Diplomatura en Programación

Trabajo práctico 1: Funciones y Polinomios

Mayo 2022

NOMBRE: LUDUEÑA SAAVEDRA LUCIANO GASTÓN

DNI: 39621076

Ejercicio 1:

Sea el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^5 + 6x - 7x^3 - x^2 + x^4$$

1) ¿Cuántas raíces (ceros) tendrá? ¿Por qué?
2) Calcular el valor numérico del polinomio para x=+3.
3) Realizar la descomposición factorial del polinomio dado.

Ejercicio 2:

Simplificar el siguiente cociente de polinomios:

$$\frac{4x^7 + 12x^6 - 4x^5 - 12x^4}{2x^5 - 10x^4 - 2x^3 + 10x^2}$$

Ejercicio 3:

Desarrollar las siguientes expresiones:

1) $(4x - 3)^2$
2) $(2x - 3)^3$

Ejercicio 4:

Sea la función:

$$P(x) = x^5 + 6x - 7x^3 - x^2 + x^4$$

Indicar el Dominio y el Codominio de la función.

a) Encontrar la/s intersección/es con el eje y, y la/s intersección/es con el eje x (ayuda: ver el polinomio del Ejercicio 1).
b) ¿Es continua esta función?

c) Realizar un bosquejo de la función

d) En base al bosquejo o realizando cálculos analíticos, evaluar si la gráfica de esta función polinómica es par, es impar, no es par o no es impar.

A continuación se adjuntan las hojas con las respuestas y su desarrollo, en modo foto escaneada y foto original. Ambos formatos tienen el mismo contenido, solamente incluyo ambos por si hubiese algún problema de legibilidad.
Todas las hojas contienen mi nombre y se encuentran numeradas para mejor lectura.

HOJAS ESCANEADAS

Ludueña Saavedra Luciano Gastón | HOJA N° 1/8 | FECHA

Ejercicio 1

Sea el Polinomio: $P(x) = x^5 + 6x - 7x^3 - x^2 + 4x$

1) ¿Cuántas raíces tendrá? ¿Por qué?

Tendrá 5 raíces, que son indicadas por el grado del Polinomio, y en este caso es de grado 5 por ser x^5 el máximo exponente.

Sus valores son

$-3, -2, 0, 1, 2$ (Se calculan más adelante)

2) Calcular el valor numérico del polinomio para $x = 3$

$P(3) = 3^5 + 6.3 - 7.(3^3) - 3^2 + 3^4$

$P(3) = 243 + 18 - 7.27 - 9 + 81$

$P(3) = 243 + 18 - 189 - 9 + 81$

$\boxed{P(3) = 144}$

3) Realizar la descomposición factorial del polinomio anterior

$P(x) = x^5 + 6x - 7x^3 - x^2 + x^4$

a) Ordenar $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x$

b) 6 = término constante
1 = coeficiente principal

$x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x = x(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6)$

c) Posibles raíces $\Rightarrow \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

d) Teorema del resto $\Rightarrow P(1) = 1 + 6 - 7 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{1 \text{ es raíz}}$

NOTA

SIGUE →

e) Aplico Ruffini sobre $(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : (x - 1)$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
1	1	1	-7	-1	6
		1	2	-5	-6
	1	2	-5	-6	0

$\Rightarrow (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)(x - 1)$

1	1	2	-5	-6
		1	3	-2
	1	3	-2	-8

$\Rightarrow$ 1 no es raíz

-1	1	2	-5	-6
		-1	-1	6
	1	1	-6	0

$\Rightarrow (x^2 + x - 6)(x + 1)$

f) aplico la ecuación cuadrática a $x^2 + x - 6$

$$x_{1-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = (-1 + 5) : 2 = \boxed{2}$$

$$x_2 = (-1 - 5) : 2 = \boxed{-3}$$

$\Rightarrow (x - 2)(x + 3)$

g) Junto los monomios obtenidos

$$x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x = x(x-2)(x-1)(x+1)(x+3)$$

h) Obtengo las raíces $\Rightarrow -3, -1, 0, 1, 2$

3) La descomposición factorial de $x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x = x(x-2)(x-1)(x+1)(x+3)$

