





西北工业大学

博士学位论文

(学位研究生)

题目：基于改进 BESO 算法的多尺度  
多相材料并行优化设计

作者：王宪杰

学科专业：工程力学

指导教师：张洵安 教授

2015 年 6 月



**Title: Multi-scale Concurrent Optimization of Composite  
Structure and its Periodic Multiphase Composite Material  
based on Improved BESO Algorithm**

**By  
Xianjie WANG**

**Under the Supervision of Professor  
Zhang Xun'an**

A Dissertation Submitted to  
Northwestern Polytechnical University

In partial fulfillment of the requirement  
For the degree of  
Doctor of Engineering Mechanics

Xi'an P. R. China  
**June 2015**



## 摘 要

本文在分析传统双向渐进结构优化方法 (Bi-directional evolutionary structural optimization, 简称 BESO) 存在不足的基础上, 针对性的对数值计算进行了合理的改进。并在此基础上分别对宏观结构、微结构优化、材料/结构一体化等相关问题进行了多尺度、多相复合材料布局及拓扑优化等层次系统地研究。

主要研究内容是: 1)通过对传统 BESO 的数值计算方法合理的改进, 对解的合理性进行了深入的讨论与论证, 给出了重要参数选取区间的合理建议, 对实际工程应用具有较好的指导意义。2)引入惩罚指数材料插值方案的改进灵敏度有效的解决多相材料分布优化和材料/结构一体化优化问题, 结合相关算例分析验证了优化结果的合理性。3)在改进 BESO 方法基础上提出了以结构宏观性能为目标函数, 建立材料微观结构形状与宏观结构材料弹性张量之间的联系, 集成宏观结构所得到的位移场, 推导出带有宏观结构力学特性的微观敏度。该方法在极小尺度周期性排列的材料微结构胞元优化设计过程中, 无论是拓扑优化还是多相材料布局优化都能得到边界清晰、受力合理的优化结果。4)充分考虑微观尺度和宏观尺度的关联性, 将材料微结构胞元设计和宏观结构拓扑优化相结合, 建立周期性复合材料构型及结构一体化优化设计方法。并通过倒 L 形梁优化结果和理论分析的比较, 验证本文提出方法的有效性。5)在一体化优化方法的基础上, 建立周期性多相材料微结构布局及宏观结构拓扑并发优化方法的一般规律, 并以典型算例为基础对本文所提方法进行了合理性验证。取有差异的宏观初始有限元模型和不同微观胞元初始有限元模型研究了宏观、微观初始模型对优化结果的影响。6)编写第三方插件, 将 MATLAB 数值计算、符号计算与 ABAQUS 有限元计算进行数据交换。通过软件提供的内置并行结构, 考虑并行架构、各作业间存在逻辑关系和 job 运行状态, 建立不同软件之间协同作用数据交换平台的并行计算开发。

本文的创新点主要有:

1、建立合理的材料等效弹性模量的求解方程, 并将其转换为有限元形式, 利用 ABAQUS 提供的线性摄动步功能, 用分析步求解线弹性问题, 从而基于现有强大的商业软件实现从微观到宏观的等效性能求解。

2、以结构宏观性能为目标函数, 建立材料微观结构形状与宏观结构材料弹性张量之间的联系, 集成宏观结构所得到的位移场, 推导出带有宏观结构力学特性的微观敏度。实现对极小尺度周期性排列的材料微结构胞元进行拓扑优化和多相材料布局优化设计。

3、按照材料属性排序引入材料插值函数依次进行灵敏分析, 建立周期性多相材料微结构布局及宏观结构拓扑并发优化方法的一般规律, 并以典型算例为基

础对本文提出方法进行了合理性验证。

4、通过对协同工作平台的并行计算开发，在保证精度的前提下，计算效率成倍提高，大大降低了计算时间成本，从而促进了大型复杂工程优化的技术转换。

**关键词：**双向渐进结构优化方法，多相材料，多尺度，均匀化方法，一体化优化



## Abstract

To compensate for the imperfection of traditional bi-directional evolutionary structural optimization, some direct and appropriate numerical computation improvements are given in this paper. So the multi-scale and multiphase problems for the structure and its periodic composite materials are researched by the concurrent optimization algorithm of this improved BESO.

The main contents researched in this dissertation are as follows: 1) after some direct numerical computation improvements for traditional BESO method, the intervals of some important parameters are suggested for the practical application. 2) To solve the problem of multiple materials layout or material and structural systems optimization, a new material interpolation scheme with penalization is proposed. 3) The elasticity tensor of the heterogeneous material is obtained from the microstructure through the homogenization theory, and the relationship between microstructure and macrostructure is got by the linear perturbation function. The elasticity tensor is integrated into the analysis of the macrostructure. Then, the sensitivity analysis for the material unit cell is established from the macrostructure displacement field. The optimum of cellular material and composites with periodic microstructures is designed from given material so that the macrostructure has the maximum stiffness. 4) Considering the mutual coordination between the role of micro-scale and macro-scale, the material unit cell design and macrostructure optimization by this method. 5) By the concurrent optimization algorithm, the sensitivities both on the micro and macro structure are calculated with material interpolation scheme, and sequenced by the material properties of each element. The universal algorithm for the multi-scale concurrent optimization of composite structure and its periodic multiphase composite material is established, and its validity is also demonstrated by some classic examples. 6) With the help of the plug-in program, the data can be exchanged between the FEA software of ABAQUS and the post-processor package in MATLAB. And the parallel computing is built-in the MATLAB codes.

The innovative points in this dissertation are listed below:

1. A reasonable equivalent elastic modulus of the material converts into the limit element form, and solves by the linear perturbation step function provided in ABAQUS. So the relations between micro and macro are getting by the commercial software.

2. Based on the performance of macrostructure, the elastic tensor of the shape for microstructure is integrated into macrostructure. And the sensitivity with the property of the

macrostructure performance is got. The optimum of cellular material and composites with periodic microstructures is designed by this method.

3. The sensitivities for the elements are sorted by the material interpolation scheme. And the universal law for the problem of composite structure and its periodic multiphase composite material is researched. The validity of this given method is demonstrated by some classic examples.

4. The cooperative work platform is set up by the parallel computing, so the efficiency of computation is greatly improved. This technological makes large complex engineering optimization become easily.

**Key words:** Bi-directional evolutionary structural optimization (BESO), Multiphase materials, Multi-scale, Homogenization method, Concurrent optimization

## 目 录

摘 要.....	I
<b>Abstract.....</b>	<b>III</b>
目 录.....	V
第一章 绪论.....	1
1.1 选题背景.....	1
1.2 宏观结构拓扑优化.....	2
1.2.1 拓扑优化的数学描述.....	2
1.2.2 拓扑优化算法及应用研究进展.....	4
1.2.3 常见数值问题解决及研究.....	6
1.2.4 现有优化商业软件及开发.....	8
1.3 材料微观拓扑优化.....	9
1.3.1 材料微观拓扑优化研究意义及进展.....	9
1.3.2 均匀化方法研究及应用.....	12
1.4 材料/结构的一体化设计.....	14
1.4.1 材料/结构的一体化优化意义.....	14
1.4.2 材料/结构的一体化优化研究进展.....	14
1.5 渐进拓扑优化方法及研究进展.....	16
1.5.1 渐进结构优化法基本思想与改进.....	16
1.5.2 ESO/BESO 方法的研究进展与应用.....	18
1.6 本文的主要工作.....	21
1.7 论文的组织结构.....	22
1.8 本章小结.....	23
第二章 BESO 算法改进及参数分析.....	25
2.1 传统优化方法存在问题.....	25
2.2 BESO 的改进算法.....	26
2.2.1 材料插值模型.....	26
2.2.2 敏度改进.....	27
2.2.3 优化准则.....	28
2.3 BESO 算法实现流程.....	29
2.4 改进效果及参数取值区间.....	30
2.4.1 棋盘格的消除.....	30
2.4.2 不稳定性解的改进.....	31

2.4.3 网格依赖性的控制 .....	32
2.4.4 双向优化的实现 .....	32
2.4.5 进化率的选取 .....	33
2.4.6 三维复合材料结构优化 .....	34
2.5 特殊结构优化 .....	36
2.6 合理性的讨论 .....	37
2.6.1 解决办法的讨论 .....	38
2.6.2 问题实质的探讨 .....	39
2.6.3 改进策略 .....	40
2.7 本章小结 .....	43
第三章 多相材料布局及材料/结构的一体化设计 .....	45
3.1 多相材料/结构的一体化 BESO 改进算法 .....	45
3.1.1 数学优化模型提出 .....	45
3.1.2 材料插值模型 .....	46
3.1.3 单元能量敏度定义 .....	46
3.2 优化准则 .....	48
3.3 BESO 优化算法实现流程 .....	48
3.4 优化算法软件开发 .....	50
3.4.1 数据交换 .....	50
3.4.2 并行计算 .....	52
3.5 算例 .....	55
3.5.1 单相材料结构优化 .....	55
3.5.2 两相材料分布优化 .....	56
3.5.3 三种材料分布优化 .....	55
3.5.4 结构/材料分布一体化优化 .....	59
3.5.5 并行计算改进效果 .....	59
3.6 本章小结 .....	60
第四章 基于宏观性能的材料微观拓扑优化 .....	63
4.1 均匀化理论的软件实现 .....	63
4.1.1 周期性材料等效弹性模量的求解 .....	63
4.1.2 有限元形式的转换 .....	66
4.1.3 基于 ABAQUS 的微观胞元建模及等效性能求解 .....	67
4.2 周期性多孔材料的优化模型 .....	70
4.3 基于均匀化理论的敏度分析 .....	70

4.4 优化步骤和程序数值实现.....	71
4.5 数值算例及结果分析.....	73
4.6 本章小结.....	76
第五章 微结构布局及宏观结构拓扑一体化分析及设计.....	77
5.1 两尺度应力学分析.....	77
5.2 微结构布局及宏观结构拓扑一体化优化模型.....	80
5.3 灵敏度分析.....	81
5.4 优化步骤和程序数值实现.....	82
5.5 数值算例及结果分析.....	84
5.6 本章小结.....	87
第六章 多相材料多尺度布局优化设计.....	89
6.1 多相材料多尺度布局优化模型.....	89
6.2 灵敏度分析.....	91
6.3 优化步骤.....	92
6.4 特殊算例及结果分析.....	93
6.5 本章小结.....	110
第七章 总结与展望.....	113
7.1 工作总结.....	113
7.2 未来展望.....	113
参考文献.....	115
致 谢.....	133
攻读博士学位期间发表的学术论文和参加科研情况.....	135



## 第一章 绪论

### 1.1 选题背景

传统的产品设计流程需要经历设计、制造、试验、再设计的漫长过程，周期长、耗费高，而且得到的设计只是满足基本的要求，因此先进的设计手段和优质创新型产品是企业战略发展核心<sup>[1]</sup>。拓扑优化设计，可以实现结构轻量化、功能特殊化、性能集成化，满足宏观结构的服役环境要求，最大限度地挖掘材料和结构设计潜力<sup>[2]</sup>。其目的在于为工程师提供高效、可靠、系统的最优结构优化设计策略，改变传统的设计理论和方法，为寻求既安全又经济的结构形式，最大限度地缩短设计周期和降低费用都起到了重要作用<sup>[1]</sup>。拓扑优化在尺度上分为宏观结构拓扑优化，微观材料拓扑优化和材料/结构的一体化设计<sup>[3]</sup>。

目前宏观优化已发展比较成熟，近期研究更多的关注于多相复合材料的优化设计<sup>[3]</sup>。因为组分材料之间可以相互补充，复合材料具有传统材料所不具备的优良性能，如质量轻、比强度高、比模量大、可设计性等优点，因而广泛地应用于航天、航空、汽车、建筑、化工和体育器材等领域<sup>[4,5]</sup>。

微结构胞元是材料在细观尺度上最小的重复性单元，它对材料失效的检测和材料设计等有着关键的作用并决定着宏观性能<sup>[6]</sup>。随着均匀化方法的发展而兴起的微观材料拓扑优化主要是集中于两种问题的研究：一是使材料满足给定性能的最小体积含量问题，如零泊松比材料设计，负热膨胀系数设计等问题；二是满足一定材料体积约束和对称边界条件下，具有极端性能的材料微结构构型问题，如极端弹性性能材料设计<sup>[7]</sup>。通过对材料微观构型的优化获得具有特殊性能的复合材料成为目前材料领域科研工作者研究的热点。它不但可以应用于复合材料的设计与制造，还可为材料科学的研究提供力学的理论依据<sup>[6]</sup>。

因为宏观结构的形状、几何参数、加载方式等对材料微结构的最佳构型有很大的影响，所以依据等效性能优化得到的微结构胞元组成宏观结构时，并不能保证依旧是满足特定结构要求的最优微结构<sup>[8]</sup>。为达到材料设计与结构设计的有机融合以及实现材料与结构的最佳匹配，材料/结构一体化设计被开创性的提出。采用宏观布局设计与微结构精细设计相结合的方法所进行的材料/结构一体化设计中，宏观布局优化在于获得指定材料的宏观分布，而微结构拓扑优化着重于最优结构下局部材料微结构构型设计，从而可以最大限度的发挥材料的潜能，对新型轻质功能结构设计技术具有重要参考意义<sup>[9]</sup>。材料/结构一体化设计技术是空间结构发展的重要方向，发展结构和材料、宏观和微观的整体拓扑优化技术和理论已成为结构和材料设计的发展趋势<sup>[10]</sup>。应该指出虽然多尺度分析已经取得了很多重要进展，然而多尺度优化刚刚引起人们的注意<sup>[8]</sup>。

目前，结构优化应用的领域涉及航空航天、水利、桥梁、汽车、铁路、轻工纺织、

能源工业以及军事工业等诸多领域,弄清材料性能的宏观、细观及微观演化规律,进行材料的虚拟设计与选材,促进多孔材料/复合材料的自主创新,既具有重要的基础研究意义,也有着重要的应用价值<sup>[11]</sup>。本文在此背景首先针对传统拓扑优化方法的不足,引入基于惩罚指数的材料插值方案,通过编写第三方插件,实现改进后的拓扑优化方法 MATLAB 子程序与 ABAQUS 有限元软件数据交换,成功用于解决宏观多相材料分布及材料/结构一体化优化问题。然后,充分考虑材料和结构的尺度关联性,基于均匀化理论将材料微结构胞元设计和宏观结构拓扑优化相结合,按照材料属性排序引入材料插值函数依次进行灵敏分析,建立周期性多相材料微结构布局及宏观结构拓扑并发优化设计方法。

## 1.2 宏观结构拓扑优化

自 1988 年丹麦学者 Bendsøe 与美国学者 Kikuchi<sup>[12]</sup>提出均匀化方法以来,连续体结构拓扑优化在理论和应用上得到了迅速发展,引起了研究人员越来越多的关注。目前,连续体结构拓扑优化领域比较成熟的方法有均匀化方法、变厚度法、密度插值法、ICM 法、水平集法、渐进结构优化方法和智能优化算法七大类<sup>[13]</sup>,并集中在以下四个方面做了大量的研究工作:

- (1)实际优化问题数学描述方法的研究;
- (2)拓扑优化算法及应用领域拓展;
- (3)优化过程中各种数值问题的解决;
- (4) 实现优化算法的计算机软件开发。

### 1.2.1 拓扑优化的数学描述

拓扑优化方法,就是在给定的空间区域内,依据已知的负载或支承等约束条件,解决材料的最优分布问题,从而使结构的刚度达到最大或使输出位移、应力等达到规定要求的一种创新结构设计方法<sup>[14]</sup>。其工作主要是依据工程实际建立数学模型,选择合理的优化方法,并在计算机软件上实现的过程。那么,把一个工程结构的设计问题用准确的数学公式抽象出来,确定合理目标函数,无疑是拓扑优化首要完成的任务,也是是否能得到理想的新型产品最关键一步。

#### 1.2.1.1 拓扑优化的数学模型

对于连续体拓扑优化是在规定的设计域内确定结构孔洞的数量、位置、大小及其形式。拓扑优化必须包含设计变量、目标函数和约束条件三要素,其数学模型一般下式:

设计变量:  $\mathbf{x} = [x_1, x_2 \cdots x_n]^T$

$$x = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega_s \\ 0 & \text{if } x \notin \Omega_s \end{cases}$$

目标函数:  $\min f(\mathbf{x})$  (1-1)



约束条件:  $g_i(x) \leq 0, \quad i=1, 2 \dots k$

$H_j(x) = 0, \quad j=1, 2 \dots l$

终止条件:  $\varepsilon < 0$

其中,  $\Omega_s$  是实体材料所占区域。

拓扑优化数学模型主要包括以下内容:

a. 设计变量  $x$ ——设计变量是设计对象中需要改变或调整的参数。根据实际问题及不同的拓扑优化方法  $x$  是一个参数化包含  $n$  个元素数据向量的设计变量,  $n$  的取值由具体数目由拓扑优化问题和有限元单元数目确定。对于多目标优化问题, 设计变量的种类也不再单一。通常情况下, 一个优化设计方案中设计变量取得越多, 优化的效果就越好, 同时工作量也越大。合理的选择设计变量及确定设计变量的种类对优化效果和优化效率起着至关重要的作用。

b. 目标函数  $f(x)$ ——目标函数就是要求产品达到的性能或结构拓扑优化设计需要达到的目标, 如结构的柔顺性、结构的刚度、自振周期、结构质量等。它是设计变量的函数, 对于多目标设计优化问题, 目标函数是多个, 同时优化准则或灵敏度求解也将随之变化。

c. 约束条件  $g_i(x)$  和  $H_j(x)$ ——约束条件是结构设计中需要应遵守的各种限制性条件, 表达形式主要有等式约束 (如  $H_j(x) = 0$ ) 和不等式约束 (如  $g_i(x) \leq 0$ ), 同时它们不是必不可少的, 针对不同的结构优化设计问题, 约束条件根据具体设计要求和设计方法而定。常见的约束条件有几何约束如体积约束、位移约束、应力约束等等。有时约束条件也可作为目标函数来使用以完成多目标优化任务。

d. 终止准则  $\varepsilon$ ——优化设计中达到目标函数预设值时, 通过事先定义的终止准则使迭代过程终止。

对于不同的实际问题和选择的优化方法的差异, 具体的优化数学模型也存在着很大的差别, 很难用一个统一的表达式来定义, 但是其主要思想和基本构成是一致的。

### 1.2.1.2 拓扑优化材料插值模型

拓扑优化中材料插值模型非常重要, 是解决优化过程中很多数值问题的基础。目前, 应用于拓扑优化中的材料插值方法有: SIMP 方法<sup>[15]</sup>、均匀化方法<sup>[12]</sup>、峰值函数模型<sup>[16]</sup>、相场模型<sup>[17]</sup>以及 RAMP 方法<sup>[18]</sup>等。其中 SIMP 方法和 RAMP 是最具有代表性的两种材料插值模型。

#### 1) SIMP

对两种实体材料或一种实体材料与空洞的组分布局, 若赋给每个单元一个伪密度变量  $y \in [0, 1]$ , 则单元材料的弹性模量插值计算式为:

$$E_i = E_1 + \rho_i^\alpha (E_2 - E_1) \quad (1-2)$$

式中:  $E_1$ 、 $E_2$  分别为实体材料 1 和实体材料 2 的弹性模量(假设均为各向同性材料)。

$E_i$ 、 $\rho_i$  分别为第  $i$  个单元的弹性模量和伪密度。 $\alpha$  为惩罚因子，一般取为 2~4，本文取  $p=4$ 。

当其中一种材料为空材料，即  $E_2=0$ 。该问题转换为结构的拓扑优化，那么式 (10) 等价为：

$$E_i = \rho_i^\alpha E \quad (1-3)$$

**SIMP** 方法是以各单元的材料伪密度为设计变量，通过加入惩罚因子将 0-1 量转变为 0-1 之间的连续变量并对中间伪密度值进行惩罚使之尽可能趋于 0 或 1。该方法具有简单、易于实现、计算效率高等特点。

为了使其能够拓展到两尺度问题的研究，对其进行必要的改进得到 **PAMP**（多孔各向异性材料惩罚策略），并将其运用到宏观尺度的拓扑优化，同时微观尺度上采用 **SIMP** 插值方法。为了和单一的宏观优化区别，将其重新定义为：

$$\text{SIMP: } E_j^{\text{MI}} = \rho_i^\alpha E^{\text{B}} \quad (1-4)$$

$$\text{PAMP: } E_i^{\text{MA}} = \rho_i^\alpha E^{\text{H}} \quad (1-5)$$

式中， $E^{\text{B}}$ 、 $E_j^{\text{MI}}$  分别为微观材料尺度上基础材料弹性模量和第  $j$  个微观胞元的弹性模量；同时， $E^{\text{H}}$ 、 $E_i^{\text{MA}}$  分别为宏观结构尺度上嘉定多孔材料（或复合材料）的均匀化弹性模量和第  $i$  个宏观单元的等效弹性模量。

## 2) RAMP 模型

Stope 和 Sanberg<sup>[19]</sup>提出了一种用有理函数来近似表述材料插值关系的模型，由密度为  $\rho$  的材料和孔洞组成的复合材料的弹性模量为：

$$E(\rho) = \frac{\rho}{1+p(1-\rho)} E^0 \quad (1-6)$$

其中  $E(\rho)$  和  $E^0$  分别为复合材料及密度为  $\rho$  的材料的弹性模量。**RAMP** 插值模型对结构单元的弹性模量的控制参数为  $\rho$  和  $p$ 。当取不同的惩罚参数  $p$  时，会导致不同的材料密度单元的弹性模量逼近 0 或  $E^0$  的趋势。

另外，诸多科研人员地其他一些方法做了大量研究工作。**Mlejnek** 等<sup>[20]</sup>从工程角度出发提出了结构材料密度的幂次惩罚模型，通过在 0-1 离散结构优化问题中引入连续设计变量，并加入中间密度惩罚项，从而将离散结构优化问题转换为连续结构优化问题。**Sigmund** 和 **Bendsøe** 等<sup>[19-22]</sup>对密度法材料插值模型进行了深入研究，从理论上研究了各种不同的密度法惩罚材料插值方法。

### 1.2.2 拓扑优化算法及应用研究进展

结构拓扑优化能在工程结构设计的初始阶段为设计者提供一个概念设计，在保持原结构性能不变的情况下减轻结构重量的同时，往往能得到创新的设计，从而把传统结构设计理念有了跨越式发展，已成为国内外研究的一个热点。为此，学者们先后提出了许

多优秀算法,其中较成熟、应用范围最广的方法主要有变密度方法、变厚度方法、映射方法(Independent, Continuous, Mapping 简称为 ICM)、均匀化法和渐进结构优化法等<sup>[14]</sup>。均匀化法和渐进结构优化法分别在 1.3.3 节和 1.5 节详细介绍。

### 1.2.2.1 变密度法

变密度法<sup>[20]</sup>是属材料(物理)描述方式的结构拓扑优化方法。人为地引入一种假想密度在 $[0,1]$ 之间可变的材料,以连续变量的密度函数形式表达了单元相对密度与材料物理参数之间的对应关系,以每个单元的伪密度作为设计变量,以材料的最优分布为目标函数,将结构拓扑优化问题转化为材料最优分布设计问题,应用优化准则法<sup>[24]</sup>或数学规划方法<sup>[25]</sup>求解材料最优分布设计。密度法中引入 SIMP 或 RAMP 模型,通过惩罚因子对中间密度值进行惩罚,使中间密度向 0-1 聚集,拓扑优化设计结果能很好地逼近实体和孔洞分明的 0-1 优化结果。其特点是:更能反映拓扑优化的本质特征,变密度法设计变量少,程序实现简单,计算效率高,广泛地应用于应力、频率、位移、动力响应的连续体结构拓扑优化设计问题。变密度法虽然克服了均匀化方法中微结构的缺陷,但由于人造密度的假定,使得处理中间密度成为困难,解的精度较差<sup>[26]</sup>。

近些年来,研究人员对变密度法做了大量而卓有成效的研究,其中最具代表性的有: Mlejnek<sup>[27]</sup>和 Bendsøe<sup>[21]</sup>分别建立了变密度模型并证实了该方法物理意义的存在性,随后 Yang<sup>[37]</sup>基于该理论对车身进行了拓扑优化,王健等<sup>[28]</sup>解决了应力约束下平面弹性结构的拓扑优化问题。另外,袁振<sup>[29]</sup>基于杂交元和变密度法研究了连续体结构拓扑优化问题,指出其数值的不稳定性和计算的复杂性是该方法在应用中面临的主要困难<sup>[30-32]</sup>,故该方法有待进一步修正和改进。

### 1.2.2.2 变厚度法

变厚度法的基本思想是以基结构中单元厚度为拓扑优化设计变量,通过改变结构中厚度分布实现结构拓扑的变更。变厚度法用于比较简单的平面结构(如膜、板和通过删除厚度尺寸的壳等),该方法避免了均匀化方法构造微结构的麻烦,但是由于把拓扑变量挂靠在单元厚度上,拓扑变量失去了独立的层次,导致推广到三维问题有一定的难度,应用范围狭窄,优化效率也难以得到提高<sup>[33,34]</sup>。

自 Tenekd<sup>[31]</sup>对薄壳结构的研究基础上提出变厚度法,研究人员在变厚度法的应用领域上做出了一定的开拓。利用该方法程耿东<sup>[35,36]</sup>等先后对平面膜结构和平面弹性体结构进行的研究。另外,周克民<sup>[37]</sup>和胡云昌<sup>[38]</sup>等分别将该方法拓展到了对连续体结构拓扑优化的应用,随后又将此方法与拓扑分析相结合<sup>[39]</sup>。

### 1.2.2.2 ICM

ICM 方法<sup>[40]</sup>是隋允康于 1996 年提出的。它以一种独立于单元具体物理参数的设计变量来表征单元的“有”与“无”,将拓扑变量从依附于面积、厚度等尺寸优化层次变量中抽象出来,恢复了拓扑变量的独立性,为模型的建立带来了方便。同时为了求解的

简捷性，构造了过滤函数和磨光函数，把本质上是 0-1 离散型变量的独立拓扑变量映射为区间[0,1]上的连续型变量，在 ICM 方法中定义了独立连续的拓扑变量<sup>[14]</sup>；在按连续变量求解之后再把拓扑变量反演成离散变量，使独立连续的拓扑变量逼近离散拓扑变量，即通过映射反演完成拓扑变量“离散—连续—离散”的变化过程。

它的关键在于独立连续的拓扑变量和映射反演过程。

独立是指拓扑变量的不再依附于低层次的具体参数上；连续是拓扑变量的连续。

映射反演包含两层含义，一方面是为了协调独立和连续之间的矛盾，借助过滤函数建立离散拓扑变量和连续拓扑变量之间的映射；另一方面是指优化模型的求解用到了原模型和对偶模型之间的映射。

该优化方法在每一轮子循环迭代求解中，结构位移等特性量及其导数都用该轮循环迭代开始时的结构特性量及其导数近似得到，而忽略了循环过程中设计变量的变化大小，这种近似处理可能造成较大的计算误差，从而产生目标函数的振荡现象<sup>[41]</sup>。且优化过程中，大量被删除的材料单元仍以较小的刚度和质量存在于结构中，易引起结构总刚度矩阵病态以及结构出现虚假的局部模态，另外结构分析始终保持在最大设计域的规模，其分析计算量大<sup>[42]</sup>。以上几点在一定程度上限制了该方法的应用和推广。但是 ICM 方法在保持拓扑变量独立的前提下，定义了连续的拓扑变量，应用数学规划中连续光滑的解法有效地解决了应力、位移、频率等约束下的连续体结构拓扑优化问题，并通过引入对偶规划方法大大减少了设计变量的数目，提高了优化的计算效率，具有简洁性、合理性，同时物理上有明确的解释。因此，在优化领域依然占据重要位置。

ICM 方法主要代表性的工作有：隋允康<sup>[43]</sup>和叶红玲<sup>[44]</sup>用 ICM 方法分别研究了骨架与连续体结构的统一模型和位移约束下多工况连续体拓扑优化。张学胜等<sup>[57]</sup>研究了位移约束集成化处理的连续体结构拓扑优化问题，彭细荣等<sup>[45]</sup>基于应力约束凝聚化对 ICM 方法进行了改进。

### 1.2.3 常见数值问题解决及研究

连续体结构拓扑优化方法中采用的数值计算方法主要有：无网格法和有限单元法。无网格法是用移动的最小二乘法构造插值形函数，离散模型仅用一系列节点和对模型边界的描述来表示，从而摆脱了有限元中繁琐的单元网格生成过程，但该方法对边界条件的处理效率很低，目前尚处于发展和完善之中<sup>[13]</sup>。

有限元法是现行应用最广泛的数值计算方法，优化过程的编程简单，但基于有限元法求解时常会出现数值计算问题，如灰度单元（Gray-scale element）、棋盘格(Checkerboard)、网格依赖性(Mesh dependency)和局部极值问题(Local minima)等。这些与材料的优化算法、插值模型及数值求解方法等因素有关的数值计算问题，影响到优化过程的稳定性、收敛性及优化结果的可加工性，导致无法对优化结果进行识别和提取，难以进行后续尺寸和形状设计与制造。

### 1.2.3.1 灰度单元

灰度单元是指在优化结构中存在大量伪密度（介于 0-1 之间的密度）单元，使拓扑结果不清晰，难以确切的给出拓扑构型，使得优化结果在工程实际中可制造性差。灰度单元问题主要存在于变密度方法中<sup>[3]</sup>，可以从以下几个方面进行解决。

(1) 加入惩罚项：构建数学模型时在目标函数中加入惩罚项，使优化变量向变量的上限或下限靠拢。

(2) 合理确定滤波半径：研究表明，为消除网格相关性和棋盘效应而引入的滤波方法，当滤波半径过大时将会导致灰度单元的产生<sup>[47]</sup>。因此，合理选择滤波半径对于抑制灰度单元有明显的效果。

(3) 后处理法：即在优化后期，人为的把中间密度定义为更接近的 0-1 密度值。

(4) 新算法：从算法本质上克服中间密度的存在。如，渐进结构优化法通过逐渐将无效或低效的材料删除，实现连续体结构拓扑优化，因此优化过程中，不再产生 0-1 之间的中间密度，拓扑形式清晰，具有良好的工程应用性<sup>[48]</sup>。

### 1.2.3.2 棋盘格

结构拓扑优化最优结果中，在某些区域内常常出现材料空材料交替出现类似棋盘状的现象，使拓扑构型的提取有一定困难，且难以符合生产实际。Bendsøe<sup>[49]</sup>认为，棋盘格的出现与优化问题解的存在性以及有限元近似的收敛性密切相关，是连续问题的解以弱收敛方式逼近原离散问题的真实解时出现的一种现象。为了得到清晰、匀质并适合加工的优化结果，许多研究人员就棋盘格式抑制技术开展了大量的研究，主要方法有：

(1) 后处理方法：在棋盘格式出现后，采用后处理技术把棋盘格式部分滤除<sup>[50]</sup>。

(2) 改变优化目标函数的泛函以使优化过程趋于稳定<sup>[51]</sup>。

(3) 局部密度斜率控制法：主要对单元密度的梯度变化引入约束来限制相邻单元之间的密度变化，保证有限元求解的准确性。

(4) 采用较为稳定的分析单元：Diaz<sup>[52]</sup>等的研究表明，棋盘格的产生出现与分析单元的选择有关，合理选择高阶单元或采用非协调元，可有效降低或消除棋盘格。如，非协调单元、杂交单元和八节点单元等，可在一定程度上抑制棋盘格式，但随之而来的有限元计算量急剧增大，另外绝对稳定的单元仍未发现<sup>[53]</sup>。

(5) 过滤技术：主要包括灵敏度过滤法<sup>[54]</sup>和密度过滤法<sup>[55]</sup>。它是基于卷积过滤技术，以某单元为中心且在过滤半径范围内各单元灵敏度或密度密度的加权平均值，使结构体现出网格无关性，从而有效消除棋盘格现象，而且不需要加入额外约束，程序实现简单。

(6) 灵敏度再分配法：首先用节点相连的单元灵敏度平均值作为该节点的灵敏度，再用单元的节点灵敏度平均值作为该单元的灵敏度，在拓扑优化过程中以再分配后的单元灵敏度作为材料删除判据<sup>[56]</sup>。这种方法加入额外约束，增加了计算的时间，影响了算法的准确性。

(7)周长约束法: 在规定孔洞面积的前提下, 通过引入周长的上限约束, 来对棋盘格现象进行控制。周长控制法是一种全局约束, 不能对结构的局部细节拓扑进行限制, 所以可能落入局部极值点<sup>[57]</sup>。

### 1.2.3.3 网格依赖性

网格依赖性是指拓扑优化计算结果与计算区域的不同网格划分密度有关。随着网格的剖分密度变大, 网格数量增加, 优化结果的几何复杂性增加, 几何尺寸逐步减小, 出现大量极不利于生产加工的细小分枝结构, 导致计算结果的可制造性下降, 同时也容易产生屈曲等问题。zhou 等<sup>[58]</sup>认为网格依赖性实际上是棋盘格式的一种表现形式, 从而能够避免棋盘格现象的方法对于克服网格依赖性也是同样有效的。因此, 周长约束法、滤波法、敏度再分配法等也同样适用于对网格依赖性的解决问题。

另外, Petersson 等人提出的局部梯度约束方法<sup>[59]</sup>、引力函数法<sup>[60]</sup>、多尺度小波函数法<sup>[61]</sup>、最小尺寸控制法<sup>[58]</sup>等方法可行性也同样得到了证明。

### 1.2.3.4 局部极值

局部极值问题是指在相同离散格式下, 选择不同的算法参数以及不同的计算初始点会得到不同的优化结果。也就是说, 即使初始参数很小的变化, (如几何设计域、单元数、优化参数等)就可能导致优化设计结果的较大变化。它是优化领域一个公认的难题, 目前还没有找到一种完全有效的克服所有局部极值问题的方法, 特别是多目标、多约束、大规模、复杂的拓扑优化问题, 通用的全局最优算法还有待于进一步研究和完善<sup>[62]</sup>。

一般采用两种措施来减少局部极值问题的影响<sup>[33]</sup>: 一是从优化算法上寻找一种尽量合适的全局优化算法; 二是从迭代初值上采取选用不同的初始计算值来进行试算, 选取较好的优化结果。

国内学者程耿东<sup>[63]</sup>等对此进行了深入研究, 并指出应力函数的不连续性是导致桁架结构拓扑优化奇异最优解的原因, 提出了搜索奇异最优解的  $\varepsilon$  放松算法。左孔天<sup>[18]</sup>等人提出了一种基于卷积因子前处理和小波分析后处理的综合过滤算法来消除拓扑优化中的数值计算不稳定现象。目前一些消除数值不稳定性现象的方法都有各自的优缺点, 特别是在实际应用中, 不同的数值方法对计算收敛性和计算速度影响很大<sup>[13]</sup>。

所有这些数值异常的现象, 都是由于拓扑优化数学模型的病态引起的, 所以解决局部极值问题必须从改进优化数学模型开始<sup>[64]</sup>。一个公认的结论是只有凸规划问题的局部最优解才是全局最优解, 但大多数拓扑优化问题都不是凸规划, 因此难以保证其收敛的结果是全局最优解<sup>[64]</sup>。对原优化问题进行改造, 使之成为凸规划问题, 求解过程中再逐渐将其退回至原问题, 即使这样, 也不排除全局最优解存在但是不唯一的情形。因此, 选择一种合适的克服数值不稳定性方法显得尤为重要。

## 1.2.4 现有优化商业软件及开发

成熟的结构拓扑优化方法对于工程结构设计有重大现实意义, 在结构概念设计阶

段，拓扑优化即能得出合理、有效的创新结构初步设计方案。然而，如何将理论有效地在计算机软件上实现，需要在两个方面同时努力。

首先，商用优化软件的通用性和简单易操作性，对于优化技术的推广起到至关重要的作用。拓扑优化对使用者的专业知识要求较高，计算机优化软件平台复杂的操作界面一定程度上同样阻碍了拓扑优化在结构设计中的广泛应用。所以将现有工作人员熟悉的建模界面嵌入合适的优化程序，进一步简化操作界面，使之更加智能化是推动优化技术普及应用的一个重要途径。现有商业软件已经对此做了一些卓有成效的工作，其中最著名的是美国 Altair 公司 Optistruct 软件和德国 Fe-design 公司的 Tosca。前者能够采用 Hypermesh 作为前处理器，在各大行业内都得到较多的应用；后者最开始只集中于优化设计，支持所有主流求解器，以及前后处理，操作可以利用已熟悉的 CAE 软件来进行前处理加载，而后利用 TOSCA 进行优化。另外，Ansa 联盟基于 Ansa 的前处理器开发了 TOSCA GUI 界面，以及 ansys workbench 当中 ACT 的插件，可以直接在 workbench 当中进行拓扑优化仿真<sup>[65]</sup>。

其次，基于现有有限元软件进行开放的功能化二次开发，将最新的理论研究成果更加快捷的通过经典算例加以实现并证明，显然对于科研人员更加重要。另外，谢亿民等<sup>[66]</sup>的研究组开发依附于常用的 Rhinoceros 3D 结构建模界面，通过第三方插件进行数据交换。利用 Rhinoceros 强大的建模功能建立复杂的结构原形，并通过插件调用 BESO 3D 进行对结构的拓扑优化，优化结果通过插件再次调入 Rhinoceros 环境进行进一步的处理。例如，表面光滑拟合与着色上光等。荣建华<sup>[67]</sup>等将 ABAQUS 作为平台结合 Python 程序和 Fortran 语言进行有限元分析和优化设计的二次开发，为方法的深入研究奠定了软件基础。李国清<sup>[68]</sup>等利用 ANSYS 二次开发语言编制了相应的优化程序，有效地进行了二维平板结构的分析和拓扑优化设计。苏铁熊<sup>[69]</sup>等在 CAD/CAE 的基础上，根据快速响应 CAE 设计的需求建立了相应的产品数据库，构架了结构的参数化几何模型与优化设计模型的双向数据共享和映射机制，进行了弹槽导引的快速参数化优化设计，验证了双向相关的 CAD/CAE 快速响应设计方法的可行性。刘书田<sup>[70]</sup>等以有限元分析软件 Srtand 7 为基础，充分利用其各种分析功能，实现多种载荷边界条件，不同目标类型的拓扑优化。验证了所开发程序的有效性。对于不同的课题组，选择更为合适的基础软件平台没有一个统一的标准。

## 1.3 材料微观拓扑优化

### 1.3.1 材料微观拓扑优化研究意义及进展

#### 1.3.1.1 微观多孔材料优化研究进展

多孔材料是一类大量孔隙微结构单元以一定的周期性排列在空间结构的工程材料，如点阵材料<sup>[2]</sup>、线性蜂窝材料<sup>[72]</sup>、泡沫材料<sup>[73]</sup>和多孔陶瓷<sup>[74]</sup>等。多孔材料不仅具有密度小、质量轻、比强度高力学特性，而且还具有消音、降噪、隔热等诸多物理特性，具

有功能和力学多重属性的优秀工程材料,其制造工艺也越来越成熟,已经可以控制微结构特征来提升多孔材料的宏观特性。例如利用快速成型激光融化技术,已经制备出单胞尺寸为毫米量级的通孔金属类桁架点阵材料<sup>[75]</sup>。现有牺牲模板法、复制方法和直接泡沫法等工艺水平制备多孔陶瓷材料的方法,已经可以加工孔径尺寸为 400nm 到 4mm、孔隙率为 20% 至 97% 的多孔陶瓷材料<sup>[76]</sup>。这些制备方法为优化得到的具有特殊拓扑微结构形式的材料的制造提供了技术支持,使之广泛应用于航空航天、原子能、医学、交通运输和建筑等行业。

材料宏观力学性能取决于其微结构特征,如多孔固体的相对密度,微结构的拓扑形式、孔穴形状和微结构的尺寸,以及形成多孔固体的实体材料的性能等,其中相对密度是多孔固体区别于其它材料的最重要特征参数<sup>[62]</sup>。多孔材料的宏观力学性能和微结构之间的定量关系历来是众多研究者所关注的重要课题。

为建立起微观尺度多孔材料的拓扑形状与宏观尺度的结构材料等效性能之间数学关系,Sigmund 于 1994 年提出均匀化方法,得到了一些具有极值力学特性的复合材料<sup>[77]</sup>。此后,Bendsøe 和 Kikuchi<sup>[78]</sup>将均匀化方法引入到结构拓扑优化领域,使得微结构的拓扑优化问题逐渐成为热点,众多学者竞相开展了广泛而深入的研究<sup>[79,12]</sup>。均匀化方法的理论基础严谨,保证了拓扑优化设计最优解的存在。然而该理论成立的前提是材料微结构的尺寸必须远远小于宏观结构的尺寸,或者更为严格地表述为小于结构载荷的波长。当多孔固体的宏观结构尺寸与材料微结构尺寸在同一量级时,传统理论的基本假设不再成立,从而等效的力学性能无法准确地描述多孔固体的实际性能。换言之,多孔材料一的等效性能存在着显著的尺寸效应。实验研究也充分证实了多孔固体的这种尺寸效应<sup>[80]</sup>。

### 1.3.1.2 微观复合材料优化研究进展

复合材料具有良好的可设计性,通过特定设计可使其具有高强度、耐磨损、耐腐蚀、抗冲击、高吸能、隔热好、吸音好等特殊性能或综合性能。而复合材料的宏观性能受到其微观结构和材料组分参数的影响,为了获得具有各组分所不具备的性能,得到具有极端性能的宏观复合材料,如负泊松比、零膨胀系数、极端热传导性能等,对微观结构构型的设计受到了广泛的关注<sup>[81]</sup>。

复合材料微观结构优化设计最早进入拓扑优化领域是在二十世纪 80 年代,由 Lakes<sup>[82]</sup>提出具有负泊松比的泡沫材料以及通过不同材料组合可以获得零膨胀系数、零剪切性能等极端材料性能开始的。二十世纪 90 年代 Sigmund<sup>[83,84]</sup>提出了复合材料微结构拓扑优化设计理论,采用逆均匀化方法实现了工程中所需材料特定宏观性能的微结构构型优化,并在数值研究和实验验证上均获得成功,促进了微结构设计理论和技术的发展,使其成为世界范围内各科研工作者的一个研究热点并取得许多成果。在 2002 年的第 9 届 AIAA 年会上 Kalidindi 等<sup>[85]</sup>人提出了微结构灵敏设计(Microstructure sensitive design, MSD)概念,进一步完善与发展了微结构构型与组分优化设计的思想与体系,将



材料微结构设计的内涵提高到一个新的高度。这些开创性的工作为复合材料与结构的拓扑优化设计奠定了坚实的基础,进一步促进了材料微结构的优化设计。

目前,复合材料微结构拓扑设计主要是基于逆均匀化理论,寻求满足一定约束条件下的材料布局分布,大体可以分为两类:一是满足给定性能的材料用量最小问题;一是满足体积约束和其它约束条件的具有最优性能的材料优化设计。针对上述两种情况国内外学者都做了大量的工作。

Vemaganti<sup>[86]</sup>以最少材料体积分数为目标,实现了给定等效弹性性能的材料设计,但其优化构型中间密度较多,材料的拉伸模量较低。Gibiansky<sup>[87]</sup>进行具有极端体积模量的多相复合材料设计,设计得到微结构的等效体积模量接近于 Hashin-Shtrikman 的上限。Neves<sup>[78]</sup>采用移动渐进法对微结构进行了具有极值弹性模量或最大刚度的构型设计,并研究了材料体积分数对微结构构型的影响。Silva<sup>[88]</sup>采用均匀化方法进行了具有极端弹性性能的二维和三维压电材料的优化设计。Sigmund<sup>[89]</sup>采用均匀化理论预测复合材料的等效热膨胀性能,并进行了具有零或负热膨胀性能的三相复合材料优化设计。Kikuchi<sup>[10]</sup>研究了具有给定热膨胀性能和材料体积分数的三相复合材料优化问题,并研究了优化设计得到的具有负热膨胀系数的材料微结构边界光滑问题。针对材料的弹性性能, sigmund<sup>[90]</sup>实现了给定弹性性能的材料微结构优化设计。sigmund<sup>[89]</sup>基于均匀化方法进行复合材料等效热膨胀性能的预测,详尽地探讨了优化过程中存在的问题,利用三相材料进行了具有零或负热膨胀系数的材料优化设计。

此外,国内的科研工作者在复合材料等效性能及微结构优化上也进行了大量的研究工作,刘书田等<sup>[79]</sup>进行了具有零膨胀系数的材料设计,并用数值方法验证了材料的等效热膨胀系数。杨卫等<sup>[91]</sup>采用优化准则法进行具有特定性能的微结构设计,实现了具有负泊松比的材料设计。基于传热性能的微结构优化设计目前还处于初期阶段,张卫红<sup>[92]</sup>基于均匀化方法进行材料的热传导性能预测,在给定材料用量下进行复合材料的设计,得到具有极端热传导性能的复合材料。针对具有特定热膨胀系数的微结构优化设计,程耿东<sup>[93]</sup>利用均匀化方法预测了复合材料导热性能,并分析了复合材料热膨胀行为<sup>[94]</sup>。在这些研究基础上,袁振<sup>[7]</sup>开展了在给定材料组分下周期性线性极端弹性性能的复合材料优化设计。刘书田等<sup>[95]</sup>进行了具有负泊松比性能的复合材料优化设计研究。赵康等<sup>[96]</sup>则基于拓扑描述函数研究了特定性能复合材料优化设计问题。刘书田<sup>[95]</sup>开展了具有特定弹性性质的两相复合材料的微结构设计,包括组分和构型并行设计。刘远东<sup>[97]</sup>针对复合材料的综合优异性能问题,对周期性正交各向异性材料,将均匀化方法和有限元技术相结合,以材料微结构的等效弹性性能组合(矩阵元素加权和)为优化目标,在优化方法和方法的实施方面开展了研究,对微结构构型进行了多目标优化。文中针同时应用敏度过滤技术,研究了网格尺寸、材料组分比对优化结果的影响,给出了具体的影响数值。依据优化获得的微结构构型,按传统的混合律求出复合材料的单向拉伸模量,其值与基

于均匀化方法,利用优化获得的微结构等效弹性矩阵求得的相应分量吻合。这些对比表明本文所提出的多目标优化模型与优化算法是合理有效的。

总之,复合材料的微观结构设计除了可以得到能适用于不同工况且满足性能要求的材料,而且能获得具有独特宏观性能的材料,如负泊松比、零、负膨胀系数,从而满足结构的特殊性能要求。

