数值分析与算法 第一次大作业

魏欣然 自 81 2018011444

1. SI 模型求解

$$\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}}=\frac{\beta rS}{N}I=\frac{\beta r(N-I)}{N}I=\beta rI-\frac{\beta r}{N}I^2$$

$$\mathrm{I}^{-2}\frac{dI}{dt}-\beta rI^{-1}=-\frac{\beta r}{N}$$

$$\frac{\mathrm{dI}^{-1}}{dt}+\beta rI^{-1}=\frac{\beta r}{N}$$

$$\frac{d\left(\mathrm{e}^{\beta\mathrm{rt}}I^{-1}\right)}{dt}=\frac{\beta r}{N}e^{\beta rt}$$

由 $\mathrm{t}=0$ 时，$\mathrm{e}^{\beta\mathrm{rt}}I^{-1}=I_0^{-1}$

$$\mathrm{e}^{\beta\mathrm{rt}}I^{-1}=\frac{\mathrm{e}^{\beta rt}I_0-I_0+N}{NI_0}$$

$$\mathrm{I}=\frac{e^{\beta rt}NI_0}{\mathrm{e}^{\beta rt}I_0-I_0+N}=\frac{NI_0}{I_0+(N-I_0)e^{-\beta rt}}$$

2. 将上述解析解变形

$$\mathrm{I}^{-1}=\frac{1}{N}+\left(\frac{1}{I_0}-\frac{1}{N}\right)e^{-\beta rt}=\frac{1}{N}+\left(\frac{1}{I_0}-\frac{1}{N}\right)e^{-t}$$

代入最小二乘公式

$$\frac{1}{I_0}-\frac{1}{N}=\mathrm{k}=\frac{\overline{x*y}-\overline{x}*\overline{y}}{\overline{x^2}-\overline{x}^2}$$

$$\frac{1}{N}=b=\overline{y}-a\overline{x}$$

可求得估计值 $\mathrm{N}=999.987\approx 1000$，$\mathrm{I}_0=1.008\approx 1$

3. 考虑在$[\mathrm{t_i},\mathrm{t}_{i+1}]$上做埃尔米特插值

$$\mathrm{H(t)}=\sum_{\mathrm{k=i}}^{\mathrm{i+1}}I_k\alpha_k(t)+\sum_{\mathrm{k=i}}^{\mathrm{i+1}}I_k^{'}\beta_k(t)$$

其中

$$\alpha_\mathrm{k}(t)=\left(1-\frac{2(t-t_k)}{t_k-t_{k\pm1}}\right)\left(\frac{t-t_{k\pm1}}{t_k-t_{k\pm1}}\right)^2$$

$$\beta_\mathrm{k}(t)=(t-t_k)\left(\frac{t-t_{k\pm1}}{t_k-t_{k\pm1}}\right)^2$$

方法误差：

插值余项：$\mathrm{R_i(t)=I(t)-H(t)}$

$$\mathrm{R_i(t_i)=R_i(t_{i+1})=R_i^{'}(t_i)=R_i^{'}(t_{i+1})=0}$$

可得

$$\mathrm{R_i(t)=K(t)(t-t_i)^2(t-t_{i+1})^2}$$

对任意$t_0 \in [t_i, t_{i+1}]$构造

$$\phi(t) = I(t) - H(t) - K(t_0)(t - t_i)^2 (t - t_{i+1})^2$$

$\phi(t)$在$[t_0, t_i, t_{i+1}]$处均为 0，$\phi'(t)$有异于$[t_0, t_i, t_{i+1}]$的两个零点，同时$\phi'(t)$有两个零点t_i, t_{i+1}，因此$\phi'(t)$至少有 4 个零点，$\phi^{(4)}(t)$有至少 1 个零点，设为ζ。

$$0 = I^{(4)}(\zeta) - 0 - 24K(t_0)$$

$$K(t_0) = \frac{I^{(4)}(\zeta)}{24}$$

$$R_i(t) = \frac{I^{(4)}(\zeta)}{24}(t - t_i)^2 (t - t_{i+1})^2 < \max\left|\frac{I^{(4)}(\zeta)}{24}\right| \max (t - t_i)^2 (t - t_{i+1})^2$$

$$\approx 127.7 * 0.25^4 \approx 0.02078$$

舍入误差：

I_k值保留小数点后 5 位，即误差$R_k \le 5 * 10^{-6}$，导函数误差$R_k^{'} < \beta r R_k + \frac{\beta r}{N}\left(R_k^2 + 2IR_K\right) < 3R_k = 1.5 * 10^{-5}$总体舍入误差：

$$R(t) = \sum_{k=i}^{i+1} R_k \alpha_k(t) + \sum_{k=i}^{i+1} R_k^{'} \beta_k(t) \le \left(\sum_{k=i}^{i+1} \alpha_k(t) + \sum_{k=i}^{i+1} 3\beta_k(t)\right) R_k \le 1.144 * 5 * 10^{-6}$$

$$= 5.72 * 10^{-6}$$

总误差$R_{total} = 0.02078 + 5.72 * 10^{-6} \approx 0.02079$

程序求出最大误差为：0.01892，其值小于 0.02079

4. 拟合

原式为

$$I = \frac{NI_0}{I_0 + (N - I_0)e^{-\beta rt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-t}}$$