	Ludueño Saavedra Luciano Gastón	HOJA N° 3/8
		FECHA

2) Simplificar: $\dfrac{4x^7 + 12x^6 - 4x^5 - 12x^4}{2x^5 - 10x^4 - 2x^3 + 10x^2}$

a) factorizar $4x^7 + 12x^6 - 4x^5 - 12x^4 = 4x^4(x^3+3x^2-x-3)$

$4x^4(x^3+3x^2-x-3) = 4x^4((x^3+3x^2)+(-x-3))$

$4x^4((x^3+3x^2)+(-x-3)) = 4x^4(x^2(x+3)-1(x+3))$

$4x^4(x^2(x+3)-1(x+3)) = 4x^4(x+3)(x^2-1)$

$4x^4(x+3)(x^2-1) = \boxed{4x^4(x+3)(x-1)(x+1)}$

b) factorizar $2x^5 - 10x^4 - 2x^3 + 10x^2 = 2x^2(x^3-5x^2-x+5)$

$2x^2((x^3-5x^2)+(5-x)) = 2x^2(x^2(x-5)-1(x-5))$

$2x^2(x^2(x-5)-1(x-5)) = 2x^2(x-5)(x^2-1)$

$2x^2(x-5)(x^2-1) = \boxed{2x^2(x-5)(x-1)(x+1)}$

c) Simplificar

$$\frac{4x^4(x+3)\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}{2x^2(x-5)\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} =$$

$$\frac{4x^4(x+3)}{2x^2(x-5)} = \frac{2.2x^4(x+3)}{\cancel{2}x^2(x-5)} = \frac{2x^2\cancel{x^2}(x+3)}{\cancel{x^2}(x-5)} = \boxed{\frac{2x^2(x+3)}{x-5}}$$

3) Desarrollar las siguientes expresiones:

1) $(4x-3)^2 = 4^2x^2 - 2.4x.3 + 3^2$

$= 16x^2 - 24x + 9$

2) $(2x-3)^3 = 2^3x^3 - 3.3.2^2x^2 + 3.3^2x + 3^3$

$= 8x^3 - 36x^2 + 27x + 27$

4) Dada la función $f(x) = x^5 + 6x - 7x^3 - x^2 + x^4$

a) Indicar Dominio y Codominio de la función

- El Dominio de $f(x)$ es $(-\infty, \infty)$, ya que cualquier R (número real) genera un valor para $f(x)$.

- La imagen es también $(-\infty, \infty)$, ya que es un polinomio de grado impar, y por lo tanto, incluye a todos los números reales (R).

b) Encontrar las intersecciones con los ejes x e y.

- Calculo la intersección con el eje y:

$$f(0) = 0^5 + 6.0 - 7.(0^3) - 0^2 + 0^4$$

$$f(0) = 0 + 0 - 0 - 0 + 0$$

$$f(0) = 0 \qquad \Rightarrow (0, 0)$$

- Utilizo las raíces obtenidas en el primer ejercicio para obtener las intersecciones en el eje x:

$$(-3, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0)$$

c) ¿Es continua esta función?

- La función es continua, ya que:

- para todo valor de x (real), $f(x)$ tiene un valor calculable
- el límite de x cuando x tiende a 0 es 0, y 0 es un valor finito
- el $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$
- Además, la función es dibujable sin levantar el lápiz

Ludueña Saavedra Luciano Gastón | HOJA N° 5/8 | FECHA

d) Realizar un bosquejo de la función.

- Primero quiero obtener puntos cercanos al vértice de las pendientes para representar la curva de la mejor manera:

- Para la pendiente entre $(-3,0)$ y $(-1,0)$ voy a calcular $f(-2)$ y $f(-2,4)$

$$f(-2) = (-2)^5 + (-2)^4 - 7.(-2^3) - (-2^2) + 6.(-2)$$

$$= -32 + (+16) + 56 - (+4) + (-12)$$

$$= -32 + 16 + 56 - 4 - 12$$

$$= 72 - 48$$

$$\boxed{f(-2) = 24}$$

$$f(-2,4) = (-2,4)^5 + (-2,4)^4 - 7.(-2^3) - (-2,4)^2 + 6.(-2,4)$$

$$= -79,6 + 33,17 + 96,76 - 5,76 + (-14,4)$$

$$\boxed{f(-2,4) = 30,16}$$

- Para la pendiente entre $(-1,0)$ y $(0,0)$ voy a calcular $f(-0,5)$ y $f(-0,4)$

