^{-1} = g(\exp B)g^{-1} = \exp(\mathscr{A}d_gB) \in H$$

   当 $h = \exp(B_1)\exp(B_2)\cdots$ 则有

   $$ghg^{-1} = g\exp(B_1)\exp(B_2)\cdots h^{-1} = g\exp(B_1)g^{-1}g\exp(B_2)\cdots h^{-1} = h_1h_2\cdots \in H$$

   则 H 是 G 的正规子群.

笔记 *理想在李代数的地位就是正规子群在群论的地位.*

因为推前映射的线性性, 不难知道 $\mathscr{A}d_g : \mathscr{G} \xrightarrow{\text{线性}} \mathscr{G} \Rightarrow \mathscr{A}d_g \in \mathscr{L}(\mathscr{G})$, 由此可见, 每有一个 g 便可以通过映射 $\mathscr{A}d : g \mapsto \mathscr{A}d_g$ 获得一个 $\mathscr{L}(\mathscr{G})$ 的元素, 便有映射

$$\mathscr{A}d : G \to \{\mathscr{G}\text{上可逆线性变换}\} \subset \mathscr{L}(\mathscr{G})$$

为什么会有可逆的? 是因为 $I_g : G \to G$ 是微分同胚, 保证了 $I_{g*} : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 是同构映射, 便存在了逆映射. 故$\mathscr{G}$上可逆线性变换对应于一个矩阵群 $GL(m, \mathbb{R})$

定理 1.5

$\mathscr{A}d : G \to \{\mathscr{G}$上的可逆线性变换$\}$ 是同态映射.

证明

$$\mathscr{A}d_{gh} = I_{gh*} = (I_g \circ I_h)_* = I_{g*} \circ I_{h*} = \mathscr{A}d_g \circ \mathscr{A}d_h$$

群元的复合映射就是群乘积, 所以有 $\mathscr{A}d_{gh} = \mathscr{A}d_g \cdot \mathscr{A}d_h$ 可见是同态映射.

笔记 $I_{gh}(m) = ghmh^{-1}g^{-1} = I_g(I_h m) = I_g \circ I_h(m) \Rightarrow I_{gh} = I_g \circ I_h$

定义 1.2

同态映射 $\mathscr{A}d : G \to \{\mathscr{G}$上可逆线性变换$\}$ 称为**李群 *G* 的伴随表示** *(adjoint representation)*

定义映射 $ad_A := [A, B], \quad \forall B \in \mathscr{G}$ 由李括号的线性性可知 $ad_A : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 有如下两个性质:

(a). $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{G}, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ 有 $ad_A(\beta_1 B_1 + \beta_2 B_2) = \beta_1 ad_A(B_1) + \beta_2 ad_A(B_2)$

(b). $\forall A_1, A_2 \in \mathscr{G}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ 有 $ad_{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \alpha_1 ad_{A_1} + \alpha_2 ad_{A_2}$

性质 (a) 表明 ad_A 是 $\mathscr{G}$ 上的线性变换, 即 $ad_A \in \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 也可以看作 (1,1) 型张量, 则有

$$(ad_A)^c{}_b B^b = [A, B]^c = C^c{}_{ab} A^a B^b, \quad \forall B^b \in \mathscr{G}$$

甩掉 B^b 后有

$$(ad_A)^c{}_b = A^a C^c{}_{ab}$$

映射 $ad_A, \quad A \in \mathscr{G}$, 虽然与 $\mathscr{A}d_g, \quad g \in G$, 但两者有如下关系:

$$\mathscr{A}d_{exp(A)} = \mathrm{Exp}(ad_A)$$

证明 构造映射 $\gamma(t) = \mathscr{A}d_{\exp(tA)}, \gamma'(t) = \mathrm{Exp}(t(ad_A))$, 由定理0.3, 可见 $\gamma'(t)$ 是由 ad_A 唯一决定的单参子群 $\exp(t(ad_A))$, 由于 $\mathscr{A}d$ 是同态映射, 再结合 $\exp(t+s)A = \exp tA + \exp sA$ 说明 $\gamma(t)$ 也是单参子群. 又因为二者都是 $\mathscr{G} \to \mathscr{G}$ 的映射, 可见它们是同一个群. 要证明二者相等, 问题就比较简单了, 只需要证明均过恒等元, 且在切矢量相同即可, 当 $t = 0$ 时, 两者不难看出是恒等元. 我们来看切矢量, 对于 $\gamma(t)$ 由定理1.3可以看出

