基于 GA 优化的 T_S 模型倒立摆控制

卫亚文

摘要 小车倒立摆系统是开展各种控制实验的理想平台。本文对小车倒立摆系统的控制分为三部分：第一部分是小车倒立摆系统的动力学方程推导，第二部分是小车倒立摆系统的 T-S 型模糊控制器设计，第三部分使用 GA 算法对 T-S 模糊控制器中的隶属度函数的中心点和宽度进行全局优化，改善控制效果。

关键词 倒立摆，T-S 模型，GA

1 小车倒立摆系统数学模型

小车倒立摆系统如图1.1所示，为简化模型，这里假设杆无质量，摆的质量集中于杆的顶端。并假设小车可不受约束地在x方向自由运动。

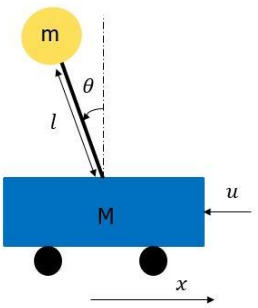

图 1.1 小车倒立摆系统示意图

则 Lagrange 函数为

$$L = T - V$$

$$= \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 - mglcos\theta$$

$$= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 - ml\dot{x}\dot{\theta}cos\theta + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mglcos\theta$$

代入第二类 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{x}}\right) - \frac{dL}{dx} = -u$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dL}{d\theta} = 0$$

令$a = \frac{1}{m+M}$,并消去 $\ddot{x}$

解得：

$$\ddot{\theta} = \frac{gsin\theta - aml\dot{\theta}^2 sin(2\theta)/2 - aucos\theta}{l - amlcos^2\theta}$$

降阶：可得倒摆的动力学方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{gsinx_1 - amlx_2^2 sin(2x_1)/2 - aucosx_1}{l - amlcos^2 x_1}$$

式中x_1表示摆杆与垂直线的夹角，x_2表示角速度。$g = 9.8m/s^2$,小车质量$M = 2kg$，摆的质量 m=0.1kg,$l = 0.5m$

2 T-S 型模糊控制器设计

将输入变量(x_1, x_2)进行5级模糊分割，相应语言变量E取值为$\{NL, NS, ZO, PS, PL\}$，其隶属度函数如图2.1所示。

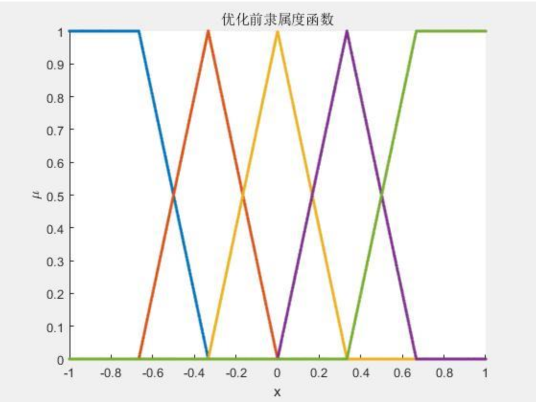

图 2.1 GA 前的隶属度函数

通过第一部分中推导的的状态方程$(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$，建立T-S模型的25条模糊规则：

Rule(i,j)：if x_1是E_i中心附近 and x_2是E_j中心附近then

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(i,j)x + \boldsymbol{B}(i,j)u \quad i,j = 1,2...5$

令状态方程$(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$为**F**，其中

收稿日期 XXXX-XX-XX 收修改稿日期 XXXX-XX-XX
Received Month Date, Year; in revised form Month Date, Year
国家自然科学基金(XXXXXXXX)资助(不同基金项目间用``,"分隔)
1. 中国空间技术研究院 北京 100094

$$\boldsymbol{A}(i,j)=\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}(i,j)=\begin{bmatrix}0\\ \frac{-acosx_1}{l-amlcos^2x_1}\end{bmatrix}$$

其中$x_1=E_i$中心，$x_2=E_j$中心。可见模糊规则的本质在于对非线性状态方程进行局部线性化。

每个局部线性模型的期望闭环几点都设置为$(-4\pm 5.457j)$，按照极点配置设计方法求得每个子系统的局部反馈增益矩阵$\boldsymbol{L}(i,j)$。