$$f(-0,5) = -0,5^5 + (-0,5)^4 - 7.(-0,5)^3 - (-0,5)^2 + 6.-0,5$$

$$= -0,03 + 0,06 + 0,87 - 0,25 - 3$$

$$\boxed{f(-0,5) = -2,35}$$

$$f(-0,4) = -0,4^5 + (-0,4)^4 - 7.(-0,4)^3 - (-0,4)^2 + 6.-0,4$$

$$= -0,01 + 0,02 + 0,44 - 0,16 + (-2,4)$$

$$\boxed{f(-0,4) = -2,11}$$

- Para la pendiente entre los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ voy a calcular $f(0,5)$ y $f(0,75)$:

$$f(0,5) = 0,5^5 + 0,5^4 - 7 . 0,5^3 - 0,5^2 + 6 . 0,5$$

$$= 0,03 + 0,06 - 0,875 - 0,25 + 3$$

$$\boxed{f(0,5) = 1,96}$$

$$f(0,75) = 0,75^5 + 0,75^4 - 7 . 0,75^3 - 0,75^2 + 6 . 0,75$$

$$= 0,237 + 0,316 - 2,953 - 0,562 + 4,5$$

$$\boxed{f(0,75) = 1,538}$$

- Para la pendiente entre los puntos $(1,0)$ y $(2,0)$ voy a calcular $f(1,6)$ y $f(1,8)$:

$$f(1,6) = 1,6^5 + 1,6^4 - 7 . 1,6^3 - 1,6^2 + 6 . 1,6$$

$$= 10,485 + 6,553 - 28,672 - 2,56 + 9,6$$

$$\boxed{f(1,6) = -4,592}$$

$$f(1,8) = 1,8^5 + 1,8^4 - 7 . 1,8^3 - 1,8^2 + 6 . 1,8$$

$$= 18,895 + 10,497 - 40,824 - 3,24 + 10,8$$

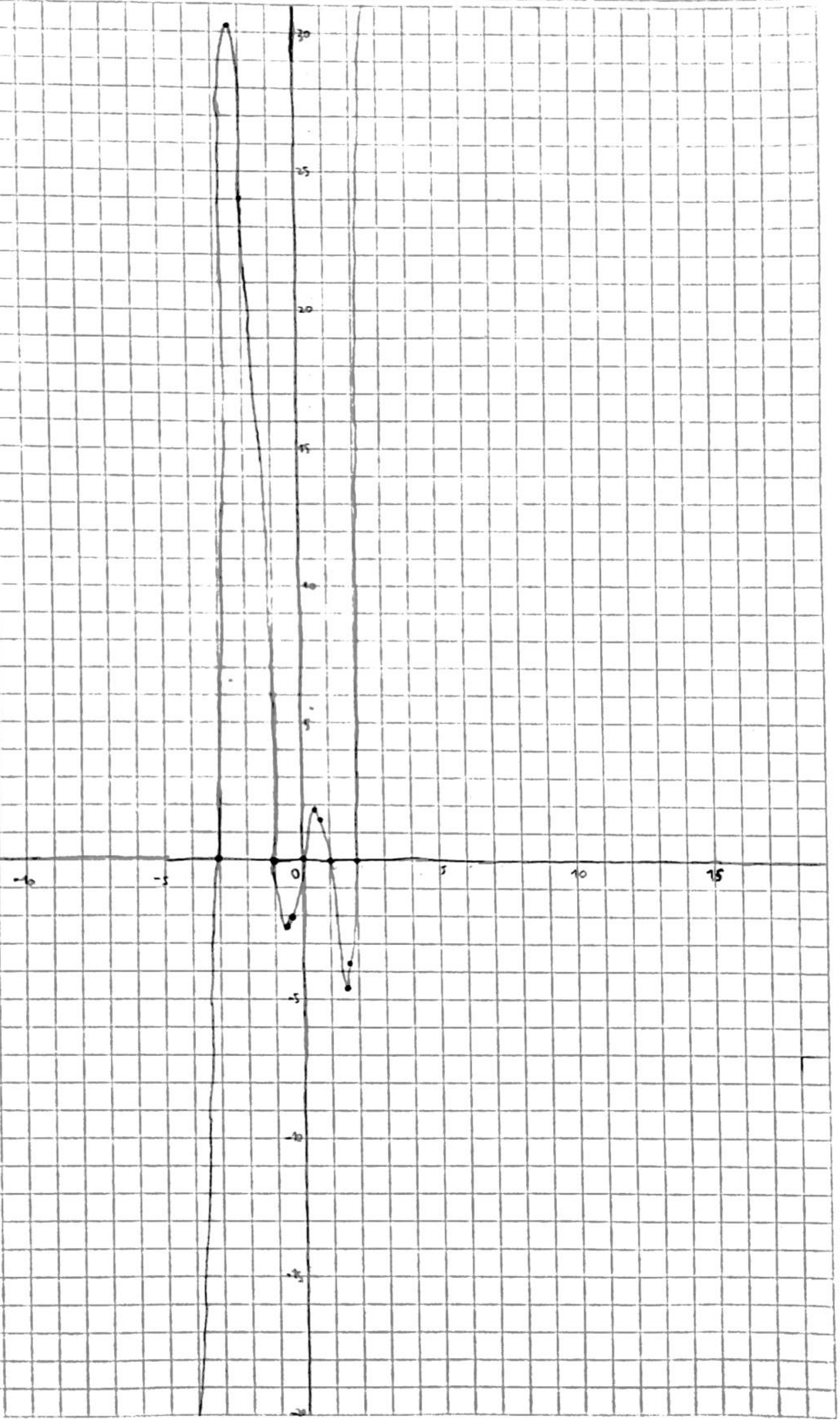
$$\boxed{f(1,8) = -3,872}$$

Ludueña Saavedra Luciano Gastón

HOJA N° 7/8

FECHA

Puntos: (-3; 0)
(-1; 0)
(0; 0)
(1; 0)
(2; 0)
(-2; 24)
(-2,4; 30,16)
(-0,5; -2,35)
(-0,4; -2,11)
(0,5; 1,96)
(0,75; 1,538)
(1,6; -4,59)
(1,8; -3,872)



e) En base al bosquejo, evaluar si la gráfica es par, impar, no es par o no es impar

- No es par ya que $f(-x) \neq f(x)$, a saber:

$f(-2) = 24$ (calculado anteriormente)

$f(2) = 0$ (es raíz)

$\boxed{f(-2) \neq f(2)}$

- No es impar ya que $-f(x) \neq f(-x)$, a saber:

$f(-2) = 24$ (ya calculado anteriormente)

$-f(x) = -x^5 - x^4 + 7x^3 + x^2 - 6x$

$-f(2) = -2^5 - 2^4 + 7.2^3 + 2^2 - 6.2$

$-f(2) = -32 - 16 + 56 + 4 - 12$

$-f(2) = -60 + 60$

$-f(2) = 0$

$\boxed{-f(2) \neq f(-2)}$

La función NO ES PAR y NO ES IMPAR

FOTOS ORIGINALES

Ejercicio 1

Sea el Polinomio: $P(x) = x^5 + 6x - 7x^3 - x^2 + 4x$

1) ¿Cuántas raíces tendrá? ¿Por qué?

Tendrá 5 raíces, que son indicadas por el grado del Polinomio, y en este caso es de grado 5 por ser x^5 el máximo exponente.
Sus valores son

$-3, -2, 0, 1, 2$ (Se calculan más adelante)

2) Calcular el valor numérico del polinomio para $x = 3$

$P(3) = 3^5 + 6.3 - 7.(3^3) - 3^2 + 3^4$

$P(3) = 243 + 18 - 7.27 - 9 + 81$

$P(3) = 243 + 18 - 189 - 9 + 81$

$\boxed{P(3) = 144}$

3) Realizar la descomposición factorial del polinomio anterior.