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\mathscr{A}d_{\exp(tA)}) = ad_A$$

对于 $\gamma'(t)$, 很明显, 切矢为 ad_A, 所以可以得到结论

$$\mathscr{A}d_{\exp(tA)} = \mathrm{Exp}(t(ad_A))$$

当 $t = 1$ 时, 便有我们想要的结果.

笔记 以上证明为个人所想, 如有错误请及时指出.

既然每一个 $A \in \mathscr{G}$ 对应于一个 $ad_A \in \mathscr{L}(\mathscr{G})$, 便有从 $\mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 记作 $ad : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$, 性质 (b) 表明 ad 是线性映射, 接下来我们来看映射是否是同态映射李代数的同态映射, 就是看它是否保李括号. 即

$$\begin{aligned} ad_{[A,B]}(C) &= [[A, B], C] = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] \\ &= [A, [B, C]] - [B, [A, C]] \\ &= ad_A(ad_B(C)) - ad_B(ad_A(C)) \\ &= (ad_A ad_B - ad_B ad_A)(C) \end{aligned}$$

由此可见 $ad_{[A,B]} = [ad_A, ad_B]$

定义 1.3

同态映射 $ad : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G}$ **李代数** $\mathscr{G}$ **的伴随表示**$)$

五个映射总结

1. $I_g : G \to G$
2. $\mathscr{A}d_g : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$
3. $\mathscr{A}d : G \to \{\mathscr{G}$上可逆线性变换$\}$ 为李群的伴随表示
4. $ad_A : \mathscr{G} \to \mathscr{G}, \quad A \in \mathscr{G}$
5. $ad : \mathscr{G} \xrightarrow{线} \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 为李代数的伴随表示

实际上 $\mathscr{A}d_*$ 作为推前映射 (切映射) 与 ad 相等, 有定理

定理 1.6

映射 $\mathscr{A}d_* : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 与 $ad : \mathscr{G} \to \mathscr{L}(\mathscr{G})$ 相等

证明 只需要证明 $(\mathscr{A}d_* A)(B) = ad_A(B) \quad \forall A, B \in \mathscr{G}$

$$\mathscr{A}d_* A = \mathscr{A}d_*[\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tA)] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathscr{A}d(\exp(tA)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathscr{A}d_{\exp(tA)}$$

故有

$$\mathscr{A}d_* A(B) = [\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathscr{A}d_{\exp(tA)}(B)] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\mathscr{A}d_{\exp(tA}B) = [A, B] = ad_A(B)$$

1.2 killing 型

利用 $\mathscr{G}$ 伴随表示可以定义映射 $K : \mathscr{G} \times$
$mathscrG \to \mathbb{R}$ 如下：

$$K(A, B) := \mathrm{tr}(ad_A ad_B), \quad \forall A, B \in \mathscr{G}$$

其中 ad_A, ad_B 是映射先后作用. 加上求迹后, 不难看出这是一个对称的双线性映射, 可以看作是 $\mathscr{G}$ 上的 $(0, 2)$ 对称张量, 在李代数理论中称为 killing 型.

定理 1.7

$K([A, B], C) = K(A, [B, C]), \quad \forall A, B \in \mathscr{G}$

证明

$$\begin{aligned}
K([A, B], C) &= \mathrm{tr}(ad_{[A,B]} ad_C) \\
&= \mathrm{tr}([ad_A, ad_B] ad_C) \\
&= \mathrm{tr}(ad_A ad_B ad_C - ad_B ad_A ad_C) \\
&= \mathrm{tr}(ad_A ad_B ad_C - ad_A ad_C ad_B) \\
&= \mathrm{tr}(ad_A [ad_B, ad_C]) \\
&= K(A, [B, C])
\end{aligned}$$

注意：求迹可以交换顺序, 不影响结果.