

◎博士论坛◎

二阶对称张量场可视化的一种新模式

宋伟杰¹, 崔俊芝², 叶正麟¹, 周敏¹SONG Weijie¹, CUI Junzhi², YE Zhenglin¹, ZHOU Min¹

1.西北工业大学 理学院 应用数学系, 西安 710072

2.中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100080

1.Department of Applied Mathematics, School of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China

2.Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China

SONG Weijie, CUI Junzhi, YE Zhenglin, et al. New pattern for visualizing second-order symmetric tensor fields. *Computer Engineering and Applications*, 2011, 47(6): 1-4.

Abstract: Second-order symmetric tensor fields are visualized based on major (medium) and minor eigenvector fields, but there is a problem of discontinuity in direction with these eigenvector fields. On the other hand, the directions of eigenvectors of stress fields are always continuous. In consideration of these facts, a new pattern for visualizing second-order symmetric tensor fields based on the continuity of eigenvectors in direction is presented. Firstly the problem is clarified in theory, and a new definition for eigenvector fields is given. According to the continuity of eigenvectors in direction they are defined as the first (second) and third ones, and the values of the new eigenvector fields at all points including degenerate ones are then studied. New definition overcomes the drawback of discontinuity in direction under traditional definition with the continuity of eigenvector fields in direction preserved at all points including degenerate ones, at the same time, the visualization based on the new definition displays the property of such symmetric tensor fields as stress fields in essence.

Key words: symmetric tensor fields; visualization; eigenvector field

摘 要: 目前二阶对称张量场的可视化均是基于最大(次大)和最小特征向量场的, 但这样定义的特征向量场存在着方向不连续的问题, 而应力场的特征向量的方向却是永远连续的, 鉴于此, 提出了基于特征向量方向连续的一种可视化的新模式。从原理上阐述了问题产生的机理, 提出了特征向量场的新定义——根据特征向量方向的连续性将特征向量场定义为第一和第二(第三)特征向量场, 并对新定义的特征向量场在每一点包括退化点处的取值问题进行了研究。新定义克服了传统定义方向不连续的缺点, 保持了特征向量场在每一点包括退化点处的方向上的连续性, 同时, 基于新定义的可视化从本质上体现了应力场及其他对称张量场本身具有的属性。

关键词: 对称张量场; 可视化; 特征向量场

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2011.06.001 文章编号: 1002-8331(2011)06-0001-04 文献标识码: A 中图分类号: TP391.4

1 引言

二阶对称张量场在物理、力学及生物医学等诸多领域有着非常广泛的应用。例如, 固体力学中的应力和应变, 流体力学中的应力、粘性应力、雷诺应力和应变率都被描述为二阶对称张量。另外, 二阶对称张量场在核磁共振成像中也扮演着重要角色。因此, 研究二阶对称张量场的可视化技术具有非常重要的科学意义和跨学科的应用价值。

二阶对称张量场的可视化方法可以划分为两类。起初, 研究人员采用标量场的可视化方法来实现张量场的可视化。

这类方法除了不能从整体上展现张量场的结构之外, 存在一个致命的缺点: 可视化的结果严重依赖于坐标系的选择, 这显然不是我们所希望的。第二类方法是通过与它等价的特征向量场进行可视化来实现张量场的可视化。由于特征向量场关于坐标轴的旋转具有不变性, 因此可视化的结果不依赖于坐标系的选择, 因而, 这类方法自提出之后得到了研究者的普遍关注和采用, 出现了许多经典的可视化方法。这些方法包括基本图标方法^[1-7]、基于纹理的方法^[8-9]、基于拓扑的方法^[10-15]和基于变形的方

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10802068); 西北工业大学基础研究基金(the Fundamental Research Foundation of Northwestern Polytechnical University under Grant No.JC200949)。

作者简介: 宋伟杰, 男, CCF会员, 博士研究生, 讲师, 研究领域: 科学与工程计算与计算机图形学; 崔俊芝, 男, 院士, 研究领域: 计算数学、计算力学和软件工程; 叶正麟, 男, 教授, 研究领域: 计算机辅助设计与图形学; 周敏, 女, 博士, 副教授, 研究领域: 计算机辅助设计与图形学。