$P(x) = x^5 + 6x - 7x^3 - x^2 + x^4$

a) ordenar $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x$

b) 6 = término constante
1 = coeficiente principal

$x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x = x(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6)$

c) Posibles raíces $\Rightarrow$ $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

d) Teorema del resto $\Rightarrow P(1) = 1 + 6 - 7 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{1 \text{ es raíz}}$

e) Aplico Ruffini sobre $(x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6) : (x - 1)$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
1	1	1	-7	-1	6
		1	2	-5	-6
	1	2	-5	-6	0

$\Rightarrow (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)(x - 1)$

1	1	2	-5	-6
		1	3	-2
	1	3	-2	-8

$\Rightarrow$ 1 no es raíz

-1	1	2	-5	-6
		-1	-1	6
	1	1	-6	0

$\Rightarrow (x^2 + x - 6)(x + 1)$

f) aplico la ecuación cuadrática a $x^2 + x - 6$

$$x_{1-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 . 1 . (-6)}}{2 . 1}$$

$$x_{1-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x_1 = (-1 + 5) : 2 = \boxed{2}$$

$$x_2 = (-1 - 5) : 2 = \boxed{-3}$$

$\Rightarrow (x - 2)(x + 3)$

g) Junto los monomios obtenidos:

$$x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x = x(x-2)(x-1)(x+1)(x+3)$$

h) Obtengo las raíces $\Rightarrow -3, -1, 0, 1, 2$

3) La descomposición factorial de $x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x = x(x-2)(x-1)(x+1)(x+3)$

Ludueña Saavedra Luciano Gastón

HOJA N° 3/8

FECHA

2) Simplificar:
$$\frac{4x^7+12x^6-4x^5-12x^4}{2x^5-10x^4-2x^3+10x^2}$$

a) Factorizar
$$4x^7+12x^6-4x^5-12x^4 = 4x^4(x^3+3x^2-x-3)$$
$$4x^4(x^3+3x^2-x-3) = 4x^4((x^3+3x^2)+(-x-3))$$
$$4x^4((x^3+3x^2)+(-x-3)) = 4x^4(x^2(x+3)-1(x+3))$$
$$4x^4(x^2(x+3)-1(x+3)) = 4x^4(x+3)(x^2-1)$$
$$4x^4(x+3)(x^2-1) = \boxed{4x^4(x+3)(x-1)(x+1)}$$

b) factorizar
$$2x^5-10x^4-2x^3+10x^2 = 2x^2(x^3-5x^2-x+5)$$
$$2x^2((x^3-5x^2)+(5-x)) = 2x^2(x^2(x-5)-1(x-5))$$
$$2x^2(x^2(x-5)-1(x-5)) = 2x^2(x+5)(x^2-1)$$
$$2x^2(x-5)(x^2-1) = \boxed{2x^2(x-5)(x-1)(x+1)}$$

c) Simplificar
$$\frac{4x^4(x+3)\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}{2x^2(x-5)\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} =$$

$$\frac{4x^4(x+3)}{2x^2(x-5)} = \frac{2.2x^4(x+3)}{\cancel{2}x^2(x-5)} = \frac{2x^2\cancel{x^2}(x+3)}{\cancel{x^2}(x-5)} = \boxed{\frac{2x^2(x+3)}{x-5}}$$

3) Desarrollar las siguientes expresiones:

1) $(4x-3)^2 = 4^2x^2 - 2.4x.3 + 3^2$

$= 16x^2 - 24x + 9$

2) $(2x-3)^3 = 2^3x^3 - 3.3.2^2x^2 + 3.3^2x + 3^3$

$= 8x^3 - 36x^2 + 27x + 27$

NOTA

4) Dada la función $f(x) = x^5 + 6x - 7x^3 - x^2 + x^4$

a) Indicar Dominio y Codominio de la función

- El Dominio de $f(x)$ es $(-\infty, \infty)$, ya que cualquier $\mathbb{R}$ (número real) genera un valor para $f(x)$.

- La imagen es también $(-\infty, \infty)$, ya que es un polinomio de grado impar, y por lo tanto, incluye a todos los números reales ($\mathbb{R}$)

b) Encontrar las intersecciones con los ejes x e y.

- Calculo la intersección con el eje y:

$$f(0) = 0^5 + 6.0 - 7.(0^3) - 0^2 + 0^4$$

$$f(0) = 0 + 0 - 0 - 0 + 0$$

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow (0,0)$$

- Utilizo las raíces obtenidas en el primer ejercicio para obtener las intersecciones en el eje x:

$$(-3,0), (-1,0), (0,0), (1,0), (2,0)$$

c) ¿Es continua esta función?

- La función es continua, ya que:

- para todo valor de x (real), $f(x)$ tiene un valor calculable
- el límite de x cuando x tiende a 0 es 0, y 0 es un valor finito
- el $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$
- Además, la función es dibujable sin levantar el lápiz

d) Realizar un bosquejo de la función.