### 1.3.2 均匀化方法研究及应用

1989年 Kikuchi<sup>[98]</sup>成功地将均匀化理论运用到飞机设计上,开创了结构拓扑优化设计研究的新局面。近年来,很多学者进一步发展了均匀化方法,使其广泛应用于颗粒、纤维等增强复合材料、混凝土材料等的等效弹性张量、导热系数、热膨胀系数的预测和细观应力研究以及材料微观结构的拓扑优化中。

均匀化法以微结构的单胞几何尺寸为设计变量,通过单胞尺寸的增减实现微结构的增删和复合,把弹性模量、材料密度等参量表示成细观结构几何尺寸变量的函数,用周期性微观结构来描述宏观单元,从而将拓扑优化设计问题转化为材料微结构参数的尺寸优化设计问题,并应用优化准则法<sup>[99]</sup>或数学规划方法<sup>[25]</sup>来寻找材料相的最优分布。其基本思想为:针对周期性材料分布的特点,假定其周期性细观单胞尺度相对于宏观结构尺度是一个很小的量,则其应力、应变场等变量呈多尺度变化,相应的用均质的描述宏观结构和非均质研究具有周期性分布的细观结构;将物理量表示为关于宏观坐标和细观坐标的函数,并用细观和宏观两种尺度之比作为小参数进行渐进展开,根据连续介质所满足的周期性和均匀性条件,得到一系列的摄动方程,联立求解,得到复合材料(多孔材料)均匀化的宏观等效弹性矩阵、热膨胀系数和热传导矩阵的表达式。现已成功地应用均匀化法解决了包括复合材料结构和多约束的许多类型的结构拓扑优化问题。

数学上证明:当周期单胞的尺寸趋于零时,原复合材料线弹性方程组的位移趋于均匀化线弹性方程组的位移<sup>[100]</sup>。不仅如此,用均匀化方法求得的材料有效性能与结构的约束条件及加载条件无关,它仅与材料细部几何,物理参数的分布形态、大小有关。这说明材料的有效性能是材料本身固有的特性,这符合物理学的直观。

均匀化法数学和力学理论推导最为严密,设计空间完备,可获得宏观的弹性常数和局部应力应变,从而保证了拓扑优化设计最优解的存在。然而,该方法存在以下三个问题<sup>[101]</sup>:

- 1) 由于该模型拥有密度和方位两类变量,增加了灵敏度计算的复杂性,计算结果容易产生棋盘格,计算结果中也常包含中间密度的微结构,使得难于符合生产实际。
- 2) 再则,数值的不稳定性使得设计对载荷的变化非常敏感,容易收敛到局部最优解。
- 3) 需要确定微结构的最优尺寸和方向,设计变量相对较多,计算量大,求解的问题类型有限也是其缺点之一。

针对以上缺点,主要进行了以下改进工作。为了减少算法中设计变量,降低计算工作量, Giuseppe<sup>[102]</sup>等提出了一种大规模三维拓扑优化问题的分级求解解法,通过在不同网格分化层次上的优化有效提高计算求解效率,同时 Lin<sup>[103]</sup>和潘燕环<sup>[104]</sup>分别提出的二重均匀化方法和两阶段优化算法在提高优化效率上也都起到了很好的效果。而“微结构灵敏设计”概念<sup>[85]</sup>的提出,进一步完善与发展了微结构构型与组分优化设计的思想与体系。赵康<sup>[96]</sup>引入拓扑描述函数的概念,对单胞上拓扑描述函数进行插值,得到光滑的微结构。曹先凡<sup>[105]</sup>将拓扑描述函数定义为一系列基函数叠加的形式,使优化变量与单胞上网格节点分离,减少优化变量数量。Michel<sup>[106]</sup>等对均匀化方法材料特性计算进行了简化处理。

均匀化方法应用于拓扑优化一般包括两个方面:正向均匀化问题和逆向均匀化问题。正向均匀问题是指在已知微观胞元结构形式情况下求均匀化弹性张量,用于宏观结构拓扑优化问题的求解;逆向均匀化问题是指在已知要求的材料性能情况下,求解未知的材料微观胞元的最优结构拓扑。均匀化方法目前一般用于逆向问题的求解和拓扑优化的理论研究方面,用于解决材料微观胞元的优化设计问题。

在材料微结构优化应用领域上,学者们采用均匀化理论开展了相关研究并取得了许多研究成果。Nishiwaki<sup>[107]</sup>等将均匀化方法用于柔性激振器的拓扑优化设计; Guedes<sup>[98]</sup>实现了二维和三维结构的优化算法。Sigmund 还在文献<sup>[89]</sup>中以宏观热膨胀系数的不同要求,给出单胞由两相和三相材料组成的微结构,并指出在给定目标函数的情况下,优化计算得到的微结构不唯一。Suzhki<sup>[108]</sup>对多工况下均匀化算法进行了研究。Lazarus<sup>[109]</sup>等将数学规划算法引入基于均匀化理论的拓扑优化算法中,并进行了结构动力学的初步计算。C. C. Swan<sup>[110]</sup>将均匀化方法应用到复合材料有效力学行为的分析中,针对三维问题和弹塑性问题进行了讨论,并研究了砖石材料的拓扑设计问题。Diaz<sup>[111]</sup>研究了结构振动的形状和拓扑优化问题。在生物力学领域, Crolet<sup>[112]</sup>将均匀化理论用于密质骨的分析中, Holliste 等<sup>[113]</sup>分析了松质骨的几种胞元模式, Ko<sup>[114]</sup>等将均匀化理论用于分析螺纹型移植片—骨界面的力学性质。另外,对于极端性能的微结构,如负泊松比<sup>[95]</sup>、零热膨胀系数<sup>[5]</sup>、热传导性能<sup>[79]</sup>等方面的优化研究也取得了一些成果。

国内学者程耿东等详细地分析了均匀化理论,并将其运用到周期性分布多孔板弯曲的问题<sup>[114]</sup>、球形空心材料导热性能预测问题<sup>[115]</sup>、复合材料热膨胀系数求解的问题<sup>[116]</sup>和梯度功能材料的优化问题<sup>[117]</sup>上。袁振<sup>[118]</sup>在给定体积限制的情况下用优化准则研究了具有极值弹性特性的周期性复合材料微结构拓扑优化设计问题。汪雷等<sup>[79]</sup>以主方向上宏观导热系数之和最大为目标函数,计算微结构。针对多孔材料问题,谢先海<sup>[120]</sup>等运用均匀化理论计算了没有外力条件下微结构材料的有效弹性模量。董纪伟<sup>[121]</sup>等运用均匀化理论对三维编织复合材料的细观应力进行了数值模拟,并通过对拉伸极限强度下单元失效情况的判断得到强度的细观失效判据。谢桂兰<sup>[122]</sup>将均匀化方法用于聚合物基复合

材料的弹性性能和细观应力场分析,还研究并优化了非完美界面聚合物基复合材料。孙士平等<sup>[123]</sup>采用均匀化方法开展了多相多孔材料材料-结构集成设计,并提出了两尺度材料-结构的构成模型,为新型轻质功能结构设计拓宽了思路。刘书田<sup>[124]</sup>利用该方法建立了复合材料热传导系数和热膨胀系数的预报方法,给出了预报热传导系数和热膨胀系数的细观均匀化形式及其有限元求解过程,预报了空心材料和单向复合材料的热传导系数和热膨胀系数,所得结果与实验值吻合较好。在上述工作的基础上,曹先凡<sup>[5]</sup>进行热膨胀系数为零的三相微结构设计,并用有限元进行数值模拟验证。冯森林等<sup>[125,126]</sup>通过均匀化理论对三维编织复合材料和三维压电编织复合材料的等效弹性模量进行了预测,其结果具有一定的精度。贺丹<sup>[127]</sup>散热弱度为目标函数,计算有热源时的微结构。

综上所述,作为拓扑优化经典理论方法在材料微观设计领域具有很大优势,无论是在方法本身,还是在其应用领域,学者们都做出了大量卓有成效的工作。

## 1.4 材料/结构的一体化设计

### 1.4.1 材料/结构的一体化优化意义

多尺度从广义上包括几何多尺度、物理多尺度、时间多尺度以及他们之间的耦合多尺度,它反映了物质世界的基本性质及多学科交叉的本质特性,具有极其丰富的科学内涵<sup>[128]</sup>。任何一种材料,都可以在微观尺度上观测到显著的非均匀性,表现为该材料的组分、缺陷以及它们的尺寸、形状、定向、分布等微结构特性。材料的宏观力学性质是发生在不同尺度的力学现象的平均表现,取决于其组分的性质和微结构形态<sup>[129]</sup>。弄清材料性能的宏、细及微观演化规律,进行材料的虚拟设计与选材,促进复合材料的自主创新,既具有重要的基础研究意义,也有着重要的应用价值。

在优化设计领域,已有的拓扑优化的大量研究工作集中于结构设计或材料设计。然而,复合材料微结构和宏观结构优化设计具有不可分割的内在联系,理想的设计应该综合考虑宏观结构的形状、几何参数、承载形式及材料的微观构型和组分,进行结构/材料一体化设计,可以最大限度的发挥材料的潜能。结构和材料、宏观和微观的整体拓扑优化技术和理论是空间结构发展的重要方向,已成为未来优化设计领域的发展趋势,并给进一步的结构功能一体化设计和多功能协同设计提供了更广阔的发展空间和可能性<sup>[130]</sup>。

### 1.4.2 材料/结构的一体化优化研究进展

材料和结构的一体化设计是指同时考虑宏观结构和微观材料之间的相互影响和耦合,并发地设计结构和材料的新理念。宏观结构认为是由材料微结构周期性排布构成,多尺度优化实现了材料微结构的构型和宏观结构的拓扑一体化设计。

随着拓扑优化技术的进步与发展,学者们将注意力从材料和结构两个层面分开设计转向一体化设计,并取得了初步成果。其中,Rodrigues<sup>[131]</sup>以宏观结构最小柔顺性为目标函数建立了材料和结构一体化设计的优化模型,但是由于该模型假定材料的微结构在

宏观上是逐点变化的,因此导致设计变量过多,计算量过大,同时计算结果的材料微结构形式过于复杂多样,给制造带来了困难,难于工程实现;其次宏观构型不是清晰的黑白设计,宏观结构每个单元的设计变量等于微观结构的体分比,呈现出变化的灰的设计结果。针对这一问题,阎军等<sup>[132]</sup>假定材料微结构在整个结构设计域内保持一致,提出了 PAMP (Porous Anisotropic Material Swith Penalization)方法,它通过分别规定材料在宏观设计域和微观设计域上的体积约束而建立起宏微观结构的协同优化设计模型,其中微观模型与宏观参数之间通过均匀化方法相联系。刘岭等<sup>[133]</sup>采用另外一种不同的思路,微观上采用 SIMP 方法,宏观上采用 PAMP 方法,宏观和微观上独立设计拓扑构型,但是宏观结构是由均一微结构周期性排布而成,方便制造,并对于机械载荷作用下最小化结构柔顺性问题进行了宏微观两尺度设计。但结果表明,由宏观均质超轻制成的最优轻质结构和由相同材料体积的实体材料制成的最优结构相比,在刚度上并无优势,需要考虑多功能方面的要求以合理使用超轻材料。张卫红等<sup>[134]</sup>提出将材料和结构的同步优化问题分解为宏观结构的优化与微观结构的优化两个独立的子问题,获得了材料呈梯度分布的宏观结构布局以及与尺度关联的材料的微观结构布局。另外在精度上,Oden 等<sup>[135]</sup>考虑双尺度分析的精度和效率问题利用分层模型处理多尺度问题,采用自适应网格方式与双尺度渐近方法联合使计算更加高效精确;刘晓奇<sup>[136]</sup>针对多孔复合材料周期结构建立了多尺度模型,采用多尺度展开与投影型插值方法,得到了高精度的计算格式,并研究了与时间相关的多孔复合介质的热传导方程。

在应用领域,Coelho 等<sup>[137]</sup>对最优宏观骨密度和微观骨小梁结构的骨组织重建问题做了深入的研究。Chung 等<sup>[138]</sup>详细推导了双尺度渐近方法求解三维热粘弹性和粘弹性聚合物复合材料宏观和细观蠕变应力和应变的表达式;Takano 等<sup>[139]</sup>研究了编织物增强复合材料的有效性能和响应规律;Fish<sup>[140]</sup>等在双尺度展开时考虑了非均匀介质的损伤效应,进行了描述陶瓷复合材料损伤效应的边值问题的数值模拟;WU<sup>[141]</sup>和 Ghosh<sup>[142]</sup>基于双尺度渐近分析方法分别对复合材料的蠕变和弹塑性等非线性问题进行了研究。Chenappa 等<sup>[143]</sup>采用小波分析和数值均匀化方法给出了多个有限尺度的微结构布局优化,使结构的刚度最大化。国内,阎军等<sup>[144]</sup>以最小柔顺性为目标研究了热弹性结构的两尺度优化。苏文政<sup>[145]</sup>基于偶应力理论对于最小柔顺性问题实现了考虑单胞尺寸效应的两尺度拓扑优化。张卫红等<sup>[134]</sup>研究了考虑单胞尺寸效应的多孔材料结构的分层次优化设计。王博等<sup>[146]</sup>基于两类变量实现了考虑刚度和散热指标的蜂窝材料微结构形状与宏观结构拓扑两层次优化。董纪伟<sup>[147]</sup>基于双尺度方法对三维编织复合材料的宏细观力学性能进行了模拟;冯永平<sup>[148]</sup>给出了热力耦合条件下具有周期性构造的复合材料结构的多尺度渐近公式和有限元计算步骤;余新刚<sup>[149]</sup>针对三种简单加载形式—柱体的均匀拉伸、悬臂梁的纯弯曲和圆形常截面直杆的扭转,采用双尺度方法对两相复合材料的强度进行了预报。文献<sup>[150]</sup>在最小柔顺性意义下对二维热弹性问题进行了结构和材料并发

设计, 文献<sup>[151]</sup>考察了并发设计模型在提高结构基频方面的应用。

无论是理论分析还是数值试验研究表明: 与传统方法相比, 多尺度优化方法, 对刻画复合材料结构物理、力学量的局部变化是有效的, 在宏/微观两个尺度上实现结构尺寸、形状、拓扑优化及多材料选择, 可以给出和传统设计完全不同的创新设计。

## 1.5 渐进拓扑优化方法及研究进展

1993 年 Xie Y. M. 和 Steven 首次提出了渐进结构优化法 (Evolutionary Structural Optimization, 简称 ESO 法), 该方法克服了传统技术存在的大部分弊病, 提供了结构优化的一种新的途径<sup>[152]</sup>。自提出以来, 引起了结构优化领域至少二十多个国家的研究人员的广泛关注, 无论是理论研究还是实际应用领域均取得了很大的成果, 特别是近年来, Huang X. 和 Xie Y. M. 提出的双向渐进结构优化改进算法 (Bi-directional Evolutionary Structural Optimization, 简称 BESO 法), 使材料不但能被删除, 还可以被添加到结构中最需要的部位, 从而能够得到网格无关及收敛的优化结果<sup>[153]</sup>。

### 1.5.1 渐进结构优化法基本思想与改进

#### 1.5.1.1 ESO 方法基本思想<sup>[154]</sup>

ESO 的基本思想是: 通过逐步删除结构中的无效和低效单元, 使结构逐步趋向最优。受力分析表明结构中应力分布往往并不均匀, 有些区域应力较高, 是结构破坏的主要区域; 有些区域应力较低, 材料未充分利用, 如果去掉该区域材料, 对整个结构的受力影响很小, 同时可减小结构重量。因此, ESO 应力优化的准则为: 逐渐去掉结构中的低应力材料, 使剩下的结构更有效地承担荷载, 从而使应力分布更加均匀。这是一种典型的基于材料组分均等承载思想的进化策略。具体实施流程如下:

1) 在给定的荷载和边界条件下, 定义设计区域, 称为初始设计, 用有限元网格离散该区域;

2) 对离散的结构进行静力分析;

3) 明确强度理论, 例如, 对平面应力状态的各向同性材料, 可采用 VonMises 应力准则, 求出每点的应力值, 单元应力  $\sigma_c^{vm}$  和最大单元应力  $\sigma_{max}^{vm}$ , 如果满足

$$\frac{\sigma_c^{vm}}{\sigma_{max}^{vm}} < RR_i \quad (1-7)$$

则认为该单元处于低应力状态, 可从结构中删除, 其中  $RR_i$  为删除率, 即进化率。

4) 以上有限元分析和单元删除重复进行, 直到 (1-2) 式无法满足为止, 即对应  $RR_i$  的稳定状态已达到, 为使迭代继续进行, 引进另一参数进化率 ER, 从而下一个稳定状态的删除率修改为:

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad i=0, 1, 2, 3... \quad (1-8)$$

根据数值经验, 迭代过程中初始删除率  $RR_0$  和进化率 ER 通常取 1%。

5) 重复第 2~4 步直到结构重量或最大应力达到给定值。

在一般拓扑优化中,单元可从结构的任意部分删除,结构中允许产生孔洞,因而形状和拓扑同时优化,如果规定单元只能从结构的边界删除,则 ESO 也可以单独进行形状优化。最早 ESO 方法主要应用于受拉和受压构件的优化,针对不同的优化问题,可加入相应的敏度值进行简单的修改即可。

对于最大刚度问题常用结构中某些关键点处的位移来描述,为此单元敏度可定义为删除单元  $i$  对  $j$  点位移绝对值的贡献,即:

$$\alpha_{ij} = |\Delta u_{ij}| = \left| \{u^{ij}\}^T [K_e^i] \{u^i\} \right| \quad (1-9)$$

式中:  $[K_e^i]$  为单元刚度矩阵;  $\{u^i\}$  为实际荷载作用下单元  $i$  的位移阵;  $\{u^{ij}\}$  为作用在节点  $j$  处,与位移约束同方向的单位虚荷载下单元  $i$  的位移阵。 $\alpha_{ij}$  为  $i$  单元灵敏度,当位移控制施加在荷载作用点处,即,点荷载  $Q$  作用在  $j$  点时,其的物理意义则为单元  $i$  的应变能。刚度优化步骤与应力优化相似。

3) 根据方程(1-6)计算单元灵敏度;

4) 删除灵敏度值较小的单元,删除的单元数量可以为初始设计单元总数的 1%,称为材料删除率 MRR。

5) 重复 2~4 步直到结构中  $j$  点位移达到容许值或结构重量达到给定值。

对于等厚解的定义如下:假设初始设计中某点的位移绝对值和容许位移分别为  $u_0$  和  $u^*$ ,保持结构的形状不变,将整个结构的厚度按  $u_0/u^*$  的比例变化,以使控制点的位移达到容许值,新的结构称为初始设计的等厚结构,其重量和初始设计的重量比值为:

$$\epsilon_{\text{uniform}} = W_{\text{uniform}}/W_0 = u_0/u^* \quad (1-10)$$

而优化结构的重量与初始设计的重量比值为:

$$\epsilon_{\text{evolve}} = W_{\text{evolve}}/W_0 \quad (1-11)$$

在动力设计中,优化目标一般为求一个或多个频率的最大值或最小值、减小结构重量而保持某一频率不变或增加两相邻频率差等三种类型。与刚度优化类似,可以依据灵敏度来确定须删除的单元,对有限元动平衡方程微分,可得到第  $i$  单元的特征值灵敏度:

$$\alpha_n^i = \Delta \omega_n^2 = \frac{1}{m_n} \{u_n^i\} (\omega_n^2 [M_e^i] - [K_e^i]) \{u_n^i\} \quad (1-12)$$

式中:  $\omega_n^2$  为第  $n$  阶圆频率;  $\{u_n^i\}$  为对应的单元  $i$  的特征向量;  $m_n$  为第  $n$  阶模态质量;  $[M_e^i]$  为单元  $i$  的质量矩阵。

可以看出,传统 ESO 所删除单元具有不可恢复性,所以初始设计必须占据相当大的区域,以保证结构中大量的单元删除后最优设计中仍保留足够多的单元。因此对用细密有限元网格离散的大尺寸结构,计算的耗费非常大。另外,在优化过程中由于结构受力途径可能发生突变,前期所删除单元或许对承载起着至关重要的作用,此时该方法便得不到最有结果。

传统 ESO 法仅允许删除单元，被删除了的单元在后继的迭代中不能恢复，相对来说影响了方法的总体最优的可信性，而且 ESO 的初始设计必须占据相当大的区域。以保证结构中大量的单元删除后，最优设计中仍保留足够多的单元，因此对用细密有限元网格离散的大尺寸结构，计算的耗费非常大。

### 1.5.1.1 BESO 方法基本思想

为了弥补删除单元的不可恢复性的严重缺陷，近年来，Huang X.和 Xie Y. M.提出了 ESO 的改进算法 BESO，在两个方面有了重大的突破，并从理论上证明了 BESO 方法的合理性。

1) 双向优化准则：在 BESO 优化中，在删除低应力单元的同时，在高应力单元周围增补单元。这样，结构可以从非常简单的原始设计始进化，从而缩小有限元问题的规模，提高计算效率。

BESO 方法的基本步骤为<sup>[155]</sup>：1)初始化设计区域，给定初始的删除率  $RR_0$  和添加率  $IR_0$ ，并对设计域进行有限元网格划分；2)对结构进行有限元分析；3)选择一定的优化准则，计算每一单元的敏度，删除灵敏度小于删除率  $RR_i$  的单元，同时，在结构边界处添加灵敏度大于添加率  $IR_i$  的单元；4)根据剩余单元和添加单元，重构设计结构；5)保持同一删除率  $RR_i$  和添加率  $IR_i$ ，重复 2)~4)步，当无单元可删且无单元可添时，即达到了稳态，此时适当增加删除率  $RR_i$  和适当减小添加率  $IR_i$ ，执行下一步；6)重复 2)~5)步，直至满足收敛条件。

2) 材料插值函数：在传统 BESO 拓扑优化过程中，从物理意义上将无效或低效材料直接删除（删除单元  $x_i=0$  就意味着结构中单元  $i$  不再存在），但在进行有限元数值计算时，这将有可能会引起刚度矩阵奇异，从而导致拓扑优化低效或失败。通过材料插值函数可以有效解决这一问题。

$$\begin{cases} E_i = E_0 + x_i^p (E_1 - E_0) \\ \rho_i = \rho_0 + x_i^p (\rho_1 - \rho_0) \end{cases} \quad x_i = 0 \text{ 或 } 1 \quad (1-13)$$

式中  $E_i$  和  $\rho_i$  分别为单元弹性模量和密度； $E_0$  ( $E_1$ ) 和  $\rho_0$  ( $\rho_1$ ) 分别是软单元（实体单元）弹性模量和密度。为了满足物理意义上的软单元（删除单元或空单元）对结构贡献为零，将软单元弹性模量和密度通常定义为实体单元的  $10^{-9}$ 。正是因为材料参数近似为零却非零的性质，使得软单元的引入在没有改变整体特性的前提下，有效避免拓扑优化过程中的有限元模型发生奇异的现象。

### 1.5.2 ESO/BESO 方法的研究进展与应用

1993 年 Xie Y. M.等提出的 ESO 思想源自于力学准则法，通过逐渐将无效或低效的材料删除，实现连续结构拓扑优化，克服了传统技术存在的大部分弊病，提供了结构优化的一种新的途径。



ESO/BESO 的优点是：1) 思想简单，步骤明确，物理概念清晰，便于实现；2) 基于 0-1 单元的假设，使之不会产生中间密度，拓扑形式非常清晰，便于人工制造，因此具有良好的工程应用性；3) 与均匀化方法相比较，渐进法具有设计变量少，避免了多变量数学规划求解；4) 与商业有限元程序衔接方便，可借助已有的有限元分析软件，通过迭代过程在计算机上实现，迭代过程算法的通用性好，便于处理大规模优化问题；5) 灵敏度通过对有限元分析结果进行后处理近似得到，可节省结构重分析时间。

ESO/BESO 不仅可解决各类结构的尺寸优化，还可同时实现形状和拓扑优化，无论应力、位移/刚度优化，或振动频率、响应，临界压力优化，都可遵循 ESO/BESO 的统一原则和简单步骤进行<sup>[154]</sup>。ESO/BESO 自提出后在国际上引起很大反响，但是同时也受到了业内的质疑。

其缺点是：1) 在 ESO/BESO 迭代过程中，单元敏度接近时可能发生上一次删除的单元下一次又被添加，且迭代如此反复进行，产生“振荡现象”，造成算法迭代次数增加、计算效率低下、甚至失败。2) 用于控制单元删除、添加的删除率  $RR$  和添加率  $IR$  之间并不存在直接联系，其大小也只能依靠经验和调试来确定，不利于该方法的普遍推广。3) 很多情况下为了追求优化结构边界的光滑，将有限元网格划分的很细，实单元和已删除单元交替产生的现象，产生“棋盘格”现象。这种优化结果工程中无法实现，没有实际意义。4) 算法的收敛性还没有得到证明，但许多算例表明了渐进法在解决实际问题是非常成功的。

针对以上缺点，H. Kim<sup>[156]</sup>在传统 ESO 方法的基础上，引入了非结构约束，提出了一种智能空洞生成方法，并通过引入固定网格来提高优化效率。Li<sup>[157]</sup>等对“棋盘格”现象进行了研究，并给出了解决方法。D.Nha Chu<sup>[158]</sup>对刚度约束下的 ESO 方法进行了研究，验证了该方法的有效性。Pasi Tanskanen<sup>[159]</sup>对 ESO 方法的数学解释及理论基础进行了探讨。郭中泽<sup>[160]</sup>提出了一种基于单元属性更改的 ESO 方法，实现了线弹性结构拓扑优化设计，并提出了一种灵敏度高阶再分配的过滤技术来抑制优化中的棋盘格问题。罗志凡<sup>[161]</sup>等针对通常的 ESO 方法提出了一种基于主应力的双向 ESO 算法，提高了在该领域拓扑优化的可信度和计算效率。陈敏志<sup>[162]</sup>提出了基于自适应有限元的 ESO 法。荣见华等研究了基于人工材料的结构拓扑渐进优化设计<sup>[163]</sup>、基于 Von Mises 应力及其灵敏度的 ESO 方法<sup>[164]</sup>、以及动响应约束下结构的 ESO 方法<sup>[154]</sup>。

随后，为了克服删除单元的不可恢复性的严重缺陷，Huang X.和 Xie Y. M.提出了 ESO 的改进算法 BESO，使优化算法从根本上有了质的提高，立即引起了学者们的很大兴趣，并进行了大量的研究工作。Young<sup>[165]</sup>提出了优化参数单元删除率和添加率对最初的 BESO 方法进行改进。Huang X.和 Xie Y.M.<sup>[166]</sup>以节点灵敏度作为添加单元的准则，提出了基于收敛和独立网格的 BESO 法。Kim 等<sup>[156]</sup>对处理优化结果边界的方法进行了研究，在拓扑优化中使用了固定网格分析技术。孔文秦<sup>[167]</sup>针对应力约束问题，提出了在

优化迭代中允许大量添加单元的算法,增强了寻找优化传力路径、获得优化拓扑和形状的能力,避免了优化过早地收敛到局部最优解。Huang X 和 Xie Y.M 在 2003 年出版专著《Evolutinary Structural Optimization》对 BESO 方法最新理论成果进行了系统的介绍和综合评述。

在应用方面,近几年,该方法的主要研究成果如下:

基于 ESO 方法,Chu D.N 等<sup>[168]</sup>对约束条件为刚度和位移的拓扑优化问题进行了研究。Xie Y. M.和 Steven G. P.等<sup>[169]</sup>提出了带有应力、频率等约束条件的 ESO 方法。Chu<sup>[111]</sup>基于 ESO 方法对离散设计变量的尺寸优化问题进行了研究。G. P. Steven<sup>[170]</sup>对最大应力和最大刚度最小的多准则优化方法进行了研究,验证了 ESO 方法对于多准则优化问题的求解能力。Mohammad Hossein Abolbashari<sup>[171]</sup>对二维和三维 ESO 中参数对于优化结果的影响进行了研究,D. Manickarajah<sup>[172]</sup>对多约束问题骨架结构的渐进结构优化方法进行了研究,证明了 ESO 方法能够处理大规模优化问题的能力。Manickarajah D.<sup>[173]</sup>等研究了薄板屈曲应力的 ESO 方法。Li Q<sup>[174]</sup>等研究了基于 ESO 方法的散热结构形状和拓扑优化、以最小位移为目标的热弹结构拓扑优化、离散变量的最小应力优化以及应用于进化算法的一种简单易行的过滤算法。Das R<sup>[175]</sup>等采用改进的 ESO 方法研究了破坏结构的应力优化问题。Yang X. Y.<sup>[176]</sup>等研究了连续体结构荷载与拓扑相关情况下的 ESO 优化方法。Ansola Ruben<sup>[177]</sup>等提出了一种针对考虑自重荷载结构的 ESO 灵敏度分析方法,在保证原有效率的同时,可以得到比传统 ESO 方法更加优化的拓扑结果。Li 等<sup>[178]</sup>把 ESO 法应用热力学拓扑优化问题。C.B. Zhao<sup>[179]</sup>等对 ESO 方法在振动结构两自振频率间隔的最大化进行了研究;Xie Y.M 等人把 ESO 方法的适用范围从最初的满应力准则扩展到刚度和位移约束、应力约束、频率约束、屈曲约束、扭转约束等其他传统力学领域,并推导了相应的敏感度<sup>[180]</sup>。Li<sup>[181]</sup>等人把它扩展到接触面优化的非线性问题。Nha<sup>[182]</sup>等研究了考虑位移与刚度约束作用下结构的 ESO 方法以及离散变量尺寸优化的 ESO 方法。Li Qing<sup>[183]</sup>等运用 ESO 算法研究了结构最大应力最小的板厚度问题。Steven. G. P.<sup>[184]</sup>等人研究了应力最小和刚度最大的多准则 ESO 算法。Li Wei<sup>[185]</sup>等人将 ESO 方法推广到结构弹性碰撞问题。国内学者罗志凡等<sup>[161]</sup>发展了基于主应力的 ESO 方法以用于混凝土和钢索不同的拉压属性材料的拓扑优化问题。杜海珍<sup>[186]</sup>对基于应变能的 ESO 进行了研究。荣见华<sup>[187]</sup>等使用 ESO 方法对汽车车架结构进行了拓扑优化,最终得出与实际车架相似的结构。倪晓宇<sup>[188]</sup>等使用 ESO 方法对机床床身结构进行了基于频率和刚度约束的拓扑优化设计。王必军<sup>[189]</sup>提出了一种求解带有频率约束的结构动力优化问题的 ESO 方法。刘毅<sup>[190]</sup>等人应用 ESO 方法进行了地下开洞的形状优化设计。李晶<sup>[191]</sup>等人将 ESO 算法推广到各向异性材料的桥梁优化设计中。秦文炳<sup>[192]</sup>运用 ESO 算法进行了斜拉桥的结构优化设计。

在改进的 BESO 方法应用领域,V. Young<sup>[193]</sup>等人对三维结构及多载荷工况下的

BESO 方法进行了研究；Qing Li 等人还把这一方法从力学问题扩展到热弹性，热传导，静磁场，不可压缩流体等一般的物理领域，进一步扩大了 BESO 方法的应用范围<sup>[194-196]</sup>。国内学者荣见华<sup>[197]</sup>等人把 BESO 方法从各向同性均质材料扩展到了拉压性质不同的材料，使之适用于以钢筋和混凝土为主要建筑材料的桥梁拓扑优化领域。孙圣权<sup>[198]</sup>使用基于应力突变率的 BESO 对液压机下横梁进行了拓扑优化。李芳<sup>[199]</sup>等用 BESO 方法结合动力分析中的移频技术解决指定频率的动力优化问题。荣见华<sup>[163]</sup>等对不同应力准则下连续体结构的拓扑优化方法进行了研究，并提出了一种基于人工材料的 BESO 方法用来改善优化过程中的数值计算问题，并将相应的 BESO 方法推广到了三维结构优化中。宿新东<sup>[200]</sup>等利用 BESO 方法研究结构的固有振型优化问题。

以上研究充分证明了 ESO 方法具有很大的发展前景和重要的工程应用价值。

## 1.6 本文的主要工作

本文在分析传统双向渐进结构优化方法存在不足的基础上，针对性的对数值计算方法进行了合理的改进。并在此基础上分别对宏观结构、微结构优化、材料结构一体化等相关问题进行了多尺度、多相复合材料布局及拓扑优化等层次系统地研究。

本文的主要工作如下：

（一）通过对传统 BESO 方法的数值计算方法合理的改进，将其成功用于对预设结构有特定使用或美观要求及设计区域模糊或未知情况下的结构优化设计，并对 BESO 解的合理性进行了深入的讨论与论证，并对重要参数选取问题给出了合理的建议，对实际优化应用具有较好的指导意义。

（二）引入惩罚指数材料插值方案的改进灵敏度可有效地解决多相材料分布优化和材料/结构一体化优化问题。

（三）在传统均匀化理论的基础上，建立合理的材料等效弹性模量有限元形式的求解方程，利用 ABAQUS 提供的线性摄动功能实现从微观到宏观的等效性能求解，建立材料微观结构形状与宏观结构材料弹性张量之间的联系，集成宏观结构所得到的位移场，推导出带有宏观结构力学特性的微观敏度，实现以宏观结构最大刚度为目标，对极小尺度周期性排列的材料微结构胞元进行拓扑优化和多相材料布局优化设计。

（四）基于各相材料界面完全联结的假设，将位移和应力展开为关于细观尺度和宏观尺度之比的小参数渐近级数，用摄动技术建立渐近级数的各项所应满足的一系列方程，从而实现用均质的宏观结构和非均质的具有周期性分布的细观结构描述原结构，从而充分考虑微观尺度和宏观尺度的关联性，将材料微结构胞元设计和宏观结构拓扑优化相结合，建立周期性复合材料构型及结构一体化优化设计方法。

（五）在一体化优化方法的基础上，按照材料属性排序引入材料插值函数依次进行灵敏分析，建立周期性多相材料微结构布局及宏观结构拓扑并发优化方法的一般规律，并以典型算例为基础对方方法进行了合理性验证。

(六) 编写第三方插件，将 MATLAB 数值计算和符号计算与 ABAQUS 有限元计算进行数据交换，通过软件提供的内置并行结构并考虑考虑并行架构、各作业间存在逻辑关系和 job 运行状态，对不同软件之间协同作用的数据交换平台，进行了并行计算的开发。

## 1.7 论文的组织结构

全文共分七章，组织结构如下：

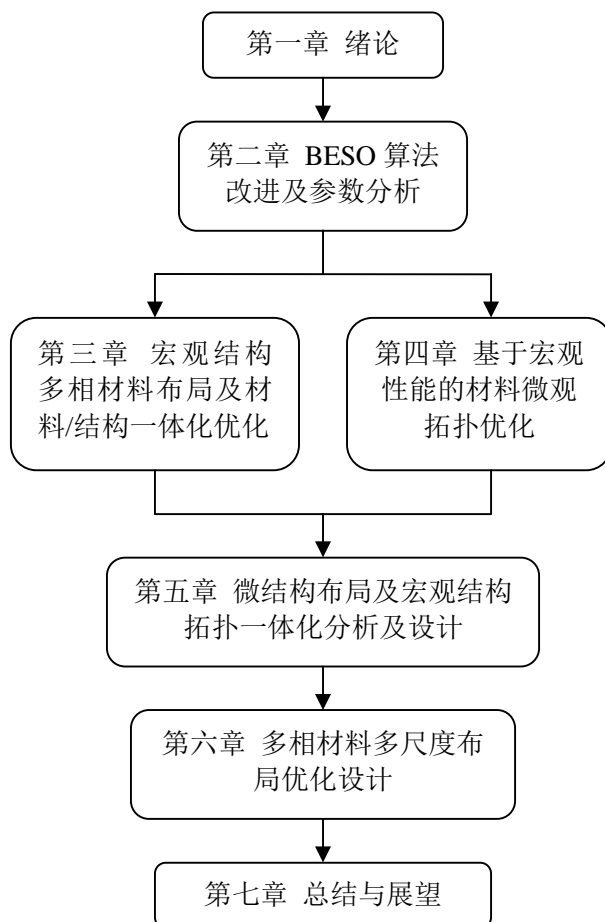


图 1-1 论文组织结构图

第一章 绪论。综述了宏观结构、材料微观拓扑优化、材料/结构一体化优化领域的在理论和工程实际应用中的研究现状。总结了渐进拓扑优化方法的相关理论及在国内外的研究进展。

第二章 BESO 算法改进及参数分析。本章在分析传统 BESO 方法存在不足的基础上，针对性的引入新的判别准则、材料插值模型和敏度滤波函数等数值计算方法对其进行了合理的改进。改进方法通过非设计区域和设计区域的区域分割思想对结构进行了定向拓扑优化，将其成功用于对预设结构有特定使用或美观要求及设计区域模糊或未知情况下的结构优化设计，拓展了 BESO 方法的实际工程运用领域。提出自查式改进策略，并对 BESO 解的合理性进行了深入的讨论与论证。基于对二维和三维结构的拓扑优化和

复合材料布局优化问题的相关研究,对  $r$ 、 $ER$  等重要参数选取问题给出了合理的建议,对实际优化应用具有较好的指导意义。

第三章 宏观结构多相材料布局及材料/结构一体化优化。基于引入惩罚指数材料插值方案的改进灵敏度,有效地解决传统 BESO 方法不能胜任的多相材料分布优化和材料/结构一体化优化问题。编写了第三方插件,将 MATLAB 数值计算、符号计算和编程与 ABAQUS 有限元计算进行数据交换,通过 MATLAB 提供的内置并行结构并考虑考虑并行架构、各作业间存在逻辑关系和 job 运行状态,对不同软件之间协同作用的数据交换平台,进行了并行计算开发。

第四章 基于宏观性能的材料微观拓扑优化。在传统均匀化理论的基础上,建立合理的材料等效弹性模量有限元形式的求解方程,利用 ABAQUS 提供的线性摄动功能实现从微观到宏观的等效性能求解。在传统 BESO 方法基础上提出了以结构宏观性能为目标函数,建立材料微观结构形状与宏观结构材料弹性张量之间的联系,集成宏观结构所得到的位移场,推导出带有宏观结构力学特性的微观敏度。从而实现对极小尺度周期性排列的材料微结构胞元进行拓扑优化和多相材料布局优化设计。

第五章 微结构布局及宏观结构拓扑一体化分析及设计。基于各相材料界面完全联结的假设,将位移和应力展开为关于细观尺度和宏观尺度之比的小参数渐近级数,用摄动技术建立渐近级数的各项所应满足的一系列方程,从而实现用均质的宏观结构和非均质的具有周期性分布的细观结构描述原结构,从而充分考虑微观尺度和宏观尺度的关联性,将材料微结构胞元设计和宏观结构拓扑优化相结合,建立周期性复合材料构型及结构一体化优化设计方法。通过优化结果和理论分析的比较,验证本文提出方法的有效性。

第六章 多相材料多尺度布局优化设计。在一体化优化方法的基础上,按照材料属性排序引入材料插值函数依次进行灵敏分析,建立周期性多相材料微结构布局及宏观结构拓扑并发优化方法的一般规律,并以典型算例为基础对方方法进行了合理性验证。

第七章 总结与展望。对本文研究工作及取得的成果做了总结,并针对本文所研究的问题提出了需要发展和改进的研究工作。

## 1.8 本章小结

本章简要介绍选题背景及意义,综述了宏观结构拓扑优化、材料微观拓扑优化、材料/结构一体化优化领域的在理论和工程实际应用中的研究进展及存在不足之处等。对渐进拓扑优化方法的在国内外的研究现状及发展概况做了系统的介绍。最后说明本文研究的组织框架和各章研究重点。



## 第二章 BESO 算法改进及参数分析

结构拓扑优化代表性的方法主要有, SIMP 方法<sup>[23]</sup>、ESO<sup>[151,201]</sup>、水平集方法<sup>[202,203]</sup>、均匀化方法<sup>[204,205]</sup>、ICM 方法<sup>[40]</sup>等。

与其它几种方法相比, 由 ESO 发展的 BESO 具有概念简单、收敛快、边界清晰、通用性好、易于实现的特点, 在工程设计中得到了越来越广泛的应用。然而, 传统的 BESO 简单的以应力、能量等作为删除准则往往无法避免网格依赖、棋盘效应、以及解的不收敛等数值问题, 很难得到想要的结果<sup>[153]</sup>。为此, 对传统 BESO 进行改进显得十分必要。另外, 在实际结构设计中, 一些重要部件在承力、耗能等力学性能中起不到关键作用, 但在实际功能使用、或美观等要求下中必须存在。解决好这些特殊部件的优化问题是各类优化方法在实际工程应用推广中必须首要解决的。因此, 本章对传统 BESO 方法进行了必要的改进, 其主要工作如下:

- 1、在分析传统 BESO 方法存在不足的基础上, 引入新的判别准则、材料插值模型和敏度滤波函数对其进行改进, 从而消除网格依赖、棋盘效应、以及解的不收敛等数值问题, 使结构优化结果受力更加合理。

- 2、通过非设计区域和设计区域的区域分割思想对结构进行了定向拓扑优化, 将其成功用于对预设结构有特定使用或美观要求及设计区域模糊或未知情况下的结构优化设计, 从而拓展了 BESO 方法的实际工程运用领域。

- 3、在对著名 Zhou 梁这一特殊问题充分研究的基础, 提出自查式改进策略, 在保持较高优化效率的前提下, 得到了类似细化网格法最优化解, 并对 BESO 解的合理性进行了深入的讨论。

- 4、基于改进后的优化方法研究了常见参数的选取问题, 得出一些具有实际指导意义的结论。

### 2.1 传统优化方法存在问题

由Xie和Steven<sup>[151]</sup>提出的ESO方法, 基于简单的算法逐步地将无效或低效的材料删除, 从而使结构逐渐地趋于最佳化。这种方法具有简单、高效、易实现的优点, 但是材料一旦被删除将不能恢复, 所以如果发生“过删”, 将无法弥补。在其后, Hang和Xie提出的BESO<sup>[201]</sup>, 不仅能删除低敏度材料还能在最需要的部位添加材料。因此, BESO方法中材料进化具有双向性, 其本质性的解决了ESO存在的缺陷<sup>[207]</sup>。然而传统的BESO方法仍存在一些不足之处<sup>[208]</sup>:

1. 在BESO迭代过程中, 单元敏度接近时可能发生上一次删除的单元下一次又被添加, 且迭代如此反复进行, 产生“振荡现象”<sup>[209]</sup>, 造成算法迭代次数增加、计算效率低下、甚至失败。

2. 用于控制单元删除、添加的删除率RR和添加率IR之间并不存在直接联系, 其大

小也只能依靠经验和调试来确定，不利于该方法的普遍推广。

3.很多情况下为了追求优化结构边界的光滑，将有限元网格划分的很细，实单元和已删除单元交替产生的现象，产生“棋盘格”现象<sup>[156]</sup>。这种优化结果工程中无法实现，没有实际意义。

为此，对传统的BESO进行改进显得十分必要。

## 2.2 BESO 的改进算法

连续体结构拓扑优化问题通常构造为指定设计域内给定材料体积约束下的最大刚度问题<sup>[210]</sup>。在建筑结构设计，特别是大跨度工业厂房和桥梁等通常要求结构及重要部件具有足够的刚度，确保最大挠度在规范允许范围之内，而最大刚度问题往往可以等价于最小结构应变能的求解<sup>[207]</sup>。

本文以最小结构应变能（ $C$ ）作为目标函数，材料体积作为约束条件，引入软单元（ $x_{min}$ ）建立的拓扑优化数学模型如下：

$$\begin{cases} \min & C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ s.t. & \mathbf{V}^* - \sum_{i=1}^N \mathbf{V}_i x_i = 0 \quad x_i = x_{min} \text{ 或 } 1 \end{cases} \quad (2-1)$$

其中， $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{u}$ 分别是载荷矩阵和位移矩阵。 $\mathbf{V}^*$ 和 $\mathbf{V}_i$ 分别是目标体积和单元体积。 $N$ 为结构单元总数。 $x_i$ 为单元属性变量，传统BESO优化方法通过取 $x_i=0$ 和1属性来实现优化过程中单元的删减。研究表明，0-1属性的定义会造成数值解的不连续，从而导致优化震荡，甚至优化失败。此处引入软单元（ $x_{min}$ ）取代删除单元或空单元的定义，为了满足物理意义上的软单元对结构贡献为零，将软单元弹性模量和密度通常定义为实体单元的10E-6。正是因为材料参数近似为零却非零的性质，使得软单元的引入在没有改变整体特性的前提下，有效避免拓扑优化过程中的有限元模型发生奇异的现象。

### 2.2.1 材料插值模型

在传统BESO拓扑优化过程中，从物理意义上将无效或低效材料直接删除（删除单元 $x=0$ 就意味着结构中单元 $i$ 不再存在），其进化步长过大而导致敏度评估有很大的误差，特别在粗网格划分时误差更为明显，这将有可能引起刚度矩阵奇异<sup>[165]</sup>，从而导致拓扑优化低效或不能获得合理的优化结果，甚至失败。因此缩小进化步长，提精度，是问题解决的有效途径。在SIMP插值模型的基础上进行改进，使之用于缩小算法中的进化步长，降低误差，从而避免因敏度分析误差而造成优化失败。

$$\begin{cases} E(x_i) = E_1 x_i^p \\ K = \sum_i^N x_i^p k_1 \end{cases} \quad x_i = x_{min} \text{ 或 } 1 \quad (2-2)$$

式中 $E_1$ 和 $k_1$ 分别是实体单元材料的弹性模量和刚度。 $P$ 为惩罚指数，通常取3。



## 2.2.2 敏度改进

由结构平衡方程：

$$\mathbf{K}\mathbf{U}=\mathbf{f} \quad (2-3)$$

式中， $\mathbf{K}$ 为结构刚度矩阵。由式（2-1）可知，目标函数对单元设计变量的变化可定义为：

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dx_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \quad (2-4)$$

引入拉格朗日乘子  $\lambda$ ，将无约束问题转化为有约束问题。

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} + \lambda^T (\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}) \quad (2-5)$$

那么，式（2.4）转换为：

$$\frac{dC}{dx_i} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{f}^T}{dx_i} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} + \frac{d\lambda^T}{dx_i} (\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}) + \lambda^T \left( \frac{d\mathbf{f}}{dx_i} - \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} - \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \right) \quad (2-6)$$

假设外界载荷 $\mathbf{f}$ 为定常数。

$$\frac{d\mathbf{f}}{dx_i} = 0 \quad (2-7)$$

式（2-6）等价于：

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dx_i} &= \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} + \frac{d\lambda^T}{dx_i} (\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}) + \lambda^T \left( -\frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} - \mathbf{K} \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{f}^T - \lambda^T \mathbf{K}) \frac{d\mathbf{u}}{dx_i} - \lambda^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2-8)$$