E-mail: 386610017@qq.com

收稿日期: 2010-08-10; 修回日期: 2010-12-27

上述人们普遍采用的第二类方法,通过对特征向量场的可视化实现了二阶对称张量场的可视化。以二维情形为例,目前特征向量场均根据特征值的大小被定义为最大和最小特征向量场,即在场中每个点处取最大特征值对应的特征向量构成最大特征向量场,最小特征向量场的定义类似。这样定义的特征向量场当最大和最小特征值的角色发生改变时可能会导致方向不连续,另一方面,固体力学中的应力场作为一种二阶对称张量场,由于作用力与反作用力始终是大小相等,方向相反的,因此应力场的特征向量的方向永远是连续的,基于这样的考虑,从原理上阐述了特征向量场的传统定义导致方向不连续的原因,根据特征向量方向的连续性提出了特征向量场的新定义;新定义的特征向量场由于定义规则的特殊性(根据特征向量方向的连续性来定义),需要确定其在场中每一点处的值以及对退化点进行特殊的处理,本文对这两个问题在二维情形下进行了研究。由于新定义反映了特征向量的方向的连续性,从本质上体现了诸如应力场的二阶对称张量场的内在属性,因此,基于新定义的可视化方法可以更为合理地表现二阶对称张量场。

2 传统定义的特征向量场方向不连续的原因

以二维情形为例,二阶对称张量场的两个正交的特征向量场通常定义为:

$$v_i(x) = \lambda_i(x) e_i(x)$$

这里 $i=1, 2$, $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x)$ 为两个特征值, $e_1(x)$ 和 $e_2(x)$ 为分别对应于 $\lambda_1(x)$ 和 $\lambda_2(x)$ 的单位特征向量。这样, $v_1(x)$ 和 $v_2(x)$ 分别称为最大和最小特征向量场。类似的,三维二阶对称张量场的三个特征向量场分别定义为最大、次大和最小特征向量场。

通常定义的特征向量场当最大(次大)和最小特征值的角色发生改变时可能导致方向不连续。为便于说明,以二维二阶对称张量场为例。设 $T(x)$ 为笛卡尔坐标系下的二维二阶对称张量场,它的四个分量记为 $T_{ij}(x)$, $i, j=1, 2$, 则存在正交变换 $R=\{R_{ij}\}$, 使得 $T(x)$ 化为对角形 A , 即

$$A = R^T T R \quad (1)$$

由式(1)可以得到

$$T = R A R^T \quad (2)$$

显然,对角矩阵 A 的对角元素为 $T(x)$ 的特征值, R 的列为对应特征值的单位特征向量。根据式(2),可以认为由两个光滑的正交的向量场可构造一个对称张量场:先人为地构造一个向量场(可含有临界点),然后构造第二个向量场,使其处处与第一个向量场垂直。将两个向量场在每一点处的单位化向量作为 R 的列,该点处的向量值的大小作为 A 对角线上相应位置的元素,由式(2)知,这样便构造了一个对称张量场。既然这两个向量场是人为给定的,当然可以赋予这两个向量场的大小以任意的值,这样,在同一点处这两个向量场的大小关系可以是任意的,因此,通常定义的最大和最小特征向量场就有可能出现方向不连续的情况。另一方面,在赋予两个向量场的大小以任意值的时候,两个向量场的方向仍保持连续,又因为特征向量场方向连续是诸如应力场的对称张量场所普遍具有的属性,因此,将根据特征向量的方向的连续性来定义

特征向量场,下面给出其定义。

3 特征向量场的新定义及相关问题

3.1 特征向量场的新定义

设二维对称张量场在每一点 x 处的两个正交的单位特征向量分别为 $e^{(1)}(x)$ 和 $e^{(2)}(x)$, 并设它们均为连续的向量函数, $\lambda^{(1)}(x)$ 和 $\lambda^{(2)}(x)$ 为对应的特征值, 则两个正交的向量场:

$$w^{(i)}(x) = \lambda^{(i)}(x) e^{(i)}(x)$$

当 $i=1, 2$ 时, 分别称为第一特征向量场和第二特征向量场。可以类似地给出三维对称张量场的第一、第二和第三特征向量场的定义。

3.2 特征向量场新定义所涉及的相关问题

上述新定义中的 $e^{(i)}(x)$ 是连续的向量函数, 且模为1, 故所定义的特征向量场的方向是连续的, 因此, 不像通常定义的最大和最小特征向量场那样(以二维对称张量场为例), 只要比较张量场在每点处的两个特征值的大小就可以给出两个特征向量场在该点处的值, 定义的第一和第二特征向量场是无法直接给出它们在任一点处的值的, 这是新定义所涉及的问题之一, 也是新定义能够被采用和二阶对称张量场可视化取得更大突破的关键所在。先由初始点出发给出出场中离散分布的点处的值, 然后根据这些离散点处的值给出任意点处的值, 算法如下:

以二维情形为例, 假设 x_0 是对称张量场 $T(x)$ 中的一点, $T(x)$ 在 x_0 处的两个单位特征向量分别记为 $e^{(1)}(x_0)$ 和 $e^{(2)}(x_0)$, 标记次序任意。这样, 第一和第二特征向量场在 x_0 处的值分别为 $\lambda^{(1)}(x_0) e^{(1)}(x_0)$ 和 $\lambda^{(2)}(x_0) e^{(2)}(x_0)$, 其中 $\lambda^{(1)}(x_0)$ 和 $\lambda^{(2)}(x_0)$ 为对应的特征值。现在由 $e^{(1)}(x)$ 和 $e^{(2)}(x)$ 的连续性, 确定 $T(x)$ 在 x_0 附近一点 x_1 处的两个单位特征向量 r_1 和 r_2 分别等于 $e^{(1)}(x_1)$ 和 $e^{(2)}(x_1)$ 还是分别等于 $e^{(2)}(x_1)$ 和 $e^{(1)}(x_1)$ 。考虑到特征向量可以取两个相反的方向, 计算 $e^{(l)}(x_0)$ 与 r_l 所在直线的夹角, 记为 $\theta_{l,i}$, 即

$$\theta_{l,i} = \min\{\langle e^{(l)}(x_0), r_i \rangle, \pi - \langle e^{(l)}(x_0), r_i \rangle\} \quad (l, i=1, 2)$$

由于同一点处的两个特征向量正交, 所以有 $\theta_{1,1} = \theta_{2,2}$, $\theta_{1,2} = \theta_{2,1}$ 。设 $\theta_{1,k} = \min_{1 \leq i \leq 2} \{\theta_{1,i}\}$, $\theta_{2,m} = \min_{1 \leq i \leq 2} \{\theta_{2,i}\}$, 此时有 $\theta_{1,k} = \theta_{2,m}$ 。显然, 当 $\theta_{1,k} = \theta_{2,m}$ 很小时, 可以认为

$$e^{(1)}(x_1) = r_k \quad e^{(2)}(x_1) = r_m \quad (3)$$

见图1。可以给出一个阈值(很小的正数), 记为 ε , 当 $\theta_{1,k} = \theta_{2,m} \leq \varepsilon$ 时, 则式(3)成立, 此时第一和第二特征向量场在 x_1 处