+Primero quiero obtener puntos cercanos al vértice de las pendientes para representar las curvas de la mejor manera:

+Para la pendiente entre $(-3,0)$ y $(-1,0)$ voy a calcular $f(-2)$ y $f(-2,4)$

$$f(-2) = (-2)^5 + (-2)^4 - 7.(-2^3) - (-2^2) + 6.(-2)$$

$$= -32 + (+16) + 56 - (+4) + (-12)$$

$$= -32 + 16 + 56 - 4 - 12$$

$$= 72 - 48$$

$$\boxed{f(-2) = 24}$$

$$f(-2,4) = (-2,4)^5 + (-2,4)^4 - 7.(-2^3) - (-2,4)^2 + 6.(-2,4)$$

$$= -79,6 + 33,17 + 96,76 - 5,76 + (-14,4)$$

$$\boxed{f(-2,4) = 30,16}$$

+Para la pendiente de $(-1,0)$ y $(0,0)$ voy a calcular $f(-0,5)$ y $f(-0,4)$

$$f(-0,5) = -0,5^5 + (-0,5)^4 - 7.(-0,5)^3 - (-0,5)^2 + 6.-0,5$$

$$= -0,03 + 0,06 + 0,87 - 0,25 - 3$$

$$\boxed{f(-0,5) = -2,35}$$

$$f(-0,4) = -0,4^5 + (-0,4)^4 - 7.(-0,4)^3 - (-0,4)^2 + 6.-0,4$$

$$= -0,01 + 0,02 + 0,44 - 0,16 + (-2,4)$$

$$\boxed{f(-0,4) = -2,11}$$

- Para la pendiente entre los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ voy a calcular $f(0{,}5)$ y $f(0{,}75)$

$$f(0{,}5) = 0{,}5^5 + 0{,}5^4 - 7 \cdot 0{,}5^3 - 0{,}5^2 + 6 \cdot 0{,}5$$

$$= 0{,}03 + 0{,}06 - 0{,}875 - 0{,}25 + 3$$

$$\boxed{f(0{,}5) = 1{,}96}$$

$$f(0{,}75) = 0{,}75^5 + 0{,}75^4 - 7 \cdot 0{,}75^3 - 0{,}75^2 + 6 \cdot 0{,}75$$

$$= 0{,}237 + 0{,}316 - 2{,}953 - 0{,}562 + 4{,}5$$

$$\boxed{f(0{,}75) = 1{,}538}$$

- Para la pendiente entre los puntos $(1,0)$ y $(2,0)$ voy a calcular $f(1{,}6)$ y $f(1{,}8)$

