

# Variational Inference

## 变分推断

梁伟轩

weixuanliang18@nudt.edu.cn

计算机学院, NUDT, 长沙

2020/11

### Contents:

- 1 问题构建
- 2 变分推断

- 3 优化算法 (平均场变分族)
- 4 举例说明

# 问题构建

首先我们定义要解决的问题。

## 推断问题

观测变量  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{1:n}$ , 而  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{1:m}$  是相关的隐变量。推断问题是基于以上观测值, 计算隐变量的条件概率  $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$  密度。

而上述条件密度函数在各方面有重要的应用, 例如生成新的样本点等等。  $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$  可以进一步化为:

$$p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{p(\mathbf{x})} = \frac{p(\mathbf{z}, \mathbf{x})}{\int_{\mathbf{z}} p(\mathbf{z}, \mathbf{x}) d\mathbf{z}}$$

而在不少的模型中被称作 Evidence 的关于观测样本的先验  $p(\mathbf{x})$  难以求解, 或需要非常高的计算复杂度才能得到结果。下面我们举例说明。

以下是一个高斯混合模型 (Mixture of Gaussians)。假设我们有一个单位方差的单变量的混合高斯模型, 它有  $K$  个混合分量, 分别对应  $K$  个高斯分布。这些高斯分布的方差均为 1, 均值分别为  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K\}$ 。假设这些均值变量的概率密度函数为  $p(\mu_k)$ , 且有  $\mu_k \sim \mathcal{N}(0, \delta^2)$ , 其中  $\delta$  为超参数。假设  $\mathbf{c}_i (i \in [n])$  是一个  $K$  维的指示向量, 其仅在一个位置上值为 1, 其余均为 0, 我们可以用  $\mathbf{c}_i$  指示样本  $\mathbf{x}_i$  属于哪一个具体的高斯分布。

整个模型具体可描述为：

$$\begin{aligned}\mu_k &\sim \mathcal{N}(0, \delta^2) & k = 1, \dots, K \\ \mathbf{c}_i &\sim \text{categorical}(1/K, 1/K, \dots, 1/K) & i = 1, \dots, n \\ \mathbf{x}_i | \mathbf{c}_i, \boldsymbol{\mu} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{c}_i^\top \boldsymbol{\mu}, 1) & i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

对于上述模型，隐变量和观测变量联合分布的概率密度为

$$p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{c}, \mathbf{x}) = p(\boldsymbol{\mu}) \prod_{i=1}^n p(\mathbf{c}_i) p(\mathbf{x}_i | \mathbf{c}_i, \boldsymbol{\mu})$$

其 Evidence 可以写为：

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}) &= \int p(\boldsymbol{\mu}) \prod_{i=1}^n p(\mathbf{c}_i) p(\mathbf{x}_i | \mathbf{c}_i, \boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu} \\ &= \sum_{\mathbf{c}} p(\mathbf{c}) \prod_{i=1}^n p(\mathbf{x}_i | \mathbf{c}_i, \boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu} \\ &= A \sum_{\mathbf{c}} p(\mathbf{c}) \int \cdots \int_{\mu_k} \exp \left( -\frac{1}{2\delta^2} \sum_{k=1}^K \mu_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \sum_{k=1}^K c_{ik} \mu_k)^2 \right) d\mu_1 \cdots d\mu_K\end{aligned}$$

其中  $A$  为常数。根据  $n \times K$  维矩阵  $\mathbf{c}$  的不同值，我们要计算  $\mathcal{O}(K^n)$  个  $K$  重积分。

# 变分推断

上面的计算复杂度关于样本  $n$  呈指数增长，这是令人难以接受的。所以，基于贝叶斯推断的精确求解是无法得到结果的。所以我们便想通过某个只关于隐变量的分布  $q(\mathbf{z})$  去近似  $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ ，即最小化如下 KL 散度

$$q^*(\mathbf{z}) = \operatorname{argmin}_{q(\mathbf{z}) \in \mathcal{D}} \text{KL}(q(\mathbf{z}) || p(\mathbf{z}|\mathbf{x}))$$

其中  $\mathcal{D}$  为预先定义的  $q(\mathbf{z})$  的搜索空间。

由于直接求解 KL 散度比较困难，上式可以进一步化为：

$$\begin{aligned} q^*(\mathbf{z}) &= \operatorname{argmin}_{q(\mathbf{z}) \in \mathcal{D}} \text{KL}(q(\mathbf{z}) || p(\mathbf{z}|\mathbf{x})) \\ &= \operatorname{argmin}_{q(\mathbf{z}) \in \mathcal{D}} \mathbb{E}[\log q(\mathbf{z})] - \mathbb{E}[\log p(\mathbf{z}|\mathbf{x})] \\ &= \operatorname{argmin}_{q(\mathbf{z}) \in \mathcal{D}} \mathbb{E}[\log q(\mathbf{z})] - \mathbb{E}[\log p(\mathbf{z}, \mathbf{x})] + \log p(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{1}$$