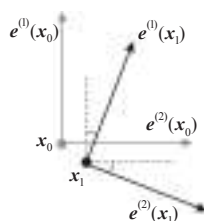


图1 确定 x_0 附近一点 x_1 处的第一和第二特征向量

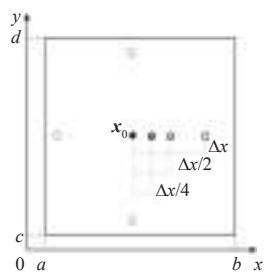


图2 确定初始点 x_0 的右邻接点及其第一和第二特征向量

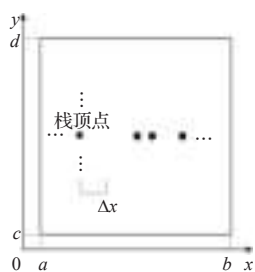


图3 情形1:栈顶点右方向上的已生成的点距离栈顶点均大于水平方向的步长

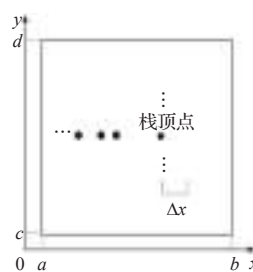


图4 情形2:栈顶点右方向上没有已生成的点且与定义域右边界距离大于等于水平方向的步长

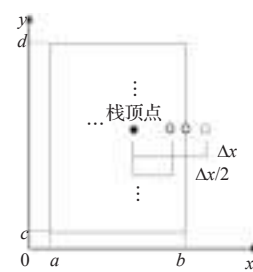


图5 情形3:栈顶点右方向上没有已生成的点且与定义域右边界距离小于水平方向的步长

的值就分别为 $\lambda^{(1)}(x_1)r_k$ 和 $\lambda^{(2)}(x_1)r_m$, 其中 $\lambda^{(1)}(x_1)$ 和 $\lambda^{(2)}(x_1)$ 为对应的特征值。否则, 将 x_1 与 x_0 的距离缩短为原来的一半, 直到 $\theta_{1,k} = \theta_{2,m} \leq \varepsilon$ 成立为止。以 $T(x)$ 的定义域 D 为矩形且边界平行于坐标轴的情形为例来详细阐述本文的算法。

设 $D=[a, b] \times [c, d]$ 。将初始点 x_0 处的其中一个特征向量看作第一特征向量, 另一个看作第二特征向量。假设沿水平和竖直方向的步长分别为 Δx 和 Δy , 现在, 按左上右下的顺序考察 x_0 的四邻接点。如果邻接点(以右邻接点为例, 见图2)满足 $\theta_{1,k} = \theta_{2,m} \leq \varepsilon$, 则根据式(3)可确定该点处的第一和第二特征向量, 否则, 将邻接点与 x_0 之间的距离缩小一半, 即为 $\Delta x/2$, 然后考察此时的邻接点是否满足 $\theta_{1,k} = \theta_{2,m} \leq \varepsilon$, 如果依然不成立, 则将邻接点与 x_0 的距离再缩小一半, 以此类推, 总存在某整数 i , 当邻接点与 x_0 之间的距离为 $\Delta x/2^i$ 时, 不等式成立。这样, 右邻接点及该点处的第一和第二特征向量就确定下来了。当把 x_0 的四个邻接点及其第一和第二特征向量确定之后, 再去处理这些邻接点的邻接点, 可以通过堆栈来实现: 求出 x_0 的第一和第二特征向量, 将 x_0 入栈。考察栈顶的点, 按左上右下的顺序考察该点的四邻接点。如果在某方向上(以右方向为例), 已生成的点距离栈顶点均大于该方向的步长(情形1, 见图3), 或者已生成的点中没有该方向上的, 且栈顶点到定义域相应边界的距离大于等于该方向的步长(情形2, 见图4), 或者已生成的点中没有该方向上的, 且栈顶点到定义域相应边界的距离(不等于零)小于该方向的步长(情形3, 见图5)时, 在该方向上按如下相应的规则寻找满足不等式 $\theta_{1,k} = \theta_{2,m} \leq \varepsilon$ 的邻接点, 确定其第一和第二特征向量, 并将该邻接点入栈: 情形1和情形2下寻找邻接点的做法与图2所示相同; 在情形3下, 距离栈顶点为该方向步长的邻接点落在定义域之外, 为了在定义域内找到邻接点, 先考察定义域相应边界与位于该方向的直线的交点是否满足 $\theta_{1,k} = \theta_{2,m} \leq \varepsilon$, 如果满足, 则该交点即为要找的邻接点, 否则将落在定义域之外的邻接点不断折半, 直到邻接点位于定义域之内, 然后再考察此时的邻接点是否满足 $\theta_{1,k} = \theta_{2,m} \leq \varepsilon$, 如果仍不满足, 继续折半, 直到满足为止(见图5)。如果栈顶点在四个方向上均不满足上述的三种情形, 则依次考察栈顶点下面的点, 并将找到的邻接点入栈。以此类推, 直到栈中所有的点在四个方向上均不满足上述三种情形, 算法结束。这样, 得到了 $T(x)$ 的第一和第二特征向量场在 D 中离散点处的值。为了得到任意点处的值, 用这些离散点将 D 剖分为矩形网格。为求