为消除位移的影响，取  $\lambda = \frac{1}{2} \mathbf{u}$ ，则上式可化简为：

$$\frac{dC}{dx_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{d\mathbf{K}}{dx_i} \mathbf{u} \quad (2-9)$$

由公式（2-2），应变能灵敏度可定义为。

$$\alpha_i = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i & \text{当 } x_i=1 \text{ 时} \\ \frac{x_{\min}^{p-1}}{2} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i & \text{当 } x_i=x_{\min} \text{ 时} \end{cases} \quad (2-10)$$

该方法在数值上实现是非常容易而且高效的，在每一步迭代中，目标函数对各单元伪密度的敏度均可在一次有限元分析过程中获得。

在优化过程中，随着单元格的不断删除，有时会导致结构灵敏度的不连续，这是拓扑优化问题产生“棋盘格”现象的本质原因<sup>[209]</sup>。将设计区域内所有单元的灵敏度值光滑处理，防止敏度跳跃和敏度“陡崖”现象，是消除“棋盘格”现象的有效方法<sup>[208]</sup>。

首先，通过平均周围的单元灵敏度值引入节点灵敏度 $\alpha_i^n$ ，并将其定义为：

$$\alpha_i^n = \sum_{i=1}^M \omega_i \alpha_i^e \quad (2-11)$$

式中， $M$  为与节点  $j$  相连接的单元数目。单元  $i$  的权重因子  $\omega_i$  与到节点  $j$  的距离  $r_{ij}$  有关，可以定义为：

$$\omega_i = \frac{1}{M-2} \left( 1 - \frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^M r_{ij}} \right) \quad (2-12)$$

不难看出， $\sum_{i=1}^M \omega_i = 1$ ，且离节点越近的单元对节点灵敏度的影响越大。

为了识别参与计算修正的节点灵敏度的单元是否为有效单元，引入一个尺寸参数  $r_{\min}$ 。如图2-1所示，在圆内包含的所有节点（ $K$ 个）都要参与单元  $i$  的敏度计算。此时可将第  $i$  个单元的灵敏度  $\alpha_i^e$  修改为  $\alpha_i$ 。

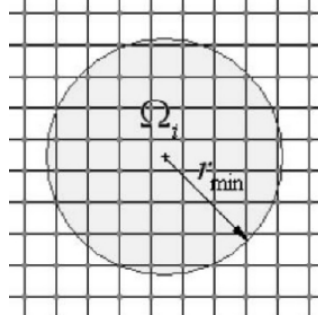


图2-1 滤波半径

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j^n \omega(r_{ij})}{\sum_{j=1}^k \omega(r_{ij})} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2-13)$$

式中，权重因子可按下式计算

$$\omega(r_{ij}) = r_{\min} - r_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2-14)$$

其次，为了保证迭代过程的收敛性，对灵敏度进行历史迭代求平均，即

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^n + \alpha_i^{n-1}}{2} \quad (2-15)$$

式中， $\alpha_i^n$  为单元  $i$  第  $n$  次迭代时的灵敏度。

因为软单元的有效区域内可能存在实体单元，经滤波后的灵敏度不再为零。甚至，当与软单元相邻实单元灵敏度高时，经过滤波后的软单元灵敏度也将被拉高，在进行下次迭代时，具有较高灵敏度的软单元也将转变成实单元。因此，这种滤波方法不但可以消除“棋盘格”现象、摆脱对网格的依赖，还将具有自动搜寻需要添加单元的能力。

### 2.2.3 优化准则

在拓扑优化过程中，单元的删、添可按照结构剩余体积  $V_K$  是否满足目标体积  $V^*$  进行控制。当剩余体积  $V_K$  大于  $V^*$  时，BESO算法主要以删除单元为主，以减小  $V_K$ ，相反以添加为主，使其逐渐满足目标体积  $V^*$ 。因此，进化过程中结构的体积可表示为

$$V_{K+1}=V_K (1 \pm ER) \quad (2-16)$$

式中，ER和K分别为体积进化率和迭代次数。

假设添加阈值和删除阈值分别为 $\alpha_{add}$ 、 $\alpha_{del}$ 。则当 $\alpha_i \geq \alpha_{add}$ 的软单元进行添加操作。当 $\alpha_i \leq \alpha_{del}$ 的实单元进行删除操作。阈值可按下面的步骤计算：

(1)第K次迭代，对所有单元敏度进行排队，若前面M个单元的体积和等于 $V_{K+1}$ ，第M+1个单元灵敏度为 $\alpha_{M+1}$ ，则定义为：

$$\alpha_{add} = \alpha_{del} = \alpha_{M+1} \quad (2-17)$$

(2)计算满足 $\alpha_i \geq \alpha_{add}$ 的软单元体积添加率AR，若AR大于预先设定的最大添加体积ARmax (常取1 %)，则转第(3)步，否则跳过第(3)步。

(3)将所有软单元按灵敏度从大到小的顺序排队，若前面 $M_0$ 个软单元的体积和等于ARmax，则将第 $M_0+1$ 个软单元的灵敏度设为 $\alpha_{add}$ ，为了保证第K+1次迭代的体积 $V_{K+1}$ ， $\alpha_{del}$ 通过删除单元体积 $V_{del}$ 来确定。

$$V_{del} = V_K - V_{K+1} + AR_{max} \quad (2-18)$$

### 2.3 BESO 算法实现流程

经过改进后的BESO算法具体步骤可概括为：

1)初始建模和有限元网格划分，并设定对初始设计域。定义结构的目标体积 $V^*$ 、体积进化率ER和滤波半径r等初始参数。

2)结构有限元分析，按式(2-10)计算各单元的应变能密度灵敏度。

3)根据式(2-13)和(2-15)分别进行灵敏度滤波和历史平均，从而得到本次迭代的灵敏度。

4)判断单元是否在设计区域。在非设计区域的单元，保留原有属性直接进入6)步，否则进入5)步。

5)根据式(2-16)和(2-18)确定下次迭代的结构目标体积。按照2.2.3节的方法删、添单元，从而构建新结构。

6) 重复2)、5)步，直至目标体积 $V^*$ 及收敛条件 $\varepsilon$ 同时得到满足。

BESO算法根据目标函数的历史变化量来判断优化是否收敛，故收敛准则定义为：

$$\frac{\left| \sum_{i=1}^N C_{K-i+1} - \sum_{i=1}^N C_{K-N-i+1} \right|}{\sum_{i=1}^N C_{K-i+1}} \leq \varepsilon \quad (2-19)$$

其中， $\varepsilon$ 为相对误差限，K为迭代次数，N常取正整数。

7)对优化结果进行稳定性评估。

在统计学中，数据集合的离散程度，可以用其均方差来恒量，均方差越大说明数据

越分散，反之，数据越集中。为此本文将引入一种新的BESO性能指标，单元柔顺度均方差PI。

$$PI = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^{N_K} (C_{mK} - \bar{C}_K)^2}{N_K}} \quad (2-20)$$

式中， $N_K$ 为第K次迭代时实体单元数目， $C_{mK}$ 和 $\bar{C}_K$ 分别为第K次迭代时实体单元m应变能和所有实体单元应变能均值。由此可见，PI值越小，则说明结构的应力分布越均匀，优化效果越好。

## 2.4 改进效果及参数取值区间

### 2.4.1 棋盘格的消除

连续问题的解以弱收敛方式逼近原离散问题的真实解时出现的实体材料和空单元材料交替出现类似棋盘状的优化结果，使结果拓扑构型的提取有一定困难，且难以符合生产实际。为了得到清晰、匀质并适合加工的优化结果，通过公式（2.13）引入灵敏度过滤法来消除棋盘格现象。以左端固结的悬臂梁为例验证其合理性，并讨论滤波半径  $r$  的取值区间问题。如图 2-2 所示，右端中部受向下集中载荷 100N。最大设计区域为 120mm × 40mm 的矩形区域，并离散为 240 × 80 个四节点四边形有限元网格单元。假设材料弹性模量  $E=200\text{GPa}$ ，密度  $\rho=1 \text{ kg/m}^3$ 。初始设计参数：目标体积分数  $V^*=0.4$ ，收敛精度  $\epsilon=10\text{E}-7$ ，进化率  $ER=2\%$ 。取构件最短边单元数 ( $n=80$ ) 0.02, 0.04, 0.075, 0.1, 0.1125 倍的滤波半径（即分别取  $r_1=1.6$ ,  $r_2=3.2$ ,  $r_3=6$ ,  $r_4=8$ ,  $r_5=9$ ）和无滤波方法分别对该构件优化，并将结果对比分析。

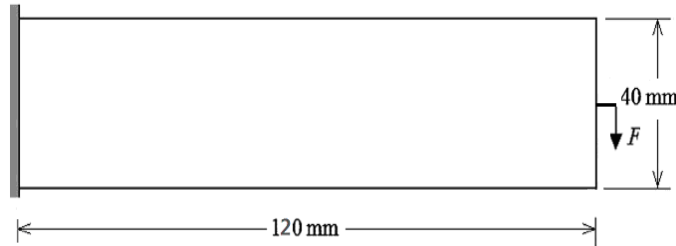
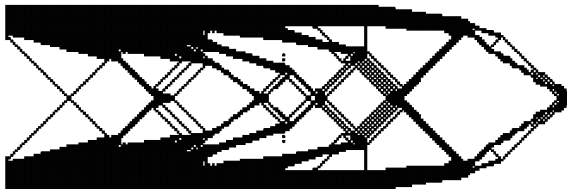
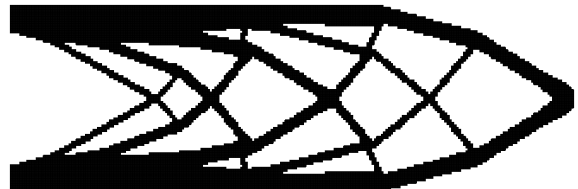


图 2-2 悬臂梁边界条件及设计区域



(a) 无滤波方法优化结果



(b)  $r_1=1.6$  优化结果

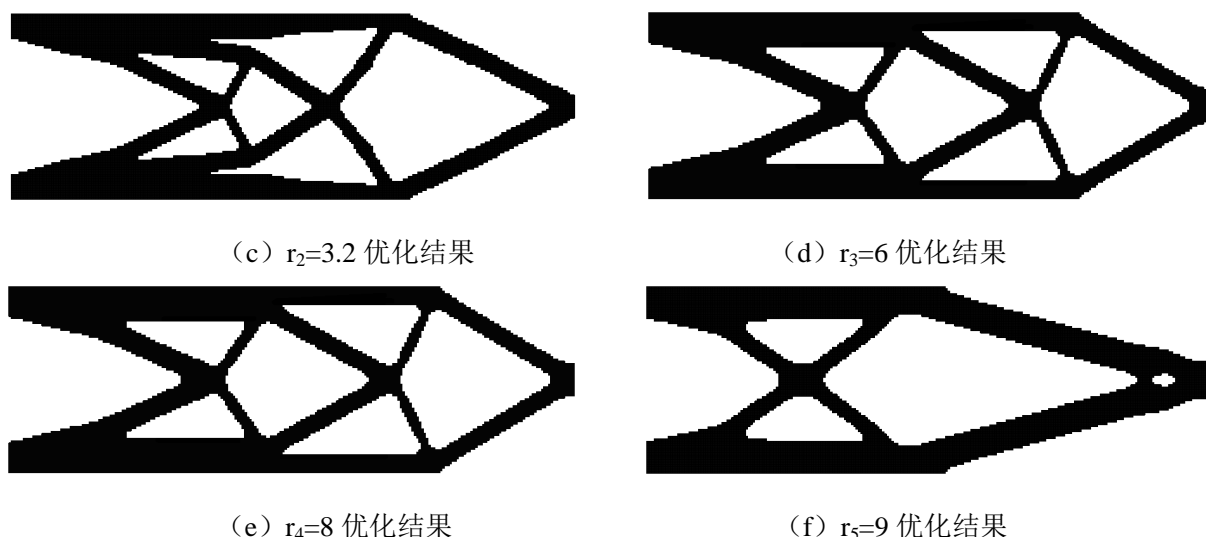


图 2-3 悬臂梁在无滤波方法和取不同滤波半径优化结果对比

图 2-3 给出了不同滤波半径参数下结构优化结果。不难看出没有进行敏度滤波时优化结果实体单元和空单元交替产生，出现明显的“棋盘格”现象，对于这种优化结果工程上无法实现，没有实际意义。通过引入合理的滤波半径可有效的避免该现象的产生。当选取不同大小的滤波半径，优化结果存在一定差异，且随着滤波半径的增大，结构类型将更加单一，有利于实际工程的加工和生产，但是其材料利用率和合理性有所下降。取合理的滤波半径，不仅能避免“棋盘格”结构，又能确保优化过程的收敛性和稳定性。建议取滤波半径为分别取滤波半径为构件最短边单元数的 0.04~0.1 倍。

#### 2.4.2 不稳定性解的改进

在优化过程中，为实现结构的轻量化需要不断地删除单元来实现，而此过程中容易出现结构受力机制的变化，从而引起目标函数大的波动，造成收敛时间成本的增加。为解决这一问题，通过公式 (2.15) 对灵敏度进行历史平均来消除优化过程的解的不稳定性。以图 2-2 算例，取滤波半径  $r_3=6$ ，其它参数不变，分别以有无历史平均处理的敏度对该构件优化，并将结果对比分析以验证改进方法的合理性。

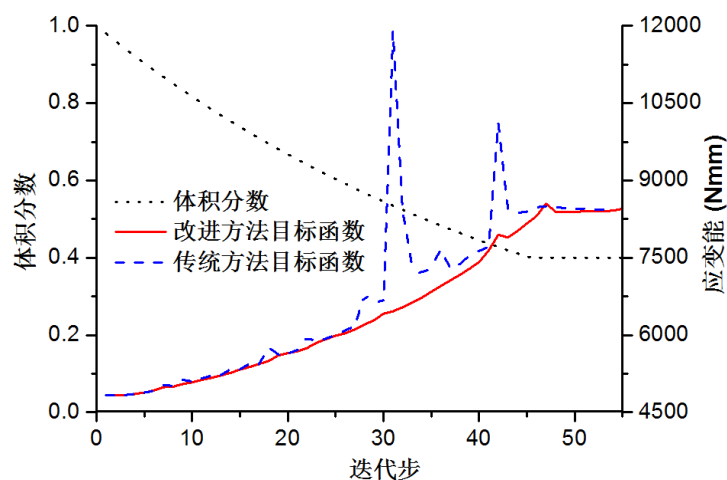


图 2-4 优化方法改进前后优化历程

从图 2-4 可以看出, 传统优化方法在结构优化过程中目标函数有时可能产生大的震荡现象。原因在于删除单元时是以滤波半径包含范围之内所有单元有关, 删除过程容易出现结构受力机制的变化, 从而引起目标函数大的波动, 造成收敛时间成本的增加。而对灵敏度进行历史平均的引入提高了优化过程的收敛性和稳定性。

### 2.4.3 网格依赖性的控制

对同一构件相同问题的优化随着网格划分密度的不同, 拓扑优化计算结果往往存在较大差异, 这是优化领域最为常见的问题之一。为解决这一问题, 本文采用了滤波和敏度再分配法相结合的方式。对图 2-2 构件分别离散为  $240 \times 80$ ,  $120 \times 40$ ,  $60 \times 20$  个四节点四边形有限元网格单元。并取构件最短边单元数 ( $n=80$ 、 $40$ 、 $20$ ) 0.1 倍的滤波半径 (即分别取  $r_1=8$ ,  $r_2=4$ ,  $r_3=2$ ) 进行优化, 并将结果对比分析以验证改进方法的合理性。

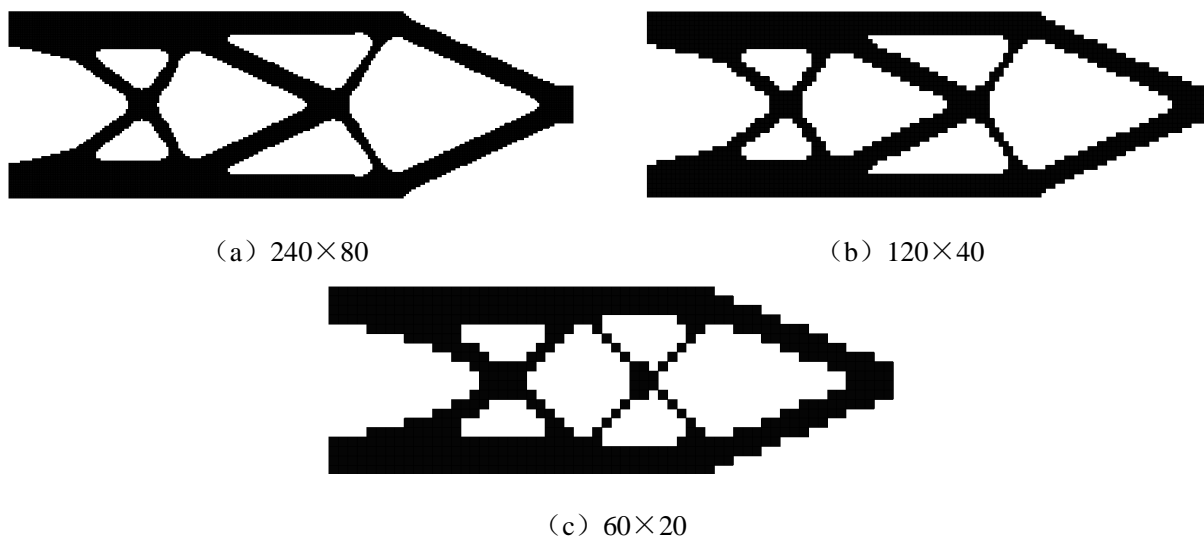


图 2-5 不同网格划分优化结果

如图 2-5 所示, 对于不同网格划分, 其优化结果没有明显差异, 从而说明了采用改进的渐进拓扑优化方法有效的成功的克服了拓扑优化对网格的依赖性。在优化结果相同的前提下, 网格越精细, 边缘越光滑, 但是计算成本成倍增加, 选取合理的网格划分对优化时间成本和优化效果有着重要意义。

### 2.4.4 双向优化的实现

在实际工程中经常遇到对结构(或构件)具体尺寸未作严格要求或未知的情况, 这种设计要求给工程人员以更大的发挥空间。在此背景下, 本文给出如图 2-6 的算例。要求在最大涉及区域内 ( $80\text{mm} \times 50\text{mm}$ ), 随机定义原始尺寸 (本文以  $80\text{mm} \times 30\text{mm}$  为例) 结构构件进行优化。不难看出, 最终优化结果布满了整个设计区域, 该算例进一步说明改进的 BESO 具备同时删、添单元的能力, 可在一定的设计区域内自动搜索合理的优化路径, 与原始结构尺寸定义没有直接关系, 适用于对结构尺寸没有具体要求或原始尺寸模糊的设计情况。

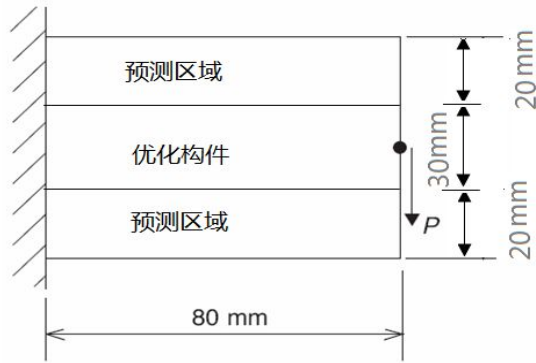


图 2-6 预测区域优化算例

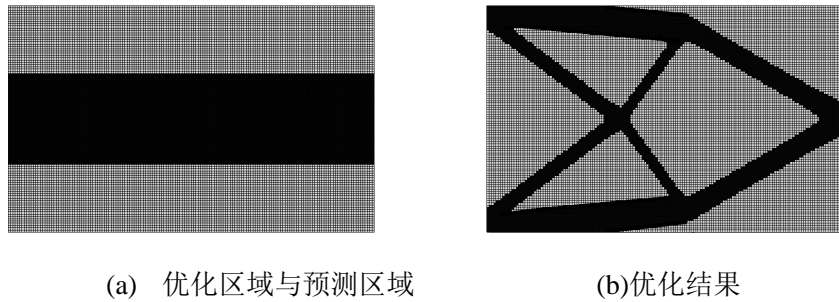
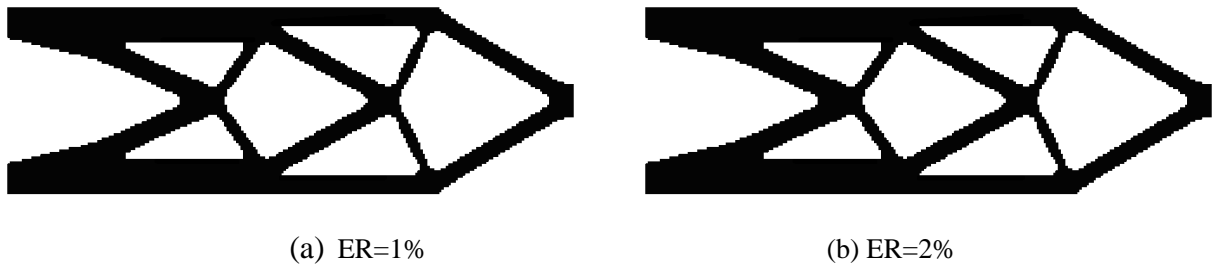


图 2-7 预测区域优化结果

#### 2.4.5 进化率的选取

在BESO优化中，删除低应力单元的同时，在高应力单元周围增补单元，从而使结构逐步趋向最优。那么，用于控制单元删除、添加的删除率 $RR$ 和添加率 $IR$ 成为控制优化过程的关键因素，因两者之间并不存在直接联系，其大小也只能依靠经验和调试来确定，不利于该方法的普遍推广。本章提出改进后方法通过删除、添加阈值 $\alpha_{add}$ 、 $\alpha_{del}$ 及进化率 $ER$ 来控制优化过程。其中删除、添加阈值是通过优化过程中敏度排序计算出的实时更新中间变量，不需人为定义。整个优化过程的进度只需通过初始恒量进化率 $ER$ 来控制，从而减少了经验调试的过程，使得优化过程更加科学合理。现以如图2-2所示的悬臂梁为例，研究进化率对优化过程和优化结果的影响。保持其他初始设计参数不变，以滤波半径 $r=6$ ，分别取体积进化率 $ER=1\%$ ， $ER=2\%$ ， $ER=3\%$ ， $ER=4\%$ ， $ER=5\%$ ， $ER=6\%$ ，进行优化，并将结果对比分析。



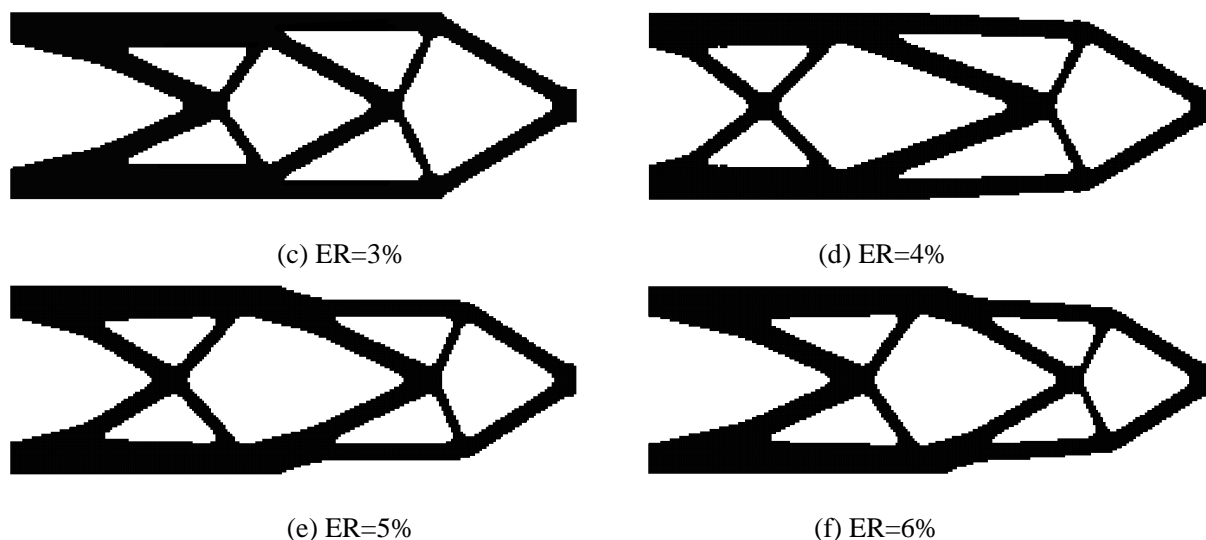


图 2-8 不同进化率悬臂梁优化结果

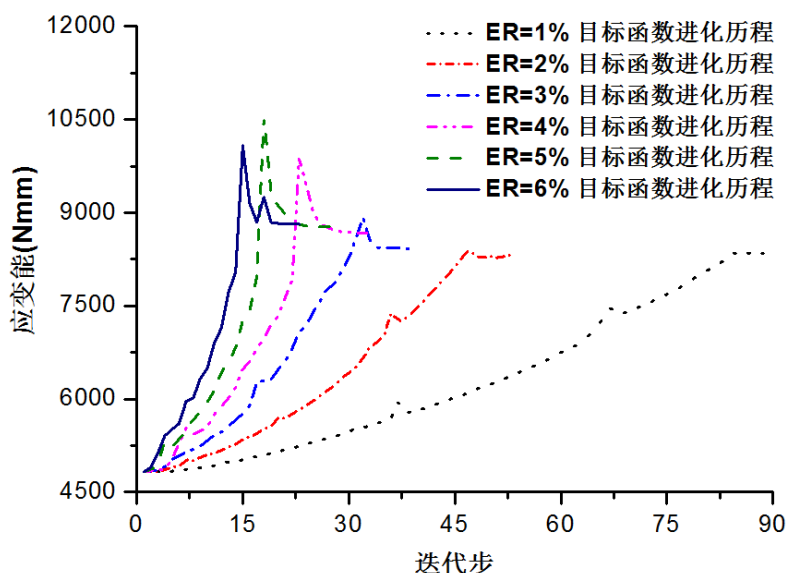


图 2-9 不同进化率优化历程对比

图 2-8 给出了不同进化率的结构优化结果，不难发现优化结果随着进化率的不同而存在差异。其主要原因是每次单元的删除或添加都会带来结构受力的重新分布，一次删除单元数目也同时决定了新结构的应力分布问题，从而影响到了下一步优化迭代基础。从图 2-9 不难发现，进化率越小，应变能越小，优化过程越稳定，结构更加合理。但是随着进化率的减小，计算时间成本将会成倍增加。根据实际问题的复杂程度、优化结果的精确性及计算时间成本等要求综合考虑，选择合理的进化率显得尤为重要。算例表明，当进化率取 1%-3% 时，优化结果差别不大，都在可接受合理范围，其优化进程也都处于稳定状态，所以建议计算时间可接受是取进化率 1%-3% 之间。

#### 2.4.6 三维复合材料结构优化

如图 2-10 所示，三维悬臂梁左端固结，右端中点受向下集中载荷 1KN。最大设计区域为  $100\text{mm} \times 40\text{mm} \times 20\text{mm}$  的矩形区域，并离散为  $50\text{mm} \times 20\text{mm} \times 10\text{mm}$  个八节点



六边形有限元网格单元。初始设计参数：体积进化率  $ER=2\%$ ，收敛精  $\varepsilon=0.001$ ，滤波半径  $r=1.5$  个单元长度。取基础材料弹性模量  $E=1e6GPa$ ，密度  $\rho=1e6kg/m^3$ 。填充材料依次取基础材料弹性模量和密度的  $10e-1$ ， $10e-3$ ， $10e-6$  倍定义复合材料的材料属性，材料 1 和材料 2 目标体积分数  $V_1^*=0.4$ ， $V_2^*=0.6$ ，分别进行优化设计，将结果对比分析。

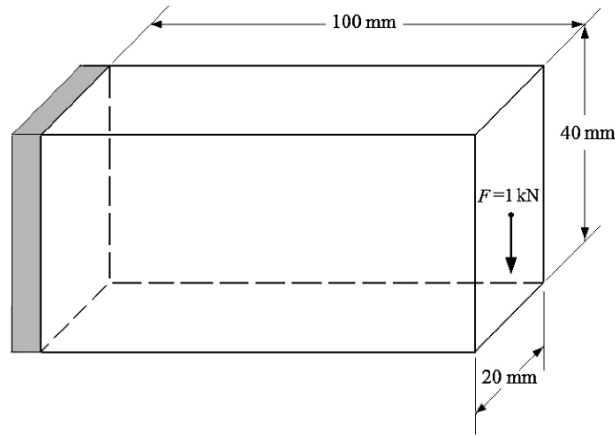


图 2-10 3D 悬臂梁设计区域

表 2-1 不同材料属性 3D 悬臂梁优化结果

		材料拓扑 (YZ 平面)	结构拓扑
结构 1	材料 1 $E=1e6GPa$ , $\rho=1e6kg/m^3$		
	材料 2 $E=1e5GPa$ , $\rho=1e5kg/m^3$		
结构 2	材料 1 $E=1e6GPa$ , $\rho=1e6kg/m^3$		
	材料 2 $E=1e3GPa$ , $\rho=1e3kg/m^3$		
结构 3	材料 1 $E=1e6GPa$ , $\rho=1e6kg/m^3$		
	材料 2 $E=1GPa$ , $\rho=1kg/m^3$		

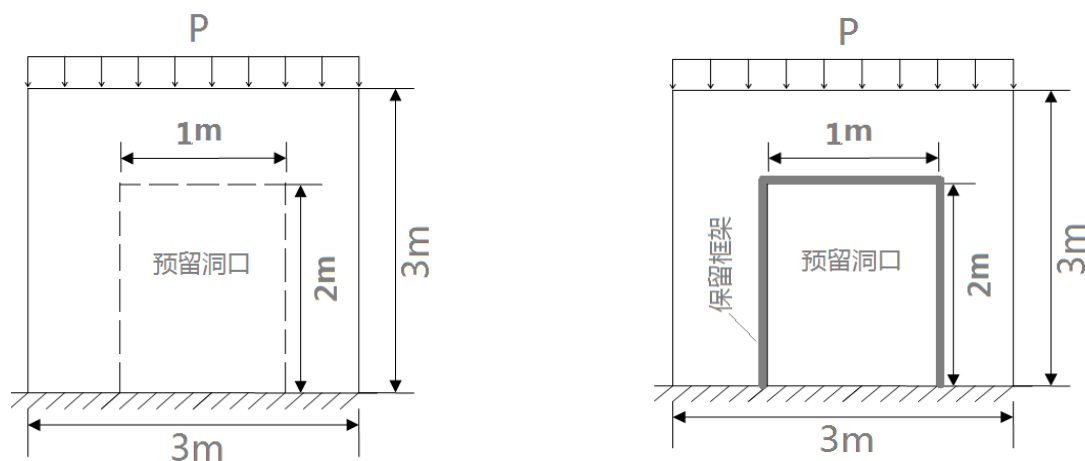
不同弹性模量比例的复合材料优化设计，优化结果也有所不同。这源于灵敏度的定

义与两种材料弹性模量比率有直接关系。可根据实际工程需要选择不同的材料类型，通过结构优化使材料得到更充分的利用，以找到用料少性能佳的结构形式。

## 2.5 特殊结构优化

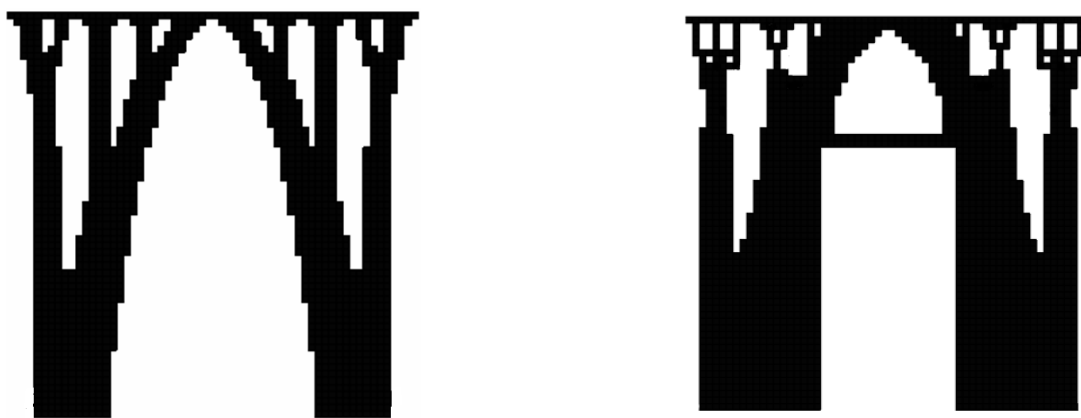
在结构设计中，有时一些关键构件并不是受力最大的，却对结构受力特性起到关键作用；另外为满足结构功能上的需要，部分构件必须满足一定的形态才能符合设计规范，更好的运用到实际工程之中。对于这些问题的解决，本文将其作为预设部件，并定义为非设计区域。在优化过程中，非设计区域的单元（构件）参与整体有限元计算，但在单元敏度排序时给予剔除，并将其属性直接植入新结构中，使其满足设计需求。

例如，在建筑设计中，为了满足结构使用功能的需要，经常会保留一定尺寸的洞口（门、窗等），在这特定需要的结构设计中，可将这些预留洞口作为非设计区域予以定义。假设在一扇墙体中，预留  $2\text{m} \times 1\text{m}$  的门口，在上部受均布载荷的情况下，具体设计要求如图 2-11 所示。



(a) 不小于规定尺寸的门洞墙体尺寸； (b) 严格尺寸的门洞墙体尺寸。

图 2-11 预留门洞墙体区域设计



(a) 不小于规定尺寸的门洞墙体优化结果;(b) 严格尺寸的门洞墙体优化结果。

图 2-12 不同要求下墙体结构优化结果

如图 2-12 所示, 无论对预留不小于规定尺寸门洞的扇墙体, 还是有严格尺寸要求的开洞墙体所进行的优化, 都能得到外观优美, 受力合理, 满足设计和使用功能要求结构体系。

## 2.6 合理性的讨论

在拓扑优化领域, Zhou<sup>[206]</sup>提出了一个著名的算例(如图 2-13), 在学术界引起了很多关于各种优化方法合理性的讨论<sup>[212, 210, 207]</sup>。在这个例子中, 由于竖直方向的力小于水平方向的力导致竖直支杆上单元应力很小, 在以应力和应变能为灵敏度的各种优化方法中会错误的删除此竖直杆上的单元, 并且无法重新恢复。而问题的关键在于, 如果此竖直杆一旦删除, 结构将会从超静定结构变为静定结构, 导致变形模态和受力途径发生本质性的变化, 从而使整体结构目标函数陡然提高(如图 2-14)。很明显这样的结果(如图 2-15)并不是我们想要的最优结果。文献<sup>[213]</sup>指出针对这一特殊问题, 很多经典优化方法, 如水平集方法(level set)、BESO 方法、SIMP 方法等均未能得到合理的优化结果, 从而引起了优化领域颠覆性的热点讨论问题。

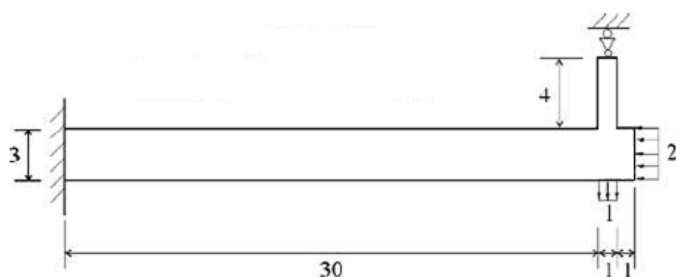


图 2-13 Zhou 模型

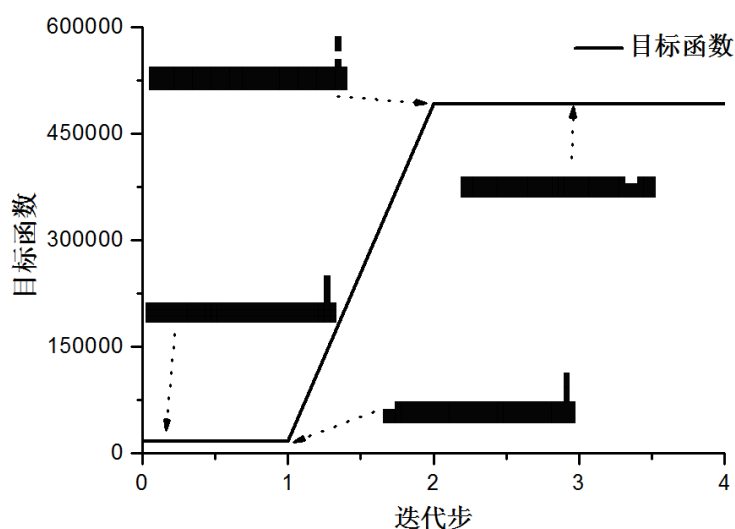


图 2-14 竖直杆删除前后目标函数变化

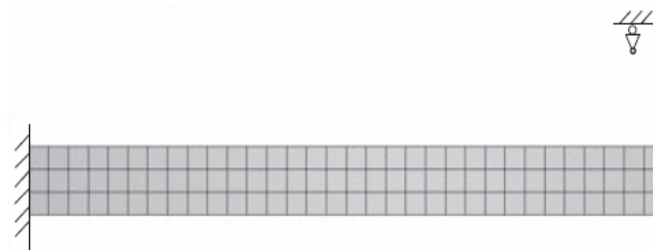


图 2-15 常规方法得到的低效局部优化解

### 2.6.1 解决办法的讨论

以 BESO 方法为例, 针对这一问题提出了细化网格、非设计区域的重新定义、边界条件的检查等方法。

#### 1 细化网格

Ansola R<sup>[27]</sup>给出在网格细化到原单元格的 0.01 倍以下时, 且取较低的删除率 RR 可以得到如图 2-16 所示的相对合理优化结果。但是, 细密的网格和低的删除率 RR 不仅增加了计算成本, 而且在优化开始之前如何确定网格细密程度和进化率的大小, 才能得到设计结果所需要的优化结果是很难做到的, 这在一定程度上限制了该方法的实际应用价值。

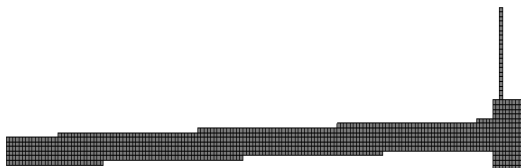
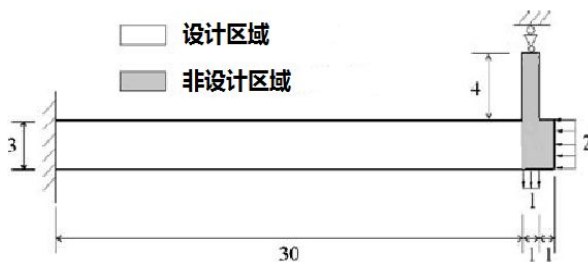


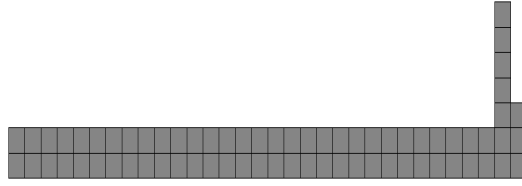
图 2-16 细化网格得到的最优化解

#### 2 非设计区域的重新定义

在文献<sup>[215]</sup>中, 作者基于非设计区域和设计区域的区域分割思想重新定义了算例(图 2-17(a)), 并得到了在不同网格和不同删除率下的全局最优解(图 2-17(b))。但该方法实现前提是在优化之前必须提前预测那些部件在承载、吸能等力学性能中起不到关键作用, 但在实际功能使用中必须存在或以一定形状拓扑形式存在。然而, 这些预测在问题提出和优化之前往往很难得到合理的答案, 从而降低了该方法的实用性。



(a) 区域优化模型



(b) 区域优化后得到的最优化解

图 2-17 重新定义得到的最优化解

### 3 中断检查

ESO 和 BESO 方法创始人 Xie Y. M. 指出, 为了避免这种低效局部优化解, 可以在计算过程中不断地检查结构边界条件的变化, 如本例中竖直支杆的删除即引起结构边界改变, 当这种情况发生时, 可以中断优化进程, 细分有限元网格并重新开始进行优化, 并最终得到了如图 2-18 所示的保留竖直支杆优化解<sup>[216]</sup>。该建议在一定程度上确实解决了这一问题, 但中断优化进程后人为的细化网格并重新提交任务的做法是否能被工程人员广泛接受, 值得商榷。

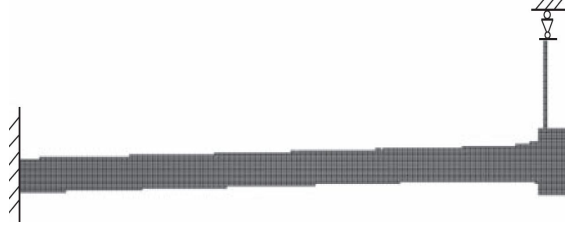


图 2-18 中断检查得到的最优化解

### 2.6.2 问题实质的探讨

Rozvany 经分析指出, ESO 失败的原因在于进化准则的不够合理<sup>[206]</sup>。而 Hang 在文献<sup>[213]</sup>中指出在初始结构中不包含竖直支杆的情况下, 当使用稍大的指数惩罚因子( $p > 3.1$ ) SIMP 方法也得出了跟 BESO 方法一样的解。而 SIMP 方法被广泛证明是至少可以得到局部优化解的一种优化方法。由此对该问题, ESO/BESO 方法对 Zhou 梁得出的解并非“非优化解”, 而是“低效局部优化解”, 而且这种低效局部优化解是由于惩罚因子过大而产生的。

为了进一步揭示二者区别, 将软单元 BESO 方法和 SIMP 方法对同一问题进行比较。以刚度优化为例, 软单元删除的 BESO 方法单元灵敏度被定义为:

$$\alpha_i = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{1}{2} x_i^{p-1} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i \quad (2-23)$$

而 SIMP 方法单元灵敏度被定义为:

$$\alpha_i = \frac{\partial C}{\partial x_i} = -p x_i^{p-1} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i \quad (2-24)$$

比较发现二者形式上相差  $-2p$  倍数, 考虑到拓扑优化进化准则在于敏度的排序, 而非绝对敏度值的大小, 因此在单元灵敏度的定义上, 二者区别不大。而问题的关键在于

对单元相对密度  $x_i$  的定义上。

事实上，对于软单元删除的 BESO 方法实质是将空单元的 0 属性替换为一个拥有极小值  $x_{\min}$  属性的软单元，并赋予很低的杨氏模量，其大小是由材料模型决定的。

$$E = x_i^p E^1 \quad (2-25)$$

式中， $E^1$  为实体单元杨氏模量， $p$  为惩罚因子， $x_i$  为单元相对密度。由此可见，对于软单元删除的 BESO 方法中存在两种单元密度，即 1 和极小值  $x_{\min}$ ，二者大小差别很大。因此，在优化过程中算例的悬杆单元一旦删除，很难再次“生出”。而对于 SIMP 方法，设计变量  $x_i$  被定义为<sup>[217]</sup>。

$$x_i = \begin{cases} \max(x_{\min}, x_i - m) & \text{当 } x_i B_i^\eta \leq \max(x_{\min}, x_i - m) \text{ 时} \\ \min(1, x_i + m) & \text{当 } \max(x_{\min}, x_i - m) \leq x_i B_i^\eta \text{ 时} \\ x_i B_i^\eta & \text{其他} \end{cases} \quad (2-26)$$

为了确保数值计算的稳定性和收敛性引入阻尼系数  $\eta$  和设计变量的更新限值  $m$ ，通常分别取 0.5 和 0.3。  $B_i$  可由公式 2-27 定义取得。

$$B_i = \lambda p x_i^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i \quad (2-27)$$

不难发现，由于中间密度的存在，当  $p$  取较小值时，删除的悬杆单元有可能再次“生出”。此种情况类似于 BESO 方法中复合材料的求解问题，即，两种材料的弹性模量等属性差别在同一数量级时，同样可以如图 2-19 所示的全局优化解。

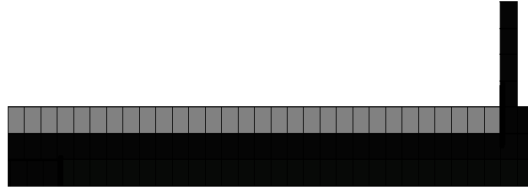


图 2-19 基于 BESO 方法复合材料 Zhou 模型的最优化解

换句话说，在此类问题上灵敏度的计算本质是目标函数对单元密度的导数，即目标函数为单元密度变化量与灵敏度乘积的函数<sup>[218]</sup>。

$$\Delta C_i \approx \alpha_i \times \Delta x_i \quad (2-28)$$

而此式精确解的条件是  $\Delta x_i$  较小，即单元密度变化在可接受范围，否则将有可能出现误差或奇异解。

综上所述，取较大惩罚值  $p$  的 SIMP 方法和硬删除的 BESO 方法之所以失败的原因在于：当设计变量  $x_i$  的变化很大（如从 1 变为 0）时，灵敏度在数值计算上可能出现误差或奇异解。

### 2.6.3 改进策略

基于以上原因，两种有方法在基本理念和方法本身是正确的，解决问题的关键在于提高敏度计算的精确性。大量研究表明，传统灵敏度的计算在解决常规问题是完全胜任的，而对于特殊问题的求解可以通过细化网格，减小删除率等方法改善，但是却大大提