$$f(1{,}6) = 1{,}6^5 + 1{,}6^4 - 7 \cdot 1{,}6^3 - 1{,}6^2 + 6 \cdot 1{,}6$$

$$= 10{,}485 + 6{,}553 - 28{,}672 - 2{,}56 + 9{,}6$$

$$\boxed{f(1{,}6) = -4{,}592}$$

$$f(1{,}8) = 1{,}8^5 + 1{,}8^4 - 7 \cdot 1{,}8^3 - 1{,}8^2 + 6 \cdot 1{,}8$$

$$= 18{,}895 + 10{,}497 - 40{,}824 - 3{,}24 + 10{,}8$$

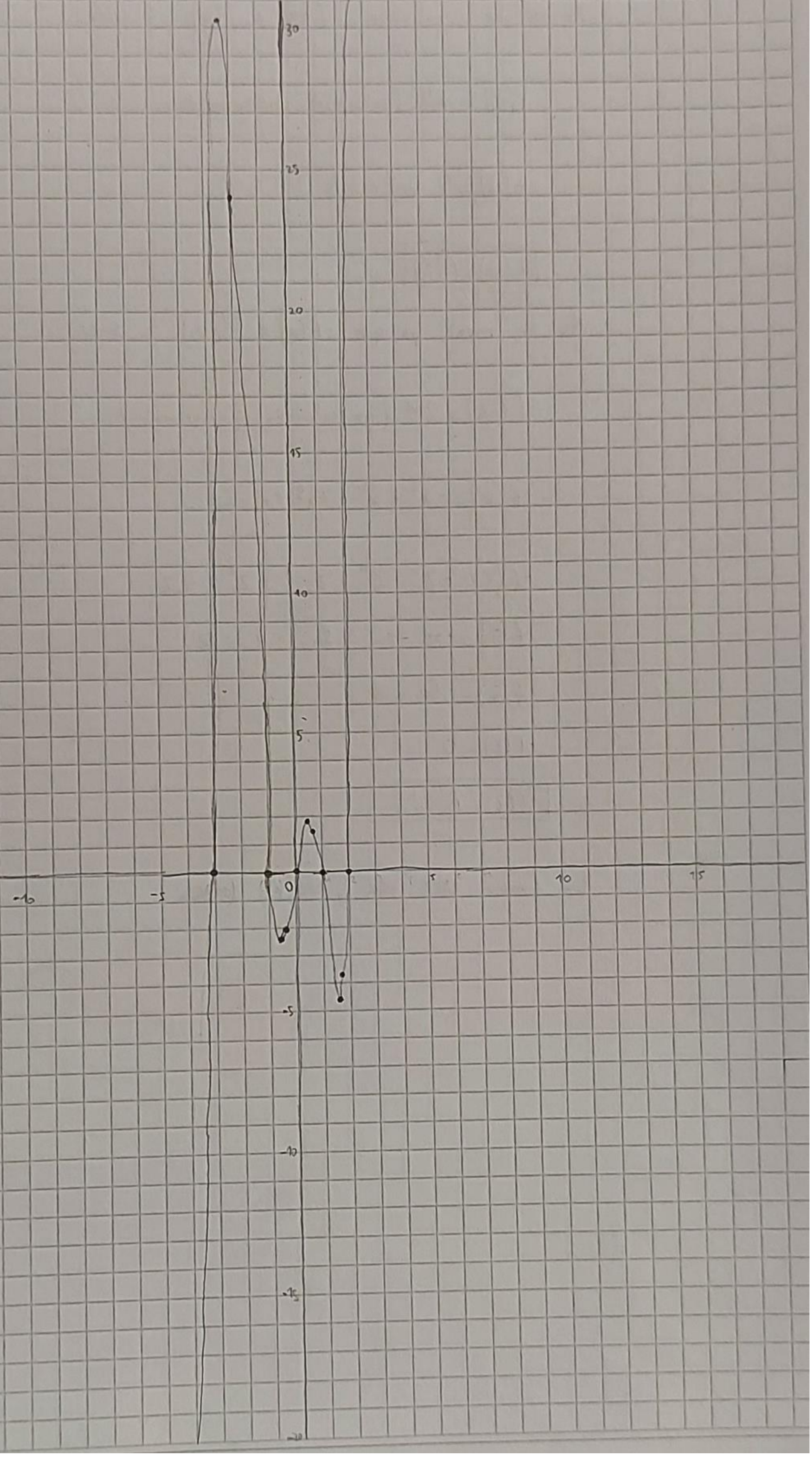
$$\boxed{f(1{,}8) = -3{,}872}$$

Ludueña Saavedra Luciano Gastón

HOJA N° 7/8

FECHA

Puntos: (-3,0)
(-1;0)
(0;0)
(1;0)
(2;0)
(-2;24)
(-2,4;30,16)
(-0,5;-2,35)
(-0,4;-2,11)
(0,5 ; 1,96)
(0,75; 1,538)
(1,6; -4,59)
(1,8; -3,872)



e) En base al bosquejo, evaluar si la gráfica es par, impar, no es par o no es impar

- No es par ya que $f(-x) \neq f(x)$. a saber:

$f(-2) = 24$ (calculado anteriormente

$f(2) = 0$ (es raíz)

$\boxed{f(-2) \neq f(2)}$

- No es impar ya que $-f(x) \neq f(-x)$. a saber:

$f(-2) = 24$ (ya calculado anteriormente)

$-f(x) = -x^5 - x^4 + 7x^3 + x^2 - 6x$

$-f(2) = -2^5 - 2^4 + 7.2^3 + 2^2 - 6.2$

$-f(2) = -32 - 16 + 56 + 4 - 12$

$-f(2) = -60 + 60$

$-f(2) = 0$

$\boxed{-f(2) \neq f(-2)}$

La función NO ES PAR y NO ES IMPAR