所以总的控制规律为：

$$u(t)=-\sum_i^5\sum_j^5\bar{\alpha}_{ij}\boldsymbol{L}(i,j)\,\boldsymbol{x}$$

其中$\bar{\alpha}_{ij}$为Rule(i,j)归一化后的隶属度。

由于初始条件为$\theta(0)=0.1rad$，$\dot{\theta}(0)=0$。因此对倒立摆系统进行仿真时，使用x_1是0附近and x_2是0附近的线性化方程更新$\boldsymbol{x}$，即

$$\boldsymbol{x}_{new}=\boldsymbol{x}_{old}+(\boldsymbol{A}(3,3)x+\boldsymbol{B}(3,3)u)T_s$$

其中T_s为时间步。

3 基于 GA 优化的 T-S 模糊控制器

取5个设计变量，分别是：PS的中心x轴坐标$GA.x(1)$、PL的中心x轴坐标$GA.x(2)$、ZO半个宽度$GA.x(3)$、PS半个宽度$GA.x(4)$、PL半个宽度$GA.x(5)$。ZO的中心x轴坐标固定为0，NL,NS的中心x轴坐标和宽度与PS,PL关于x轴对称。

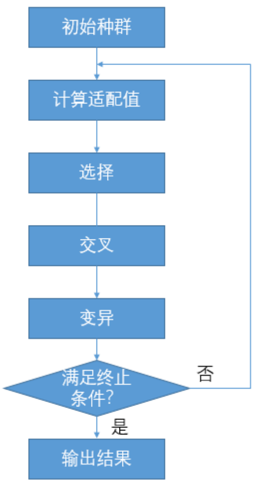

图 3.1 GA 算法基本流程图

二进制字符串长度m=30，种群数量num_part =50，交叉概率取0.5，变异概率取0.001。迭代搜索的终止条件为平均适配值变化< 1e-8，或者最大迭代次数超过500。

GA算法的基本流程如图3.1所示

4 仿真及优化结果

给定初始条件$\theta(0)=0.1rad$，$\dot{\theta}(0)=0$。优化目标为θ响应曲线的超调量M_p和调节时间t_s的归一化加权和。即：

$$f=0.5\frac{M_p}{M_p^*}+0.5\frac{t_s}{t_s^*}$$

如此可以保持超调量M_p和调节时间t_s数量级相当。

经过优化的隶属度函数图像如图 4.1 所示，

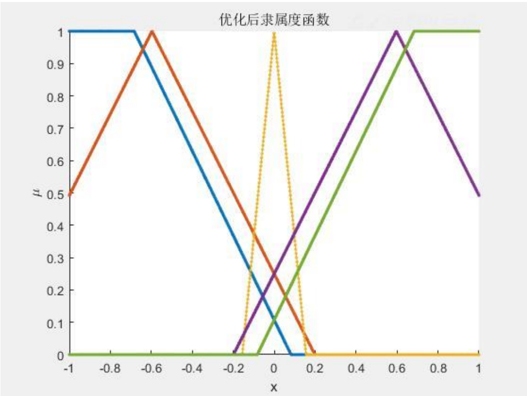

图 4.1 GA 优化后的隶属度函数

GA 算法经过 20 次迭代，达到了搜索终止条件，优化前后角度θ响应曲线如图 4.2 所示，红色曲线表示用图 2.1 所示的隶属度函数计算的响应。蓝色曲线表示用经过 GA 算法优化后的图 4.1 所示的隶属度函数计算的响应。