我们定义分布  $p(\mathbf{x})$  的证据下界 (Evidence Lower Bound, ELBO) 为

$$\text{ELBO}(q) = \mathbb{E}[\log p(\mathbf{z}, \mathbf{x})] - \mathbb{E}[\log q(\mathbf{z})] \quad (2)$$

由于优化  $q(\mathbf{z})$  时,  $\log p(\mathbf{x})$  为常量, 所以最小化  $\text{KL}(q(\mathbf{z})||p(\mathbf{z}|\mathbf{x}))$  等价于最大化  $\text{ELBO}(q)$ 。这是我们最终要优化的目标。下面阐述证据下界的得名由来。另一方面, 我们有:

$$\begin{aligned} \log p(\mathbf{x}) &= \log \left( \int p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) \\ &= \log \left( \int q(\mathbf{z}) \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{q(\mathbf{z})} d\mathbf{z} \right) \\ &= \log \left( \mathbb{E} \left[ \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{q(\mathbf{z})} \right] \right) \\ &\geq \mathbb{E} \left[ \log \left( \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{q(\mathbf{z})} \right) \right] \quad (\text{Jensen Inequality}) \\ &= \text{ELBO}(q) \end{aligned}$$

上述等号等且仅当 KL 散度为 0 时成立。可以看出  $\text{ELBO}(q)$  即为  $p(\mathbf{x})$  的下界, 故而得名。

# 优化算法 (平均场变分族)



不同的密度搜索空间  $\mathcal{D}$ , 有不同的优化方法。此处介绍在平均场变分族 (Mean-field Variational Family) 的假设下, 介绍式(2)的优化问题。

## 平均场变分族

平均场变分族意即隐变量之间相互独立, 且其密度函数由各自的变分因子决定。此时有

$$q(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^m q_j(\mathbf{z}_j) \quad (3)$$

其中  $q_j(\mathbf{z}_j)$  为  $\mathbf{z}_j$  的概率密度函数。

基于如上假设, 将(3)带入(2)中, 可以得到

$$\text{ELBO}(q) = \underbrace{\int \prod_{j=1}^m q_j(\mathbf{z}_j) \log p(\mathbf{z}, \mathbf{x}) d\mathbf{z}}_{\text{Part1}} - \underbrace{\int \prod_{j=1}^m q_j(\mathbf{z}_j) \sum_{j=1}^m \log q_j(\mathbf{z}_j) d\mathbf{z}}_{\text{Part2}} \quad (4)$$

我们采取坐标上升 (轮替优化) 的方法对式(4)进行优化, 即只优化一个变量, 固定其余变量。我们针对  $q_j(\mathbf{z}_j)$  进行优化时, 式(4)第一部分可化为:

$$\text{Part1} = \int_{\mathbf{z}_j} q_j(\mathbf{z}_j) \left( \mathbb{E}_{i \neq j} [\log p(\mathbf{z}, \mathbf{x})] \right) d\mathbf{z}_j$$

而第二部分可化为:

$$\begin{aligned} \text{Part2} &= \int \prod_{k=1}^m q_k(\mathbf{z}_k) \log q_j(\mathbf{z}_j) d\mathbf{z} + \sum_{i \neq j} \int \prod_{k=1}^m q_k(\mathbf{z}_k) \log q_i(\mathbf{z}_i) d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbf{z}_j} q_j(\mathbf{z}_j) \log q_j(\mathbf{z}_j) d\mathbf{z}_j + \text{const} \end{aligned}$$

通过如上演算, 可将式(4)关于  $q_j(\mathbf{z}_j)$  的优化问题变为:

$$\begin{aligned} \text{ELBO}(q) &= \int_{\mathbf{z}_j} q_j(\mathbf{z}_j) \left( \mathbb{E}_{i \neq j} [\log p(\mathbf{z}, \mathbf{x})] \right) d\mathbf{z}_j - \int_{\mathbf{z}_j} q_j(\mathbf{z}_j) \log q_j(\mathbf{z}_j) d\mathbf{z}_j \\ &= -\text{KL} \left( q_j(\mathbf{z}_j) \parallel \exp \left( \mathbb{E}_{i \neq j} [\log p(\mathbf{z}, \mathbf{x})] \right) \right) \end{aligned} \tag{5}$$

通过式(5)的推导, 我们将最大化证据下界的问题转换为一个最小化 KL 散度的问题。根据 KL 散度的性质, 式(5)关于  $q_j(\mathbf{z}_j)$  有闭式解:

$$q_j^*(\mathbf{z}_j) = \exp \left( \mathbb{E}_{i \neq j} [\log p(\mathbf{z}, \mathbf{x})] \right) \quad (6)$$

于是, 我们在对  $q_j(\mathbf{z}_j)$  初始化以后, 利用(6)采用坐标上升的方法使式(2)收敛, 最终得到局部最优解。上述演算过程比较抽象, 下面我们举个例子, 就能使得整个过程变得一目了然。