考虑到只有 e 的幂不是四则运算，因此将其转化为四则运算即可。

使用 e 的定义式对e^{-t}展开：

$$e^{-t} = \lim_{m \to \infty}(1 - \frac{t}{m})^m$$

因此，当 m 为远大于 t 的整数，就可以用上述仅含四则运算的表达式近似 e 的幂。最终写出的拟合式为

$$\hat{I}(t) = \frac{1000}{1 + 999(1 - \frac{t}{m})^m}, \quad m >> 10$$

方法误差

$$
\begin{aligned}
&\|\delta\|^2 = \|I(t)-\hat{I}(t)\|_2^2 \\
&= \int_0^{10} \left(\frac{1000}{1+999e^{-t}} - \frac{1000}{1+999(1-\frac{t}{m})^m}\right)^2 dt \\
&\le 10^6 \int_0^{10} \left(\frac{999(e^{-t}-(1-\frac{t}{m})^m)}{1000\times 1000}\right)^2 dt \\
&\le \int_0^{10} (e^{-t}-(1-\frac{t}{m})^m)^2 dt
\end{aligned}
$$

设

$$g_m(t) = e^{-t} - (1-\frac{t}{m})^m$$

则有

$$g_m{}'(t) = (1-\frac{t}{m})^{m-1} - e^{-t}$$

导函数零点

$$g_m{}'(t_0) = (1-\frac{t_0}{m})^{m-1} - e^{-t_0} = 0$$

考察函数

$$
\begin{aligned}
&g_1(t) = (1-\frac{t}{m})^{m-1} \\
&g_2(t) = e^{-t}
\end{aligned}
$$

有

$$
\begin{aligned}
&g_m{}'(t) = 0 \\
&\text{iff } \ \mathrm{g_1(t) = g_2(t)}
\end{aligned}
$$

取对数

$$
\begin{aligned}
&\ln g_1(t) = (m-1)(\ln(m-t)-\ln(m)) \\
&\ln g_2(t) = -t
\end{aligned}
$$

$\ln g_1(t)$ 为上凸函数，在[-∞,m]上单调减，过点(0, 0)，且在 0 点导函数为-m/(m-1)，大于-1。做图像可知，它和 $\ln g_2(t)$ 在 t>0 有且仅有一个交点 t_0 。在(0, t0)有 lng1(t)>lng2(t)，在(t0, +∞)有 lng1(t)>lng2(t)。

由此可知，函数 $g_m{}'(t) = (1-\frac{t}{m})^{m-1} - e^{-t}$ 在[0, +∞]有且仅有一个零点 t0，亦即 $g_m(t)$ 在[0, +∞]有且仅有一个极大值点 t0。在 m>>10 时，可以保证 $g_m(t)$ 在[0, 10]恒为正。因此有

$$0 \le g_m(t) \le g_m(t_0), \forall t \in [0,10]$$

又有

$$\begin{aligned} g_m(t_0) &= e^{-t_0} - (1-\frac{t_0}{m})^{m-1}(1-\frac{t_0}{m}) \\ &= e^{-t_0} - e^{-t_0}(1-\frac{t_0}{m}) \\ &= \frac{1}{m} t_0 e^{-t_0} \end{aligned}$$

$y(t) = te^{-t}$ 在[0, +∞]的最大值为 1/e

因此有

$$\begin{aligned} &\| \delta \|^2 \\ &\le \int_0^{10} (e^{-t} - (1-\frac{t}{m})^m)^2 dt = \int_0^{10} (g_m(t))^2 dt \\ &\le \int_0^{10} (g_m(t_0))^2 dt = 10 g_m{}^2(t_0) = 10(\frac{1}{m} t_0 e^{-t_0})^2 \\ &\le 10(\frac{1}{me})^2 \end{aligned}$$

即

$$\| \delta \| \le \frac{\sqrt{10}}{me}$$

对于舍入误差，有

$$\begin{aligned} &| \Delta \hat{I}(t) | = | \frac{\partial}{\partial t} \hat{I}(t) || \Delta t | \\ &= | \hat{I}(t) | \cdot | \frac{999}{1+999(1-\frac{t}{m})^m} | \cdot | m(1-\frac{t}{m})^{m-1}(\frac{1}{m}) | \cdot | \Delta t | \\ &\le 1000 \times 1000 \times 1 \times | \Delta t | \end{aligned}$$

python 中浮点数精度为$| \Delta t | \le 10^{-12}$，因此舍入误差$| \Delta \hat{I}(t) | \le 10^{-6}$，可以忽略不计

因此，迭代次数 m 的选取仅考虑方法误差，即$\| \delta \| \le \frac{\sqrt{10}}{me} \le b$。此外，再考虑拟合条件 m>>10，取最小值 100，最终的 m 的选取方法为：

$$m \ge \min\{\frac{\sqrt{10}}{be}, 100\}$$