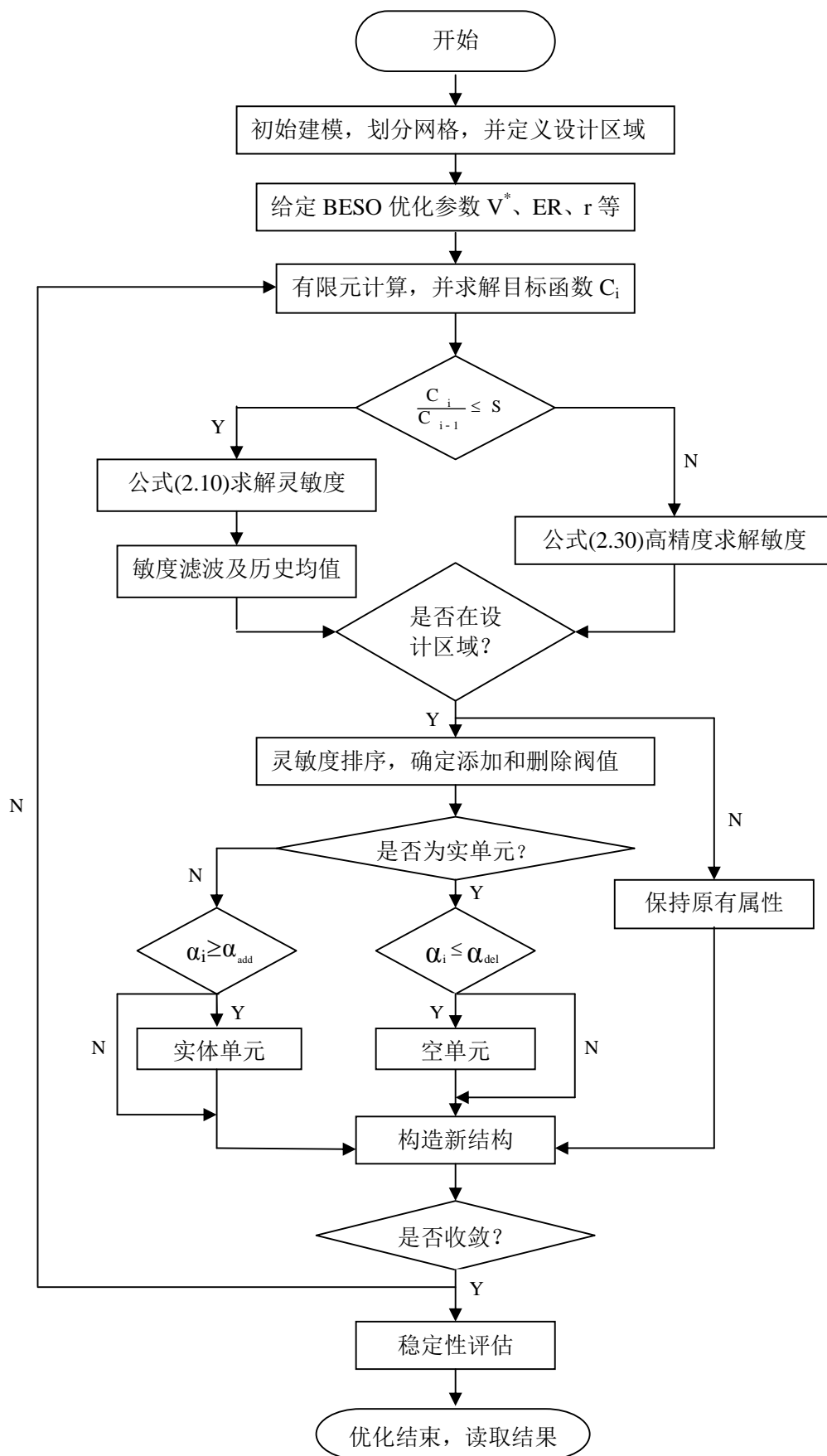


图 2-20 改进方法实现流程

高了计算成本。另一种更为直接的办法是采用差分法来提高灵敏度求解的精度，但这一做法无疑增加了设计变量，使分析计算量增加，导致计算成本的增加。为此在优化过程中通过添加边界条件的检查语句，自动转换为更高精度的差分法来提高计算精度不仅降低了计算成本，而且能保证得到最优解。

在优化过程中，解的奇异化通常伴随着目标函数的较大波动，为此可以通过比较前后两次目标函数的变化来定义边界条件的检查规则，如：

$$\frac{C_i}{C_{i-1}} \leq S \quad (2-29)$$

式中， $S$  是判断优化过程是否稳定的阈值，它的大小直接决定了优化历程平稳度的控制。当小于  $S$  时，说明优化过程中解的精确性是可以接受的，优化继续进行；反之，优化自动转为更高精度求解方式，如，依据公式（2-30）直接计算每个单元密度变化时目标函数的变化量，从而判断单元的删除。改进方法具体实现流程如图 2-20 所示。

$$C_i = C(x_1, x_2, \dots, x_{i-1} = 0, x_i = 1, x_{i+1}, \dots, x_n = 1) - C(x_1, x_2, \dots, x_{i-1} = 0, x_i = 0, x_{i+1}, \dots, x_n = 1) \quad (2-30)$$

通过改进后的优化方法，可以得到如图 2-21 所示的优化历程



(a) 体积分数 0.9



(b) 体积分数 0.8



(c) 体积分数 0.7



(d) 体积分数 0.45

图 2-21 改进方法优化历程



不难发现,改进后的优化方法,在粗网格划分的前提下,保持较高优化效率的同时,得到了类似细化网格法最优化解。

## 2.7 本章小结

本章在分析传统 BESO 方法存在不足的基础上,针对性的引入新的判别准则、材料插值模型和敏度滤波函数等数值计算方法进行了合理的改进。以相关算例研究了改进方法在消除网格依赖、棋盘效应、以及解的不收敛等数值问题上的有效性,使结构优化结果受力更加合理。

改进方法通过非设计区域和设计区域的区域分割思想对结构进行了定向拓扑优化,将其成功用于对预设结构有特定使用或美观要求及设计区域模糊或未知情况下的结构优化设计。并以此方法对有尺寸和形态美观要求的带门洞墙体结构进行了优化设计,结果显示,优化后的结构在严格满足预先要求的前提下实现了受力合理、外观优美的建筑 and 结构设计要求,从而拓展了 BESO 方法的实际工程运用领域。

在对 Zhou 梁充分受力分析研究的基础,讨论了学者对该问题提出的一系列针对性解的局限性,通过对比分析了 BESO 方法和 SIMP 方法在求解时的区别,对问题实质进行了探讨。从而提出自查式改进策略,在保持较高优化效率的前提下,得到了类似细化网格法最优化解,并对 BESO 解的合理性进行了深入的讨论与论证。

基于对二维和三维结构的拓扑优化和复合材料布局优化问题的相关研究,对  $r$ 、 $ER$  等重要参数选取问题给出了合理的建议,对实际优化应用具有较好的指导意义。



### 第三章 多相材料布局及材料/结构的一体化设计

多相材料/结构的拓扑优化设计研究始于 Sigmund<sup>[221]</sup>提出修改的敏度过滤法来消除三相材料拓扑优化中的棋盘格,之后得到了许多学者的关注;Yin<sup>[16]</sup>利用峰值函数研究了多相材料柔顺结构;Wang<sup>[17]</sup>提出了基于相场理论的多相材料拓扑优化方法。其中,针对各向同性材料的 SIMP 方法目前已被广泛的承认。在拓扑优化 SIMP 方法中,为确保解的收敛性,目前已经提出了许多施加限制的方法,例如,周长控制法<sup>[222]</sup>,梯度约束<sup>[59]</sup>和模糊过滤<sup>[223]</sup>等。而同样被广泛应用的 BESO 是通过离散设计变量(0或1)以达到逐步添加高效材料同时删除无效或低效的材料,从而使结构逐渐地趋于最佳化的方法对解决两相材料分布或单相材料/结构优化问题是完全胜任的,然而对于多相材料分布及材料/结构一体化优化问题这些方法存在着改进的空间。

为此,本章做了以下工作:

1、为解决多相材料分布及材料/结构一体化优化问题,本文引入基于惩罚指数的材料插值方案,并对给出相应的BESO的灵敏度算法。通过经典算例证实了新算法不仅对传统两相材料分布或单相材料/结构优化问题的有效改进,在解决多相材料分布优化和材料/结构一体化优化问题具有很好的收敛性和有效性。

2、基于编写的第三方插件,将MATLAB数值计算与ABAQUS有限元计算进行数据交换,开发了软件协同工作平台。简单的ABAQUS建模软件界面降低了对设计人员技能要求,灵活的MATLAB二次开发平台为算法改进提供了广阔的空间。

3、在多相材料优化过程中,计算量和时间成本一直是限制和制约其在工程实际中的应用。为此,本章通过对协同工作平台的并行计算开发,在保证精度的前提下,计算效率成倍提高,大大降低了计算时间成本,从而促进了大型复杂工程优化的技术转换。

#### 3.1 多相材料/结构的一体化 BESO 改进算法

##### 3.1.1 数学优化模型提出

为研究多相材料的最优分布,以结构最小柔顺度为设计目标函数,单元的状态密度为设计变量,不失一般性的将优化问题表示为<sup>[224]</sup>:

$$\begin{cases} \min & \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ s.t. & \mathbf{V}_j^* - \sum_{i=1}^N \mathbf{V}_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{j-1} \mathbf{V}_i^* = 0 \quad j = 1, 2 \cdots n-1 \end{cases} \quad (3-1)$$

为表述方便,将材料按其弹性模量由大到小排序为  $E_1 > E_2 > \cdots > E_n$ , 对应材料命名为材料1, 材料2, ..., 材料 n。

式中,  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{u}$  分别是结构载荷矩阵和位移矩阵。 $\mathbf{C}$  是应变能。 $\mathbf{V}_j^*$  表示第 j 种材料的目标体积;  $\mathbf{V}_i$  是单元 i 体积; N 为结构单元总数。设计变量  $x_{ij}$  表示第 j 种材料第 i 个单

元的状态密度且

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } E \geq E_j \\ x_{\min} & \text{for } E \geq E_{j+1} \end{cases} \quad (3-2)$$

对于多相材料和结构的一体化优化设计问题，可将第  $n$  种材料定义为空单元，即  $E_n=0$ 。为了避免刚度矩阵的奇异性，用  $x_{\min}$  的最小值，例如0.001。

那么，常见的单相材料的拓扑优化实质上是上述问题的一种特例，即  $j=1$  的情况。可简化定义为：

$$\begin{cases} \min & C = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t.} & \mathbf{V}^* - \sum_{i=1}^N \mathbf{V}_i x_i = 0 \quad x_i = x_{\min} \text{ 或 } 1 \end{cases} \quad (3-3)$$

### 3.1.2 材料插值模型

对两相材料分布或单相材料的结构拓扑优化问题中，传统的 BESO 是能够胜任的，但对多相材料 ( $n>2$ ) 优化问题显然很难完成。Bendsøe 和 Sigmund<sup>[217]</sup>材料插值方案在文献中和其他复合材料边界进行过比较，显示出其优越性和实用性。为使其更加有效的应用到多相复合材料优化之中，本文在此基础上进行必要的修改，并将其定义为：

$$\begin{cases} E(x_{ij}) = x_{ij}^p (E_j - E_{j+1}) + E_{j+1} \\ \rho(x_{ij}) = x_{ij}^p (\rho_j - \rho_{j+1}) + \rho_{j+1} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3-4)$$

其中， $\rho(x_{ij})$  表示第  $j$  种材料第  $i$  个单元的物理密度， $p$  为的惩罚指数。

以两相材料（杨氏模量分别为  $E_1$  和  $E_2$ ，且  $E_1 > E_2$ ）分布优化为例，材料的内插方案可以表示为：

$$\begin{cases} E(x_i) = x_i^p (E_1 - E_2) + E_2 \\ \rho(x_i) = x_i^p (\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 \end{cases} \quad (3-5)$$

同理，单相材料软单元结构拓扑优化可简化为：

$$\begin{cases} E(x_i) = x_i^p E_1 \\ \rho(x_i) = x_i^p \rho_1 \end{cases} \quad (3-6)$$

### 3.1.3 单元能量敏度定义

传统 BESO 方法中将以平均柔顺度作为目标函数的优化问题，常将灵敏度定义为单元应变能<sup>[208]</sup>。对于多相材料优化问题，基于设计变量  $x_{ij}$ ，类似的将用于调整材料  $j$  的和  $j+1$  之间的材料的灵敏度其定义为：

$$\alpha_{ij} = -\frac{\partial C}{p \partial x_{ij}} = \frac{1}{2} x_{ij}^{p-1} (\mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^j \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^{j+1} \mathbf{U}_i) \quad (3-7)$$

其中  $\mathbf{K}_i^j$  和  $\mathbf{K}_i^{j+1}$  表示由弹性模量  $E_j$  和  $E_{j+1}$  计算得到的刚度矩阵；需要指出的是， $\alpha_{ij}$  在整个设计领域每个单元都将被定义，因此，每个单元将会赋予  $n-1$  个灵敏度值，此时：

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{E_{j+1}}{E_j} \right] \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^j \mathbf{U}_i & \text{对材料 } 1, 2, \dots, j \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{x_{\min}^{p-1} (E_j - E_{j+1})}{x_{\min}^{p-1} (E_j - E_{j+1}) + E_{j+1}} \right] \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^{j+1} \mathbf{U}_i & \text{对材料 } j+1, j+2, \dots, n \end{cases} \quad (3-8)$$

当  $p$  趋向于无穷大时，灵敏度值可等价于：

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{E_{j+1}}{E_j} \right] \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^j \mathbf{U}_i & \text{对材料 } 1, 2, \dots, j \\ 0 & \text{对材料 } j+1, j+2, \dots, n \end{cases} \quad (3-9)$$

类似的，以两相材料分布及结构一体化优化为例。在材料1和材料2分布优化时所有单元灵敏度值可定义为：

$$\alpha_{i1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{E_2}{E_1} \right] \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^1 \mathbf{U}_i & \text{对材料1} \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{x_{\min}^{p-1} (E_1 - E_2)}{x_{\min}^{p-1} (E_1 - E_2) + E_2} \right] \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^2 \mathbf{U}_i & \text{对材料2} \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{x_{\min}^{p-1} (E_1 - E_2)}{x_{\min}^{p-1} (E_1 - E_2) + E_2} \right] \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^3 \mathbf{U}_i & \text{对软单元} \end{cases} \quad (3-10)$$

在结构拓扑优化过程中，单元敏度被重新定义为：

$$\alpha_{i2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^1 \mathbf{U}_i & \text{对材料1} \\ \frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^2 \mathbf{U}_i & \text{对材料2} \\ \frac{x_{\min}^{p-1}}{2} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i^3 \mathbf{U}_i & \text{对软单元} \end{cases} \quad (3-11)$$

同理，作为多相复合材料的特例，单相材料结构优化问题灵敏度等价于<sup>[165]</sup>：

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i & \text{对实体单元} \\ \frac{x_{\min}^{p-1}}{2} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i & \text{对软单元} \end{cases} \quad (3-12)$$

对于传统硬单元删除，实际上是当  $P$  无穷大的取值，即为：

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i & \text{对实体单元} \\ 0 & \text{对空单元} \end{cases} \quad (3-13)$$

对于一般性问题，这样的定义是合理的。但是，考虑到个别情况，优化过程会造成奇异解，即出现解的不稳定和不收敛的情况。所以引入软单元删除准则是必要的。同样材料插值函数，特别是惩罚函数的引入是解决多相材料的分布优化和材料/结构一体化优化的关键所在。

### 3.2 优化准则

BESO优化算法在多相材料/结构的一体化采用材料两两同时优化，当其中一种材料或删除的空单元（软单元）达到目标体积  $V_j^*$  后，保持体积分数不变，继续其他材料的优化（即：此时达到目标体积的材料单元继续参与优化，但该属性的单元数量保持不变）。以材料j的优化为例，阐述其优化准则。

在拓扑优化过程中，单元的删、添可按材料j剩余体积  $V_{jk}$  是否满足目标体积  $V_j^*$  进行控制。当剩余体积  $V_{jk}$  大于  $V_j^*$  时，材料j主要以删除单元为主，以减小  $V_j$ ，相反以添加为主，使其逐渐满足目标体积  $V_j^*$ 。

假设添加阈值和删除阈值分别为  $\alpha_{jadd}$ ， $\alpha_{jdel}$ 。则当  $\alpha_{ij} \geq \alpha_{jadd}$  的软单元进行添加操作。当  $\alpha_{ij} \leq \alpha_{jdel}$  的实单元进行删除操作。阈值  $\alpha_{jadd}$ ， $\alpha_{jdel}$ 。可按下面的步骤计算：

(1) 在对材料j和材料j+1第K次迭代，对所有单元敏度  $\alpha_{ij}$  进行排队，若前面M个单元的体积和等于  $V_{jk+1}$ ，第M+1个单元灵敏度为  $\alpha_j^{M+1}$ ，则定义为：

$$\alpha_{jadd} = \alpha_{jdel} = \alpha_j^{M+1} \quad (3-14)$$

(2) 计算满足  $\alpha_{ij} \geq \alpha_{jadd}$  的软单元体积添加率AR，若AR大于预先设定的最大添加体积  $AR_{max}$ （常取1%），则转第(3)步，否则跳过第(3)步。

(3) 将所有软单元按灵敏度  $\alpha_{ij}$  从大到小的顺序排队，若前面  $M_0$  个软单元的体积和等于  $AR_{max}$ ，则将第  $M_0+1$  个软单元的灵敏度设为  $\alpha_{jadd}$ ，为了保证第K+1次迭代的体积  $V_{jk+1}$ ， $\alpha_{jdel}$  通过删除单元体积  $V_{jdel}$  来确定。

$$V_{jdel} = V_{jK} - V_{jK+1} + AR_{max} \quad (3-15)$$

BESO 算法根据目标函数的历史变化量来判断优化是否收敛。

### 3.3 BESO 优化算法实现流程

经过改进后的BESO算法，基于ABAQUS 及 MATLAB软件实现多相材料分布及结构一体化拓扑优化具体步骤可概括为：

1) 基于ABAQUS初始建模和有限元网格划分，并设定对初始设计域，在MATLAB中定义结构的目标体积  $V^*$ ，体积进化率ER，滤波半径r，惩罚指数P及软单元密度  $X_{min}$  等初始参数。

2) 调用ABAQUS进行结构有限元分析，并读取计算结果。

3) 根据 (14) 计算单元灵敏度  $\alpha_{i1}$  进行材料1和材料2之间的优化，依次同步计算单元灵敏度  $\alpha_{in-2}$  进行材料 n-2和材料 n-1之间的优化；同时根据 (3-8) 计算单元灵敏度  $\alpha_{in-1}$

进行结构的拓扑优化。

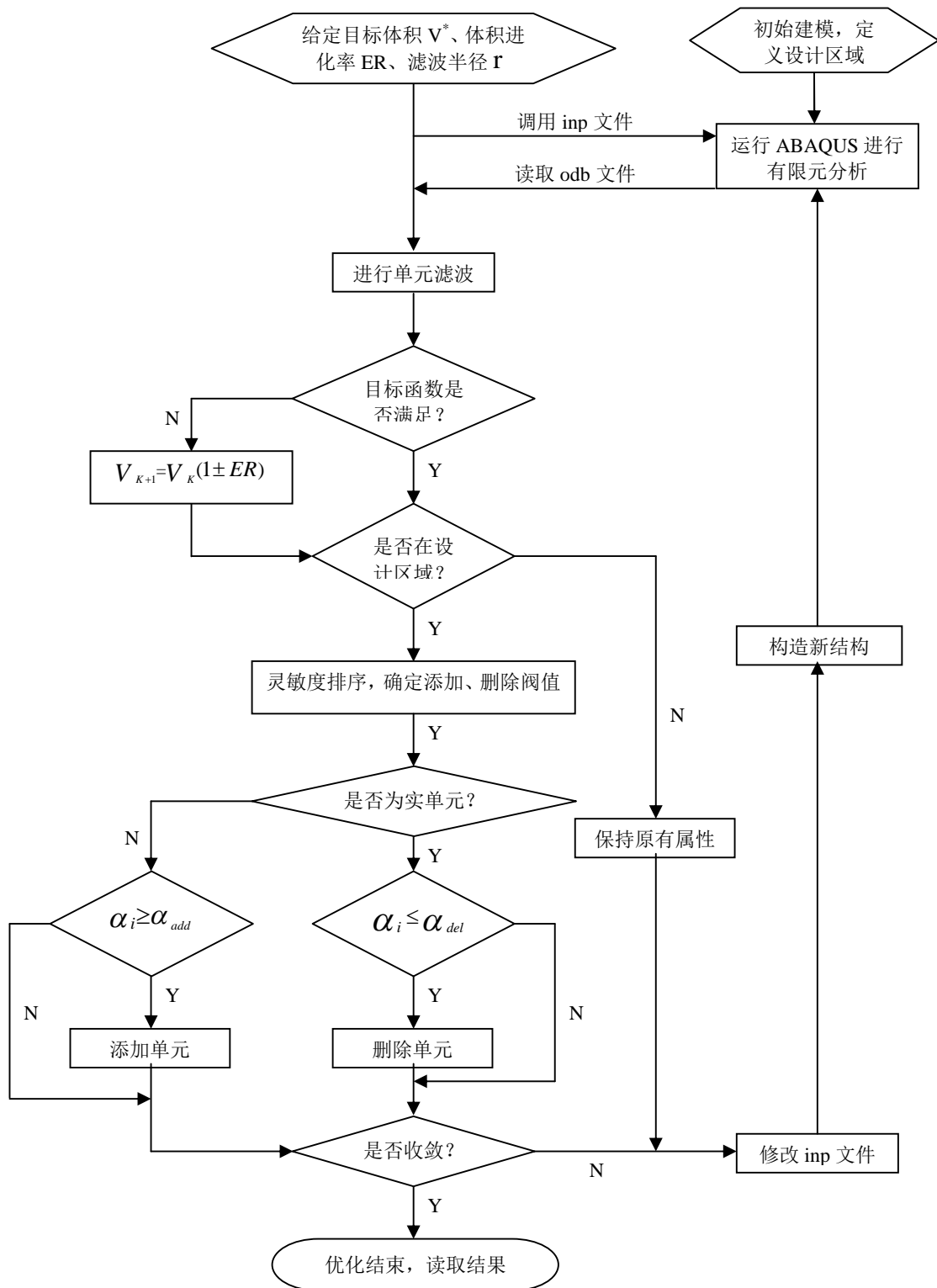


图 3-1 改进方法优化流程

4) 确定下一步设计的目标量。如果第  $K$  步材料  $j$  体积  $V_{jk}$  大于目标体积  $V_j^*$ ，则通过下列式子计算得到下一步体积  $V_{jk+1}$ 。

$$V_{jK+1} = V_{jK} (1 + ER) \quad (3-16)$$

式中,  $ER$ 和 $K$ 分别为体积进化率和迭代次数。相反,  $V_{jk} \leq V_j^*$ , 则保持  $V_j = V_j^*$  不变, 进行其他材料间的优化问题。

5) 按照3.2节的方法, 删、添单元。

6) 将所有单元属性信息写入 “.inp” 文件中, 从而构建新结构。

7) 重复2)~6)步, 直至当达到所有材料的目标值并且收敛条件  $\varepsilon$  同时得到满足, 优化终止。

### 3.4 优化算法软件开发

ABAQUS 是一套功能强大的有限元工程模拟软件, 它可以解决从简单的线性分析到极富挑战性的非线性模拟软件等各种问题, 并且能够自动选择参数, 过程中不断调整参数, 以确保结果的准确性, 从而为建模和计算提供了有力的工具<sup>[209]</sup>。而 MATLAB 程序语言是实现数值计算、符号计算和编程的有效平台<sup>[207]</sup>。本文通过第三方插件, 将 MATLAB 数值分析和 ABAQUS 有限元计算进行数据交换, 从而能实现利用 ABAQUS 强大的建模功能建立复杂的结构原型, 并通过插件调用 MATLAB 平台编写的 BESO 子程序对结构进行拓扑优化。当优化结束后, 优化结果可以通过插件再次调入 ABAQUS 环境中进行进一步的后期处理。如读取应力应变云图、表面光滑处理等。

本文主要是针对不同软件之间的协同作用编写了数据交换和相互调用插件, 为了提高计算效率在协同运算过程中采用了并行的逻辑计算。

#### 3.4.1 数据交换

BESO算法的实现过程中, MATLAB数值分析和ABAQUS有限元计算进行数据交换所基于的第三方插件主要包括四部分内容:

1. 调用ABAQUS, 进行有限元分析。在MATLAB中, 调用有限元软件 ABAQUS可采用dos命令来实现, 命令格式为:

```
Work=strcat('abaqus job='Filename' interactive');
status= dos(Work);
if status~=0
    break
end
```

其中, Filename为ABAQUS中inp文件的文件名;status为返回状态, 其值为0时表示调用成功。

2. 读取ABAQUS结果文件。ABAQUS的数据结果是按照固定的格式存储于odb文件、fil文件和dat文件中的, 通过访问这些文件, 就可读取到单元的信息及其有限元分析结果。通过fopen命令, MATLAB中对odb文件、fil文件或dat文件的读写不难实现。但需注意, dat文件的数据精度不高, 对于对称结构的拓扑优化, 读取dat文件可能会造成拓扑结构的不对称。本文读取的是fil文件内的单元节点应力, 其数据精度为双精度。



以下程序用于读取fil文件中的节点应力。

```

fid0=fopen(file_name,'r');
t1="";
ss=[];
while ~feof(fid0)
    t2=fgetl(fid0);
    t0=[t1,t2];
    n0=findstr(t0,'I 13I 13I 10I');
    if ~isempty(n0)
        n1=length(t1);
        if n0<=n1
            stress1=str2num(t0((n0+28):(n0+44)));
            stress2=str2num(t0(n0+48));
            stress=stress1*10^stress2;
            ss=[ss;stress];
        end
    end
    t1=t2;
end
fclose(fid0)

```

其中，file\_name 为数据结果文件名，该文件必须存在。File 文件是二进制或 ASCII 形式的连续文件，其中二进制为输出默认文件。为读取方便，本插件读取的是 ASCII 形式的 File 文件，为此必须修改 ABAQUS 中的 inp 文件，如欲输出节点处应力 S 的平均值，其修改格式为：

```

*FILE FORMAT, ASCII
*EL FILE, POSITION=AVERAGED AT NODES
S,

```

该插件中的关键点在于 ‘n0=findstr(t0,'I 13I 13I 10I');’ 命令，该命令是在 t0 中查找关键词 ‘I 13I 13I 10I’ 出现的位置，对于不同的调用输出结果，其关键词也有所不同，具体可查阅 ABAQUS 帮助文件。

另外，stress1=str2num(t0((n0+28):(n0+44)));stress2=str2num(t0(n0+48));是把特定位置的二进制字符串改写成数值以便读取，对于不同的输出变量，其所需字符串位置也有所不同，具体可查阅帮助文件

3.构造新结构，用于下一次迭代的有限元分析。对结构进行删、添处理以后，构造

新的结构模型是非常关键的一步，可以通过修改ABAQUS的inp文件来实现。部分程序如下：

```
on_off=1;
while ~feof(fid_in)
    Sn=fgetl(fid_in);
    if strcmp(Sn,'*Element, type=C3D8R')
        fprintf(fid_out,'%s\n',Sn);
        fprintf(fid_out,'%d, %d, %d, %d, %d, %d, \n',element_new);
        on_off=0;
    end
    if strcmp(Sn,'** Section: Section-1')
        on_off=1;
    end
    if on_off
        fprintf(fid_out,'%s\n',Sn);
    end
end
end
```

其中，fid\_in 和 fid\_out,分别为原始结构 inp 文件名和所需要修改的 inp 文件名。element\_new 为所需要写入的新单元编号。Element, type=C3D8R 和 Section: Section-1 分别是写入修改变量的前后字符，用于辨识修改写入位置。

通过第三方插件，将 MATLAB 数值分析和 ABAQUS 有限元计算进行数据交换，实现利用 ABAQUS 强大的建模功能建立复杂的结构原型，并通过插件调用 MATLAB 平台编写的 BESO 子程序进行对结构的拓扑优化，不仅有利于实现我们对现有的结构拓扑优化方法的不断改进和研究，更提高了建模效率，推广了优化方法在实际工程领域内的应用领域。

### 3.4.2 并行计算

在优化过程中，最消耗计算量的是循环计算，因此提高循环的计算效率往往是提高程序计算效率的关键。在逻辑上可将循环分为固定次数和非固定次数两类循环。固定次数的循环在执行语句中最为常见，其计算量的大小主要由循环次数和单次循环的计算量大小决定的。MATLAB 计算环境中针对 for 循环可以修改为 parfor 语句，从而将循环分解为若干独立的部分，每个部分交由不同的处理单元执行，从而实现各个部分的并行运算，提高程序的执行效率。采用 MATLAB 提供的 parfor 关键字可以对循环实现多核或多处理器并行执行计算是解决超大计算量的有效方法。

假设 MATLAB worker 的数量为 m，循环次数为 n，则 n/m 如果能整除的话,则循环

将会被均匀划分；如果不能整除的话，则循环会被非均匀划分，其中某些 MATLAB 处理单元可能会执行较多的循环次数。在 MATLAB 环境中，实现这一逻辑划分的方法由三部分组成。

1. 启动：利用 MATLAB pool 命令启动多个处理单元。

```
Function [ ]=startmatlabpool(size)
isstart=0;
nlabs=matlabpool('size');
if nlabs==0
    isstart=1;
end
if isstart==1
    if nargin==0
        matlabpool('open','local');
    else
        try
            matlabpool('open','local',size);
        catch ce
            matlabpool('open','local');
            size=matlabpool('size');
            display(ce.message);
            display(strcat('输入 size 不正确,采用默认配置,size=',num2str(size)));
        end
    end
end
else
    display('MATLABpool 已经启动');
    if nlabs~=size
        matlabpool close;
        startmatlabpool(size);
    end
end
```

2. parfor 语句执行：将循环体中的 for 关键字修改为 parfor 关键字,通过 MATLAB 程序解释器将此循环交由 MATLAB pool 启动的多个处理单元完成。

```
size=8;
startmatlabpool;
```

```

parfor n=1:187
    y1=x1((1+((n-1)*1001)):(n*1001),2);
    y2=x2((1+((n-1)*1001)):(n*1001),2);
    y3=x3((1+((n-1)*1001)):(n*1001),2);
    y4=x4((1+((n-1)*1001)):(n*1001),2);
    sigma=[y1';y2';y3';y4'];
    [rb]=probablity(sigma);
    node_prb(n)=prb;
end
closematlabpool;

```

### 3. 关闭

```

function []=closematlabpool
nlab=matlabpool('size');
if nlab>0
    matlabpool close;
end

```

应该说明的是, MATLAB 执行并行计算之前必须对 MATLAB 软件进行配置项设置。可以通过 Parallel 菜单修改, 单击 Manager Configurations 菜单项, 打开配置项管理器 Configurations Manager 对话框, 对 Number of workers available to scheduler 进行修改。此处, 必须注意 worker 数目要和计算机 CPU 的配置相符, 否则将会报错。由此可以看出, 对于计算的效率不仅和并行计算语句的定义有关, 同时也受计算机自身配置决定的。

对于 MATLAB 自身运算平台的并行计算问题, 可以通过 MATLAB 提供的内置并行结构中 (如, parfor, SPMD 等), 不需要并行任务的创建和管理细节。如果开发不同软件之间协同作用的数据交换平台, 则必须考虑考虑并行架构和 job 运行状态的问题。一般来说, MATLAB 并行可以分为: 1) 任务的各作业间完全独立, 不需要进行数据交换, 各任务不需要同步执行。2) 任务的各作业间存在逻辑关系, 需要进行数据交换, 且必须满足一定的执行顺序或需要同步执行等逻辑先后关系。对于第二类问题必须进行 job 的创建、提交及执行结果的读取等步骤。以 MATLAB 和 ABAQUS 的并行计算和数据交流为例, 必须定义一下程序:

1) job 的提交、执行命令状态的判断及实现多 cpu 计算。

```
Work=strcat('abaqus job='Name' cpus=n interactive');
```

% cpus=n 中 n 为并行计算时调用的 cpu 个数;

%interactive 则表示逐个提交, 等前面的计算完再提交后一个。

```
status= dos(Work);
```

```
% dos 运行 ABAQUS
```

```
    if status~=0
```

```
% 执行状态
```

```
    break
```

```
end
```

## 2) ABAQUS 实现交互式批处理及计算精度

```
dos ('abaqus job=jobname1 double int && abaqus job=jobname2 double int &&
```

```
    abaqus job=jobname3 double int');
```

%double 意为计算过程执行双精度;

## 3) ABAQUS 并行计算的定义。

ABAQUS/Explicit: parallel 参数可选 domain 进行拓扑域并行, loop 进行循环级并行 (在 NT 系统下, 不支持 loop 参数)。cpus 数要可以整除 domains 数, 也就是一个 cpu 可以进行多个 domain 的计算, 以 4 个 cpu 计算机为例: 1cpu: abaqus job=circuit int4; 2cpu: abaqus job=circuit parallel=domain domains=5 cpus=2 int; 4cpu: abaqus job=circuit parallel=domain domains=4 cpus=4 int; 多 CPU 并行处理对 Explicit 效果显著。对于, ABAQUS/Standard: parallel 参数可选 supernode 对单波前进行并行处理, tree 对多波前同时进行并行处理。

## 3.5 算例

### 3.5.1 单相材料结构优化

如图 3-2 所示左端固结悬臂梁, 右端中点承受 1N 集中力。设计区域为  $0.16\text{m} \times 0.04\text{m}$  的矩形, 并离散为  $160 \times 40$  个有限元网格单元。初始设计参数: 目标体积比为 35%; 进化率  $ER=2\%$ ; 收敛精  $\epsilon=0.001$ , 滤波半径  $r=1.5$  单元长度。取材料弹性模量  $E=1\text{MPa}$ , 泊松比  $\nu=0.3$ , 密度  $\rho_1=1\text{kg/m}^2$ 。分别以传统 BESO 硬删除和材料插值模型软删除 (取惩罚指数为  $P=3$ ) 两种方法进行优化。

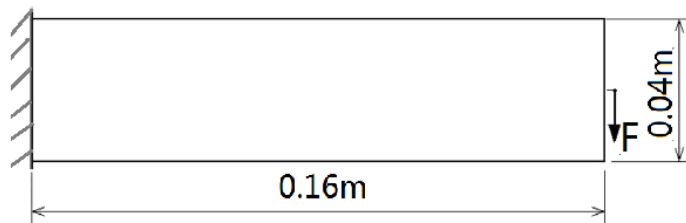


图 3-2 悬臂梁初始结构设计



(a) 改进方法优化结果 (共 44 步)



(b) 传统方法优化结果（共 49 步）

图 3-3 改进前后两种方法优化结果

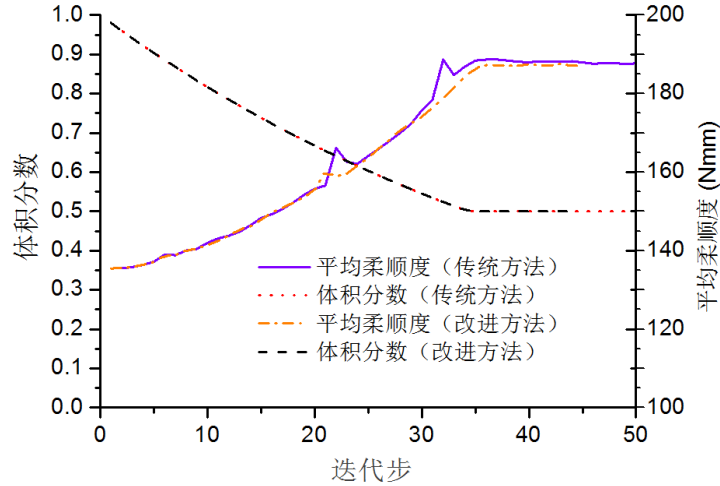


图 3-4 改进前后两种方法结构进化历程

从图 3-3 可以看出, 传统方法和改进后方法优化结果非常接近。然而, 在迭代步上改进后的优化算法要少于传统算法, 也就意味着改进后时间成本有所减少。另外, 图 3-4 显示的结构进化历程来看, 改进后目标函数更加稳健。传统算法在 22 步和 33 步, 存在两次跳跃, 这主要源于此时一些重要的连接杆件被打断, 从而造成结构传力路径有所改变。但总体来看, 在后续的迭代中, 无论是体积分数还是目标函数都逐渐收敛到一个恒定值, 且最终结果基本一致, 从而说明对于单相材料/结构优化问题, 无论是传统的 BESO 还是改进后的优化算法均能够得到很好解决。

### 3.5.2 两相材料分布优化

Mitchell 梁如图 3-5 所示的支撑边界点及设计区域, 左端中点承受 1000KN 集中力。有限元网格划分为  $240 \times 160$  个四边形单元。以材料 1 和材料 2 为基础材料复合材料最佳分布优化。材料属性为: 弹性模量  $E_1=100\text{GPa}$ ;  $E_2=0.1\text{Mpa}$ 。初始参数: 目标体积分数  $V^*=0.3$ , 收敛精度  $\epsilon=0.001$ , 滤波半径  $r=1.5$ 。分别取删除率  $ER=1\%$ ,  $ER=3\%$ ,  $ER=5\%$ ,  $ER=6\%$  进行优化, 并将结果对比分析。

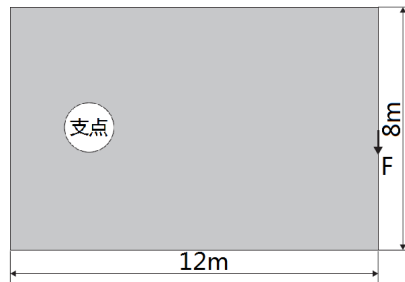


图 3-5 中心载荷简支梁的设计区域

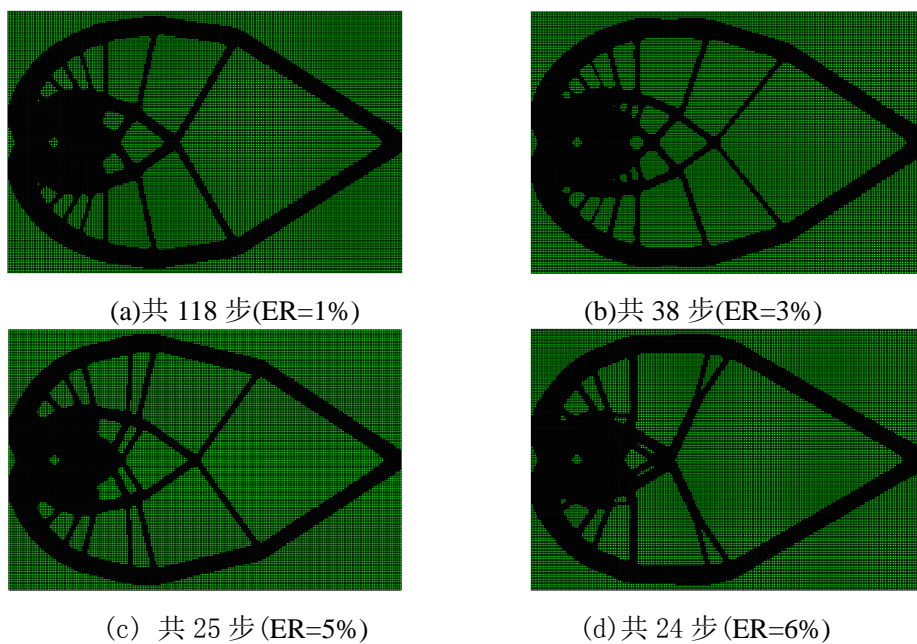
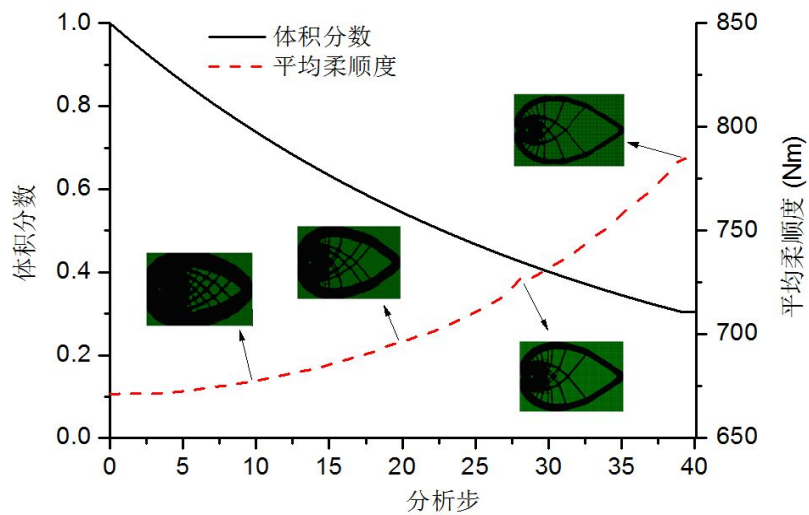
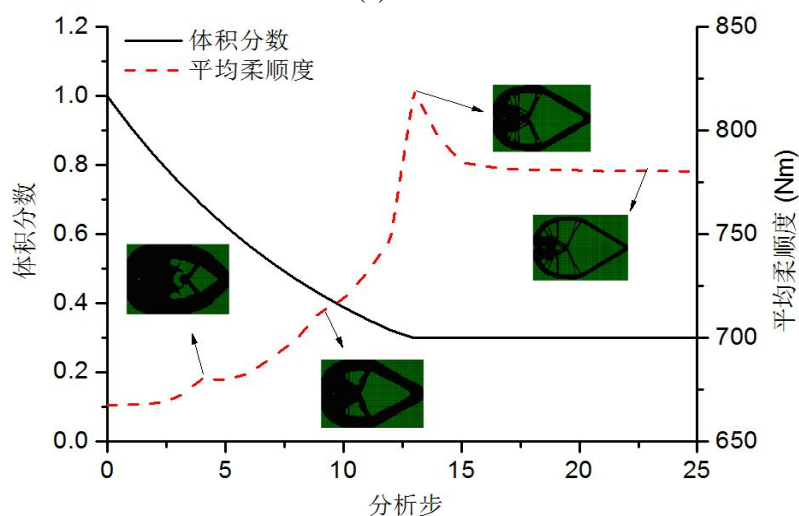


图 3-6 取不同删除率简支梁优化结果



(a) ER=3 %



(b) ER=6%

图 3-7 不同删除率条件下结构进化历程

图 3-6 给出了不同删除率的结构材料分布优化结果。可以看出取不同的删除率，材料分布存在一定差异的同时，结构达到最优状态所需的分析步也存在很大的不同，即需要的时间成本不同。总体来说，删除率越小，结构材料分布越合理，但计算时间成本将会成倍增加。一定程度上，为降低优化时间，在对优化结果要求不苛刻的情况下，增大删除率是一个很好的方法。但当删除率过大（如图 3-6 d），由于结构优化历程不稳定，造成很难收敛（如图 3-7），此时一味的提高删除率并不能很好的降低时间成本。所以，根据实际情况，选取合理的删除率显得十分重要。

### 3.5.3 三种材料分布优化

为研究多相材料的优化分布问题，以一段三相材料悬臂梁为例(图 3-8)，分别给出了传统 BESO 及不同惩罚指数改进 BESO 复合材料分布优化结果(图 3-9)。从中不难看出，传统 BESO 算法在一开始便出现混乱状态，优化根本无法进行。而对于改进后的优化算法，结构不仅结果合理，而且优化过程稳定。对于不同惩罚指数( $P$ )，结构材料分布非常接近，均处于合理状态，特别是当  $P$  趋于无穷时，结构材料分布更加光滑，有利于结构加工成型。

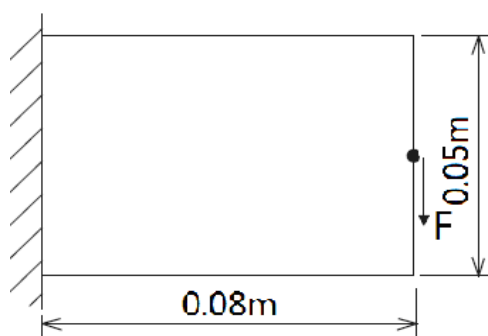


图 3-8 悬臂梁优化区域

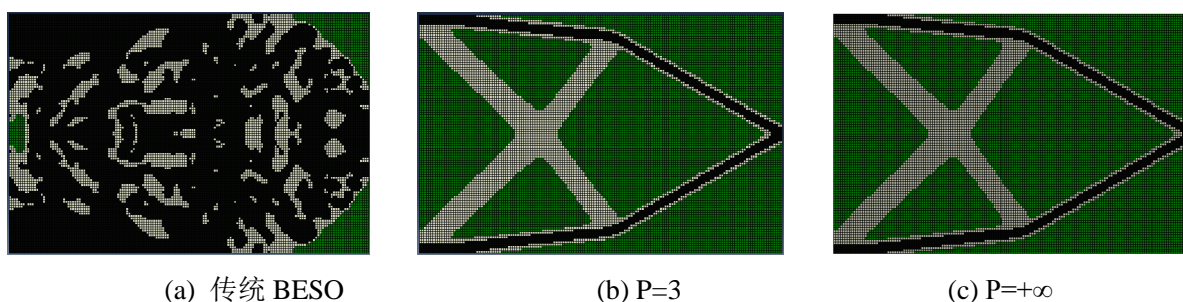


图 3-9 传统 BESO 及不同惩罚指数改进 BESO 复合材料分布优化结果

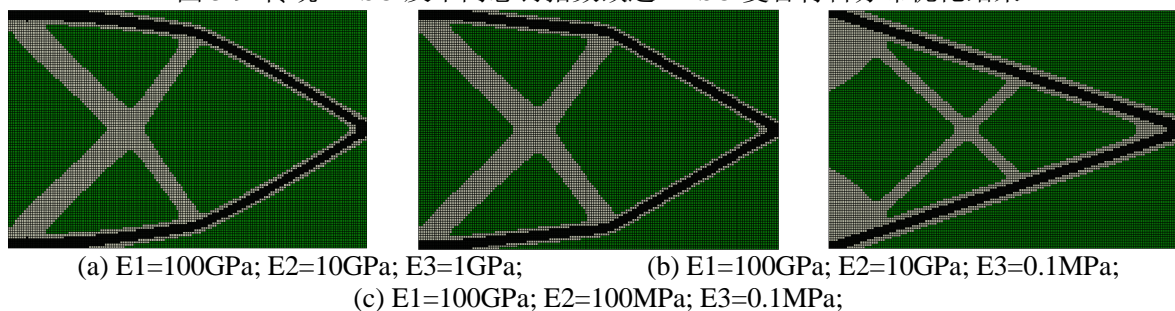


图 3-10 不同材料属性的复合材料分布优化结果



图3-10的优化结果显示，当三种材料属性取值比例有所调整时，结构最佳材料分布变化很大，其主要原因是当材料2或材料3相对于材料1太弱时，这种弱材料在结构中不能独立承受力的作用，此时材料1呈连续分布以利于承载，随着弱材料体积增大，结构逐渐能独立承载时，三相材料的优化形状趋同于两相材料的优化构型。

### 3.5.4 结构/材料分布一体化优化

如图 3-11 所示，两端固结梁上边中点受集中载荷 20kN。材料 1 和材料 2 弹性模量、密度分别是  $E_1=100\text{GPa}$ ； $E_2=10\text{GPa}$ ； $\rho_1=10\text{kg/m}^3$  和  $\rho_2=1\text{kg/m}^3$ 。离散为  $240\times 40$  个四节点四边形有限元网格单元。初始设计参数：进化率  $ER=0.03$ ；滤波半径  $r=3$ ；惩罚指数  $P=3$ 。初始状态所有单元全为材料 1。总体结构优化目标体积保持在  $V^*=V_{11}^*+V_{12}^*=0.3$ ，调整材料 1 和材料 2 体积比。分别取材料 1 和材料 2 目标体积  $V_{11}^*=0.2$ ， $V_{12}^*=0.1$ ； $V_{21}^*=0.15$ ， $V_{22}^*=0.15$ ； $V_{31}^*=0.16$ ， $V_{32}^*=0.14$  等三组数据。