出网格单元内点处的第一和第二特征向量, 可以将这些点处的两个特征向量与四个网格顶点处的第一和第二特征向量分别进行比较来确定: 如果该点处的其中一个特征向量和四个网格顶点处的第一特征向量所在直线夹角的平均值小于它与第二特征向量所在直线夹角的平均值, 那么就认为这个特征向量便是该点处的第一特征向量, 另一个特征向量为第二特征向量, 否则认为这个特征向量为第二特征向量, 而另一个为第一特征向量。

二维对称张量场 $T(x)$ 在场中某点处的两个特征值如果不相等, 则对应的两个特征向量方向唯一且相互正交; 否则, 两个特征向量的方向可以是任意的, 此时该点称为退化点。上述算法适合于 $T(x)$ 不含退化点的情形, 如果 $T(x)$ 包含退化点, 为保持第一和第二特征向量场在场中每一点包括退化点处的方向上的连续性, 需要对它们在退化点处的方向做出合理的规定: 对于位于网格单元内部的退化点, 可以通过对网格四个顶点处的第一和第二特征向量分别进行双线性插值得到; 对于处于网格顶点的退化点, 可以对其邻接点处的第一和第二特征向量分别进行加权平均得到, 其中权重为邻接点到退化点的距离的倒数。这样, 新定义的特征向量场在场中的每一点包括退化点处都是方向连续的。

4 实例结果

以波斯涅斯克(Boussinesq)问题^[18]的应力场为例, 分析说明提出的特征向量场的新定义。波斯涅斯克问题是在半无限平面上受垂直集中力 P 的作用所形成的应力场。取作用点为坐标原点, x 正半轴沿力的作用方向, 如图6所示。

先考虑在 $D_1=[0.3, 0.7] \times [-0.2, 0.2]$ 内特征向量场的新定义。取初始点为 $x_0=(0.5, 0.0)$, 水平和垂直方向的步长分别为 $\Delta x=0.1$, $\Delta y=0.1$, 集中力 $P=10$, 阈值 $\varepsilon=0.1$ (此为弧度, 即约为 5.73°)。在以上所设参数下, 采用本文方法得到为求得新定义的特征向量场而事先生成的离散点, 在图7中画出了这些离散点及其用双箭头表示的第一特征向量。由图可见, 第一特征向量场的方向在这些离散点处是连续的。

在此例中, 这些离散点处的最大和最小特征向量分别与新定义下的第二和第一特征向量完全相同。通过在 Pentium Dual 1.60 GHz 的 PC 机上用 VC6.0 编程实现, 可得生成这些离散点及其新定义下的两个特征向量场的运行时间为 15 ms, 生成传统定义的两个特征向量场的运行时间(不包括生成离散点的时间)不到 1 ms, 可见, 新定义在确定离散点及其特征向

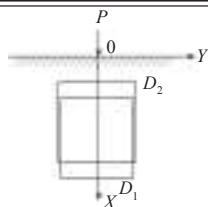


图6 波斯涅斯克问题

图7 在 D_1 内, 当 $\Delta x=0.1$, $\Delta y=0.1$, $\varepsilon=0.1$ 时生成的离散点及其第一特征向量(双箭头表示)

量场时,速度比传统定义的要慢一些。

在上面的例子中,如果将水平和垂直方向的步长变小,如设置为 $\Delta x=0.05$, $\Delta y=0.05$,或者将阈值 ε 设置的更小一些,如 $\varepsilon=0.05$,则新定义的特征向量场的精度会随之提高,同时生成的离散点也会增多,分别见图8和图9;另外,由于在越靠近力作用点的地方,应力场的变化越剧烈,因此,如果将上例中的 $D_1=[0.3, 0.7] \times [-0.2, 0.2]$ 换为 $D_2=[0.2, 0.6] \times [-0.2, 0.2]$ 时,也将生成更密的离散点,如图10。

图8 将图7中的 Δx , Δy 均设置为0.05时生成的离散点图9 将图7中的 ε 设置为0.05时生成的离散点图10 将图7中的 D_1 换为 D_2 时生成的离散点

