数值分析 第二次大作业

任务

任务要求：使用数值方法求解如下非线性常微分方程

$$ \left{

$$\frac{dS}{dt} = \quad \frac{-r\beta IS}{N} \; \frac{dE}{dt} = \quad \frac{r\beta IS}{N} - aE \; \frac{dI}{dt} = \quad aE - \gamma I \; \frac{dR}{dt} = \quad \gamma I$$

\right. $$

其中

$$ \left{

$$S_0 = \quad 8000 \; E_0 = \quad 2000 \; I_0 = \quad 0 \; R_0 = \quad 0 \; \gamma = \quad 0.5 \; r = 10 \; \beta = 0.02 \; \alpha = 0.4$$

\right. $$

将微分方程写为如下形式

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) = BY^T AY + CY$$

其中

$$A = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$B = [-10^{-5} \; 10^{-5} \; 0 \; 0]$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,0 \quad -0.4 \quad 0 \quad 0\,1 \quad 0.4 \quad -0.5 \quad 0\,0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0]$$

$$Y_0 = [8000 \; 2000 \; 0 \; 0]$$

欧拉法

迭代公式

$$Y_{n+1} = Y_n + hF(Y_n)$$

误差分析

定义矩阵$M = (m_{ij})_{4 \times 4}, L = (l_{i})_{4}$：

$$m_{ij} = \max_{x \in [x_0, x_n]} \left| \frac{\partial F_i}{\partial Y_j} \right|$$

$$l_i = \max_{x \in [x_0, x_n]} \left| Y_i^{(2)} \right|$$

则有欧拉法**方法累计误差**迭代公式

$$\Delta_{n+1} \leq (I + hM)\Delta_n + \frac{h^2}{2} L$$

即

$$\Delta_n \leq (I + hM)^n (\Delta_0 + (hM)^{-1} \frac{h^2}{2} L) - (hM)^{-1} \frac{h^2}{2} L$$

将步长h写为$\frac{T}{n}$, 其中$T = t - t_0$, 且方法误差$\Delta_0 = \bar{Y}_0 - Y(0) = 0$，则有

$$\Delta_n \leq ((I + \frac{TM}{n})^n - I)(\frac{T}{2n} M^{-1} L)$$

可证(*)，矩阵序列极限

$$\lim_{n \to +\infty} (I + \frac{TM}{n})^n = e^{TM}$$

成立。

* 只需证对于若当块J，有$\lim_{n \to +\infty} (I + \frac{J}{n})^n = e^J$ 即可

故将方法累计误差近似为

$$\Delta_n \leq \frac{T}{2n} (e^{TM} - I) M^{-1} L$$

同理，**舍入累计误差**公式

$$\delta_{n+1} \le (I + hM)\delta_n + \frac{10^{-m}}{2} e$$

其中$e = [11\ldots1]^T$

可得

$$\delta_n \le \frac{10^{-m} n}{2T} (e^{TM} - I) M^{-1} e$$

对于误差界b，将其分为两部分

$$ \begin{aligned} ||\delta_n||{\infty} & \le \frac{b}{2} \ ||\Delta_n||{\infty} & \le \frac{b}{2} \end{aligned} $$

即可求出m, n的计算公式

$$n \ge || \frac{T}{b} (e^{TM} - I) M^{-1} L ||_\infty$$

$$m \ge \log_{10} || \frac{n}{Tb} (e^{TM} - I) M^{-1} e ||_\infty$$

计算举例

取$t = 15, b = 10$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = 2BY^T A + C$$

$$= [\, 10^{-5} I \quad 0 \quad 10^{-5} S \quad 0\, 10^{-5} I \quad -0.4 \quad 10^{-5} S \quad 0\, 1 \quad 0.4 \quad -0.5 \quad 0\, 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \,]$$

$$Y^{(2)} = (2BY^T A + C)(BY^T A + C)Y$$

$$= [\, 2 \times 10^{-10} I^2 \quad 8 \times 10^{-6} S \quad 2 \times 10^{-10} SI \quad 0 \, - 2 \times 10^{-10} I^2 + 4 \times 10^{-6} I \quad 0.16 - 8 \times 10^{-6} S \quad 2 \times 10^{-10} SI + 7 \times 10^{-7} S \quad 0 \, - 4 \times 10^{-6} I \quad -0.36 \quad -4 \times$$

根据物理约束，$S, E, I, R \le N_0 = 10000$, 因此

$$M = [\, 0.1 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0 |\, 0.1 \quad 0.4 \quad 0.1 \quad 0 |\, 1 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0 |\, 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0 \,]$$

$$L = [\, 0.02 \quad 0.02 \quad 0.02 \quad 0\, 0.04 \quad 0.16 \quad 0.14 \quad 0\, 0.04 \quad 0.36 \quad 0.25 \quad 0\, 0 \quad 0.2 \quad 0 \quad 0 \,][\, 10^4\ 10^4\ 10^4\ 10^4 \,]$$

$$= [\, 6000\ 3400\ 6500\ 2000 \,]$$

根据

$$ \begin{aligned} n & \ge || \frac{T}{b} (e^{TM} - I) M^{-1} L ||{\infty}\ m & \ge \log{10} || \frac{n}{Tb} (e^{TM} - I) M^{-1} e ||_{\infty} \end{aligned} $$

取

$$n = \quad 271000 \; m = \quad 3$$

即步长为

$$h = 3.29684 \times 10^{-5}$$

最终结果

$$S(15) = \quad 7188.427 \; E(15) = \quad 58.395 \; I(15) = \quad 78.949 \; R(15) = \quad 2674.227$$

运行方法

警告：直接运行文件夹中的可执行程序$main.exe$可能导致不可预知的行为，请在本机上进行构建后再运行！！！

编译本程序需要gcc（windows系统中可以为MinGW）编译器。若没有，需要自己编写已有编译器的构建脚本，或下载一个。

首先，将Eigen库的静态链接库或动态链接库放入/lib。若环境为windows10/x86_64，可以使用/lib中已有的文件。

其次，利用make进行构建

```
make -j4
```

若无报错，可以进行运行

```
./main -b <bound> -x <value>
```

示例：

```
./main -b 10 -x 15
```

该实例运行约耗时30s-1min。