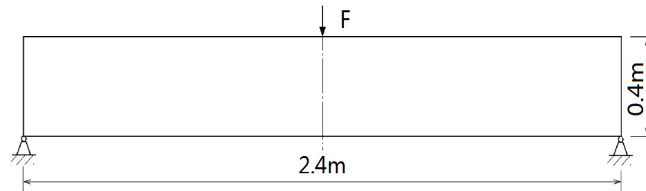


图 3-11 中心载荷两端固结梁的设计区域

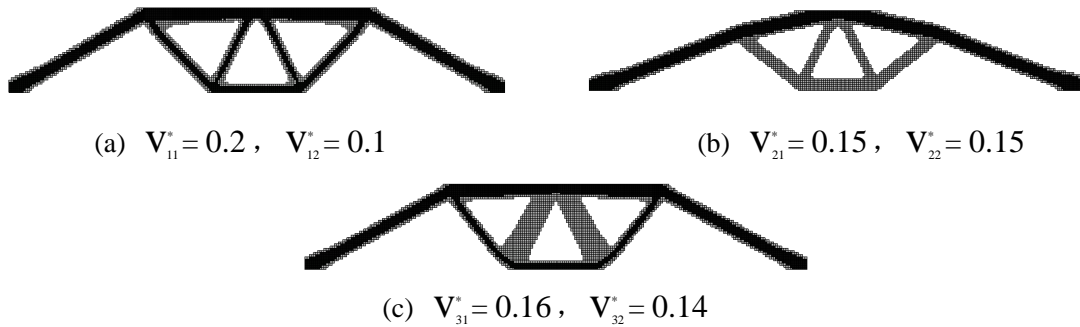


图 3-12 取不同材料比例的结构/材料分布一体化拓扑优化

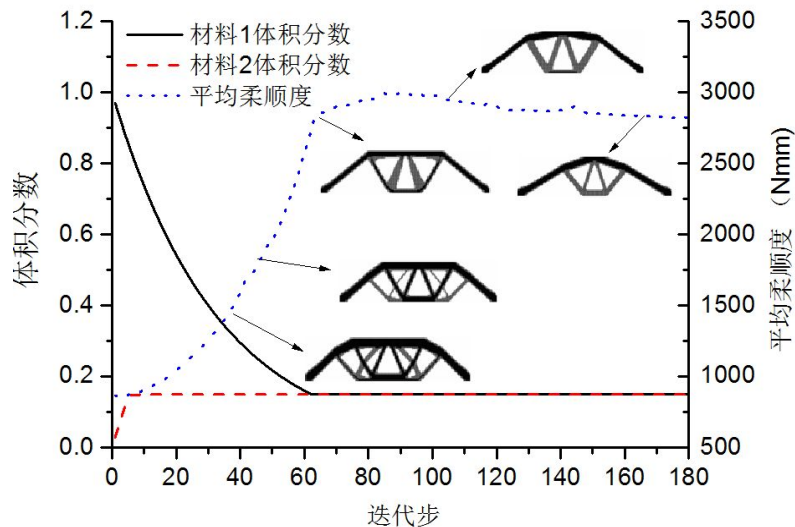


图 3-13 取  $V_{21}^*=0.15$ ， $V_{22}^*=0.15$  结构进化历程

本例说明, 当对材料取不同分配比例时, 整体优化依然稳定, 且在保持整体材料比例 (材料1和材料2体积) 不变的情况下, 结构拓扑形状依然会随着材料相对比例的变化而略微差异。从结构进化历程来看 (如图3-13), 材料1和材料同时优化, 当材料2体积分数得到满足后, 保持材料2体积不变, 继续对材料1进行优化。此时材料1和材料2的分布会随时依据结构拓扑形状变化而变化。直到材料1和材料2体积均得到满足, 保持材料1和材料2体积不变, 结构分布同时进行优化, 直至收敛条件得到满足, 从而得到最优解。

### 3.5.5 并行计算改进效果

为说明本章所编写并行开发程序对复杂结构优化的实用性, 对一桥梁进行整体优化设计, 初始尺寸和载荷如图 3-14 所示。预设计 0.5m 厚的桥面和桥面上方 9m 宽的人行通道, 即整个优化过程中桥面所有单元始终保持为存在 ( $x_i=1$ ) 状态。桥梁材料假设为弹性模量  $E=20\text{GPa}$ 。优化过程中, 将初始模型离散为 252920 个八节点有限元网格单元。初始设计参数: 目标体积分数  $V^*=0.17$  体积, 进化率  $ER=1\%$ , 滤波半径  $r=1.5$ 。

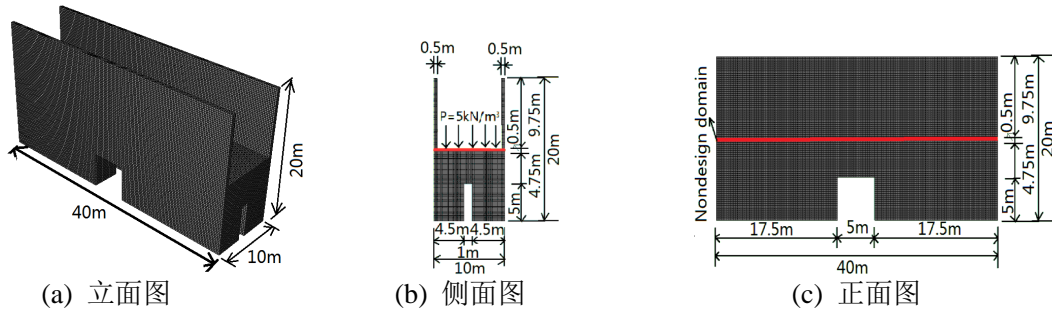


图3-14 桥梁初始尺寸及载荷

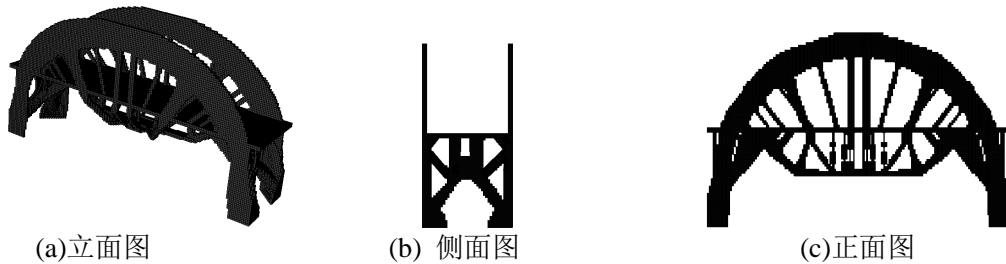


图3-15 优化结果

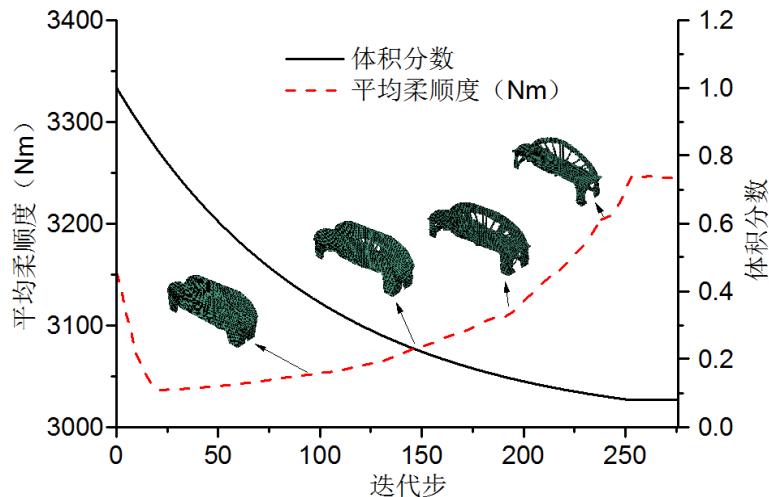


图 3-16 优化历程

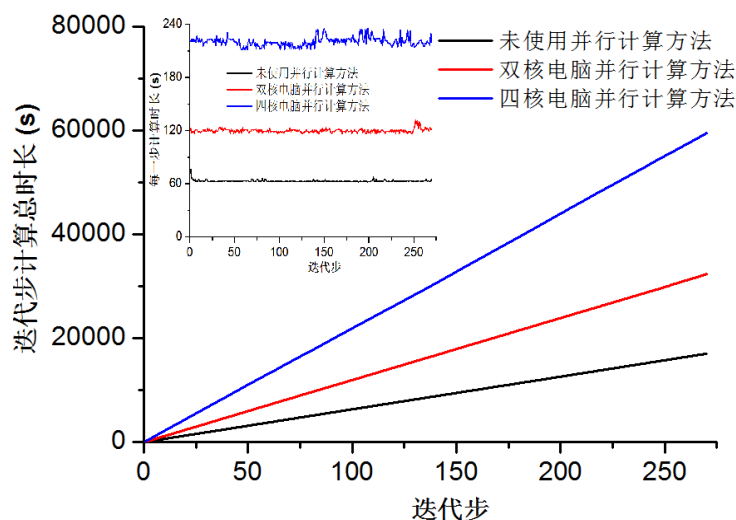


图 3-17 并行方法计算时间成本

从图3-15给出的优化结果可以看出，优化后的桥梁用料为原有17%，大大降低了造价，减轻了自重。另外优化后的结构更加美观，结构对称，受力合理。图3-16给出了桥梁的优化历程，从中不难发现，整个优化过程中，结构体积在稳定减小的同时，结构平均柔顺度先降低后缓慢增大，最后达到一个合理的水平保持稳定。对于该大型复杂结构，采用一般计算方法和本文所提出并行计算方法分别双核普通计算机、四核计算机上优化过程中都经历了274步迭代过程，图3-17给出总耗时分别是16.5小时、8.9小时和4.7小时，计算成本成倍减小。另外，如3.4.2节所述并行计算方法的效率提高受到计算机硬件的制约，但随着科技的发展，计算机性能有着飞速的发展，双核、四核计算机普遍走入日常生活，特别是服务器及云计算的发展使得大型工程的优化成为现实。

### 3.6 本章小结

基于引入惩罚指数材料插值方案的改进灵敏度不仅是对传统两相材料分布或单相材料结构优化问题的改进，而且可有效地解决传统 BESO 方法不能胜任的多相材料分布优化和材料/结构一体化优化问题。通过相关算例可以得出以下重要结论：

1、对于单相材料结构优化问题，无论是传统的 BESO 还是改进后的优化算法均能够得到很好解决。改进后目标函数更加稳健，收敛性更好。

2、传统 BESO 在三相材料的优化分布问题一开始便出现混乱状态，优化根本无法进行。改进后的优化算法，不仅优化结果合理，而且优化过程稳定。对于不同惩罚指数 ( $P$ )，结构材料分布非常接近，均处于合理状态，特别是当  $P$  趋于无穷时，结构材料分布更加光滑，有利于结构加工成型。

3、当对材料取不同分配比例时，整体优化依然稳定，且在保持整体材料比例（材料1和材料2体积）不变的情况下，结构拓扑形状依然会随着材料相对比例的变化而略微差异。从结构进化历程来看，材料1和材料同时得到优化，当材料2体积分数得到满足后，保持材料2体积不变，继续对材料1进行优化。此时材料1和材料2的分布会随时依据结构拓扑形状变化而变化。直到材料1和材料2体积均得到满足，保持材料1和材料2体积不变，

结构/材料分布同时进行优化，直至收敛条件得到满足，从而得到最优解。

编写第三方插件，将 MATLAB 数值计算和符号计算与 ABAQUS 有限元计算进行数据交换，通过 MATLAB 提供的内置并行结构并考虑考虑并行架构、各作业间存在逻辑关系和 job 运行状态，对不同软件之间协同作用的数据交换平台，进行了并行计算开发，从而大大降低了时间成本。本文所开发的协同软件平台基于简单的 ABAQUS 建模软件界面降低了对设计人员技能要求，灵活的 MATLAB 二次开发平台为算法改进提供了广阔的空间。

## 第四章 基于宏观性能的材料微观拓扑优化

为建立起微观尺度材料的拓扑形状与宏观尺度的结构材料等效性能之间数学关系，Sigmund 于 1994 年提出均匀化方法，得到了一些具有极值力学特性的复合材料<sup>[225]</sup>。此后，Bendsøe 和 Kikuchi<sup>[226]</sup>将均匀化方法引入到结构拓扑优化领域，使得微结构的拓扑优化问题逐渐成为热点，众多学者竞相开展了广泛而深入的研究<sup>[227]</sup>。均匀化方法的理论基础严谨，保证了拓扑优化设计最优解的存在。然而，该方法的不足之处是：需要确定微结构的最优尺寸和方向，设计变量相对较多，有时显得过于繁琐；计算结果中常包含中间密度的微结构，也难于符合生产实际<sup>[228]</sup>。

渐进结构优化方法(ESO 或 BESO)的优点是：物理概念明确，利用计算机的分析能力进行求解，简单实用，避免了 0-1 整数规划的求解困难；与均匀化方法相比较，渐进法具有设计变量少<sup>[210]</sup>（每个单元只有 1 个存在与否的状态变量，而在均匀化方法中每个二维单元有 3 个设计变量、三维单元有 6 个设计变量等）；可借助已有的有限元分析软件，通过迭代过程在计算机上实现，迭代过程算法的通用性好<sup>[224]</sup>。为了实现 BESO 方法基于现有商业软件在微观材料优化设计的应用，本章在以下几个方面做了研究工作：

- 1、基于极小尺度胞元的周期性排列假设，在改进均匀化理论的基础上，建立合理的材料等效弹性模量的求解方程，并将其转换为有限元形式，利用 ABAQUS 提供的线性摄动步功能，将线弹性问题利用分析步求解，从而基于现有强大的商业软件实现从微观到宏观的等效性能求解。

- 2、在改进 BESO 方法基础上提出了以结构宏观性能为目标函数，基于均匀化理论建立材料微观结构形状与宏观结构材料弹性张量之间的联系，集成宏观结构所得到的位移场，推导出带有宏观结构力学特性的微观敏度。从而实现在给定材料体积分数前提下，以宏观结构最大刚度为目标，对材料微结构进行拓扑优化的优化设计。

- 3、通过相关算例说明该方法的实用性，并研究微观材料最佳拓扑形状依赖于宏观结构尺寸、载荷及初始边界条件等因素的客观规律。

### 4.1 均匀化理论的软件实现

基于以下三个基本假设，应用均匀化方法可以预测周期性材料的整体和局部性能。

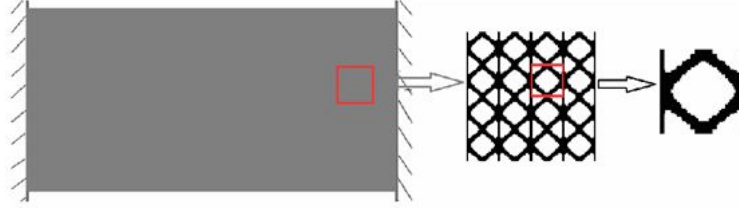
1)材料在物理性能上表现为连续介质；2)材料微观表现为规律的周期性；3)周期性微结构的尺寸远小于组成构件的尺寸。

#### 4.1.1 周期性材料等效弹性模量的求解

当宏观结构受外载作用时，整体结构的场变量将随宏观位置的变化而变化，但是由于细观微结构的高度非均匀性，使得结构的场变量在宏观位置非常小的邻域内也有很大

变化。基于以上三种假设，在如图 1 所示宏观区域取出某一处  $x$ ，则  $x$  在细观上可以看成是单胞  $Y$  周期性重复组成的，且细观单胞尺度  $y$  相对于宏观结构尺度  $x$  是一个很小的量  $\mu$ 。

$$y=x/\mu \quad (0<\mu\ll 1) \quad (4-1)$$



(a) 宏观结构 (b) 周期性材料 (c) 微观胞元

图 4-1 多孔材料周期性微结构

那么，宏观结构的位移、应变、应力等场变量将转换成对细观坐标的依赖且具有周期性的多尺度变化，即， $Y$  周期性函数。因此，宏观材料的等效弹性模量  $D_{ijkl}^H$  特性可用周期性设计域  $Y$  上微结构的材料特性  $D_{ijkl}$  函数来表示：

$$D_{ijkl}(x) = D_{ijkl}^H(x, y) = D_{ijkl}^H(x, y+Y) \quad (4-2)$$

同理，结构的位移函数  $u$  也可以表示为：

$$u(x) = u(x, y) = u(x, y+Y) \quad (4-3)$$

由于结构体在静态平衡条件下，基于虚功原理，位移变分方程为：

$$\int_{\Omega} D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma, \quad \forall v \in V \quad (4-4)$$

相应的将表征微结构位移场  $u^\mu$  在设计域  $Y$  内关于小参数  $\mu$  位移场的渐进展开为：

$$u_i^\mu(x) = u_i^0(x, y) + \mu u_i^1(x, y) + \mu^2 u_i^2(x, y) + \cdots + \mu^n u_i^n(x, y) \quad (4-5)$$

同理，位移边界条件的虚功位移  $V$  可展开为：

$$V(x) = V^0(x, y) + \mu V^1(x, y) + \mu^2 V^2(x, y) + \cdots + \mu^n V^n(x, y)$$

函数  $u_i^0(x, y)$ ,  $u_i^1(x, y)$ ,  $u_i^2(x, y)$  等为关于  $x$  在设计域  $Y$  内  $y$  的光滑函数。而在周期域  $Y$  内的光滑意味着函数在微结构的相对应边界上取相同的值，即周期性边界条件。在数学上，对于空间任意一个与  $y$  相关的函数变量  $\phi^\mu$ 。

$$\phi^\mu(x) = \phi(x, y) \quad (4-6)$$

$$y = \frac{x}{\mu} \quad (4-7)$$

对其微分有：

$$\frac{\partial \phi^\mu(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \phi}{\partial y_i} \quad (4-8)$$

据次，将式(4-5)代入控制方程(4-4)化简为：

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} D_{ijkl} \left\{ \mu^{-2} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \mu^{-1} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] + \right. \\
& \left. \mu^0 \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] + \mu^1 [\dots] \right\} d\Omega \\
& = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma
\end{aligned} \tag{4-9}$$

由于对于任意  $u$  上式均成立，那么可得以下等式：

$$\mu^{-2} \int_{\Omega} D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\Omega = 0 \tag{4-10}$$

$$\mu^{-1} \int_{\Omega} D_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] d\Omega = 0 \tag{4-11}$$

$$\mu^0 \int_{\Omega} D_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma \tag{4-12}$$

对于任意的  $Y$  周期函数  $\varphi$  的平均化方法，存在如下关系。

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi\left(\frac{x}{\mu}\right) d\Omega = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y \varphi(y) dY d\Omega \tag{4-13}$$

因此，上式 (4-10) - (4-12) 可以变形为：

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_Y D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY d\Omega = 0 \tag{4-14}$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] dY \right\} d\Omega = 0 \tag{4-15}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^0 \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY \right] d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \right) v_i d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma_t} t_i d\Gamma \right) v_i d\Omega
\end{aligned} \tag{4-16}$$

由于  $v$  是任意的，对式 (4-14)，使其成立则必须满足  $D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} = 0$ ，从而得到：

$$u^0 = u^0(x) \tag{4-17}$$

由此可以看出， $u^0$  与微观尺度  $y$  无关，它只取决于宏观均匀化尺度  $x$  的物理量。

将其带入 (4-15) 可得到：

$$\int_Y D_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] dY = 0 \tag{4-18}$$

在宏观层次上,  $\mathbf{v}$  是  $\mathbf{x}$  的函数, 与  $\mathbf{y}$  无关, 即,  $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial y_j}=0$  则有:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial \mathbf{u}_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial y_j} dY \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \right) \mathbf{v}_i d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_i d\Gamma \right) \mathbf{v}_i d\Omega \end{aligned} \quad (4-19)$$

同理, 在微观层次上,  $\mathbf{v}$  是  $\mathbf{y}$  的函数, 与  $\mathbf{x}$  无关, 即,  $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{y})$ ,  $\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial x_j}=0$  则有:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y D_{ijkl} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial \mathbf{u}_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial y_j} dY \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \right) \mathbf{v}_i d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_i d\Gamma \right) \mathbf{v}_i d\Omega \end{aligned} \quad (4-20)$$

式中,  $\mathbf{b}_i$  为体积力、 $\mathbf{t}_i$  为边界  $\Gamma$  上张力。当  $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$  已知,  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  可以由周期性广义位移  $\chi_i^{kl}$  求得, 即:

$$\mathbf{u}_i^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\chi_i^{kl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{u}_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \quad (4-21)$$

由此, 将其带入式 (4-18) (4-19) 可分别得到:

$$\int_Y D_{ijmn}^H \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial y_j} dY = \int_Y D_{ijkl}^H \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial y_j} dY \quad (4-22)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( D_{ijkl}^H - D_{ijmn}^H \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dY \right] \frac{\partial \mathbf{u}_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial \mathbf{v}_i(\mathbf{x})}{\partial y_j} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dY \right) \mathbf{v}_i d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_i d\Gamma \right) \mathbf{v}_i d\Omega \end{aligned} \quad (4-23)$$

由 (4-9) 可知宏观材料的等效弹性模量  $D^H$  可由下式求得。

$$D^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \right) dY \quad (4-24)$$

#### 4.1.2 有限元形式的转换

在实际问题的求解过程中, 通常要借助于通用商业有限元软件, 因此将求解过程转换为有限元形式是必须的过程。有限元法首先把一个连续体通过有限单元离散划分为有限大小、彼此只在有限个点相连接、有限个单元的组合物体<sup>[79]</sup>。



广义位移  $\chi_i^{kl}$  的求解式 (4-22) 经有限元离散后, 得

$$\int_Y [B]^T [D] [B] dY [\chi_i^{kl}] = \int_Y [B]^T [D] dY \quad (4-25)$$

对于二维线弹性模型广义位移  $\chi_i^{kl}$  可表示为:

$$[\chi_i^{kl}] = \begin{bmatrix} \chi_{i1}^{11} & \chi_{i1}^{22} & \chi_{i1}^{12} \\ \chi_{i2}^{11} & \chi_{i2}^{22} & \chi_{i2}^{12} \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

其中  $E$  是材料杨氏弹性模量,  $\nu$  是材料泊松比。

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

$i$  为单元节点。令式 (4-25) 中

$$[k] = \int_Y [B]^T [D] [B] dY \quad (4-29)$$

$$[f] = \int_Y [B]^T [D] dY \quad (4-30)$$

式中  $[k]$  为离散单元的刚度矩阵,  $[f]$  为离散单元的等效载荷矩阵。对微观胞元模型所有单元整合, 给出微观有限元形式对应的方程如下:

$$\mathbf{k}u = \int_Y \mathbf{b}^T D dY \quad (4-31)$$

这里, 胞元节点位移向量  $u$  和应变转换矩阵  $\mathbf{b}$  对应着胞元有限元离散后的全部自由度。那么胞元的总刚度矩阵  $\mathbf{k}$  可以有下式求得。

$$\mathbf{k} = \int_Y \mathbf{b}^T D \mathbf{b} dY \quad (4-32)$$

从而, 可求解出宏观有效弹性常数计算式 (4-24) 的有限元形式为:

$$D^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( D(I - \mathbf{b}u) \right) dY \quad (4-33)$$

#### 4.1.3 基于 ABAQUS 的微观胞元建模及等效性能求解

对具有微结构的材料的均匀化分析, 首先从中取出一定数量的胞元构成代表体元, 施以特定的边界条件求解其结构响应。常用的边界条件有:

- (1). 均匀应变边界条件 (如图 4-2): 对代表体元边界施加均匀应变  $\bar{\epsilon}$  强制位移。

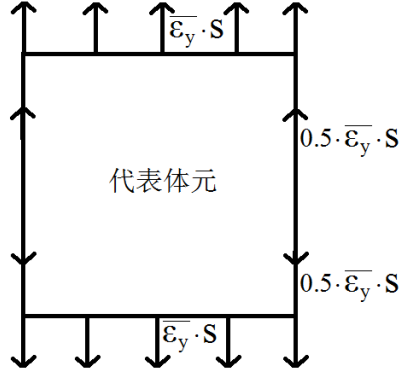


图 4-2 均匀应变边界条件

$$u = \bar{\epsilon} x, \quad x \in \partial R \quad (4-34)$$

其中  $\partial R$  为代表体元边界的张量表示。

对于二维微观结构平面问题， $\bar{\epsilon}$  对应的三个独立初始单位应变  $\mathcal{E}_{pq}^0$  (kl=11、22、12) 分别为：

$$\mathcal{E}_{pq}^{0(11)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

$$\mathcal{E}_{pq}^{0(22)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

$$\mathcal{E}_{pq}^{0(12)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

(2). 均匀应力边界条件 (如图 4-3) : 对代表体元边界施加均匀应力  $\bar{\sigma}$  [229]。

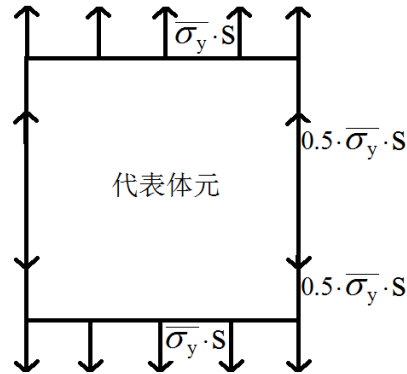


图 4-3 均匀应力边界条件

$$t = \bar{\sigma} x, \quad x \in \partial R \quad (4-38)$$

(3). 对宏观结构施加周期性边界条件 (如图 4-4) : 所示的代表体元,  $A_1, A_2$  和  $B_1, B_2$  分别代表两组对边上的对应节点。分别对代表体元的边长  $s$  施加宏观应变  $\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy}$ 。

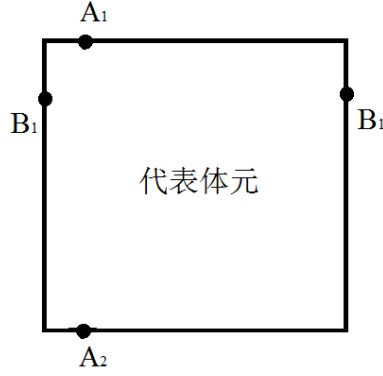


图 4-4 宏观结构施加周期性边界条件

对于宏观应变  $\bar{\epsilon}_x$  ,

$$\begin{cases} u_{B_1} - u_{B_2} = \bar{\epsilon}_x \cdot S \\ v_{B_1} - v_{B_2} = 0 \\ u_{A_1} - u_{A_2} = 0 \\ v_{A_1} - v_{A_2} = 0 \end{cases} \quad (4-39)$$

对于宏观应变  $\bar{\epsilon}_y$  ,

$$\begin{cases} u_{B_1} - u_{B_2} = 0 \\ v_{B_1} - v_{B_2} = 0 \\ u_{A_1} - u_{A_2} = 0 \\ v_{A_1} - v_{A_2} = \bar{\epsilon}_y \cdot S \end{cases} \quad (4-40)$$

对于宏观应变  $\bar{\gamma}_{xy}$  ,

$$\begin{cases} u_{B_1} - u_{B_2} = 0.5 \cdot \bar{\gamma}_{xy} \cdot S \\ v_{B_1} - v_{B_2} = 0 \\ u_{A_1} - u_{A_2} = 0 \\ v_{A_1} - v_{A_2} = 0.5 \cdot \bar{\gamma}_{xy} \cdot S \end{cases} \quad (4-41)$$

这里  $u$  和  $v$  分别代表位移矢量  $\mathbf{u}$  的两个分量。

实现周期性边界条件采用多点约束的方法, 在 ABAQUS 中通过关键词 \*TIE 来周期性边界条件。即, 在 inp 文件中需要加入语句 \*Tie, name=Constraint-1, adjust=no, position tolerance=1.0。

在微观胞元建模过程中关键是对周期性边界条件的定义。以二维单胞为例, 首先对材料微观结构有限元施加如图 4-5 所示周期性边界条件和胞元协同变形相关外力。定义四角点  $\star$  的位移耦合相等, 对边对应节点  $\diamond$  和位移  $\blacklozenge$  分别耦合相等, 内部节点  $\circ$  位移独立。平面一般问题需要约束三个自由度, 消去位移耦合限制的旋转自由度, 只需再约束平动自由度即可。

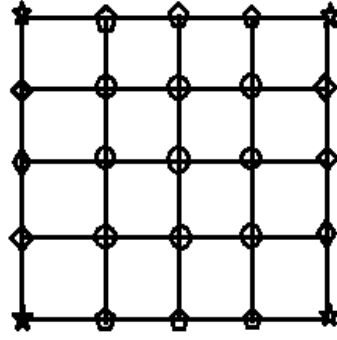


图 4-5 周期性边界条件

其次，是对等效弹性模量的求解。从方程(4-33)中可以看出，问题的关键在于分别为材料微观有限元单元的节点位移向量  $\mathbf{u}$  和位移矩阵  $\mathbf{b}$  的求解，提别是对基础材料弹性矩阵  $\mathbf{D}$  和单元体积  $\mathbf{Y}$  的提取。通过对微结构加载边界条件和预应变等效节点应力，求得相应的特征位移场，利用公式(4-33)计算得到微结构的等效弹性模量。为了避免在每一组计算时都重新形成刚度矩阵，本文利用 ABAQUS 提供的线性摄动步功能，把线弹性问题当作 3 个线性摄动步来分析，这样可以大大。降低计算成本，节约计算时间。另外，基于用户子程序 for 文件的编写来提取每一步计算需要结果，如单元的节点位移向量  $\mathbf{u}$  和位移矩阵  $\mathbf{b}$  等，从而进一步实现 MATLAB 中结构优化的进行。

## 4.2 周期性多孔材料的优化模型

在给定的材料体积前提下，以宏观结构刚度最大（柔顺度最小）为目标函数，材料微观单元为基本设计变量，建立寻求最佳的宏观结构力学性能的多孔材料微结构最佳空间分布优化模型：

$$\begin{cases} \min \quad \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\ s.t. \quad \mathbf{V}^* - \sum_{j=1}^N \mathbf{V}_j x_j = 0 \quad x_j = x_{\min} \text{ 或 } 1 \end{cases} \quad (4-42)$$

其中， $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{U}$  分别是宏观结构载荷矩阵和位移矩阵。 $\mathbf{C}$  是宏观结构应变能。 $\mathbf{V}_j$  和  $x_j$  分别为材料微观结构第  $j$  个单元体积和单元属性。 $N$  为材料微观有限元模型单元总数。 $\mathbf{V}^*$  是材料目标体积。

## 4.3 基于均匀化理论的敏度分析

对于基于材料微观结构拓扑优化寻求宏观结构最优性能问题，宏观结构尺度和微观材料尺度需同时进行有限元分析。其中，宏观结构响应分析决定着目标函数的变化，而微观结构却是宏观结构材料弹性性能的决定性因素，二者存在内在本质上的耦合作用。

假设材料微结构远远小于宏观几何尺寸，可通过均匀化理论得到的弹性模量矩阵  $\mathbf{D}^H$  [230]，这意味着， $\mathbf{D}^H$  是联系周期性微观基础材料和宏观结构尺度性能的桥梁。

对于周期性多孔结构，微观结构设计变量  $x_j$  与宏观结构所有单元响应相关。那么，与设计变量  $x_j$  相关的灵敏度等价于所有宏观单元的平均柔顺度之和 [231]。

$$\frac{dC}{dX_j} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M U_i^T \frac{\partial K_i}{\partial X_j} U_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M U_i^T \int_{V_i} B^T \frac{\partial D^H}{\partial X_j} B dV_i U_i \quad (4-43)$$

其中,  $M$  和  $U_i$  分别是宏观结构模型中总单元数和第  $i$  个单元的位移矢量。在微观尺度上, 依据公式 (4-37),  $D^H$  和  $x_j$  的比值可以根据伴随变量方法获得<sup>[232]</sup>:

$$\frac{\partial D^H}{\partial X_j} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (I - bu)^T \frac{\partial D}{\partial X_j} (I - bu) dY \quad (4-44)$$

在材料层次上, 第  $j$  个微观单元敏度值对整体结构贡献定义为灵敏度值。

$$\alpha_j = -\frac{dC}{dX_j} = \frac{1}{2|Y|} \sum_{i=1}^M U_i^T \left\{ \int_{V_i} B^T \left[ \int_{Y_j} (I - bu)^T \frac{\partial D}{\partial X_j} (I - bu) dY_j \right] B dV_i \right\} U_i \quad (4-45)$$

可以看出, 材料微观结构拓扑形状直接影响到宏观结构尺度的弹性矩阵, 而宏观结构响应也同样影响到材料的敏度分析。

在优化过程中, 将设计区域内所有单元敏度值光滑处理, 消除“棋盘格”现象。

#### 4.4 优化步骤和程序数值实现

基于宏观性能的材料微观拓扑优化问题, 其数值实现流程(如图4-6所示)和优化步骤如下。

第1步: 对宏观结构和微观材料分别基于ABAQUS进行初始建模和有限元网格划分, 在MATLAB中定义BESO初始参数: 材料目标体积  $V_i^*$ , 进化率ER和滤波半径  $r_{\min}$  等初始参数。

第2步: 调用基于ABAQUS生成的inp文件对微观材料模型进行有限元计算, 基于编写的三方插件调用“fil”文件中有限元运算结果数据并根据公式 (4-33) 计算均匀化材料参数  $D^H$ 。

第3步: 将材料均匀化参数  $D^H$  写入新inp文件, 对宏观结构材料属性进行修改。对宏观尺度的有限元模型进行有限元计算。

第4步: 根据公式 (4-45) 计算材料微观单元灵敏度  $\alpha_j$ , 并求单元滤波和历史平均。

第5步: 按照结构剩余体积  $V$  是否满足材料目标体积  $V^*$  进行控制。当剩余体积  $V_K$  大于  $V^*$  时, BESO算法主要以删除单元为主, 相反以添加为主。

第6步: 假设添加阈值和删除阈值分别为  $\alpha_{\text{add}}$ 、 $\alpha_{\text{del}}$ 。则当  $\alpha_i \geq \alpha_{\text{add}}$ , 将空单元属性变为1(添加操作)。当  $\alpha_i \leq \alpha_{\text{del}}$ , 将实单元属性变为0(删除操作)。将新得到的微观材料单元属性写入inp文件, 生成新的微观材料有限元模型。

第7步: 根据宏观尺度的有限元模型计算结果, 求得目标函数  $C_k$ 。根据目标函数的历史变化量来判断优化是否收敛。

第8步: 重复步骤2-7, 将每一次循环得到的目标函数  $C_k$ , 体积分数  $V_k$  及迭代步  $i$  等有效结论保存, 用于优化过程同步跟踪及分析。直到无论是体积约束和目标函数均达到收敛条件, 优化结束。

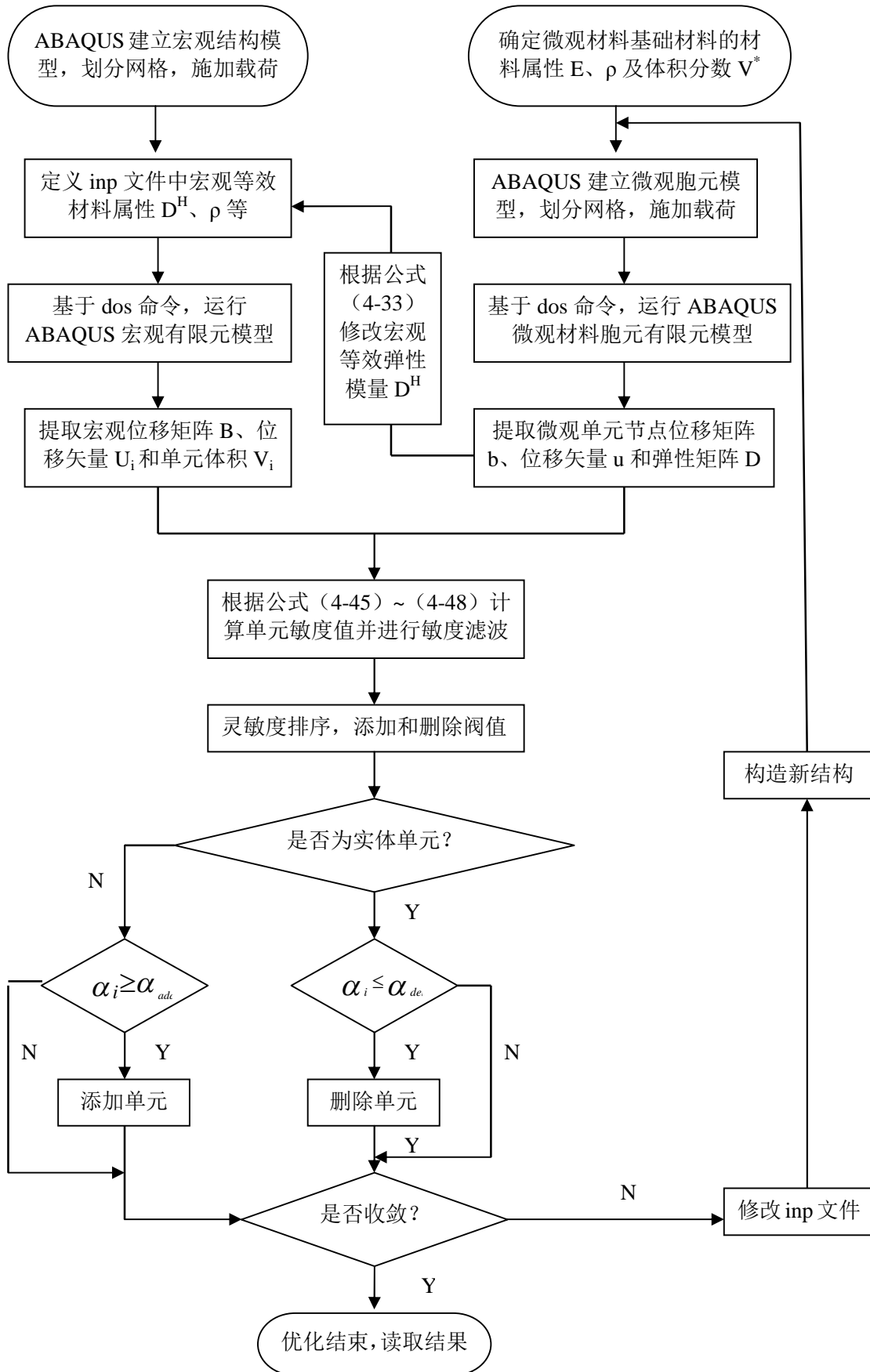


图 4-6 基于宏观性能的材料微观拓扑优化流程

### 4.5 数值算例及结果分析

为研究宏观结构尺寸、边界条件及网格密度等对微观材料拓扑形状的影响，分别对 MBB 梁及两种受力形式的悬臂梁进行相关分析。所有算例中基础材料属性统一定义为：弹性模量  $E=20\text{GPa}$ 。初始设计参数统一为：目标体积分数  $V^*=0.4$ ，进化率  $ER=1\%$ ，滤波半径  $r=4.5$ ，收敛精度  $\varepsilon=0.001$ 。

算例 1：为研究宏观边界条件(支座形式)对微观材料结构拓扑形状的影响，将右端支座分别定义为固定支座和活动铰支座两种形式(如图 4-7 所示)，其它初始结构及优化参数一致。优化结果如表 4-1 所示。

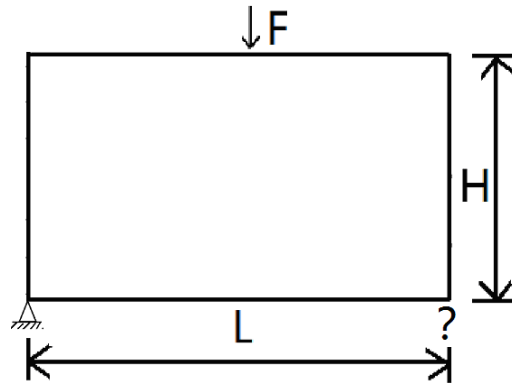

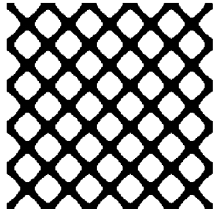


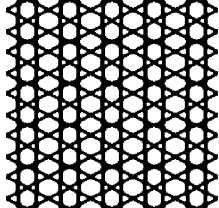



图 4-7 MBB 梁

表 4-1 不同支座形式 MBB 梁微观优化结果

宏观右端支座	周期性材料 (5×5)	微观单胞	均匀化弹性张量 $D^H$
固定支座 			$D^H = \begin{bmatrix} 0.1323 & 0.1181 & 0.0000 \\ 0.1181 & 0.1519 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1042 \end{bmatrix}$
活动铰支座 			$D^H = \begin{bmatrix} 0.1859 & 0.0531 & 0.0000 \\ 0.0531 & 0.2023 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0500 \end{bmatrix}$

首先，当设为固定支座时，微观结构优化结果与文献<sup>[4]</sup>SIMP 算法优化结果吻合，说明了该方法的有效性。

另外，对于不同的宏观支座形式对应的微观材料拓扑形状差异很大。这主要是因为支座形式的不同使得结构整体传力路径差异造成的。

算例 2 对右下端受集中载荷的悬臂梁划分不同网格(如图 4-8)，并采用文章提出优化方法进行材料微观拓扑优化。为消除滤波半径对结果的影响，取与单元数量有关的滤波半径，即：细网格  $r=8$ ，粗网格  $r=4$ 。结果如表 4-2 所示。

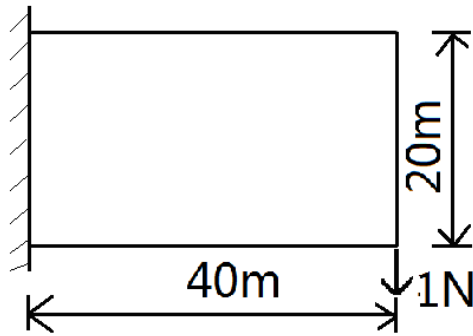


图 4-8 右下端集中载荷下悬臂梁

表 4-2 不同网格形式的悬臂梁优化结果

网格密度	周期性材料 (5×5)	微观单胞	均匀化弹性张量 $D^H$
微观粗网格 51×51 宏观细网格 80×40			$D^H = \begin{bmatrix} 0.2738 & 0.0468 & 0.0055 \\ 0.0468 & 0.1025 & 0.0110 \\ 0.0055 & 0.0110 & 0.0455 \end{bmatrix}$
微观粗网格 51×51 宏观粗网格 40×20			$D^H = \begin{bmatrix} 0.2745 & 0.0440 & 0.0009 \\ 0.0440 & 0.1077 & -0.0158 \\ 0.0009 & -0.0158 & 0.0436 \end{bmatrix}$
微观细网格 102×102 宏观粗网格 40×20			$D^H = \begin{bmatrix} 0.2792 & 0.0456 & -0.0003 \\ 0.0456 & 0.1149 & -0.0124 \\ -0.0003 & -0.0124 & 0.0423 \end{bmatrix}$

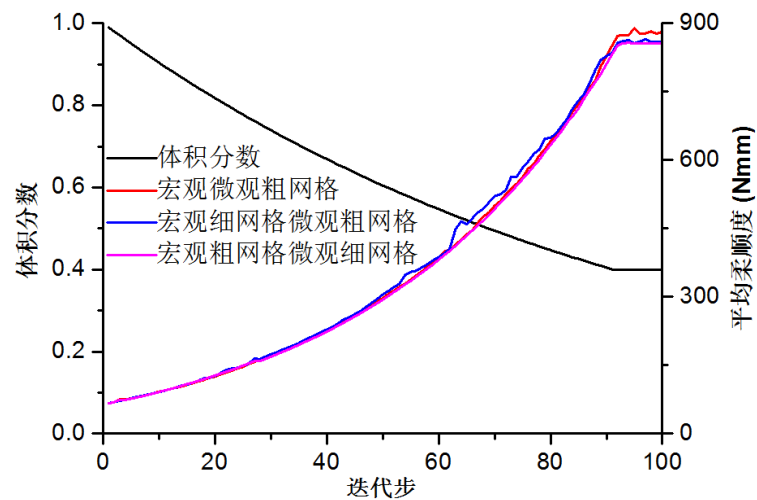


图 4-9 不同网格悬臂梁优化历程



从表 4-2 中不难发现,无论是结构宏观有限元网格还是材料微观有限元网格对微观拓扑形状几乎没有影响,均匀化后的弹性张量  $\mathbf{D}^H$  区别也在千分量级以下,属于计算误差造成。当材料微观有限元网格细化后,优化结果边界更加润滑,均匀,但计算时间成本有所增加。

从结构优化历程(如图 4-9)可以看出,无论是那种网格结构优化都很平稳,网格越细,优化越平稳。同时说明采用滤波半径插值函数可有效消除材料微观结构对网格的依赖性。

算例 3 对右端中部受集中载荷不同尺寸比的悬臂梁(如图 4-10),分别进行微观材料拓扑优化。结果如表 4-3 所示。

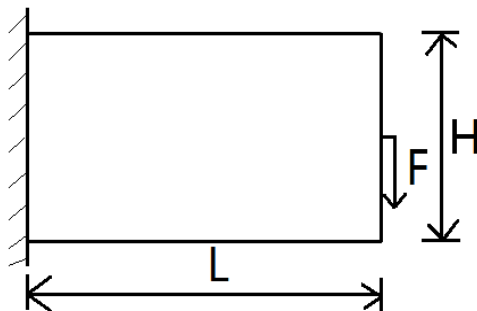
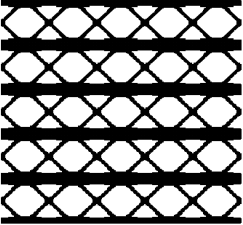

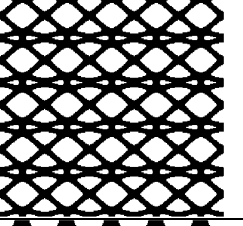
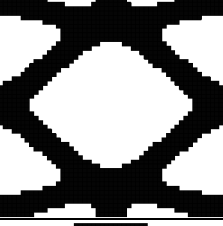
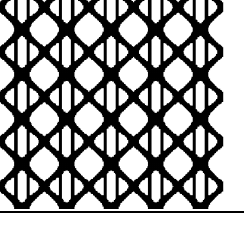
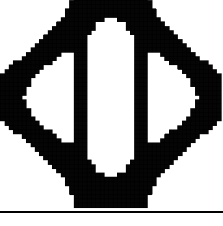