5 结论

从分析应力场的特征向量方向的连续性出发,指出了目前二阶对称张量场的可视化基于的最大(次大)和最小特征向量场存在着方向不连续的问题,并从原理上揭示了其中的原因。在此基础上,提出了根据方向连续性的特征向量场的新定义,并对新定义所涉及的每点处值的确定和对退化点处理的问题进行了研究。新定义下的特征向量场在场中每一个点包括退化点处在方向上都是连续的,体现了应力场及其他二阶对称张量场本身具有的内在属性。固体力学中的另一个重要的二阶对称张量场是应变场,应变场的特征向量虽然在跨越组合结构的分界面时其方向可能不连续,但由于应变场可以由应力场得到,其可视化可以转化为应力场的可视化问题,关于应变场及其他类似的二阶对称张量场的可视化将是今后工作的一个重点。

本文提出的新定义及对相关问题的讨论是以二维情形的对称张量场为例的,但可以简单地推广到三维情形。与特征向量场的传统定义相比,新定义在确定每点处的值时在存储空间和计算时间上都具有较高的复杂度,但是,为克服传统定义导致的方向不连续问题,更合理地反映诸如应力场的对称张量场所共有的属性,新定义所付出的空间和时间上的

代价也是值得的。如何提高新定义算法的效率是今后研究工作的另一个重点。

参考文献:

- [1] Haber R B. Visualization techniques for engineering mechanics[J]. Computing Systems in Engineering, 1990, 1(1): 37-50.
- [2] Kindlmann G. Superquadric tensor glyphs[C]// Proceedings of IEEE TVCG/EG Symposium on Visualization, 2004: 147-154.
- [3] Delmarcelle T, Hesselink L. Visualizing second-order tensor fields with hyperstream-lines[J]. IEEE Computer Graphics and Applications, 1993, 13(4): 25-33.
- [4] Zhang S, Demiralp C, Laidlaw D. Visualizing diffusion tensor MR images using streamtubes and streamsurfaces[J]. IEEE TVCG, 2003, 9(4): 454-462.
- [5] 陈莉, 竹岛由里子, 藤代一成, 等. 大规模数据场的并行可视化[J]. 浙江大学学报: 理学版, 2001, 28(2): 222-226.
- [6] Chen W, Zhang S, Correia S. Visualizing diffusion tensor imaging data with merging ellipsoids[C]// IEEE Pacific Visualization Symposium, 2009: 145-151.
- [7] Song W J, Cui J Z, Ye Z L. Visualizing 3-D symmetric tensor fields using a type of surface icons[C]// IEEE CAD/Graphics'09, 2009: 627-631.
- [8] Cabral B, Leedom L C. Imaging vector fields using line integral convolution[C]// SIGGRAPH, Computer Graphics Proceedings, 1993: 263-270.
- [9] Zheng X Q, Pang A. HyperLIC[C]// IEEE Visualization, 2003: 249-256.
- [10] Delmarcelle T. The visualization of second-order tensor fields[D]. Stanford University, 1995.
- [11] Zheng X Q, Pang A. Topological lines in 3D tensor fields[C]// IEEE Visualization, 2004: 313-320.
- [12] Zheng X Q, Parlett B, Pang A. Topological lines in 3D tensor fields and discriminant hessian factorization[J]. IEEE Transaction on Visualization and Computer Graphics, 2004, 11(4): 395-407.
- [13] Zheng X Q, Tricoche X, Pang A. Degenerate 3D tensors[C]// Visualization and Processing of Tensor Fields, 2006: 247-256.
- [14] Zheng X Q, Parlett B, Pang A. Topological structures of 3D tensor fields[C]// IEEE Visualization, 2005.
- [15] Schultz T, Theisel H, Seidel H P. Topological visualization of brain diffusion MRI data[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2007, 13(6): 1496-1503.
- [16] Zheng X Q, Pang A. Volume deformation for tensor visualization[C]// IEEE Visualization, 2002: 379-386.
- [17] Zheng X Q, Pang A. Interaction of light and tensor fields[C]// Proceedings of The Symposium on Data Visualization, 2003: 157-166.
- [18] 程昌钧, 朱媛媛. 弹性力学[M]. 修订版. 上海大学出版社, 2005: 216-219.