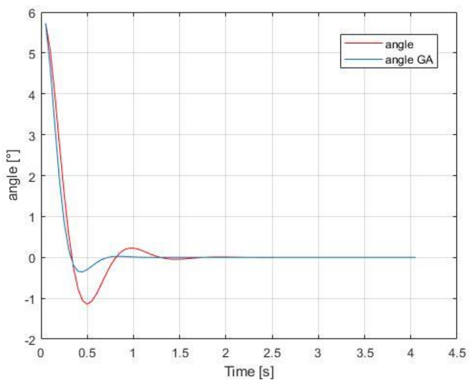

图 4.2 GA 优化前后的角度响应对比

如表 1 所示，优化后的摆角θ响应曲线的超调量M_p和调节时间t_s都明显小于优化前的值。

表 1　优化前后控制指标对比

	Mp	ts	目标函数
初始	0.02	1.45	0.5620
GA 优化	0.0062	1.2500	0.1749

GA 优化前后角速度$\dot{\theta}$响应曲线如图 4.3 所示

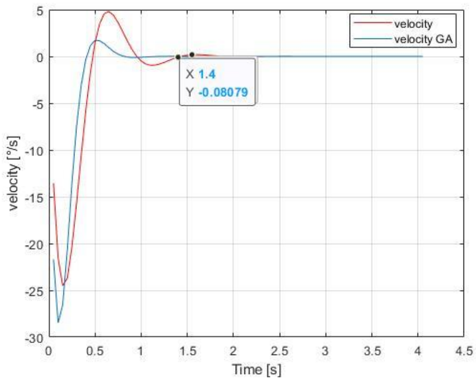

图 4.3　GA 优化前后的角速度响应对比

GA 优化前后控制力 u 响应曲线如图 4.4 所示

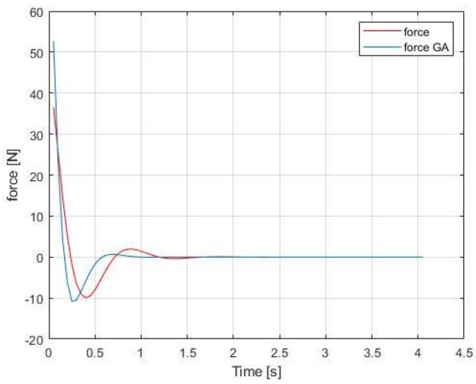

图 4.4　GA 优化前后的控制力响应对比

图 4.4 和图 4.5 分别是 GA 算法平均适配值优化曲线和最优个体适配值优化曲线。可以看到，GA 算法在优化 T-S 模糊控制器方面收敛速度和收敛稳定性都表现良好。经过 GA 算法对隶属度函数的中心点和宽度进行全局优化后的 T-S 模糊控制器，其控制效果明显得到了改善。

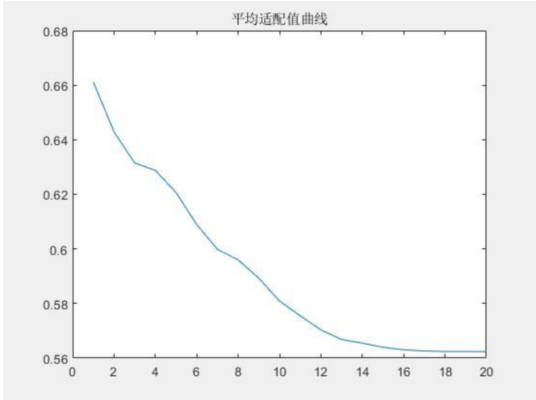

图 4.4　GA 最优个体适配值优化曲线

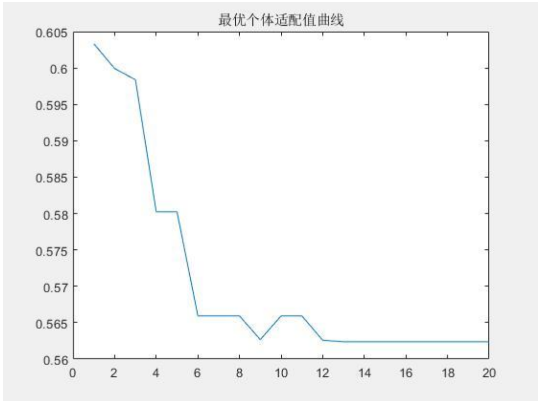

图 4.5　GA 最优个体适配值优化曲线

5　结论

本文首先假设摆杆无质量，摆的质量集中于杆的顶端，推导了小车倒立摆系统的动力学方程。其次设计了对应的 T-S 模糊控制器，仿真结果表明本文设计小车倒立摆系统的 T-S 模糊控制器表现良好。最后使用 GA 算法对 T-S 模型控制器的隶属度函数的中心点和宽度进行了全局优化，经过优化后的隶属度函数显著改善了控制效果。

References

1. 孙增圻，邓志东，张再兴. 智能控制理论与技术[M]. 清华大学出版社, 2011.