图 4-10 不同尺寸比例的悬臂梁

表 4-3 不同尺寸比例的悬臂梁微观材料优化结果

宏观 H:L	周期性材料 (5×5)	微观单胞	均匀化弹性张量 $\mathbf{D}^H$
1:2			$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 0.3121 & 0.0474 & 0.0000 \\ 0.0474 & 0.0625 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0496 \end{bmatrix}$
1:1			$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 0.2540 & 0.0749 & 0.0000 \\ 0.0749 & 0.0967 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0703 \end{bmatrix}$
2:1			$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} 0.1099 & 0.0866 & 0.0000 \\ 0.0866 & 0.2217 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0838 \end{bmatrix}$

当宏观结构取不同比例尺寸时,材料微观拓扑形状差异很大,也就是说对于不同的宏观结构,最佳优化结构存在很大差异。对长悬臂梁 ( $H:L=1:2$ ) 来说,宏观结构主要以拉压为主(上端受拉,下端受压),所以结构材料均匀化属性 x 方向的刚度增大,以抵

抗弯曲变形。当宏观结构为短悬臂梁 ( $H:L=2:1$ ) 时, 结构材料均匀化属性剪切模量增大来减轻剪切破坏。所以对结构进行材料微观进行优化可以在最少材料用量的前提下, 取得很好的力学性能效果。

#### 4.6 本章小结

针对周期性微结构材料的特殊工程应用价值, 本章在传统均匀化理论的基础上, 建立合理的材料等效弹性模量有限元形式的求解方程, 利用 ABAQUS 提供的线性摄动功能实现从微观到宏观的等效性能求解。在传统 BESO 方法基础上提出了以结构宏观性能为目标函数, 建立材料微观结构形状与宏观结构材料弹性张量之间的联系, 集成宏观结构所得到的位移场, 推导出带有宏观结构力学特性的微观敏度。从而实现在给定材料体积分数前提下, 以宏观结构最大刚度为目标, 对极小尺度周期性排列的材料微结构胞元进行拓扑优化和多相材料布局优化设计。

通过相关算例可以得出以下重要结论:

1、该方法在极小尺度周期性排列的材料微结构胞元优化设计过程中, 无论是拓扑优化还是多相材料布局优化都能得到边界清晰、受力合理的优化结果。另外, 优化过程中采用敏度滤波函数和材料插值函数有效的解决棋盘格、网格依赖性等数值不稳定问题。

2、相关算例表明, 微观结构的拓扑形状与材料布局依赖于宏观结构尺寸、载荷及初始边界条件等因素, 而与自身的初始边界及网格划分等随机因素关系不大。

## 第五章 微结构布局及宏观结构拓扑一体化分析及设计

材料的宏观性能由微结构的尺度、构型和材料体分比决定的<sup>[233]</sup>。因此在一定程度上，对具有特定宏观性能的材料设计可以通过对材料微结构的设计来实现<sup>[234]</sup>。Pedersen<sup>[235]</sup>在材料宏观结构构型给定的情况下，使用均匀化方法实现了满足宏观结构刚度最大的微结构胞元内部构型的优化设计。Rodrigues<sup>[130]</sup>和张卫红等<sup>[79]</sup>分别研究了以结构最大刚度为目标，宏观结构由单一微结构胞元或多种微结构胞元组成情况下的宏观构型设计。但微结构胞元内部构型设计和宏观结构构型设计是紧密联系的，设计过程需要在微观尺度和宏观尺度之间相互协调<sup>[131]</sup>。

针对单一的材料微观设计和宏观结构优化不能充分考虑微观尺度和宏观尺度之间相互耦合作用，本章在以下几个方面做了研究工作：

1、依据文献<sup>[12]</sup>提出的细观和宏观均匀化问题的求解方法，基于各相材料界面完全联结的假设，将位移和应力展开为关于细观尺度和宏观尺度之比的小参数渐近级数，用摄动技术建立渐近级数的各项所应满足的一系列方程，从而实现用均质的宏观结构和非均质的具有周期性分布的细观结构描述原结构。

2、充分考虑微观尺度和宏观尺度的关联性，将材料微结构胞元设计和宏观结构拓扑优化相结合，建立周期性复合材料构型及结构一体化优化设计方法。

3、为了提高优化结果实际工程可制造性，假设了材料微结构 0-1 属性及在宏观结构空间排列的均一性，引入合理的微观材料插值模型，从而避免“灰色区域”带来的制造麻烦，使得优化结果更加有利于工程实际应用。

### 5.1 两尺度应力学分析

对于非均质的复合材料应力场问题，通常将细观非均质的复合材料等效成均质材料处理<sup>[231]</sup>，从而实现复合材料等效材料常数的定义和预测<sup>[232]</sup>，但这种方法不能确定由于非均质性引起的在小范围内存在的不均匀分布规律。在代表体元上施加一定的作用，利用有限元等数值方法计算应力分布情况。假设各相材料界面的联结是完全的，从而建立反映材料的细观非均质性的数学模型是解决该类问题的关键。

由细观结构的非均质性和周期性分布可知，结构的物理特性满足如下特性：

$$F(x + NY) = F(x) \quad (5-1)$$

此处， $F(x)$ 是关于物理点的位置向量的函数，其中  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ ；常数向量  $\mathbf{Y}=\{Y_1, Y_2, Y_3\}^T$  表示结构的周期； $\mathbf{N}$  为  $3 \times 3$  的对角矩阵。

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

$n_1, n_2$  和  $n_3$  是任意的整数；对于周期为  $\mathbf{Y}$  的复合材料单胞，其力学性能为：

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} u_{kl} \quad (5-3)$$

其中,  $\sigma_{ij}$  和  $u_{kl}$  分别是应力和应变的张量形式;  $D_{ijkl}$  为关于位置  $x$  的  $Y$  周期性张量函数, 且满足:

$$D_{ijkl}(x + NY) = D_{ijkl}(x) \quad (5-4)$$

由 (5-1) 可知:

$$D_{ijkl}(x_1 + n_1 Y_1, x_2 + n_2 Y_2, x_3 + n_3 Y_3) = D_{ijkl}(x_1, x_2, x_3) \quad (5-5)$$

假设材料的周期  $Y$  相对整个结构的宏观尺度来说有数量级的差异, 在两个尺度上。一个是宏观尺度坐标  $x$ , 另一个是细观尺度坐标  $y$ 。坐标  $y$  可以在细观尺度上表征材料性质的突变。假设细观尺度坐标  $y$  和宏观尺度坐标  $x$  的单位长度比值为  $\varepsilon$ , 且满足:

$$\varepsilon y = x \quad (5-6)$$

对于整个  $X$  域内的任意函数式存在关系式:

$$g = g(x, x/\varepsilon) = g(x, y) \quad (5-7)$$

具有这样周期细观结构的材料通常在宏观尺度上其材料性质随  $x$  的变化比较平滑, 而在某个位置  $x$  处很小的邻域内其材料性质通常会具有很高的振荡性质。对于二维弹性问题, 复合材料的宏观弹性性能的本构关系可定义为:

$$\bar{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^H \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (5-8)$$

这里, 上划线表示体积平均值。其泊松比  $\nu$  可有宏观弹性张量表示。

$$\nu_{12}^H = \frac{D_{1122}^H}{D_{1111}^H} \quad (5-9)$$

$$\nu_{21}^H = \frac{D_{1122}^H}{D_{2222}^H} \quad (5-10)$$

对于复合材料的宏观弹性张量的求解, 首先假设  $Y^s$  表示单胞的实心部分域, 在单胞中定义特性函数  $\chi(y)$ 。

$$\chi(y) = \begin{cases} 1 & y \in Y^s \\ 0 & y \in Y/Y^s \end{cases} \quad (5-11)$$

并将其周期性延拓到整个  $\Omega$  域, 集合  $\Omega^\varepsilon = \{x \mid \chi(x/\varepsilon) = 1, x \in \Omega\}$  是由外边界  $\Gamma$  和内边界  $S^\varepsilon = \Sigma S^c$  围成的  $\Omega$  的实心部分域。定义集合:

$$V\Omega^\varepsilon = \{v(x) \mid x \in \Omega\}^\varepsilon \quad (5-12)$$

$$V\Omega \times Y = \{v(x, y) \mid (x, y) \in \Omega\} \times Y^s, v(x, y) = v(x, y + Y)\} \quad (5-13)$$

$$V\Omega = \{v(x) \mid x \in \Omega\} \quad (5-14)$$

$$VY = \{v(y) \mid y \in \Omega\} \times Y^s, v(y) = v(y + Y)\} \quad (5-15)$$

根据虚功原理控制方程可知:

$$\forall v(x) \in V\Omega^\varepsilon \quad (5-16)$$

将位移  $u^\varepsilon(x)=0$  展开为关于小参数  $\varepsilon$  的渐近级数。

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (5-17)$$

则应力  $\sigma_{ij}^\varepsilon$  可表示为:

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(x) = D_{ijkl} \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_{ij}^{-1}(x, y) + \sigma_{ij}^0(x, y) + \varepsilon \sigma_{ij}^1(x, y) + \varepsilon^2 \sigma_{ij}^2(x, y) + \dots \quad (5-18)$$

式中:

$$\sigma_{ij}^{-1}(x, y) = D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \quad (5-19)$$

$$\sigma_{ij}^0(x, y) = D_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \quad (5-20)$$

$$\sigma_{ij}^n(x, y) = D_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^n}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^{n+1}}{\partial y_l} \right), \quad n=1, 2, \dots \quad (5-21)$$

将式 (5-17) 代入式 (5-16) 得的摄动方程:

$$\int_{\Omega^\varepsilon} D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dx = 0, \quad \forall v \in V\Omega \times Y \quad (5-22)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} D_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dx = 0, \quad \forall v(x, y) \in V\Omega \times Y \quad (5-23)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} D_{ijkl} \left[ \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i v_i dx, \quad \forall v(x, y) \in V\Omega \times Y \quad (5-24)$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  时,  $\Omega^\varepsilon \rightarrow \Omega$ 。对于任意  $Y$  周期性函数, 满足:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^\varepsilon} g^\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{Y^s} g(x, y) dy \right\} dx \quad (5-25)$$

对式 (5-22) 周期性函数取极限并进行分部积分, 得到边界条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[ D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right] = 0 & y \in Y^s \\ D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} n_j = 0 & y \in S^c \end{cases} \quad (5-26)$$

因为  $Y$  周期性函数的解是与细观坐标无关的解<sup>[7]</sup>, 取位移的一阶级数, 即等效位移。

$$u^0(x) = u^0(x, y) \quad (5-27)$$

则 (5-23) 的极限等价于:

$$\int_{Y^s} D_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0, \quad \forall v \in VY \quad (5-28)$$

上式方程关于  $u_i^1(x, y)$  的解可写为:

$$u_i^1(x, y) = -\varphi^{kl}(y) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \quad (5-29)$$

其中  $\varphi^{kl}(y)$  满足:

$$\int_Y \left( D_{ijmn} - D_{ijkl} \frac{\partial \varphi_k^{mn}}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = 0, \quad \forall v \in VY \quad (5-30)$$

因此, 通过上式可将微观材料模型转换为均匀化的线弹性问题。

基于式(5-29)和式(5-30), 对式(5-24)取极限, 得宏观均匀化方程。

$$\int_{\Omega} D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dx = \int_{\Omega} \bar{f}_i v_i dx = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i dy \right] v_i dx, \quad \forall v(x) \subset V\Omega \quad (5-31)$$

对比虚功原理控制方程的相似性可知, 宏观均匀化方程实质上为复合材料等效问题的控制方程。式中, 微观胞元的宏观等效弹性张量  $D_{ijkl}^H$  可记为:

$$D_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left( D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial \varphi_n^{kl}}{\partial y_m} \right) dy \quad (5-32)$$

于是, 宏观结构的等效应力为:

$$\sigma_{ij}^H = D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (5-33)$$

由式 (5-27) 可知,

$$\sigma_{ij}^{-1} = 0 \quad (5-34)$$

将式 (5-29) 代入 (5-20) 可得关于宏观坐标(x)和微观坐标(y)的一阶不均匀应力分布函数。

$$\sigma_{ij}^0(x, y) = \left( D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial \varphi_n^{kl}}{\partial y_m} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (5-35)$$

该应力分布可通过平均算子方法求得其单胞上的均值, 即仅与宏观坐标x相关的等效应力  $\sigma_{ij}^H$ 。

$$\sigma_{ij}^H(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij}^0(x, y) dy \quad (5-36)$$

基于以上分析可知, 对于由非均匀微观胞元通过有序排列组成的结构来说, 其微观和宏观均匀化问题可分别通过式 (5-30) 和式 (5-31) 描述, 依次转换为单胞域和宏观区域的线弹性问题。

## 5.2 微结构布局及宏观结构拓扑一体化优化模型

为了实现材料微观尺度的布局设计和宏观结构的拓扑优化一体化设计, 需要把它们集成到一个优化模型中。以宏观结构刚度最大(柔顺度最小)为目标函数, 建立寻求最

佳宏观拓扑结构的材料微结构空间分布优化模型：

$$\begin{cases} \min & \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\ s.t. & \mathbf{V}^{\text{mac}} - \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_i x_i = 0 \quad x_i = 0 \text{ 或 } 1 \\ & \mathbf{V}_1^{\text{mic}} - \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j x_j = 0 \quad x_j = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases} \quad (5-37)$$

其中， $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{U}$  分别是宏观结构载荷矩阵和位移矩阵。 $\mathbf{C}$  是宏观结构应变能。

约束I 定义了系统宏观结构等效基础材料1的使用量上限  $\mathbf{V}_1^*$  和设计域单元总数  $M$ 。

$\mathbf{V}_i$  和  $x_i$  分别为宏观结构有限元模型第  $i$  个单元体积和单元属性。

约束II 定义了材料微观设计域上的基础材料1体积用量  $\mathbf{V}_1^{\text{mic}}$  和微观胞元总数  $N$ 。 $\mathbf{V}_j$  和  $x_j$  分别为微观材料有限元模型中第  $j$  个胞元体积和胞元属性。

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{基础材料1} \\ 0 & \text{基础材料2} \end{cases} \quad (5-38)$$

由于微观材料为复合材料，宏观单元材料性能是有微观材料决定的。所以基础材料1实际体积用量  $\mathbf{V}_1^*$  为：

$$\mathbf{V}_1^* = \mathbf{V}^{\text{mac}} \times \mathbf{V}_1^{\text{mic}} \quad (5-39)$$

同理，基础材料2实际体积用量  $\mathbf{V}_2^*$  为：

$$\mathbf{V}_2^* = \mathbf{V}^{\text{mac}} \times \mathbf{V}_2^{\text{mic}} = \mathbf{V}^{\text{mac}} \times \left( \sum_j \mathbf{V}_j - \mathbf{V}_1^{\text{mic}} \right) \quad (5-40)$$

当基础材料 1 实际总体积用量  $\mathbf{V}_1^*$  是一个给定值，如果在微观尺度上分配更多的材料，即给定更大的  $\mathbf{V}_1^{\text{mic}}$ ，那么宏观尺度上的材料用量  $\mathbf{V}^{\text{mac}}$  自然会减少，此时两个尺度之间的材料分配存在一个最优值；同理， $\mathbf{V}_2^{\text{mic}}$  和  $\mathbf{V}_1^{\text{mic}}$  之间也存在相互制约关系，即，在两个尺度上各自也存在一个最有材料分布问题。

### 5.3 灵敏度分析

对于宏观结构静力学分析，平衡方程可写为：

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (5-41)$$

其中，宏观结构的刚度矩阵  $\mathbf{K}$  是由单元刚度矩阵  $\mathbf{K}_i$  决定的<sup>[133]</sup>。

$$\mathbf{K}_i = \int_{V_i} \mathbf{B} \mathbf{D}^H \mathbf{B} dV_i \quad (5-42)$$

式中， $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{V}_i$  分别是宏观结构应变/位移矩阵和第  $i$  个单元体积。可以看出多孔材料的等效弹性模量  $\mathbf{D}^H$  是联系周期性微观基础材料和宏观结构尺度性能的桥梁，一方面它是有材料微观胞元的多孔形式决定的，另一方面它又体现了宏观结构的主要力学性能。假设材料微结构远远小于宏观几何尺寸，可通式(5-32)得到的弹性模量矩阵  $\mathbf{D}^H$ <sup>[226]</sup>。

在宏观结构尺度上，每一个单元材料属性决定着平均柔顺度的大小。那么，宏观敏感度值  $\alpha_i$  可定义为单元  $x_i$  的能量密度<sup>[210]</sup>。

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \frac{dC}{dx_i} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{U}_i
\end{aligned} \tag{5-43}$$

式中， $\mathbf{U}_i$  分别是宏观结构模型中第  $i$  个单元的位移矢量。

在材料微观层面上，有限元平衡方程可表示为：

$$\mathbf{k} \mathbf{u} = \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D} dY \tag{5-44}$$

此处， $\mathbf{b}$  和  $\mathbf{u}$  分别是胞元节点位移向量和位移/应变转换矩阵。 $\mathbf{D}$  和  $Y$  分别是微观材料弹性矩阵和体积。这里，微观材料弹性矩阵  $\mathbf{D}$  是由基础材料 1 弹性矩阵  $\mathbf{E}_1$  和基础材料 2 弹性矩阵  $\mathbf{E}_2$  共同决定的。

$$\mathbf{D} = \rho^\alpha \mathbf{E}_1 + (1 - \rho)^\alpha \mathbf{E}_2 \tag{5-45}$$

其中， $\rho$  和  $\alpha$  分别为单元密度和惩罚指数。材料微观结构刚度矩阵  $\mathbf{k}$  可以表示为：

$$\mathbf{k} = \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} dY = \sum_j \int_{V_j} \mathbf{b}^T (\rho^\alpha \mathbf{E}_1 + (1 - \rho)^\alpha \mathbf{E}_2) \mathbf{b} dV_j \tag{5-46}$$

对于周期性微观结构设计变量  $x_j$  与宏观结构所有单元响应相关。那么，与设计变量重要性相关的灵敏度等价于所有宏观单元的平均柔顺度之和<sup>[232]</sup>。

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{dx_j} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \mathbf{U}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial x_j} \mathbf{U}_i \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \mathbf{U}_i^T \int_{V_i} \mathbf{B}^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial x_j} \mathbf{B} dV_i \mathbf{U}_i
\end{aligned} \tag{5-47}$$

在微观尺度上， $\mathbf{D}^H$  和  $x_j$  的比值可以根据伴随变量方法获得<sup>[231]</sup>：

$$\frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial x_j} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (I - \mathbf{b} \mathbf{u})^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_j} (I - \mathbf{b} \mathbf{u}) dY \tag{5-48}$$

代入式(5-47)得到第  $j$  个微观单元敏度值对整体结构贡献率，即单元灵敏度值  $\alpha_j$ 。

$$\begin{aligned}
\alpha_j &= -\frac{dC}{dx_j} = \frac{1}{2|Y|} \sum_{i=1}^M \mathbf{U}_i^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left[ \int_{Y_j} (I - \mathbf{b} \mathbf{u})^T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x_j} (I - \mathbf{b} \mathbf{u}) dY_j \right] \mathbf{B} dV_i \right\} \mathbf{U}_i \\
&= \frac{1}{2|Y|} \sum_{i=1}^M \mathbf{U}_i^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left[ \int_{Y_j} (I - \mathbf{b} \mathbf{u})^T (\rho^\alpha \mathbf{E}_1 + (1 - \rho)^\alpha \mathbf{E}_2) (I - \mathbf{b} \mathbf{u}) dY_j \right] \mathbf{B} dV_i \right\} \mathbf{U}_i
\end{aligned} \tag{5-49}$$

可以看出，材料微观结构拓扑形状直接影响到宏观结构尺度的等效弹性矩阵，而宏观结构响应也同样影响到材料的敏度分析。

#### 5.4 优化步骤和程序数值实现

实现微结构布局及宏观结构拓扑一体化分析及协同设计，其优化步骤和程序数值实现流程如下。



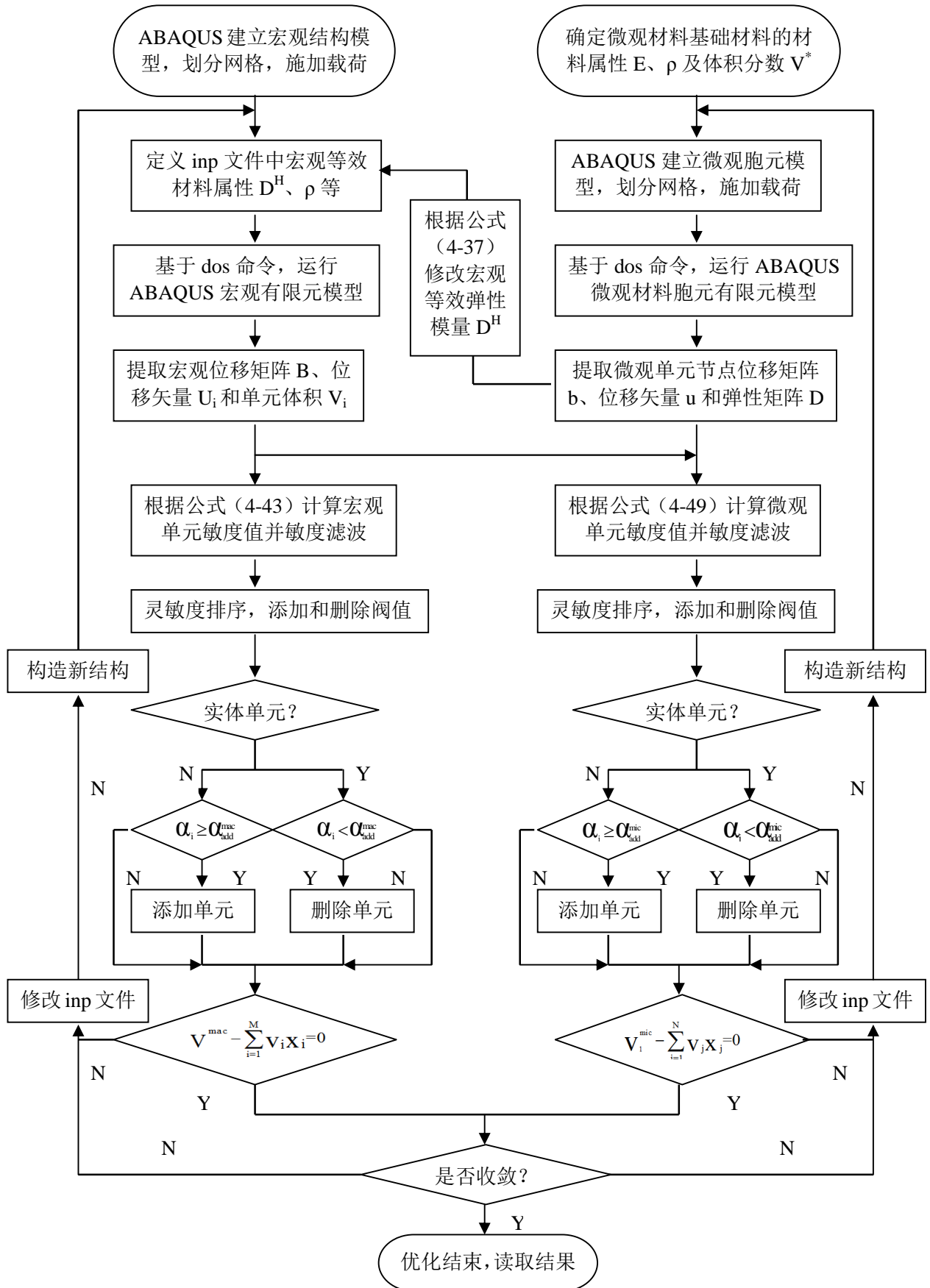


图 5-1 微结构布局及宏观结构拓扑一体化分析及设计

第1步：基于ABAQUS软件平台对宏观结构和微观材料分别建立初始模型和有限元网格划分；在MATLAB中定义BESO初始参数：宏观结构和微观材料目标体积分数分别为 $V_1^*$ 和 $V_2^*$ ；滤波半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$ ；进化率统一为ER。

第2步：调用ABAQUS中inp文件对微观材料模型进行有限元计算，基于编写的三方插件调用fil中数据结果并根据公式(6-32)计算宏观均匀化等效材料参数 $D^H$ 。

第3步：将材料均匀化参数 $D^H$ 写入宏观结构有限元模型inp文件中，对宏观结构材料属性进行修改。调用ABAQUS对宏观尺度的有限元模型进行有限元计算。

第4步：根据公式(6-43)和(6-49)分别计算宏观结构和微观材料单元灵敏度 $\alpha_i$ 和 $\alpha_j$ 。

第5步：按照结构剩余体积 $V$ 是否满足材料目标体积 $V^*$ 进行控制。当剩余体积 $V_k$ 大于 $V^*$ 时，BESO算法主要以删除单元为主，相反以添加为主。

第6步：假设添加阈值和删除阈值分别为 $\alpha_{add}$ 、 $\alpha_{del}$ 。则当 $\alpha_i \geq \alpha_{add}$ ，将空单元属性变为1(添加操作)。当 $\alpha_i \leq \alpha_{del}$ ，将实单元属性变为0(删除操作)。将新得到的微观材料单元属性写入inp文件，生成新的微观材料有限元模型。

第7步：根据宏观尺度的有限元模型计算结果，求得目标函数 $C_k$ 。根据目标函数的历史变化量来判断优化是否收敛。

第8步：重复步骤2-7，将每一次循环得到的目标函数 $C_k$ ，体积分数 $V_k$ 及迭代步 $i$ 等有效结论保存，用于优化过程同步跟踪及分析。直到无论是体积约束和目标函数均达到收敛条件，优化结束。

## 5.5 数值算例及结果分析

算例1：通过倒L形梁设计结果和理论分析的比较，验证本文提出方法的有效性。初始宏观尺寸及受力情况如图5-2所示。

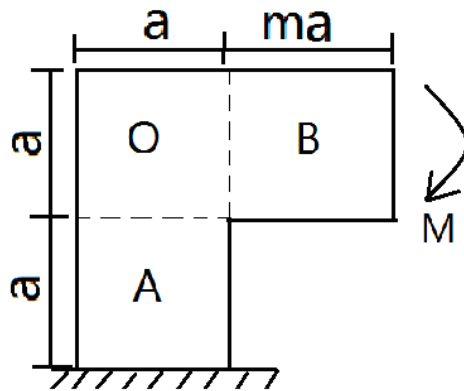


图 5-2 倒 L 梁


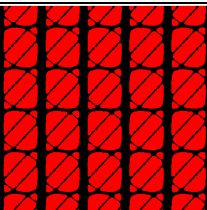
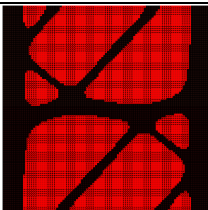

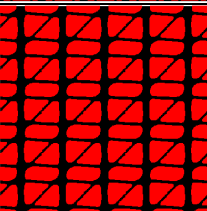
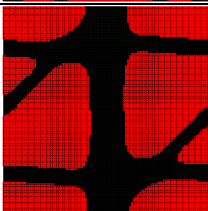

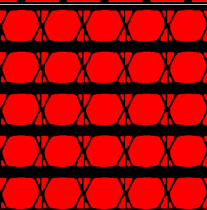
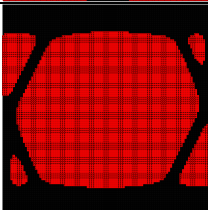
对于上图所示右上端受单位弯矩的倒L梁，应力状态在ABO三个不同区域是变化的。对于B部分，弯矩分布在左右两边，该部分的主变形方向为x方向，理论上要求材料微结构设计结果必将在x方向模量具有较大值。而对于A部分弯矩分布在上下两端，

要求材料微结构拓扑优化结果的  $y$  方向模量应当较强。均匀化方法中基本假定宏观结构尺度材料是均匀的，这种基本假设明显不可能同时符合三区域的力学要求。也就是说，AB 两区域是相互存在的竞争关系。为此，本文通过改变尺寸变量  $m$  的大小研究基体材料在方向上分配模量比值  $P$ ，并将其定义为：

$$P=\frac{D_{11}^H}{D_{22}^H} \tag{5-51}$$

优化过程中所有算例中初始设计参数统一为：宏观结构和微观材料 2 目标体积分数分别为  $V^*=0.5$ ； $V_2^*=0.4$ ；滤波半径分别为  $r_1=3$ ； $r_2=3$ ；进化率和收敛精度统一为  $ER=1\%$ ， $\varepsilon=0.001$ 。

表 5-1 不同  $m$  取值的倒 L 梁优化结果


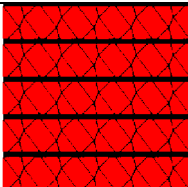
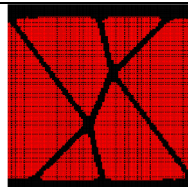


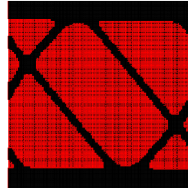

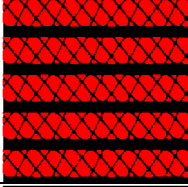
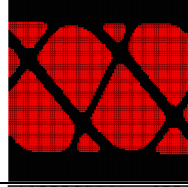

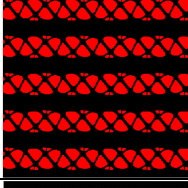
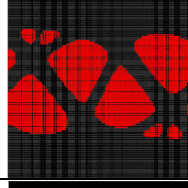

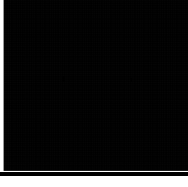
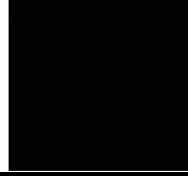
m	宏观结构	5×5 周期材料	微观结构	等效弹性模量 $D^H$	p
0				$D^H = \begin{bmatrix} 0.1361 & 0.0509 & 0.0243 \\ 0.0509 & 0.2572 & 0.0283 \\ 0.0243 & 0.0283 & 0.0508 \end{bmatrix}$	0.53
1				$D^H = \begin{bmatrix} 0.2191 & 0.0400 & 0.0164 \\ 0.0400 & 0.2187 & 0.0234 \\ 0.0164 & 0.0234 & 0.0330 \end{bmatrix}$	1
5				$D^H = \begin{bmatrix} 0.2893 & 0.0327 & 0.0023 \\ 0.0327 & 0.1534 & 0.0054 \\ 0.0023 & 0.0054 & 0.0212 \end{bmatrix}$	1.88

从拓扑结果可以看到：随着  $m$  的增大，B 部分权重加强，复合材料微观构型优化结果等效弹性张量分配比  $P$  也在逐渐增大( $0.53<1<1.88$ )，即  $x$  方向刚度增大。这一结果符合宏观结构应力力学性能要求，从而验证了两级协同设计的合理性。优化结果可以看出，无论复合材料微观胞元构型还是宏观结构拓扑形状边界清晰，利于加工制作。

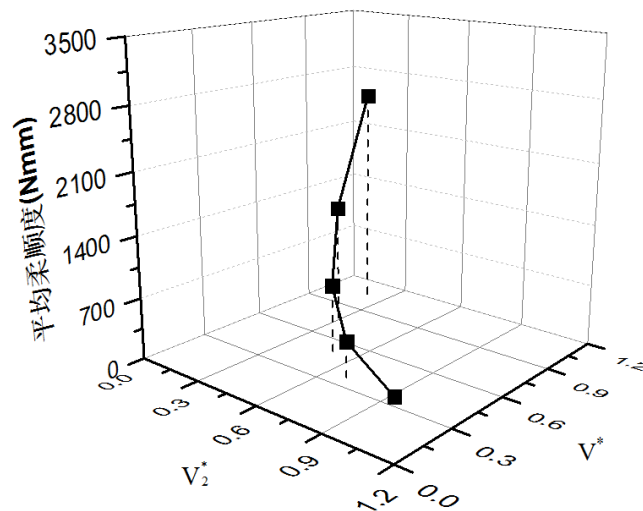
算例 2 在优化过程中，当较强基础材料 2 总体积用量  $V_2$  一定的情况下，宏观结构复合材料体积  $V^*$ 和材料微观胞元中基础材料 2 目标体积  $V_2^*$ 存在一种优化分配的问题。为研究材料用量和材料强度对目标函数（柔顺度）和拓扑结果的影响，对 4.5 节图 4-8 所示悬臂梁进行两尺度协同优化分析。

优化过程中，较强材料 2 总用量为 ( $V_2=25\%$ )，保持其他优化参数不变，取五种不同组合  $V^*$ 和  $V_2^*$ 作为约束条件，其优化结果如表 5-2，图 5-3 所示。

表 5-2 不同  $V^*$  和  $V_2^*$  约束的悬臂梁优化结果

取不同的 $V^*$ 和 $V_2^*$	宏观结构	5×5 周期材料	微观结构	等效弹性模量 $D^H$
$V^*=1$ $V_2^*=0.25$				$D^H = \begin{bmatrix} 0.1553 & 0.0242 & 0.0006 \\ 0.0242 & 0.0633 & -0.0086 \\ 0.0006 & -0.0086 & 0.0245 \end{bmatrix}$
$V^*=0.7$ $V_2^*=0.35$				$D^H = \begin{bmatrix} 0.2408 & 0.0422 & -0.0103 \\ 0.0422 & 0.0753 & -0.0164 \\ -0.0103 & -0.0164 & 0.0437 \end{bmatrix}$
$V^*=0.5$ $V_2^*=0.5$				$D^H = \begin{bmatrix} 0.3631 & 0.0733 & -0.0204 \\ 0.0733 & 0.1627 & -0.0169 \\ -0.0204 & -0.0169 & 0.0769 \end{bmatrix}$
$V^*=0.35$ $V_2^*=0.7$				$D^H = \begin{bmatrix} 0.5782 & 0.1364 & -0.0171 \\ 0.1364 & 0.3340 & -0.0263 \\ -0.0171 & -0.0263 & 0.1516 \end{bmatrix}$
$V^*=0.25$ $V_2^*=1$				$D^H = \begin{bmatrix} 1.0985 & 0.3295 & 0.0000 \\ 0.3295 & 1.0985 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.3844 \end{bmatrix}$

从表 2 中可以看出, 当较强基础材料 2 总用量保持不变的情况下, 通过调整材料 2 在微观尺度和宏观尺度之间的分配, 结构和材料的拓扑形状差异很大, 也就是说, 复合材料等效材料强度对宏观结构最优拓扑形状影响很大。

图 5-3 不同  $V^*$  和  $V_2^*$  约束下目标函数优化结果

如图 5-3 所示, 当提高复合材料强度同时减小宏观结构材料使用量, 结构整体平均柔顺度减小。这表明提高复合材料强度比增加低密度材料使用量更有利于提高系统的刚度。

## 5.6 本章小结

本文在传统 BESO 方法基础上, 基于各相材料界面完全联结的假设, 将位移和应力展开为关于细观尺度和宏观尺度之比的小参数渐近级数, 用摄动技术建立渐近级数的各项所应满足的一系列方程, 从而实现用均质的宏观结构和非均质的具有周期性分布的细观结构描述原结构, 从而充分考虑微观尺度和宏观尺度的关联性, 将材料微结构胞元设计和宏观结构拓扑优化相结合, 建立周期性复合材料构型及结构一体化优化设计方法。通过优化结果和理论分析的比较, 验证本文提出方法的有效性。区别于材料或结构的独立优化, 结构/材料一体化优化是一个两尺度之间交互协调的过程, 材料则是最优结构下的最优材料, 结构是最优材料下的最优结构。

为了提高优化结果实际工程可制造性, 假设了材料微结构 0-1 属性及在宏观结构空间排列的均一性, 引入合理的微观材料插值模型, 从而避免“灰色区域”带来的制造麻烦, 使得优化结果更加有利于工程实际应用。并通过倒 L 形梁优化结果和理论分析的比较, 验证本文提出方法的有效性。



## 第六章 多相材料多尺度布局优化设计

由多种不同性能材料共同组成的多相材料结构对于承受热力耦合等复杂服役环境载荷的结构具有十分重要的工程应用价值<sup>[236]</sup>。为最大限度地挖掘组成相的各个特殊潜力,使整体具有满足适应复杂环境的综合性能要求,合理的选择各相材料用量和微观布局成为实现功能最大化的最为有效的先进设计方法,即为多相材料结构拓扑优化。

自 Sigmund<sup>[237,238]</sup>等人采用逆均匀化技术相继实现两相实体材料与孔洞构成的多相材料负泊松比、零或负热膨胀系数的微结构设计,多相材料优化设计成为国内外科研人员研究的热点。王凤稳<sup>[239]</sup>等针对正交各向异性材料,研究了微结构多相材料极端热传导微结构设计。Mei Yulin<sup>[240]</sup>通过多个水平集函数的演变实现多相材料的拓扑布局设计。孙士平<sup>[229,241]</sup>研究了多相材料微结构的多目标设计,并提出了相应的多相材料周长控制方法消除设计中的棋盘格现象。Zhou Shiwei<sup>[242]</sup>基于相场理论给出了多相材料拓扑优化方法。袁振<sup>[243]</sup>等利用逆均匀化的思想把具有特定性能复合材料的设计问题转化为单胞上的材料分布问题,并借助拓扑优化的手段获得最优的微结构形式。Yin LZ<sup>[16]</sup>等用单个变量描述多相材料条件下的材料属性,提出了峰值函数多相材料插值模型。另外,为了考察材料微单胞尺寸对优化结果的影响,张卫红<sup>[244]</sup>针对梯度功能材料,给出了与尺寸关联的结构与材料拓扑优化设计结果。阎军<sup>[245]</sup>研究了不同的基本设计模块绝对尺寸对两层级优化结果的影响,并在两个层级上分别引入独立的人工密度变量,借助拓扑优化技术与惩罚策略,给出了单工况与多工况下的最优模块布局以及模块在结构层级上的最优分布。

以往对多相材料拓扑优化的研究,主要集中与对多相材料微结构的布局设计,而忽略了同时对宏观结构的拓扑优化设计;或者仅考察了尺寸关联的结构与材料拓扑优化,而未能涉及多相材料问题。充分考虑材料和结构的尺度关联性,针对宏观结构拓扑优化同时对材料微结构进行多相材料布局设计,使二者完美的结合起来,目前还未见深入研究报告。

为此,本章在上一章节提出的优化方法基础上,按照材料属性排序引入材料插值函数依次进行灵敏分析,建立周期性多相材料微结构布局及宏观结构拓扑并发优化方法。优化过程中,宏观结构受力的特性嵌入微观敏度“生成”过程,使得新型材料具备了特定宏观结构力学需求的更加轻型、高强的最佳力学性能;同时,微观材料胞元的等效材料属性又是宏观结构优化的基础材料,从而使得微观材料和宏观结构具有尺度上统一。

### 6.1 多相材料多尺度布局优化模型

为了实现多相复合材料微观尺度的布局设计和宏观结构的拓扑优化协同设计,需要把它们集成到一个优化模型中。假设宏观结构受外荷载  $F$ , 以宏观结构刚度最大(柔顺度最小)为目标函数,建立寻求最佳宏观拓扑结构的周期性多相复合材料微结构空间分

布优化模型如下：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\ & \mathbf{V}_j^{\text{mac}} - \sum_{i=1}^I \mathbf{V}_i x_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, I \\ & \mathbf{V}_{q_j}^{\text{mic}} - \sum_{p_j=1}^{P_j} Y_{p_j} x_{p_j q_j} = 0 \quad p = 1, 2, \dots, P \\ s.t. & \sum_{j=1}^J \mathbf{V}_j^{\text{mac}} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, J \\ & \sum_{q_j=1}^{Q_j} \mathbf{V}_{q_j}^{\text{mic}} = 1 \quad q_j = 1, 2, \dots, Q_j \end{array} \right. \quad (6-1)$$

式中， $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{U}$  分别是宏观结构应变能和位移矩阵。 $J$  和  $Q_j$  分别表示宏观等效材料填充材料相数和对应于第  $j$  相宏观等效材料在微观层面上是由  $Q_j$  相基础材料构成的。那么，对于一个多相材料两级尺度的优化体系，一共由  $\sum_{j=1}^J Q_j$  相基础材料组成的。这里， $I$  和  $P$  分别为宏观模型和对应微观模型的单元划分数量。

约束 I 定义了宏观结构等效材料  $j$  的目标体积  $\mathbf{V}_j^{\text{mac}}$  和宏观设计域单元划分总数  $I$ 。 $\mathbf{V}_i$  和  $x_{ij}$  分别为宏观结构有限元模型第  $i$  个单元体积和第  $j$  种材料、单元  $i$  的状态密度。假设宏观材料等效弹性模量  $D_j^H$  由大到小排序为  $D_1^H > D_2^H > \dots > D_j^H \dots > D_I^H$ ，对应材料命名为等效材料1，等效材料2，…，等效材料  $j$ ，等效材料  $J$ 。那么，设计变量  $x_{ij}$  表示为

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } D^H \geq D_j^H \\ x_{\min} & \text{for } D^H < D_j^H \end{cases} \quad (6-2)$$

这里，为了避免刚度矩阵的奇异性，引入软单元  $x_{\min}$ ，并定义为极小值，如0.001。

约束 II 定义了对应于宏观等效材料  $j$  在微观层面上基础材料构成相分布问题，且对应的第  $q_j$  相基础材料目标体积为  $\mathbf{V}_{q_j}^{\text{mic}}$ 。同理，为有效定义宏观等效材料  $j$  对应微观胞元模型中单元  $p$  的基础材料  $q_j$  状态密度  $x_{p,q_j}$ ，设定  $Q_j$  种基础材料弹性模量由大到小排序为  $E_1 > E_2 > \dots > E_{q_j} > \dots > E_{Q_j}$ ，并分别命名为基础材料1，基础材料2，…，基础材料  $q_j$ ，…，基础材料  $Q_j$ 。于是，单元  $p$  的基础材料  $q_j$  状态密度  $x_{p,q_j}$  可以定义为：

$$x_{p,q_j} = \begin{cases} 1 & \text{for } E \geq E_{q_j} \\ x_{\min} & \text{for } E < E_{1+q_j} \end{cases} \quad (6-3)$$

约束 III 和 IV 说明优化模型在宏观和微观两个尺度上分别建立了材料用量体系，即宏观等效材料体积用量和微观基础材料体积用量分别对应于材料相的宏观体积分数和微观胞元体积分数。那么，对于宏观体系中实际基础材料  $q$  的体积分数  $v_q^*$  为：

$$\mathbf{V}_q^* = \mathbf{V}_j^{\text{mac}} \times \mathbf{V}_{q_j}^{\text{mic}} \quad (6-5)$$



当结构实际基础材料  $q$  的体积分数  $V_q^*$  是一个定值, 微观尺度材料  $v_{q_j}^{\text{mic}}$  和宏观尺度材料用量  $v_j^{\text{mac}}$  在两个尺度间的材料分配存在一个最优值。

## 6.2 灵敏度分析

在多相材料多尺度布局优化过程中, 对于宏观结构而言, 是由  $J$  相等效材料组成, 其等效材料弹性模量依次设为:  $D_1^H > D_2^H > \dots > D_j^H \dots > D_J^H$ 。

那么, 宏观结构的刚度矩阵  $\mathbf{K}$  可定义为<sup>[7]</sup>。

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^I \mathbf{K}_i = \sum_{i=1}^I \int_{V_i} \mathbf{B}^T D^H \mathbf{B} dV_i \quad (6-6)$$

式中,  $\mathbf{B}$  和  $V_i$  分别是宏观结构应变/位移矩阵和第  $i$  个单元体积。结合宏观插值函数可知, 对于由  $J$  种等效材料属性组成的结构, 其弹性模量属性  $D^H$  是由所有组成相的等效弹性模量  $D_j^H$  和单元属性  $x_{ij}$  共同决定的。

$$D^H = \sum_{j=1}^J x_{ij}^n D_j^H \quad (6-7)$$

需要指出的是, 宏观多相材料 (如由  $J$  相等效材料组成) 优化过程中一次迭代步每个单元都将赋予  $J-1$  个灵敏度值。在等效材料  $j$  和等效材料  $j+1$  布局优化时, 宏观单元  $i$  的灵敏度值可以定义为:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{dC}{dx_{ij}} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_{ij}} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_{ij}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{ij}} \right) = -\frac{1}{2} \mathbf{U}_{ij}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_{ij}} \mathbf{U}_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{U}_{ij}^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left( \sum_{j=1}^J x_{ij}^n D_j^H \right) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_{ij} \end{aligned} \quad (6-8)$$

式中,  $\mathbf{U}_{ij}$  是宏观结构模型中在对第  $j$  相材料分布优化时第  $i$  个单元的位移矢量。事实上, 每一次优化过程中对不同相材料分布计算时其单元位移矢量是一定的, 即:

$$\mathbf{U}_{i1} = \mathbf{U}_{i2} = \dots = \mathbf{U}_{ij} = \dots = \mathbf{U}_{iJ} = \mathbf{U}_i \quad (6-9)$$

所以, 宏观优化过程单元灵敏度可定义为:

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left( \sum_{j=1}^J x_{ij}^n D_j^H \right) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i \quad (6-10)$$

对于第  $j$  相材料的微观胞元模型, 设其弹性模量为  $E_j$ , 则有限元平衡方程可表示为:

$$\mathbf{k}_j \mathbf{u}_j = \int_{Y_{pj}} \mathbf{b}_j^T E_j dY_{pj} \quad (6-11)$$

此处,  $\mathbf{b}_j$  和  $\mathbf{u}_j$  分别是第  $j$  相材料的微观胞元节点位移向量和位移/应变转换矩阵。对于二维周期性材料的单胞应变场可设为:  $\{1,0,0\}^T$ ,  $\{0,1,0\}^T$ ,  $\{0,0,1\}^T$ 。  $E_j$  和  $Y_j$  分别是第  $j$  相材料的微观胞元材料弹性矩阵和胞元体积。微观材料微观结构刚度矩阵  $\mathbf{k}_j$  可以表示为:

$$\mathbf{k}_j = \int_{Y_{pj}} \mathbf{b}_j^T E_j \mathbf{b}_j dY_{pj} \quad (6-12)$$

因为第  $j$  相材料的微观胞元模型，是由  $Q_j$  相基础材料组成，那么弹性模量为  $E_j$  是由  $Q_j$  相基础材料共同决定的。

$$E_j = \sum_{q_j=1}^{Q_j} x_{p_j q_j}^m E_{q_j} \quad (6-13)$$

于是，第  $j$  相材料的微观胞元有限元平衡方程转换为：

$$\mathbf{k}_j \mathbf{u}_j = \int_{Y_{p_j}} \mathbf{b}_j^T \left( \sum_{q_j=1}^{Q_j} x_{p_j q_j}^m E_{q_j} \right) dY_{p_j} \quad (6-14)$$