# 举例说明

接下来我们用变分推断求解开头所述的单变量高斯混合模型。假设控制  $\mu_k$  的参数为均值  $m_k$  和方差  $s_k$ , 控制  $\mathbf{c}_i$  的参数为  $\varphi_i$ <sup>1</sup>。  
据此我们的证据下界可以化为：

$$\begin{aligned}\text{ELBO}(\mathbf{m}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}) &= \mathbb{E}[\log p(\mathbf{x}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\mu}); \mathbf{m}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\varphi}] - \mathbb{E}[\log q(\boldsymbol{\mu}); \mathbf{m}, \mathbf{s}^2] - \mathbb{E}[\log q(\mathbf{c}); \boldsymbol{\varphi}] \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[\log p(\mathbf{x}_i | \mathbf{c}_i, \boldsymbol{\mu}); \mathbf{m}, \mathbf{s}^2, \varphi_i] + \mathbb{E}[\log p(\mathbf{c}_i); \varphi_i]) + \sum_{k=1}^K \mathbb{E}[\log p(\mu_k); m_k, s_k^2] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\log q(\mathbf{c}_i); \varphi_i] - \sum_{k=1}^K \mathbb{E}[\log q(\mu_k); m_k, s_k^2]\end{aligned}$$

接下来，我们对变量进行逐个优化。

---

<sup>1</sup> $\varphi_i$  为一个  $K$  维的实值向量，它代表第  $i$  个样本关于所有高斯分量的隶属度，详情可参见求解高斯混合模型的 EM 算法。

首先是关于控制  $\mathbf{c}_i$  的量  $\varphi_i$  的优化, 利用式(6), 我们有

$$q^*(\mathbf{c}_i; \varphi_i) \propto \exp\{\mathbb{E}[\log p(\mathbf{c}_i)] + \mathbb{E}[\log p(\mathbf{x}_i|\mathbf{c}_i, \boldsymbol{\mu})]\} \quad (7)$$

由于根据  $\mathbf{c}_i$  的定义, 可知  $p(\mathbf{c}_i) = 1/K$ 。因此,  $\mathbb{E}[\log p(\mathbf{c}_i)] = -\log K$ 。而上式第二项可以写作:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\log p(\mathbf{x}_i|\mathbf{c}_i, \boldsymbol{\mu})] &= \mathbb{E}\left[\log\left(\prod_{k=1}^K p(\mathbf{x}_i|\mu_k)^{c_{ik}}\right)\right] \\ &= \sum_{k=1}^K c_{ik} \mathbb{E}[\log p(\mathbf{x}_i|\mu_k)] \\ &= \sum_{k=1}^K c_{ik} \mathbb{E}[-(\mathbf{x}_i - \mu_k)^2/2] + \text{const} \\ &= \sum_{k=1}^K c_{ik} \mathbb{E}[\mathbf{x}_i m_k - (m_k^2 + s_k^2)/2] + \text{const} \end{aligned}$$

综上, 去掉无关的项, 我们有  $\varphi_{ik} \propto \exp\{\mathbb{E}[\mathbf{x}_i m_k - (m_k^2 + s_k^2)/2]\}$ 。

接下来是对控制  $\mu_k$  的量  $m_k$  和  $s_k$  的优化。将无关的项看作常数，利用式(6)，我们有：

$$q^*(\mu_k; m_k, s_k) \propto \exp\{\mathbb{E}[\log p(\mu_k)] + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\log p(\mathbf{x}_i | \mathbf{c}_i, \mu)]\} \quad (8)$$

根据  $\mathbf{c}_i$  的定义，我们有  $\mathbb{E}[c_{ik}] = \varphi_{ik}$ 。所以我们有：

$$\begin{aligned} \log q^*(\mu_k; m_k, s_k) &= \log p(\mu_k) + \sum_i \mathbb{E}[\log p(\mathbf{x}_i | \mathbf{c}_i, \mu)] + \text{const} \\ &= -\mu_k^2/2\delta^2 + \sum_i \mathbb{E}[c_{ik} \log p(\mathbf{x}_i | \mu_k)] \\ &= -\mu_k^2/2\delta^2 + \sum_i \mathbb{E}[c_{ik}] \log p(\mathbf{x}_i | \mu_k) \\ &= -\mu_k^2/2\delta^2 + \sum_i \varphi_{ik} (-(\mathbf{x}_i - \mu_k)^2/2) \\ &= \left(\sum_i \varphi_{ik} \mathbf{x}_i\right) \mu_k - \frac{1}{2} \left(\sum_i \varphi_{ik} + 1/\delta^2\right) \mu_k^2 \end{aligned}$$

由于  $q^*(\mu_k; m_k, s_k)$  是一个 Gaussian 分布的密度函数，我们对比上式的一次项和二次项，可以得到  $m_k$  和  $s_k$  的更新策略如下：

$$m_k = \frac{\sum_i \varphi_{ik} \mathbf{x}_i}{\sum_i \varphi_{ik} + 1/\delta^2}, \quad s_k^2 = \frac{1}{\sum_i \varphi_{ik} + 1/\delta^2} \quad (9)$$

至此，我们已经得到了所有隐变量的更新策略。虽然推导过程比较复杂，但是更新策略确实是非常简单的，每一步更新过程关于样本数量  $n$  是呈线性的，相比于传统的贝叶斯推断的指数复杂度，要低得多。下一步，我将把上面这个例子用程序实现，并且提供优化过程中分布的可视化表示。