微观材料微观结构刚度矩阵  $\mathbf{k}_j$  可以表示为：

$$\mathbf{k}_j = \int_{Y_{p_j}} \mathbf{b}_j^T \left( \sum_{q_j=1}^{Q_j} x_{p_j q_j}^m E_{q_j} \right) \mathbf{b}_j dY_{p_j} \quad (6-15)$$

对于周期性微观结构设计变量  $x_{p_j q_j}$  与宏观结构所有单元响应相关。那么，与设计变量重要性相关的灵敏度等价于所有宏观单元的平均柔顺度之和<sup>[245]</sup>。

$$\frac{d\mathbf{C}_j}{dx_{p_j q_j}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j^T \frac{\partial K_j}{\partial x_{p_j q_j}} \mathbf{U}_j = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}_j^T \frac{\partial D_j^H}{\partial x_{p_j q_j}} \mathbf{B}_j dV_i \right) \mathbf{U}_j \quad (6-16)$$

在微观尺度上， $D^H$  和  $x_{p_j q_j}$  的比值可以根据伴随变量方法获得<sup>[230]</sup>：

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_j^H}{\partial x_{p_j q_j}} &= \frac{1}{|Y_{p_j}|} \int_{Y_{p_j}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}_j \mathbf{u}_j)^T \frac{\partial E_j}{\partial x_{p_j q_j}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}_j \mathbf{u}_j) dY_{p_j} \\ &= \frac{1}{|Y_{p_j}|} \int_{Y_{p_j}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}_j \mathbf{u}_j)^T \left( \sum_{q_j=1}^{Q_j} x_{p_j q_j}^m E_{q_j} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{b}_j \mathbf{u}_j) dY_{p_j} \end{aligned} \quad (6-17)$$

代入式(6-14)可以得到等效材料属性  $j$  的微观胞元模型中单元  $p$  对整体结构贡献率，即单元灵敏度值  $\alpha_{p_j q_j}$  可定义为。

$$\alpha_{p_j q_j} = -\frac{d\mathbf{C}_j}{dx_{p_j q_j}} = \frac{1}{2|Y_{p_j}|} \sum_{j=1}^J \mathbf{U}_j^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_j^T \left[ \int_{Y_{p_j}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}_j \mathbf{u}_j)^T \left( \sum_{q_j=1}^{Q_j} x_{p_j q_j}^m E_{q_j} \right) (\mathbf{I} - \mathbf{b}_j \mathbf{u}_j) dY_{p_j} \right] \mathbf{B}_j dV_i \right\} \mathbf{U}_j \quad (6-18)$$

可以看出，材料微观结构拓扑形状直接影响到宏观结构尺度的等效弹性矩阵，而宏观结构响应也同样影响到材料的敏度分析。

### 6.3 优化步骤

实现多相复合材料微观尺度的布局设计和宏观结构的拓扑优化协同设计步骤如下。

第1步：对宏观结构和微观材料分别建立初始模型和有限元网格划分；定义BESO初始参数：宏观结构和微观材料目标体积分数分别为  $v_1$  和  $v_2$ ；滤波半径分别为  $r_1$  和  $r_2$ ；进化率统一为ER。

第2步：对微观材料模型进行有限元计算，并根据公式(7)计算均匀化材料参数  $D^H$ 。

第3步：将材料均匀化参数  $D^H$  写入宏观结构有限元模型材料属性中，对修改过的宏

观尺度的有限元模型进行有限元计算。

第4步：根据公式(9)计算宏观结构单元灵敏度 $\alpha_i$ 。按照结构剩余体积 $V$ 是否满足材料目标体积 $V^*$ 进行控制。当剩余体积 $V_k$ 大于 $V^*$ 时，BESO算法主要以删除单元为主，相反以添加为主。因此，进化过程中结构的体积可表示为。

$$V_{k+1} = V_k(1 \pm ER) \quad (6-19)$$

式中， $ER$ 和 $K$ 分别为体积进化率和迭代次数。

第5步：根据公式(11)或(12)依次计算宏观结构单元灵敏度 $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{l-1j}$ ，分别同步进行材料1和材料2之间，材料2和材料3之间，材料 $l-1$ 和材料 $l$ 之间的优化。需要指出的是：当其中一种材料达到目标体积 $V_{2q}^*$ 后，保持体积分数不变，继续其他材料的优化（即：达到目标体积的材料单元继续参与优化并实时更新修改，但保持该属性的单元数量不变）。

第6步：根据宏观尺度的有限元模型计算结果，求得目标函数 $C_k$ 。根据目标函数的历史变化量来判断优化是否收敛。

第8步：重复步骤2-7，将每一次循环得到的目标函数 $C_k$ ，体积分数 $V_k$ 及迭代步 $i$ 等有效结论保存，用于优化过程同步跟踪及分析。直到无论是体积约束和目标函数均达到收敛条件，优化结束。

## 6.4 特殊算例及结果分析

### 6.4.1 微观三相材料布局和宏观拓扑优化

对于微观三相材料布局和宏观拓扑优化可作为多相材料多尺度优化的一个特例，其特点是在宏观层面上只有一种材料，只需对材料微观胞元进行三相的布局优化，因此优化模型可简化为：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & C = \frac{1}{2} F^T U \\ & V^{\text{mac}} - \sum_{i=1}^I V_i x_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, I \\ & V_1^{\text{mic}} - \sum_{p=1}^P Y_p x_{p1} = 0 \quad p = 1, 2, \dots, P \\ s.t. & V_2^{\text{mic}} - \sum_{p=1}^P Y_p x_{p2} = 0 \\ & V_3^{\text{mic}} - \sum_{p=1}^P Y_p x_{p3} = 0 \end{array} \right. \quad (6-20)$$

该问题在宏观层面上是单相材料的拓扑分布问题，其单元 $i$ 的敏度值可以定义为：

$$\alpha_i = \frac{dC}{dx_i} = -\frac{1}{2} U_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T D'' \mathbf{B} dV_i \right) U_i \quad (6-21)$$

在微观尺度上，由三相基础材料组成，弹性模量分别设为 $E_1 > E_2 > E_3$ 。那么，在材

料 1 和材料 2、3 的布局优化中, 单元灵敏度值  $\alpha_i$  可定义为。

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_p|} \mathbf{U}^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left[ \int_{Y_p} (I - \mathbf{bu})^T E_1 (I - \mathbf{bu}) dY_p \right] \mathbf{B} dV_i \right\} \mathbf{U} & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_p|} \mathbf{U}^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left[ \int_{Y_p} (I - \mathbf{bu})^T (X_{\min}^m E_2) (I - \mathbf{bu}) dY_p \right] \mathbf{B} dV_i \right\} \mathbf{U} & \text{材料2} \\ \frac{1}{2|Y_p|} \mathbf{U}^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left[ \int_{Y_p} (I - \mathbf{bu})^T (X_{\min}^m E_3) (I - \mathbf{bu}) dY_p \right] \mathbf{B} dV_i \right\} \mathbf{U} & \text{材料3} \end{cases} \quad (6-22)$$

在微观尺度上, 由三相材料组成, 弹性模量分别设为  $E_1 > E_2 > E_3$ 。那么, 在材料 1、2 和材料 3 的布局优化中, 单元灵敏度值  $\alpha_2$  可定义为。

$$\alpha_2 = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_p|} \mathbf{U}^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left[ \int_{Y_p} (I - \mathbf{bu})^T E_1 (I - \mathbf{bu}) dY_p \right] \mathbf{B} dV_i \right\} \mathbf{U} & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_p|} \mathbf{U}^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left[ \int_{Y_p} (I - \mathbf{bu})^T E_2 (I - \mathbf{bu}) dY_p \right] \mathbf{B} dV_i \right\} \mathbf{U} & \text{材料2} \\ \frac{1}{2|Y_p|} \mathbf{U}^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}^T \left[ \int_{Y_p} (I - \mathbf{bu})^T (X_{\min}^m E_3) (I - \mathbf{bu}) dY_p \right] \mathbf{B} dV_i \right\} \mathbf{U} & \text{材料3} \end{cases} \quad (6-23)$$

为研究微观三相材料的布局优化和宏观结构的拓扑优化问题, 以 3.53 节图 3-8 为例采用文章提出优化方法进行材料微观和宏观一体化多相材料拓扑优化。算例中周期性微观结构胞元由三相材料填充: 基础材料 1-3 的弹性模量和目标体积分数分别为  $E_1=1\text{GPa}$ ,  $v_{21}=0.25$ ;  $E_2=0.1\text{GPa}$ ,  $v_{22}=0.15$ ;  $E_3=0.01\text{GPa}$ ,  $v_{23}=0.6$ 。初始材料全部由基础材料 1 填充。宏观结构材料属性由微观结构等效得到, 同时定义宏观目标体积分数  $v_1=0.4$ 。将宏观结构模型和微观胞元模型分别划分为  $100 \times 50$  和  $102 \times 102$  个四边形单元格。其优化结果如图 6-1 所示。

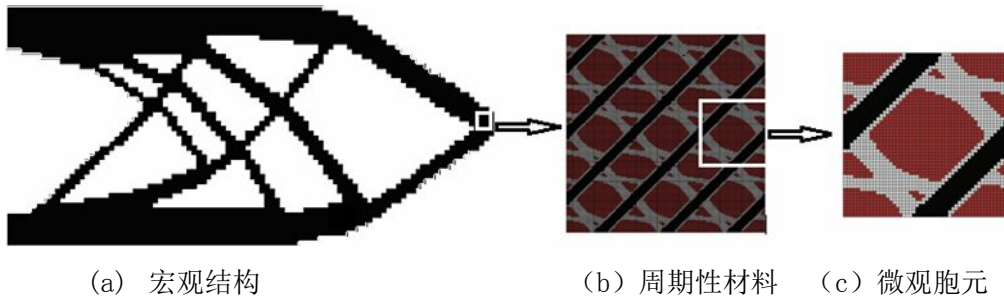


图 6-1 悬臂梁周期性多相材料微结构布局及宏观结构拓扑并发优化结果

图 6-1 给出了边界清晰的宏观和微观优化结果, 由分布合理的三相材料组成的微观胞元(如图 6-1 (c))通过均匀化周期型排列组成了等效材料(如图 6-1 (b)), 并由此而构成了宏观结构(如图 6-1 (a))。不难看出, 由此 “生成” 的新型材料具有了宏观结构受力的特性, 使之具备了特定宏观结构力学需求的更加轻型、高强的最佳力学性能, 而宏观结构最优材料分布同时也受微观材料分布的制约。使得材料——结构具有更加完美的多尺度

统一。另外，从结果来看，本文提出的算法成功过的克服了拓扑优化领域常见的“棋盘格”现象，使得结果更加合理、可信、有利于工程实际的加工制造。

#### 6.4.2 宏观和微观同时两相材料布局优化

宏观和微观同时两相材料布局优化，是在宏观层面和微观层面上均有两种材料，需建立一个宏观模型和两个胞元模型，因此优化模型可简化为：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & \mathbf{C} = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{U} \\ & \mathbf{V}^{\text{mac}} - \sum_{i=1}^I \mathbf{V}_i \mathbf{x}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, I \\ s.t. & \mathbf{V}_1^{\text{mic}} - \sum_{p_1=1}^{P_1} \mathbf{Y}_{p_1} \mathbf{x}_{p_1} = 0 \quad p_1 = 1, 2, \dots, P_1 \\ & \mathbf{V}_2^{\text{mic}} - \sum_{p_2=1}^{P_2} \mathbf{Y}_{p_2} \mathbf{x}_{p_2} = 0 \quad p_2 = 1, 2, \dots, P_2 \end{array} \right. \quad (6-24)$$

该问题在宏观层面上是两相等效材料的布局优化问题，其单元  $i$  的敏度值可以定义为：

$$\alpha_i = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T D_1^H \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料1} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T (x_{\min}^n D_2^H) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料2} \end{cases} \quad (6-25)$$

上述问题中，等效材料 1 是由基础材料 1 和基础材料 2 组成的胞元结构周期性排列而成，其等效弹性模量  $D_1^H$  由基础材料 1、2 的弹性模量  $E_1$ 、 $E_2$  及其布局分布有关；同理，等效材料 2 是由基础材料 3 和基础材料 4 组成的胞元结构决定的。可由下式取得：

$$D_1^H = \frac{1}{|Y_{p_1}|} \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (x_{11}^m E_1 + x_{12}^m E_2) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \quad (6-26)$$

$$D_2^H = \frac{1}{|Y_{p_2}|} \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (x_{21}^m E_3 + x_{22}^m E_4) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \quad (6-27)$$

这里  $\mathbf{b}_1$ 、 $\mathbf{u}_1$ 、 $\mathbf{Y}_{p_1}$ 、 $\mathbf{b}_2$ 、 $\mathbf{u}_2$ 、 $\mathbf{Y}_{p_2}$  分别为微观胞元 1 和微观胞元 2 的节点位移向量、位移/应变转换矩阵及胞元体积。

对于微观胞元 1，基础材料 1 和基础材料 2 布局优化过程中，其单元敏度可定义为：

$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T E_1 (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (x_{\min}^m E_2) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料2} \end{cases} \quad (6-28)$$

对于微观胞元 2，基础材料 3 和基础材料 4 布局优化过程中，其单元敏度可定义为：

$$\alpha_2 = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T E_3 (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料3} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (X_{\min}^m E_4) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料4} \end{cases} \quad (6-29)$$

不同于宏观拓扑优化问题，对于宏观两相等效材料的优化问题，因其对应着两相材料的等效化，即  $\text{DH}_1$  和  $\text{DH}_2$ ，所以同时存在两种与之相对应的微观材料模型。现以悬臂梁为例进行两尺度的布局优化。建立不同的宏观有限元初始模型 M1（图 6-2a）和 M2（图 6-2b）和有差异的微观初始有限元模型 S1（图 6-3a）、S2（图 6-3b）和 S3（图 6-3c）。

文献[217]指出，结构布局优化过程中，其优化结果与不同材料的属性差异有关，而与其绝对属性值大小关系不大。对于本算例，宏观结构等效材料 1 由基础材料 11 和基础材料 12 由一定的单胞布局周期型排列等效而成；同理，宏观结构等效材料 2 由基础材料 21 和基础材料 22 由一定的单胞布局周期型排列等效而成。假设基础材料 11、12、21、22 对应的弹性模量分别为  $E_{11}$ 、 $E_{12}$ 、 $E_{21}$ 、 $E_{22}$ 。那么，本算例优化结果也将受  $P_1 = E_{11}/E_{12}$ 、 $P_2 = E_{21}/E_{22}$ 、 $P_3 = E_{12}/E_{21}$  的影响。为研究不同的基础材料属性对宏观和微观优化结果的影响，分别取材料属性 1：  $P_1=10$ 、 $P_2=10$ 、 $P_3=10$ ；材料属性 2：  $P_1=10$ 、 $P_2=100$ 、 $P_3=10$  和材料属性 3：  $P_1=10$ 、 $P_2=10$ 、 $P_3=0.5$  等三套基础材料属性定义方式。同时，将宏观结构模型和两个微观胞元模型分别划分为  $100 \times 50$  和  $102 \times 102$ ， $102 \times 102$  个四边形单元格。

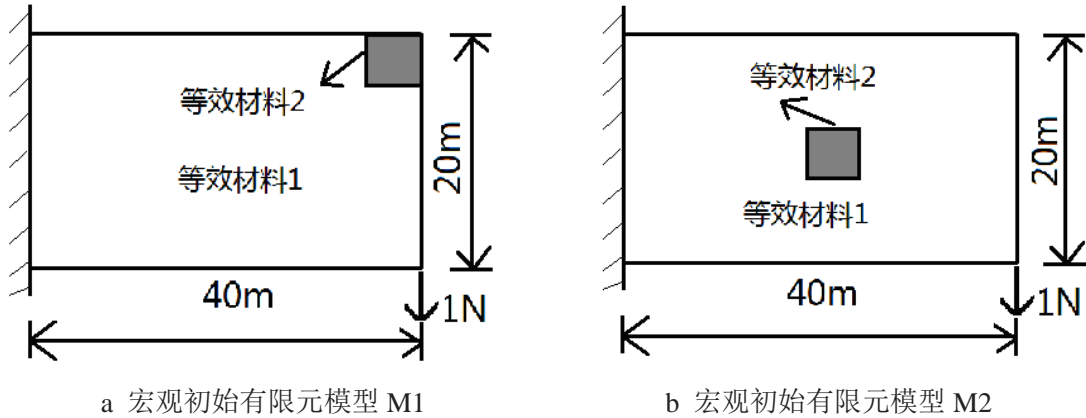


图 6-2 右下端受集中载荷的悬臂梁不同初始优化模型的设计区域

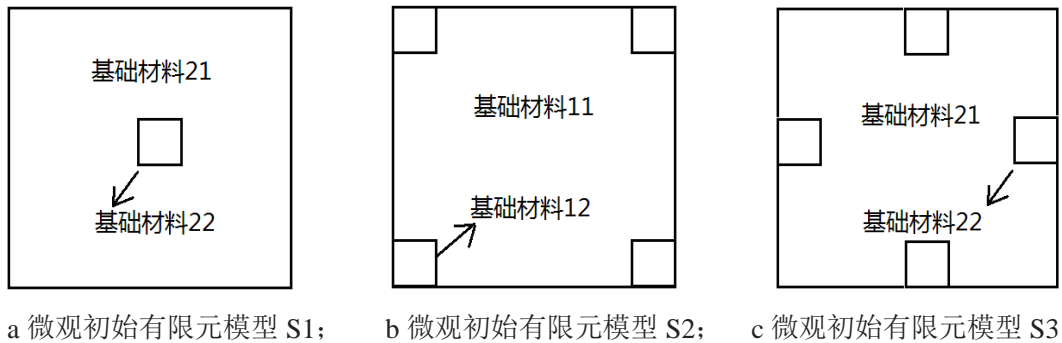

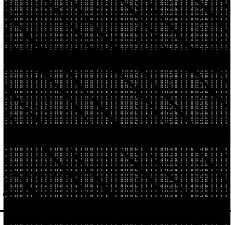
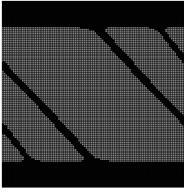


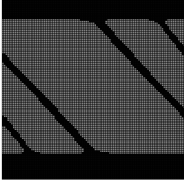

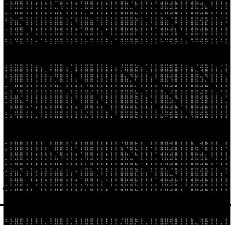
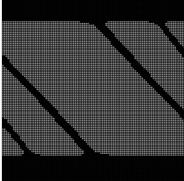


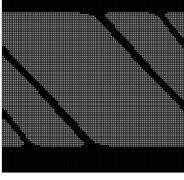


图 6-3 有差异的微观初始有限元模型

分别取模型 M1 和 M2，研究不同宏观初始有限元模型对优化结果的影响。同时，取微观初始有限元模型 S1 和材料属性 1 对微观有限元模型及材料属性进行定义。其优化结果如表 6-1 所示。

表 6-1 不同宏观初始有限元模型优化结果

宏观初始模型		宏观优化结果	5×5 周期性胞元	微观优化结果	等效弹性模量 $D^H$
M1	等效材料 1 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.3866 & 0.0669 & 0.0170 \\ 0.0669 & 0.1899 & 0.0236 \\ 0.0170 & 0.0236 & 0.0783 \end{bmatrix}$
	等效材料 2 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.0039 & 0.0007 & 0.0002 \\ 0.0007 & 0.0019 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0008 \end{bmatrix}$
M2	等效材料 1 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.3865 & 0.0669 & 0.0170 \\ 0.0669 & 0.1898 & 0.0235 \\ 0.0170 & 0.0235 & 0.0782 \end{bmatrix}$
	等效材料 2 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.0038 & 0.0007 & 0.0002 \\ 0.0007 & 0.0020 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0008 \end{bmatrix}$

从表 6-1 不难看出，不同宏观初始有限元模型无论是对宏观结构还是对微观胞元的优化结果几乎都没有影响，仅在等效弹性模量存在稍微差异，这种差异不能排除是由于在等效均匀化过程中误差造成的。可见，从不同的宏观材料布局出发，总能得到一致的最优优化结果。



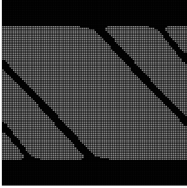

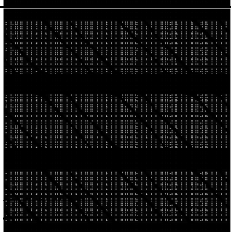
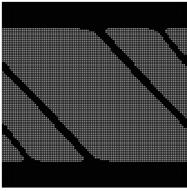


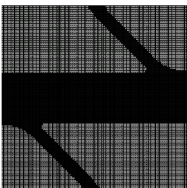

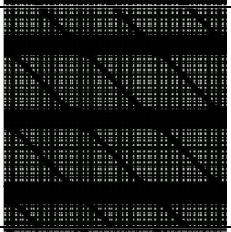
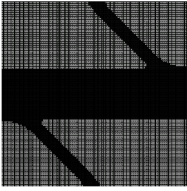

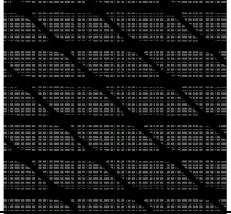
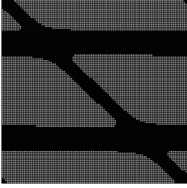

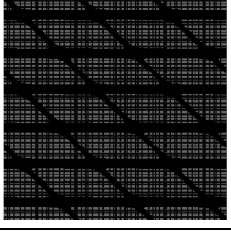
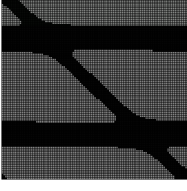
取宏观初始有限元模型 M1 和材料属性 1 对微观基础材料属性进行定义。对不同的微观胞元模型模型 S1、S2 和 S3 进行一体化优化，其优化结果如表 6-2 所示。

表 6-2 给出了取不同微观胞元初始有限元模型得宏观结构和微观胞元的优化结果及等效弹性模量。可以发现，不同微观胞元初始有限元模型对宏观优化结果几乎都没有影响，而微观单胞存在一些区别，这说明了微观胞元的材料布局优化分布对初始模型更加敏感，这主要是由其更加均匀化的应力应变分布决定的，这也进一步要求在微观层次上优化过程中对计算精度要求更高。然而，对于单一胞元之间存在的差异，在经过周期性排列后却得到了极其相似的序列，特别是其等效弹性模量差异几乎可忽略。可见，从不



同微观胞元初始有限元模型出发，都能得到一致的宏观优化结果和极其类似的微观胞元材料布局结果。



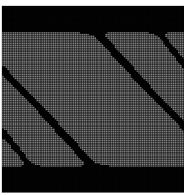


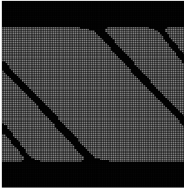


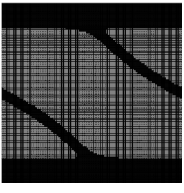


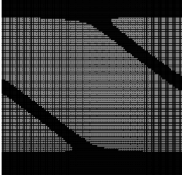

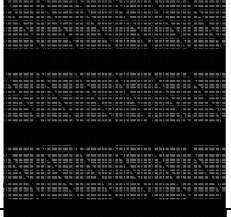
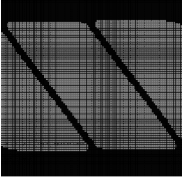
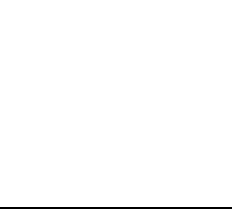
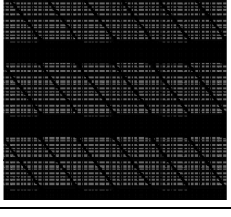
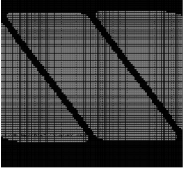
表 6-2 不同微观初始胞元模型优化结果

微观初始模型		宏观优化结果	5×5 周期性胞元	微观优化结果	等效弹性模量 $D^H$
S1	等效材料 1 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.3866 & 0.0669 & 0.0170 \\ 0.0669 & 0.1899 & 0.0236 \\ 0.0170 & 0.0236 & 0.0783 \end{bmatrix}$
	等效材料 2 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.0039 & 0.0007 & 0.0002 \\ 0.0007 & 0.0019 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0008 \end{bmatrix}$
S2	等效材料 1 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.3899 & 0.0667 & 0.0186 \\ 0.0667 & 0.1847 & 0.0215 \\ 0.0186 & 0.0215 & 0.0781 \end{bmatrix}$
	等效材料 2 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.0039 & 0.0007 & 0.0002 \\ 0.0007 & 0.0018 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0008 \end{bmatrix}$
S3	等效材料 1 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.3895 & 0.0671 & 0.0204 \\ 0.0671 & 0.1835 & 0.0207 \\ 0.0204 & 0.0207 & 0.0788 \end{bmatrix}$
	等效材料 2 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.0039 & 0.0007 & 0.0002 \\ 0.0007 & 0.0018 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0008 \end{bmatrix}$

分别取宏观初始有限元模型 M1 和微观胞元模型 S1，并对其分别赋予材料属性 1、2、3 等属性定义，并对其优化结果（如表 6-3）进行对比分析。



表 6-3 赋予不同材料属性的优化结果

材料属性		宏观优化结果	5×5 周期性胞元	微观优化结果	等效弹性模量 $D^H$
材料属性 1	等效材料 1 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.3866 & 0.0669 & 0.0170 \\ 0.0669 & 0.1899 & 0.0236 \\ 0.0170 & 0.0236 & 0.0783 \end{bmatrix}$
	等效材料 2 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.0039 & 0.0007 & 0.0002 \\ 0.0007 & 0.0019 & 0.0002 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0008 \end{bmatrix}$
材料属性 2	等效材料 1 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.3978 & 0.0640 & 0.0211 \\ 0.0640 & 0.1735 & 0.0144 \\ 0.0211 & 0.0144 & 0.0755 \end{bmatrix}$
	等效材料 2 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.0031 & 0.0003 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0004 & 0.0002 \\ 0.0003 & 0.0002 & 0.0004 \end{bmatrix}$
材料属性 3	等效材料 1 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.3877 & 0.0644 & 0.0119 \\ 0.0644 & 0.1960 & 0.0235 \\ 0.0119 & 0.0235 & 0.0742 \end{bmatrix}$
	等效材料 2 胞元				$D^H = \begin{bmatrix} 0.0775 & 0.0129 & 0.0024 \\ 0.0129 & 0.0392 & 0.0047 \\ 0.0024 & 0.0047 & 0.0148 \end{bmatrix}$

对不同基础材料属性值宏观结构和微观胞元的优化结果及等效弹性模量如表 6-3 所示。不难发现，无论是微观还是宏观优化结果都有不同程度的影响。在宏观层面上，这种差异主要表现在细节方面，而结构整体分布趋势并未改变。而微观单胞层面上这些区别更为明显，特别是出现了等效材料 1 胞元和等效材料 2 胞元不一致，这主要是因为其对应的基础材料弹性性能比的差异造成的，这也进一步说明，不同材料之间的主要性能比决定着材料最优布局分布。另外，经过周期性排列后这些差异将会进一步缩小，其材料分布大致趋势是一致的。

#### 6.4.3 微观三相材料和宏观两相材料布局优化

微观三相材料和宏观两相材料布局优化，是在宏观层面上有两种等效材料，于是对应着两种材料微观胞元，在每个胞元模型中同时进行三相的布局优化。

首先，该问题在宏观层面上是两相等效材料的布局优化问题，其单元  $i$  的敏度值可以定义为  $\alpha_i^{mac}$ ：

$$\alpha_i^{mac} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T D_1^H \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料1} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T (\chi_{\min}^n D_2^H) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料2} \end{cases} \quad (6-30)$$

由基础材料 1、基础材料 2 和基础材料 3 组成的胞元结构周期性排列而成等效材料 1，其等效弹性模量  $D_1^H$ ，可由下式取得：

$$D_1^H = \frac{1}{|Y_{p_1}|} \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (\chi_{11}^m E_1 + \chi_{12}^m E_2 + \chi_{13}^m E_3) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \quad (6-31)$$

同理，等效材料 2 的等效弹性模量  $D_2^H$  是基础材料 4、基础材料 5 和基础材料 6 组成的胞元结构决定的。

$$D_2^H = \frac{1}{|Y_{p_2}|} \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (\chi_{21}^m E_4 + \chi_{22}^m E_5 + \chi_{23}^m E_6) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \quad (6-32)$$

其次，对于微观胞元 1 模型，由三相基础材料组成，弹性模量分别设为  $E_1 > E_2 > E_3$ 。那么，在基础材料 1 和基础材料 2、3 的布局优化中，单元灵敏度值  $\alpha_{p_1^1}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p_1^1}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T E_1 (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (\chi_{\min}^m E_2) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料2} \\ \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (\chi_{\min}^m E_3) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料3} \end{cases} \quad (6-33)$$

同理，在基础材料 1、2 和基础材料 3 的布局优化中，单元灵敏度值  $\alpha_{p_1^2}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p_1^2}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T E_1 (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T E_2 (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料2} \\ \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (\chi_{\min}^m E_3) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料3} \end{cases} \quad (6-34)$$

再次，对于微观胞元 2 模型，其基础材料弹性模量分别设为  $E_4 > E_5 > E_6$ 。那么，在基础材料 4 和基础材料 5、6 优化布局中，单元灵敏度值  $\alpha_{p_2^1}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p_2^1}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T E_4 (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (\chi_{\min}^m E_5) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料2} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (\chi_{\min}^m E_6) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料3} \end{cases} \quad (6-35)$$

同理，在材料 1 和材料 2、3 的布局优化中，单元灵敏度值  $\alpha_{p_2^2}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p_2^2}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T E_4 (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T E_4 (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料2} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (\chi_{\min}^m E_6) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料3} \end{cases} \quad (6-36)$$

对于宏观两相等效材料和微观三相材料的优化问题，在其宏观层面上因其对应着两相材料的等效化，即  $\text{DH}_1$  和  $\text{DH}_2$ ，所以也同时存在两种与之相对应的微观材料模型。同时，每个微观胞元模型也是一个三相材料的优化分布问题，即存在六种基础材料。现以中心载荷两端固结梁（如图 6-4）为例进行两尺度多相材料的优化。对于本算例，宏观结构等效材料 1 由基础材料 11、基础材料 12 和基础材料 13 以一定的单胞布局周期型排列等效而成；同理，宏观结构等效材料 2 由基础材料 21、基础材料 22 和基础材料 23 以一定的单胞布局周期型排列等效而成。假设基础材料 11、12、13、21、22、23 对应的弹性模量分别为： $E_{11}=1\text{GPa}$ 、 $E_{12}=0.5\text{GPa}$ 、 $E_{13}=0.01\text{GPa}$ 、 $E_{21}=0.1\text{GPa}$ 、 $E_{22}=0.05\text{GPa}$ 、 $E_{23}=0.001\text{GPa}$ 。同时对应的目标体积分数分别为： $\mathbf{v}_{11}^*=0.4$ 、 $\mathbf{v}_{12}^*=0.3$ 、 $\mathbf{v}_{13}^*=0.3$ 、 $\mathbf{v}_{21}^*=0.4$ 、 $\mathbf{v}_{22}^*=0.3$ 、 $\mathbf{v}_{23}^*=0.3$ 。在宏观层面上，等效材料 1 和等效材料的 2 的材料属性由其对应的基础材料及其分布布局决定的，现将其目标体积分数分别定义为： $\mathbf{v}_1^*=0.5$ 、 $\mathbf{v}_2^*=0.5$ 。同时，将宏观结构模型和两个微观胞元模型分别划分为  $120 \times 40$  和  $102 \times 102$ ， $102 \times 102$  个四边形单元格。其优化结果如图 6-5 到图 6-7 所示。

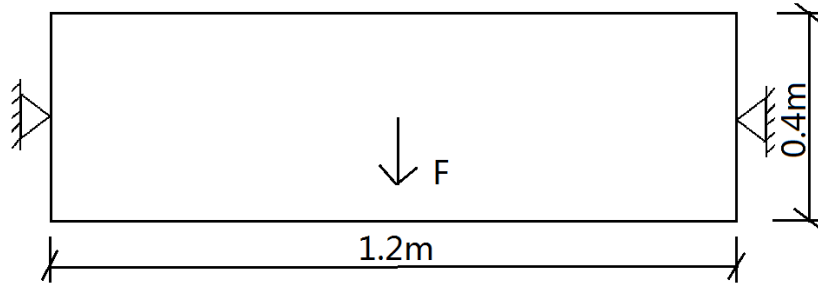


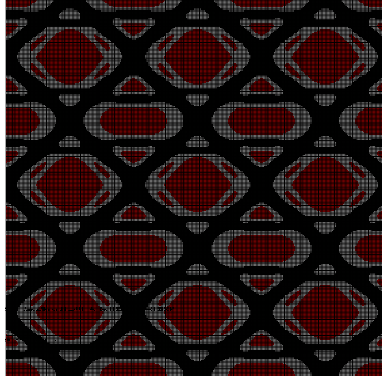
图 6-4 中心载荷两端固结梁的设计区域



图 6-5 宏观结构材料最优布局分布



a 微观胞元材料布局分布

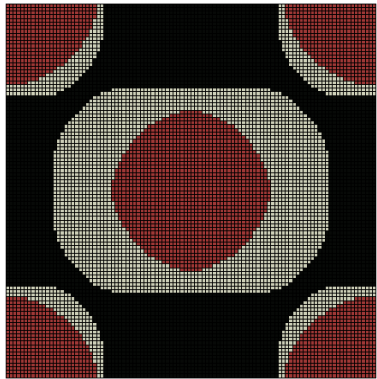


b 3×3 胞元周期性排列

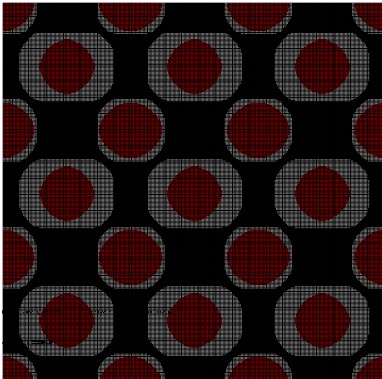
$$D^u = \begin{bmatrix} 0.4370 & 0.1117 & 0.0000 \\ 0.1117 & 0.2076 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.1264 \end{bmatrix}$$

c 等效弹性模量

图 6-6 等效材料 1 对应的微观胞元材料布局分布及 3×3 胞元周期性排列



a 微观胞元材料布局分布



b 3×3 胞元周期性排列

$$D^u = \begin{bmatrix} 0.0315 & 0.0155 & 0.0000 \\ 0.0155 & 0.0278 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0155 \end{bmatrix}$$

c 等效弹性模量

图 6-7 等效材料 2 对应的微观胞元材料布局分布及 3×3 胞元周期性排列

图6-5给出了宏观结构的材料最优分布结果，等效材料1（黑色）对应着图6-7给出的微观材料胞元，同时等效材料2（灰色）材料属性是由图6-6给出的微观材料胞元决定的。在图6-6和图6-7中，黑色、白色、红色分别表示为基础材料11（21）、基础材料12（22）和基础材料13（23）。可以看出，优化结果有效的克服了棋盘格等现象，不同材料之间界限分明，分布合理。无论是宏观结构还是微观层面上胞元1和胞元2的材料最有分布都具有严格的对称性，这一分布十分符合宏观结构的边界条件和受力特征。

#### 6.4.4 微观两相材料和宏观三相材料布局优化

微观两相材料和宏观三相材料布局优化不同于微观三相材料和宏观两相材料布局

优化模型。因其是在宏观层面上有三种等效材料，于是对应着三种材料微观胞元，在每个胞元模型中同时进行两相的布局优化。在宏观层面上的三相等效材料的布局优化问题，首先是等效材料属性 1 和等效材料属性 2、3 之间的优化，其单元  $i$  的敏度值可以定义为  $\alpha_{i1}^{mac}$ ：

$$\alpha_{i1}^{mac} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T D_1^H \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料1} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T (x_{\min}^n D_2^H) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料2} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T (x_{\min}^n D_3^H) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料3} \end{cases} \quad (6-37)$$

其次是等效材料属性 1、2 和等效材料属性 3 之间的优化，其单元  $i$  的敏度值可以定义为  $\alpha_{i2}^{mac}$ ：

$$\alpha_{i2}^{mac} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T D_1^H \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料1} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T D_2^H \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料2} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T (x_{\min}^n D_3^H) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料3} \end{cases} \quad (6-38)$$

宏观结构其等效材料弹性模量分别可由下式取得：

$$D_1^H = \frac{1}{|Y_{p_1}|} \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (x_{11}^m E_1 + x_{12}^m E_2) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \quad (6-39)$$

$$D_2^H = \frac{1}{|Y_{p_2}|} \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (x_{21}^m E_3 + x_{22}^m E_4) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \quad (6-40)$$

$$D_3^H = \frac{1}{|Y_{p_3}|} \int_{Y_{p_3}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T (x_{31}^m E_5 + x_{32}^m E_6) (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p_3} \quad (6-41)$$

与此相对应的三个微观胞元基础材料布局优化中，单元灵敏度值分别可定义为。

$$\alpha_{p_1}^{mic} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T E_1 (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p_1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p_1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (x_{\min}^m E_2) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p_1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料2} \end{cases} \quad (6-42)$$

$$\alpha_{p_2}^{mic} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T E_1 (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (x_{\min}^m E_2) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料2} \end{cases} \quad (6-43)$$

$$\alpha_{p_3}^{mic} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_3}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T E_5 (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p_3} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p_3}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T (X_{\min}^m E_6) (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p_3} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料2} \end{cases} \quad (6-44)$$

宏观三相等效材料和微观两相材料的一体化优化,在其宏观层面上因其对应着三相材料的等效化 ( $\mathbf{D}_1^H$ 、 $\mathbf{D}_2^H$  和  $\mathbf{D}_3^H$ ),同时存在三种与之相对应两相材料的优化分布的微观材料优化模型,所以存在六种基础材料。为了比较宏观两相等效材料和微观三相材料的一体化优化问题,同样以图 6-4 为例进行两尺度多相材料的优化。对于本算例,宏观结构等效材料 1 由基础材料 11 和基础材料 12 以一定的单胞布局周期型排列等效而成;宏观结构等效材料 2 由基础材料 21 和基础材料 22 以一定的单胞布局周期型排列等效而成;同理,宏观结构等效材料 3 的宏观性能由基础材料 31 和基础材料 32 的材料属性及其分布布局决定的。假设基础材料 11、12、21、22、31、32 对应的弹性模量分别为:  $E_{11}=1\text{GPa}$ 、 $E_{12}=0.5\text{GPa}$ 、 $E_{21}=0.1\text{GPa}$ 、 $E_{22}=0.05\text{GPa}$ 、 $E_{31}=0.000001\text{GPa}$ 、 $E_{32}=0.0000005\text{GPa}$ 。同时对应的目标体积分数分别为:  $v_{11}^*=0.5$ 、 $v_{12}^*=0.5$ 、 $v_{21}^*=0.5$ 、 $v_{22}^*=0.5$ 、 $v_{31}^*=0.5$ 、 $v_{32}^*=0.5$ 。在宏观层面上,等效材料 1、等效材料的 2 和等效材料的 3 的材料属性由其对应的基础材料及其分布布局决定的,现将其目标体积分数分别定义为:  $v_1^*=0.45$ 、 $v_2^*=0.25$  和  $v_3^*=0.3$ 。同时,将宏观结构模型和两个微观胞元模型分别划分为  $240 \times 40$  和  $102 \times 102$ ,  $102 \times 102$ ,  $102 \times 102$  等四边形单元格。优化结果如图 6-8 到图 6-11 所示。

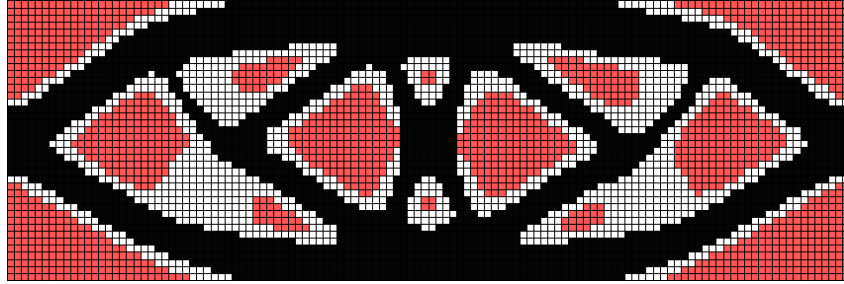
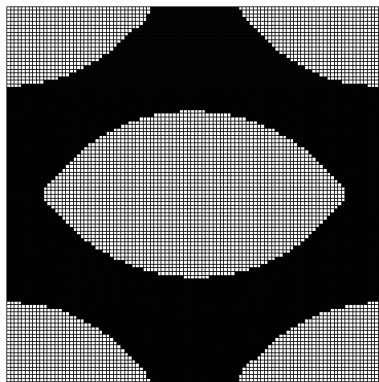
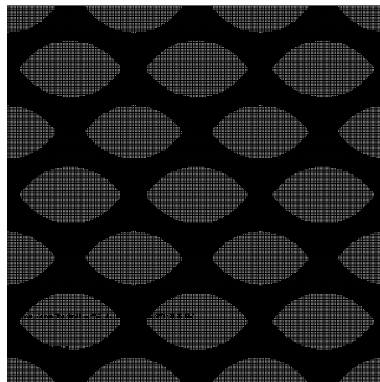


图 6-8 宏观结构材料最优布局分布



a 微观胞元材料布局分布



b 3×3 胞元周期性排列

$$\mathbf{D}_1^H = \begin{bmatrix} 0.1960 & 0.0585 & 0.0000 \\ 0.0585 & 0.1873 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0676 \end{bmatrix}$$

c 等效弹性模量

图 6-9 等效材料 1 对应的微观胞元材料布局分布及 3×3 胞元周期性排列



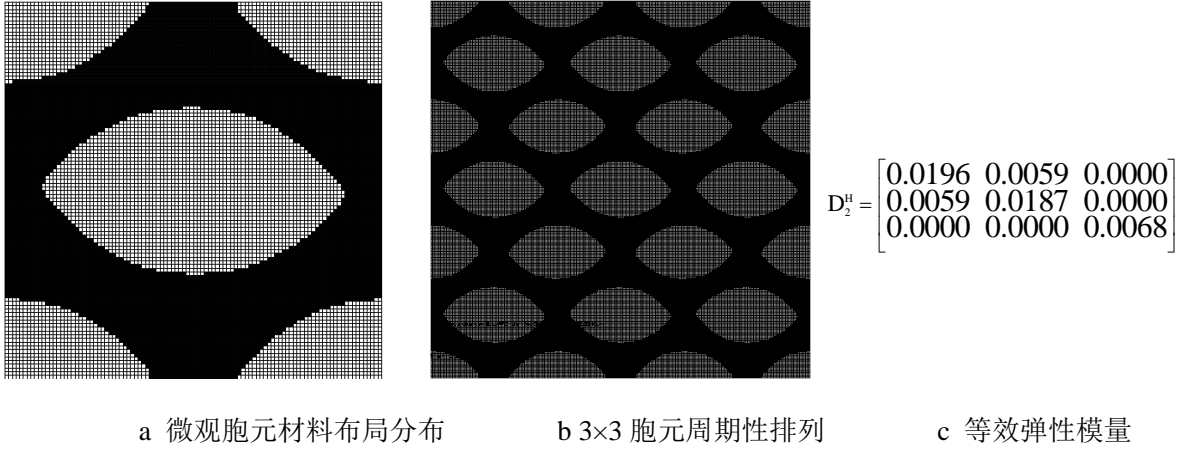


图 6-10 等效材料 2 对应的微观胞元材料布局分布及 3×3 胞元周期性排列

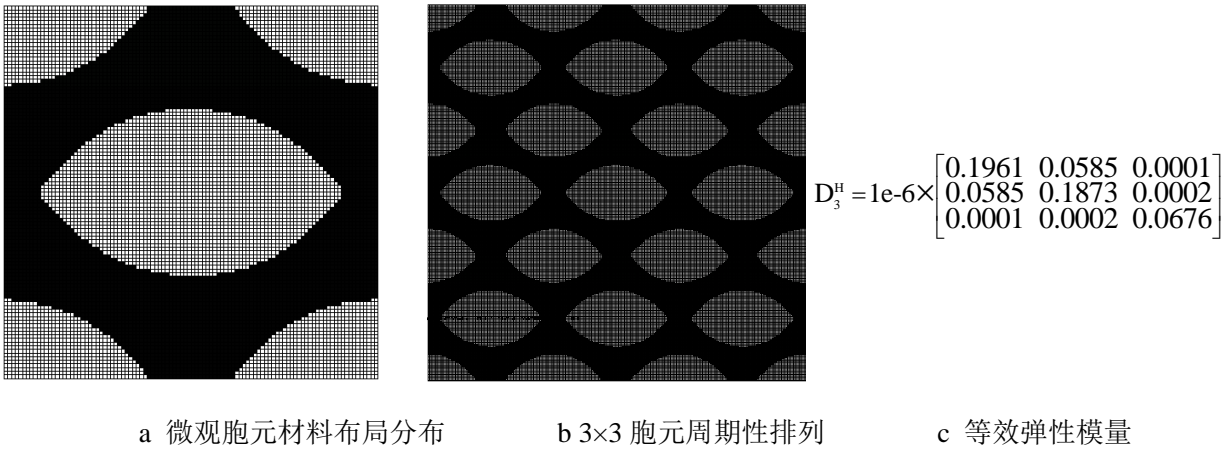


图 6-11 等效材料 3 对应的微观胞元材料布局分布及 3×3 胞元周期性排列

在图 6-8 宏观结构的材料最优分布结果中，黑色、白色、红色分别对应着等效材料 1、等效材料 2 和等效材料 3。这三种材料等效弹性模量由图 6-9a 到图 6-11a 对应着的单胞材料属性及其分布决定的，通过均匀化方法可分别求得  $D_1^H$ 、 $D_2^H$  和  $D_3^H$ 。在图 6-9 和图 6-11 中，黑色和灰色分别表示为基础材料 11（21、31）和基础材料 12（22、32）。对比微观三相材料和宏观两相材料的优化问题，因定义的六种基础材料属性一致，且体积分数也是相同的，其主要差异在于六种基础材料均匀分布于两个单胞还是三个单胞的布局优化，从目标函数上来看，微观两相材料和宏观三相材料优化最终目标函数（ $C_{32}=101.16\text{KN}\cdot\text{m}$ ）要略小于微观三相材料和宏观两相材料优化最终目标函数（ $C_{23}=104.44\text{KN}\cdot\text{m}$ ），可见对于本算例而言，更多种类的单胞优化结果更优。

#### 6.4.5 微观和宏观同时三相材料布局优化

该类问题，在宏观层面上的三相等效材料的布局优化问题，首先是等效材料属性 1 和等效材料属性 2、3 之间的优化，其单元  $i$  的敏度值可以定义为  $\alpha_{ii}^{\text{mac}}$ ：

$$\alpha_{i1}^{mac} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T D_1^H \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料1} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T (x_{\min}^n D_2^H) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料2} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T (x_{\min}^n D_3^H) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料2} \end{cases} \quad (6-45)$$

其次是等效材料属性 1、2 和等效材料属性 3 之间的优化，其单元 i 的敏度值可以定义为  $\alpha_{i2}^{mac}$ ：

$$\alpha_{i2}^{mac} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T D_1^H \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料1} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T D_2^H \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料2} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left( \int_{V_i} \mathbf{B}^T (x_{\min}^n D_3^H) \mathbf{B} dV_i \right) \mathbf{U}_i & \text{等效材料2} \end{cases} \quad (6-46)$$

宏观结构其等效材料弹性模量分别可由下式取得：

$$D_1^H = \frac{1}{|Y_{p1}|} \int_{Y_{p1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (x_{11}^m E_1 + x_{12}^m E_2) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p1} \quad (6-47)$$

$$D_2^H = \frac{1}{|Y_{p2}|} \int_{Y_{p2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (x_{21}^m E_3 + x_{22}^m E_4) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p2} \quad (6-48)$$

$$D_3^H = \frac{1}{|Y_{p3}|} \int_{Y_{p3}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T (x_{31}^m E_5 + x_{32}^m E_6) (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p3} \quad (6-49)$$

因其是在宏观层面上有三种等效材料，于是对应着三种材料微观胞元，在每个胞元模型中同时进行三相的布局优化。对于微观胞元 1 模型，由三相基础材料组成，弹性模量分别设为  $E_1 > E_2 > E_3$ 。那么，在基础材料 1 和基础材料 2、3 的布局优化中，单元灵敏度值  $\alpha_{p1}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p1}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T E_1 (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (x_{\min}^m E_2) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料2} \\ \frac{1}{2|Y_{p1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (x_{\min}^m E_3) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料3} \end{cases} \quad (6-50)$$

同理，在基础材料 1、2 和基础材料 3 的布局优化中，单元灵敏度值  $\alpha_{p12}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p12}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T E_1 (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料1} \\ \frac{1}{2|Y_{p1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T E_2 (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料2} \\ \frac{1}{2|Y_{p1}|} \mathbf{U}_1^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_1^T \left[ \int_{Y_{p1}} (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1)^T (x_{\min}^m E_3) (I - \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_1) dY_{p1} \right] \mathbf{B}_1 dV_i \right\} \mathbf{U}_1 & \text{材料3} \end{cases} \quad (6-51)$$



再次，对于微观胞元 2 模型，其基础材料弹性模量分别设为  $E_4 > E_5 > E_6$ 。那么，在基础材料 4 和基础材料 5、6 优化布局中，单元灵敏度值  $\alpha_{p_2^1}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p_2^1}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T E_4 (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料4} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (\mathcal{X}_{\min}^m E_5) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料5} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (\mathcal{X}_{\min}^m E_6) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料6} \end{cases} \quad (6-52)$$

同理，在材料 1 和材料 2、3 的布局优化中，单元灵敏度值  $\alpha_{p_2^2}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p_2^2}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T E_4 (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料4} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T E_5 (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料5} \\ \frac{1}{2|Y_{p_2}|} \mathbf{U}_2^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_2^T \left[ \int_{Y_{p_2}} (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2)^T (\mathcal{X}_{\min}^m E_6) (I - \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_2) dY_{p_2} \right] \mathbf{B}_2 dV_i \right\} \mathbf{U}_2 & \text{材料6} \end{cases} \quad (6-53)$$

对于微观胞元 3 模型，其基础材料弹性模量分别设为  $E_7 > E_8 > E_9$ 。那么，在基础材料 7 和基础材料 8、9 优化布局中，单元灵敏度值  $\alpha_{p_3^1}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p_3^1}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_3}|} \mathbf{U}_3^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_3^T \left[ \int_{Y_{p_3}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T E_7 (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p_3} \right] \mathbf{B}_3 dV_i \right\} \mathbf{U}_3 & \text{材料7} \\ \frac{1}{2|Y_{p_3}|} \mathbf{U}_3^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_3^T \left[ \int_{Y_{p_3}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T (\mathcal{X}_{\min}^m E_8) (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p_3} \right] \mathbf{B}_3 dV_i \right\} \mathbf{U}_3 & \text{材料8} \\ \frac{1}{2|Y_{p_3}|} \mathbf{U}_3^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_3^T \left[ \int_{Y_{p_3}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T (\mathcal{X}_{\min}^m E_9) (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p_3} \right] \mathbf{B}_3 dV_i \right\} \mathbf{U}_3 & \text{材料9} \end{cases} \quad (6-54)$$

同理，在材料 1 和材料 2、3 的布局优化中，单元灵敏度值  $\alpha_{p_2^2}^{mac}$  可定义为。

$$\alpha_{p_3^1}^{mac} = \begin{cases} \frac{1}{2|Y_{p_3}|} \mathbf{U}_3^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_3^T \left[ \int_{Y_{p_3}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T E_7 (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p_3} \right] \mathbf{B}_3 dV_i \right\} \mathbf{U}_3 & \text{材料7} \\ \frac{1}{2|Y_{p_3}|} \mathbf{U}_3^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_3^T \left[ \int_{Y_{p_3}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T E_8 (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p_3} \right] \mathbf{B}_3 dV_i \right\} \mathbf{U}_3 & \text{材料8} \\ \frac{1}{2|Y_{p_3}|} \mathbf{U}_3^T \left\{ \int_{V_i} \mathbf{B}_3^T \left[ \int_{Y_{p_3}} (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3)^T (\mathcal{X}_{\min}^m E_9) (I - \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_3) dY_{p_3} \right] \mathbf{B}_3 dV_i \right\} \mathbf{U}_3 & \text{材料9} \end{cases} \quad (6-55)$$

如图 6-12 所示，两端固结梁上边中点受集中载荷 20KN。材料 1 和材料 2 弹性模量、密度分别是  $E_1=100\text{GPa}$ ； $E_2=10\text{GPa}$ ； $\rho_1=10\text{kg/m}^2$  和  $\rho_2=1\text{kg/m}^2$ 。最大设计区域离散为  $240 \times 40$  个四节点四边形有限元网格单元。初始设计参数：进化率  $ER=0.03$ ；滤波半径  $r=3$ ；

惩罚指数  $P=1e6$ ; 收敛精度  $\epsilon=0.001$ 。初始状态所有单元全为材料 1。为研究不同材料目标体积比对拓扑结构的影响, 总体结构优化目标体积保持在  $V^*=V_{11}^*+V_{12}^*=0.3$ , 调整材料 1 和材料 2 题解分布比值。分别取材料 1 和材料 2 目标体积  $V_{11}^*=0.2$ ,  $V_{12}^*=0.1$ ;  $V_{21}^*=0.15$ ,  $V_{22}^*=0.15$ ;  $V_{31}^*=0.16$ ,  $V_{32}^*=0.14$  等三组数据。

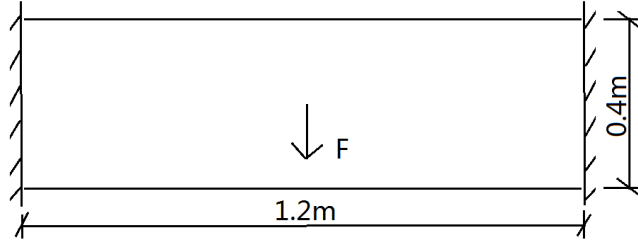


图 6-12 中心载荷两端固结梁的设计区域

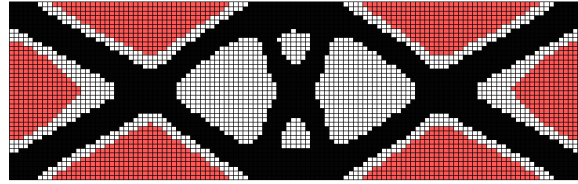


图 6-13 宏观结构材料最优布局分布

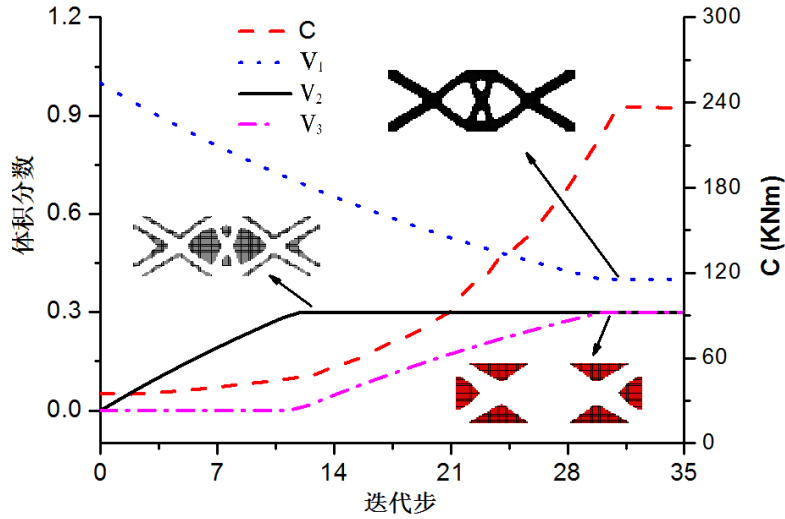
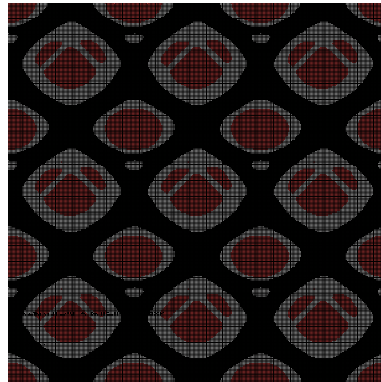
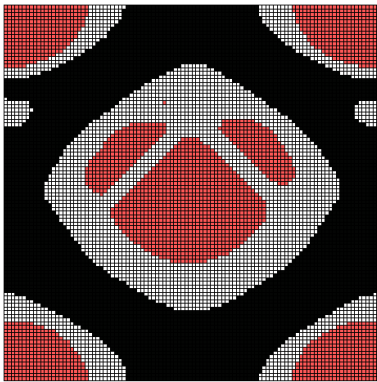


图 6-14 宏观结构材料布局优化历程



$$D_i^H = \begin{bmatrix} 0.0922 & 0.0385 & 0.0001 \\ 0.0385 & 0.0587 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.0378 \end{bmatrix}$$

a 微观胞元材料布局分布      b 3x3 胞元周期性排列      c 等效弹性模量

图 6-15 等效材料 1 对应的微观胞元材料布局分布及 3x3 胞元周期性排列

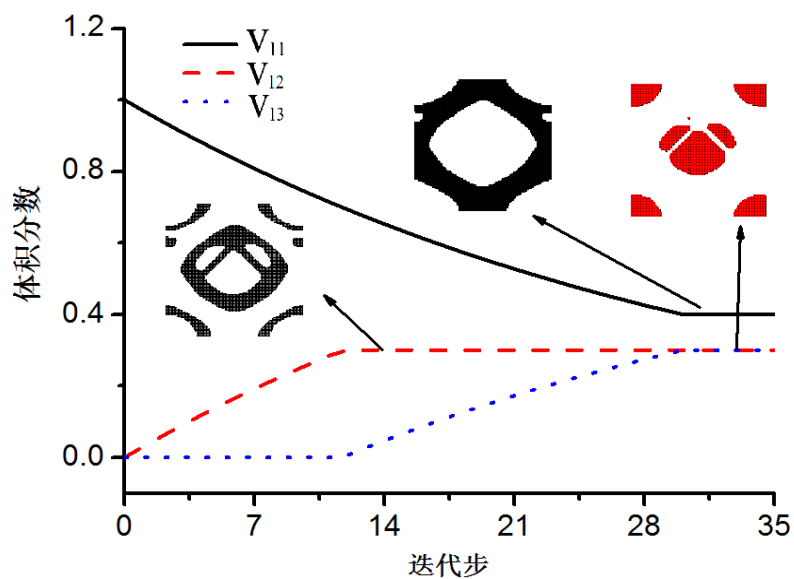
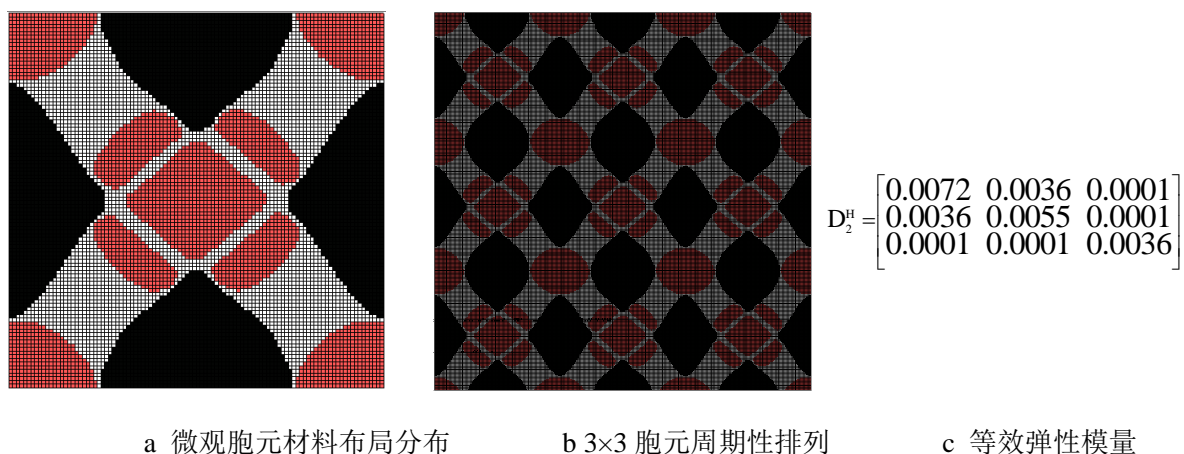


图 6-16 等效材料 1 对应的微观胞元材料布局优化历程



a 微观胞元材料布局分布      b 3×3 胞元周期性排列      c 等效弹性模量

图 6-17 等效材料 3 对应的微观胞元材料布局分布及 3×3 胞元周期性排列

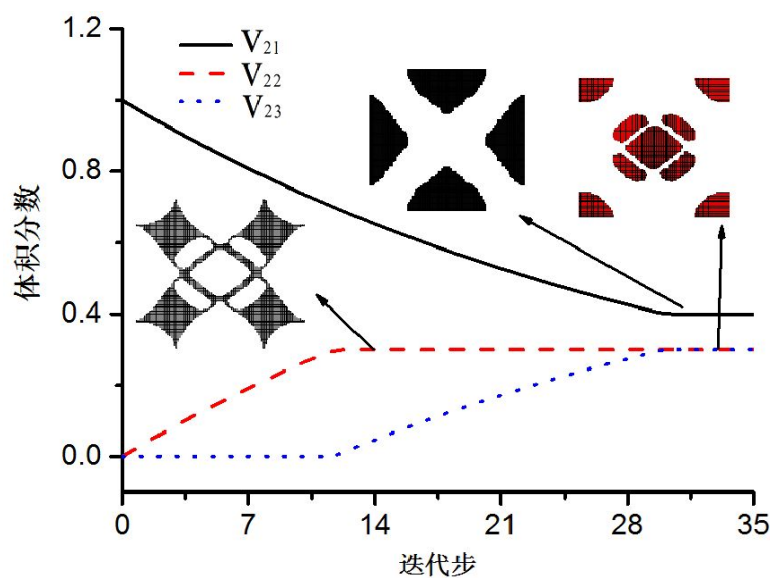


图 6-18 等效材料 2 对应的微观胞元材料布局优化历程

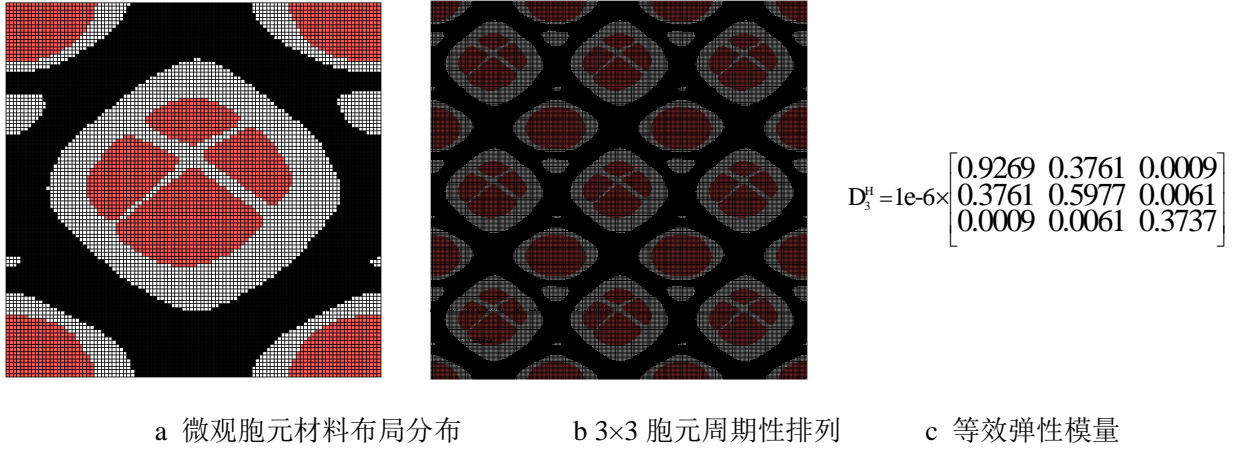


图 6-19 等效材料 3 对应的微观胞元材料布局分布及 3×3 胞元周期性排列

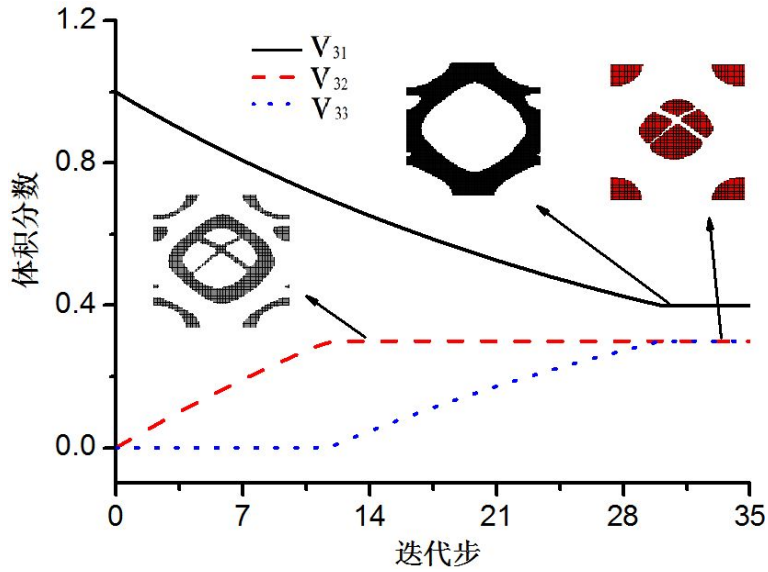


图 6-20 等效材料 2 对应的微观胞元材料布局优化历程

在图6-13宏观结构的材料最优分布结果中，黑色、白色、红色分别对应着等效材料1、等效材料2和等效材料3。这三种材料等效弹性模量由图6-15a、图6-17a 和图6-19a 对应着的单胞材料属性及其分布决定的，通过均匀化方法可分别求得  $D_1^H$ （图6-15c）、 $D_2^H$ （图6-17c）和  $D_3^H$ （图6-19c）。同时，在图6-14到图6-16中，黑色、白色、红色分别表示为基础材料11（21、31）、基础材料12（22、32）和基础材料13（23、33）。可以看出，优化结果有效的克服了棋盘格等现象，不同材料之间界限分明，分布合理。从优化历程来看，无论是宏观结构还是微观层面上胞元的材料最有分布优化都十分稳定，目标函数缓慢升高，材料分布具有严格的对称性，这一特征符合宏观结构的边界条件和受力特征。

## 6.5 本章小结

本章在一体化优化方法的基础上，按照材料属性排序引入材料插值函数依次进行灵敏分析，建立周期性多相材料微结构布局及宏观结构拓扑并发优化方法的一般规律，并以典型算例为基础对方方法进行了合理性验证，并得到了以下结论：

1、对于同一结构优化问题，当基础材料属性取值不同，对微观单胞模型和宏观优化结果都有不同程度的影响。在宏观层面上，这种差异主要表现在细节方面，而结构整体分布趋势并未改变。而微观单胞层面上这些区别更为明显，特别是出现了等效材料 1 胞元和等效材料 2 胞元不一致，这主要是因为其对应的基础材料弹性性能比的差异造成的，这也进一步说明，不同材料之间的主要性能比决定着材料最优布局分布。另外，经过周期性排列后这些差异将会进一步缩小，其材料分布大致趋势是一致的。

2、不同宏观初始有限元模型无论是对宏观结构还是对微观胞元的优化结果几乎都没有影响，可见，从不同的宏观材料布局出发，总能得到一致的最优优化结果。

3、取不同微观胞元初始有限元模型对宏观优化结果几乎都没有影响，而微观单胞存在一些区别，这说明了微观胞元的材料布局优化分布对初始模型更加敏感，这主要是由其周期性边界条件的加载方式决定的，这也进一步要求在微观层次上优化过程中对计算精度要求更高。然而，对于单一胞元之间存在的差异，在经过周期性排列后却得到了极其相似的序列，特别是其等效弹性模量差异几乎可忽略。

4、由于优化过程中，宏观结构受力的特性嵌入微观敏度“生成”过程，使得新型材料具备了特定宏观结构力学需求的更加轻型、高强的最佳力学性能；同时，微观材料胞元的等效材料属性又是宏观结构优化的基础材料，从而使得微观材料和宏观结构具有尺度上统一。

相关算例表明，该方法不仅克服了拓扑优化领域常见的“棋盘格”现象，而且整体优化过程稳定，得到了边界清晰的多相材料合理分布布局和宏观结构的拓扑形状，具有很强的工程实际应用价值。



## 第七章 总结与展望

### 7.1 工作总结

本文在分析传统 BESO 方法存在不足的基础上, 针对性的对数值计算方法进行了合理的改进。并在此基础上分别对宏观结构、微结构优化、材料结构一体化等相关问题进行了多尺度、多相复合材料布局及拓扑优化的研究工作, 取得的成果总结如下:

1、通过对传统 BESO 方法的数值计算方法合理的改进有效消除了网格依赖、棋盘效应、以及解的不收敛等数值问题, 使结构优化结果受力更加合理。基于非设计区域和设计区域的区域分割思想对结构进行了定向拓扑优化, 将其成功用于对预设结构有特定使用或美观要求及设计区域模糊或未知情况下的结构优化设计。并对重要参数选取问题给出了合理的建议, 对实际优化应用具有较好的指导意义。

2、基于引入惩罚指数材料插值方案的改进灵敏度可有效地解决传统 BESO 方法不能胜任的多相材料分布优化和材料/结构一体化优化问题。改进后的优化算法, 不仅优化结果合理, 而且优化过程稳定, 有利于结构加工成型。

3、考虑微观尺度和宏观尺度的关联性, 建立的微观材料构型及结构并行优化算法得到的结果, 区别于材料或结构的独立优化结果: 材料是最优结构下的最优材料, 结构则是最优材料下的最优结构, 即宏观结构性能和微观材料胞元构型具有尺度上的统一, 最大限度的发挥了材料性能。相关算例表明, 微观结构的拓扑形状与材料布局依赖于宏观结构尺寸、载荷及初始边界条件等, 而与网格划分等随机因素关系不大。

4、基于编写的第三方插件, 将 MATLAB 数值计算与 ABAQUS 有限元计算进行数据交换, 开发了软件协同工作平台。简单的 ABAQUS 建模软件界面降低了对设计人员技能要求, 灵活的 MATLAB 二次开发平台为算法改进提供了广阔的空间。

5、通过对协同工作平台的并行计算开发, 在保证精度的前提下, 计算效率成倍提高, 大大降低了计算时间成本, 从而促进了大型复杂工程优化的技术转换。

### 7.2 未来展望

结构优化设计中的尺寸优化和形状优化已相对成熟, 而拓扑优化尚处于理论探索阶段。因此, 拓扑优化这一研究课题引起了各国学者极大的兴趣, 呈现出加速发展的态势。针对本文所研究的问题在以下几个方面还有许多工作需要突破:

1、材料交界处连接方式的考虑: 在多相材料优化过程中, 本文基于各相材料界面完全联结的假设, 在实际情况中不能得到满足。实际上由于不同材料属性的差异, 在其交界处往往出现应力集中现象, 往往可能造成结构破坏, 这种由于材料属性突变引起的高应力需要通过引入梯度功能材料使交界处材料属性过渡的方法来降低, 这将是实际工程应用之前需要考虑和解决的问题。

2、尺度的关联性: 本文考虑的多尺度问题实质上是建立在微观和宏观尺寸存在数

量级的差异假设基础上（即，微观尺寸远远小于宏观尺寸）。实际工程上，结构和材料的尺寸差异往往存在确定的尺度量值区间。算法上引入尺度量值变量和取值区间，研究对材料/结构协同优化的影响，有着重要的实际工程价值。

3、多场耦合优化设计：多相复合材料，特别是微观层面的多相材料的不同布局往往可以得到具有抗冲击、吸能、隔热、吸音等良好的复合型多功能材料，这也是多尺度优化和微观材料优化被科研人员投入大量精力研究的主要原因之一。另外，日益增加的多场耦合工作环境对材料的复合性能提出了更高的要求，特别是在航空航天领域对结构性能和轻量化的苛刻要求，使得轻质的多功能材料一体化设计具有重要的实际意义。



## 参考文献

- [1] 王斌. 结构多性能优化设计及其在航天结构设计中的应用[D]. 大连:大连理工大学, 2010: 7-12.
- [2] Mines R A W. On the Characterization of Foam and Micro-Lattice Materials Used in Sandwich Construction[J]. *International Journal of Strain*, 2008. 44(1): 71 - 83.
- [3] 邓佳东. 耦合热弹性问题结构材料并发拓扑优化[D]. 大连: 大连理工大学, 2012: 13-16.
- [4] 王斌, 阎军, 程耿东. 特定方向“零膨胀”的最小柔顺性结构优化设计[J]. *计算力学学报*, 2010, 4 (27): 577-582.
- [5] 刘书田, 曹先凡. 零膨胀材料设计与模拟验证[J]. *复合材料学报*, 2005, 22(1):126-132.
- [6] 汤亚男. 基于均匀化理论的材料微结构拓扑优化研究[D]. 湖南: 湘潭大学, 2011: 21-25.
- [7] 袁振, 吴长春. 复合材料周期性线性微结构拓扑优化设计[J]. *固体力学学报*, 2003, 24(1): 40-45.
- [8] 牛斌. 基于结构和材料一体化的多尺度动力优化设计[D]. 大连: 大连理工大学, 2010: 25-56.
- [9] Siground O. Morphology-Based Black and White Filters for Topology Optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(4-5): 401-424.
- [10] Qi H, Kikuchi N, Mazurder J. Interface study and boundary smoothing on designed composite material microstructures for manufacturing purposes[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, 26(5): 326-332.
- [11] 唐绍锋. 复合材料热/力学性能的双尺度渐近分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009: 77-84.
- [12] Bendsøe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2):197-224.
- [13] 杜春江. 连续体结构拓扑优化理论及其在炮塔结构设计中的应用研究[D]. 江苏: 南京理工大学, 2008: 63-66.
- [14] 张强. 基于设计空间调整的连续体结构拓扑优化方法及应用研究[D]. 湖南: 长沙理工大学, 2009: 45-46.
- [15] Bendsøe M P. Optimal shape design as a material distribution problem[J]. *Structural Optimization*, 1989, 4(1): 193-202.
- [16] Yin L, Anant hasureshG K. Topology optimization of compliant mechanisms with

- multiple materials using a peak function material interpolation scheme[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 17(23): 49-62.
- [17] Wang M Y, Zhou S W. A phase-field method for topology optimization with three material phases[C]. New York: 10th Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, 2004:2902-2922.
- [18] 左孔天. 连续体结构拓扑优化理论与应用研究[D]. 湖北: 华中科技大学, 2004: 13-16.
- [19] Sigmund O. Design of material structures using topology optimization[D]. Denmark: Technical University of Denmark, 1994: 15-16.
- [20] Mlejnek, H. P. and Schirmacher R. An engineering approach to optimal material distribution and shape finding[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, 10(6): 1~26.
- [21] Bendsøe M. P and Sigmund O. Material interpolations in topology optimization[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69(16): 635~654.
- [22] Theocaris P. S. and Stavroulakis G. E. Optimal material design in composites: An iterative approach based on homogenized cells[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 169(12): 31~42.
- [23] Rietz A. Sufficiency of a finite exponent in SIMP (power law) methods[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(6): 159-163.
- [24] Suzuki K, Kikuchi N. A homogenization method for shape and topology optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 93(3): 291-318.
- [25] Yang R J, Chang C H. Optimal topology design using linear programming[J]. *Computers and Structures*, 1995, 52(2): 265 -275.
- [26] 蔡新, 李洪煊, 武颖利, 朱杰. 工程结构优化设计研究进展[J]. *河海大学学报*, 2011, 3(39): 269-274.
- [27] Mlejnek H P. Some aspects of the genesis of structures[J]. *Structural Optimization*, 1992, 5(12): 64~69.
- [28] 王健, 程耿东. 应力约束下薄板结构的拓扑优化[J]. *固体力学学报*, 1997, 14(4): 317~322.
- [29] 袁振, 吴长春, 庄守兵. 基于杂交元和变密度法的连续体结构拓扑优化设计[J]. *中国科学技术大学学报*, 2001, 31(6): 694~699.
- [30] 王振海, 张卫红. 柔性结构拓扑优化设计发展概况[J]. *机械设计*, 2004, 21(3): 1~4.
- [31] Tenek L.H., Hagiwara I. Optimal rectangular plate and shallow shell topologies using thickness distribution or homogenization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics*

- and Engineering, 1994, 115(2): 111~124.
- [32] Belytschko T., Xiao S. P., Parimi C. Topology optimization with implicit functions and regularization[J]. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2003, 57(12): 1177~1196
- [33] 贺丹. 渐进结构优化方法的改进策略及应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2008, 63-66.
- [34] 隋允康, 叶红玲, 杜家政. 结构拓扑优化的发展及其模型转化为独立层次的迫切性[J]. 工程力学, 2005, 26 (51):107-118
- [35] 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面弹性体的拓扑优化[J]. 大连理工大学学报, 1995, 10(22):1-9.
- [36] 王健, 程耿东. 具有应力和厚度约束的平面弹性体结构拓扑优化设计[J]. 机械科学与技术, 2002, 10(5):741-744.
- [37] 周克民, 胡云昌. 利用变厚度单元进行平面连续体的拓扑优化[J]. 天津城市建设学院学报, 2001, 35(41):33-35.
- [38] 周克民, 胡云昌. 用可退化有限单元进行平面连续体拓扑优化[J]. 应用力学学报, 2002, 47 (21):124-126.
- [39] 周克民, 胡云昌. 结合拓扑分析进行平面连续体拓扑优化[J]. 天津大学学报, 2002, 64(33):340-345.
- [40] Sui Y.K., Yang D.Q. A new method for structural topological optimization based on the concept of independent continuous variables and smooth model[J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 18(2): 179~185.
- [41] 杨建国. 两种连续体拓扑优化方法研究及软件二次开发[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009, 21-26.
- [42] 金炜枫. 轻质材料微结构的多目标拓扑优化设计[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007, 14-17.
- [43] 隋允康, 杨德庆. 统一骨架与连续体的结构拓扑优化的 ICM 理论与方法[J]. 计算力学学报, 2000, 17(1): 28~33.
- [44] 叶红玲. 位移约束下连续体结构拓扑优化分析[J]. 北京工业大学学报, 2007, 33(9): 908~914.
- [45] 隋允康, 张学胜, 龙连春. 位移约束集成化处理的连续体结构拓扑优化[J]. 固体力学学报, 2006, 27(1):102~106.
- [46] 隋允康, 叶红玲, 彭细荣. 连续体结构拓扑优化应力约束凝聚化的 ICM 方法[J]. 力学学报, 2007, 39(4): 554~563.
- [47] 张寅. 基于改进离散粒子群优化的拓扑优化方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2013:114-117.

- [48] 彭梁. 双向渐进结构拓扑优化方法的改进及应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012:34-39.
- [49] Bendsøe M P, Sokolowski J. Shape Sensitivity Analysis of Optimal Compliance Functionals[J]. *Mechanics of Structures and Machines*, 1995, 23(1): 35-58.
- [50] Olhoff N, Bendsøe M P, Rasmussen J. On CAD-integrated topology and design optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 89(1): 259-279.
- [51] Jog C S, Haber R B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 130(3):203-226.
- [52] Diaz A. and Siglund O. Checkerboard patterns in layout optimization[J]. *Structural Optimization*, 1995, 17(31):40-45.
- [53] 袁振, 吴长春. 采用非协调元的连续体拓扑优化设计[J]. *力学学报*, 2003, 3(35): 176-180.
- [54] Bruns T E, Tortorelli D A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(26):3443-3459.
- [55] Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in matlab[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(2):120-127.
- [56] 王宪杰, 张洵安. 多相材料布局及材料/结构一体化设计[J]. *固体力学学报*, 2014, 4(35): 1-6.
- [57] Bendsøe M P, Sigmund O. *Topology optimization: Theory, methods and applications*[M]. Berlin: Springer, 2004.
- [58] Zhou M, Shyy Y K, Thomas H L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(2): 152-158.
- [59] Petersson J, Sigmund O. Slope constrained topology optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 41(22):1417~1434.
- [60] Fujii D, Kikuchi N. Improvement of numerical instabilities in topology optimization using the SLP method[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2000, 19: 113~121.
- [61] Yoon Yong Kim, Gil Ho Yoon. Multi-resolution multi-scale topology optimization a new paradigm[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(12):5529~5559.
- [62] 苏文政. 基于偶应力理论的多孔固体材料与结构的分析与设计[D]. 大连: 大连理工

- 大学, 2009:14-19.
- [63] 程耿东. 关于桁架结构拓扑优化设计中的奇异最优解[J]. 大连理工大学学报, 2000, 40(4): 379~383
- [64] 贾海朋. 结构与柔性机构拓扑优化[D]. 大连: 大连理工大学, 2004, 17-21.
- [65] 程耿东, 郭旭. 考虑局部稳定性约束的桁架拓扑优化设计[J]. 大连理工大学学报, 1995, 42(16): 770-775
- [66] 傅晓锦. 连续体结构的拓扑与形状集成优化算法[J]. 计算力学学报, 2010, 27(2): 244-251.
- [67] Zuo Z H, Xie Y. M., Zhao B. An innovative design based on CAD environment[C]. Guang Zhou: Proceedings of the international Conference on Advanced Design and Manufacturing Engineering, 2011: 115-116.
- [68] 张新超. 基于 ABAQUS 的位移约束结构拓扑优化方法研究[D]. 长沙:长沙理工大学, 2012: 117-121.
- [69] 徐巍. 基于 ANSYS 连续体的拓扑优化与预应力优化[D]. 武汉: 华中科技大学, 2012: 14-15.
- [70] 吴淑芳. 基于 CAD/CAE 快速响应的机械结构 GBESO 法拓扑优化及模型重构研究 [D]. 太原: 中北大学, 2014:19-21.
- [71] 冯超恒. 基于现有软件的结构拓扑优化设计实现技术与程序系统[D]. 大连: 大连理工大学, 2006:12-13.
- [72] Hayes A M, Wang A J, Dempsey B M. Mechanics of Linear Cellular Alloys[J]. Mechanics of Materials, 2004, 36(8): 691-713.
- [73] Colombo P. Conventional and Novel Processing Methods for Cellular Ceramics[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society a Mathematical Physical and Engineering Sciences, 2006, 64(38): 109-124.
- [74] Wallach J C, Gibson L J. Mechanical Behavior of a Three-Dimensional Truss Material[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(40):7181-7196.
- [75] Wadley H N G. Multifunctional Periodic Cellular Metals[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society a Mathematical Physical and Engineering Sciences, 2006, 364 (1838): 31-68.
- [76] Studart A R, Gonzenbach U T, Tervoort E. Processing Routes to Macroporous Ceramics: A Review[J]. Journal of the American Ceramic Society, 2006, 89(6):1771-1789.
- [77] Sigmund. A new class of extremal composite[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2000, 43(48): 397- 428.
- [78] Neves M M, Rodrigues H, Guedes J M. Optimal design of periodic linear elastic

- Microstructures [J]. Computers and Structures, 2000, 76(3):421- 429.
- [79] 张卫红, 汪雷, 孙士平. 基于导热性能的复合材料微结构拓扑优化设计[J].航空学报, 2006,27(6):1229-1233.
- [80] Andrews E W, Gioux G, Onck P. Size effects in ductile cellular solids. Part ii : Experimental results[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2001, 43(3): 701-713.
- [81] 王凤稳. 复合材料等效性能计算及优化设计[D]. 西安: 西北工业大学, 2007:15-16.
- [82] Lakes. Foam structures with negative Poisson's ratio[J]. Science, 1987, 235:10-38.
- [83] Sigmund O. Material with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem[J]. International Journal of solid and Structures, 1994, 31(17):2313-2329.
- [84] Sigmund O. Tailoring material with prescribed elastic properties[J]. Mechanics of material, 1994, 20:351-368.
- [85] Kalidindi S R, Houskanp M, Adams B L. Microstructure engineering in design[C]. Atlanta :9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 2002: 55-67.
- [86] Vemaganti K, Rakshit A, Nuggehally M. Design of material with prescribed properties using topology optimization[J]. International Journal of solid and Structures, 2001, 38(40):81-96.
- [87] Gibiansky L V, Sigmund O. Multiphase composites with extreme bulk modulus[J]. Journal of the mechanics and physics of solids, 2000, 43(48): 397- 428
- [88] Silva ECN, Fonsea JSO, Kikuehi N. Optimal design of piezoelectric microstructures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 19:397-10.
- [89] Sigmund O, Torquato S. Design with extreme thermal expansion using a three phase topology optimization method[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997, 45: 1037-1067
- [90] Sigmund O, Torquato S. Composite with extremal thermal expansion coefficients[J]. Applied Physics Letters, 1996, 69(21): 3203-3205
- [91] 袁振, 吴长春. 复合材料周期性线弹性微结构的拓扑优化设计[J]. 固体力学学报, 2003, 24(1): 40-45.
- [92] 张卫红, 汪雷, 孙士平. 基于导热性能的复合材料微结构性能复合材料设计[J]. 航空学报, 2006, 27(4): 1229-1233.
- [93] 程耿东, 刘书田. 单向纤维复合材料导热性能预测[J]. 复合材料学报, 1996, 13(1): 78-85.
- [94] 刘书田, 程耿东. 用均匀化方法预测单项纤维复合材料热膨胀行为[J]. 复合材料学

- 报, 1997, 18(2):124-127.
- [95] 刘书田, 郑新广, 程耿东. 特定弹性性能材料的细观结构设计优化[J]. 复合材料学报, 2001, 18(2):17-21.
- [96] 赵康, 郭旭, 丁佳. 基于拓扑描述函数的特定性能复合材料设计[J]. 力学学报, 2005, 37(5): 586-592.
- [97] 刘远东, 尹益辉, 胡文军. 周期性复合材料微结构的多目标拓扑优化设计[J]. 航空学报, 2009, 27(6): 129-133.
- [98] Guedes J. M. and Kikuchi N. Preprocessing and Postprocessing for Materials based on the Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990, 83: 143-198.
- [99] Suzuki K, Kikuchi N. Shape and topology optimization by a homogenization method[J]. Applied Mechanics Division, 1990, 15-30.
- [100] 曹礼群, 崔俊芝, 王崇愚. 非均质材料多尺度物理问题与数学方法[C]. 学术报告会, 珠海: 物性多尺度耦合与相关算法, 2002, 10:69-80
- [101] Wang Michael Yu, Wang Xiaoming, Guo Dongming. A level set method for structural topology optimization[J]. Computer Methods in Applied and Mechanics and Engineering, 2003, 192: 227-246
- [102] Giuseppe C. A. Hierarchical Solution of Large-Scale Three-Dimensional Topology Optimization Problems: [D]. Michigan: Michigan State University, 1996:15-16.
- [103] Lin C. Y. and Chou J. N. A two-stage approach for structural topology optimization[J]. Advances in Engineering Software, 1999, 30:261-271
- [104] 潘燕环, 嵇醒, 薛松涛. 单向复合材料损伤刚度的双重均匀化方法[J]. 同济大学学报, 1997, 25(6): 623-628
- [105] 曹先凡, 刘书田. 基于拓扑描述函数的特定性能材料设计方法[J]. 固体力学学报, 2006, 27(3): 217-222
- [106] Michel J. C., Moulinec H. and Suquet P. Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach[J]. Computer Methods in Applied and Mechanics and Engineering, 1999, 172: 109-143
- [107] S Nishiwaki, C. N. Silva, Y. Li, N. Kikuchi. Topology Optimization for flextensional actuators[C]. 7th AIAA Symposium on multidisciplinary Analysis and Optimization, 1998, 41(3): 1883-1887.
- [108] Diaz A. R. and Bendsøe M. P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method[J]. Structural Optimization, 1992, 4:17-22
- [109] Lazarus H. Tenek and Ichiro Hagiwara. Static and vibrational shape and topology

- optimization using homogenization and mathematical programming[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993, 109:143-154
- [110] C. Cswan, I. Kosaka. Homogenization-based analysis and design of composites[J]. Computers and Structures, 1997, 64: 603-621.
- [111] A. R. Diaz, N. Kikuchi. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 35:1487-1502
- [112] J. M. Crolet, B. Aoubiza, A. Meunier. Compact Bone: Numerical Simulation of Mechanical Characteristics[J]. Journal of Biomechanics, 1993, 26: 677-687
- [113] S. J. Hollister, D. P. Fyhrie, K. J. Jepsen. Application of homogenization theory to the study of trabecular bone mechanics[J]. Journal of Biomechanics, 1991, 24(9):825-839
- [114] C. C. Ko, D. H. Kohn, S. J. Hollister. Micromechanics of implanttissue interfaces[J]. The Journal of oral implantology, 1992, 18(3): 220-230.
- [115] 刘书田, 程耿东, 顾元宪. 基于均匀化理论的多孔板弯曲问题新解法[J]. 固体力学学报, 1999, 20(3):195-200.
- [116] 刘书田, 程耿东. 球形空心材料导热性能预测研究[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2):137-144.
- [117] 刘书田, 程耿东. 基于均匀化理论的复合材料热膨胀系数预测方法[J]. 大连理工大学学报, 1995, 3(5):451-457.
- [118] 刘书田, 程耿东. 基于均匀化理论的梯度功能材料优化设计方法[J]. 宇航材料工艺, 1995, 26(6): 21-27.
- [119] 谢先海, 廖道训. 均匀化理论中等效弹性模量的计算[J]. 华中科技大学学报, 2001, 29(4): 44-46.
- [120] 董纪伟等. 基于均匀化理论的三维编织复合材料细观应力数值模拟[J]. 复合材料学报. 2005, 22(6):139-143.
- [121] 谢桂兰. 聚合物基复合材料多尺度方法的研究[D]. 湘潭: 湘潭大学基础力学与材料工程研究所. 2006:42-44.
- [122] 孙士平, 秦国华, 张卫红. 多相多孔材料/结构的集成优化设计[J]. 航空学报. 2009(1): 186-192.
- [123] 刘书田, 程耿东. 复合材料应力分析的均匀化方法[J]. 力学学报. 1997, 29(3) 306-313.
- [124] 冯淼林, 吴长春, 孙慧玉. 基于三维均匀化理论预测编织复合材料等效弹性模量[J]. 材料科学与工程, 2001, 19(3): 34-37.
- [125] Feng Miaolin, Wu Changchun. Study on 3-dimensional 4-step braided piezoceramic



- composites by homogenization method[J]. *Composites Science and Technology*, 2001, 5(5): 1889-1898.
- [126] 刘书田, 贾海鹏, 贺丹, 张永存. 散热结构设计的拓扑优化方法[C]. 中国力学学会学术大会, 2005, 28.
- [127] 王崇愚. 多尺度模型及相关分析方法[J]. *复杂系统与复杂性科学*, 2004, 1: 9~19
- [128] 吴立军. 宏观尺度位移反演分析研究及其多尺度问题探讨[D]. 大连: 大连理工大学, 2006, 42-44.
- [129] 雷友锋, 魏德明, 高德平. 微观力学有限元法预测复合材料宏观有效弹性模量[J]. *燃气涡轮试验与研究*, 2003, 16(3):11-15.
- [130] Rodrigues H, Guedes J M, Bendsøe M P. Hierarchical optimization of material and structure[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2002, 24(1): 1-10.
- [131] 刘岭, 阎军, 程耿东. 考虑均一微结构的结构/材料两级协同优化[J]. *计算力学学报*, 2008, 25(1): 29-34
- [132] Liu L, Yan J, Cheng G. Optimum structure with homogeneous optimum truss-like material[J]. *Computers and Structures*, 2008, 86(13):1417-1425.
- [133] Zhang W, Sun S. Scale-related topology optimization of cellular materials and structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006, 68(9): 993-1011.
- [134] J. T. Oden, T. I. Zohdi. Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures[J]. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, 148(3): 367-391
- [135] 刘晓奇. 多孔复合材料周期结构的多尺度模型与高精度算法[D]. 湖南: 湖南师范大学, 2006, 24-23
- [136] Coelho P G, Fernandes P R, Rodrigues H C. Numerical modeling of bone tissue adaptation ahierarchical approach for bone apparent density and trabecular structure[J]. *Journal of Biomechanics*, 2009, 42(7): 830-837.
- [137] P. W. Chung, K. K. Tamma, R. R. Namburu. A micro/macro homogenization approach for viscoelastic creep analysis with dissipative correctors for heterogeneous woven-fabric layered media[J]. *Composite Science and Technology*, 2000, 60: 2233~2253
- [138] N. Takano, M. Zako. Three-dimensional microstructural design of woven fabric composite material by homogenization method[J]. *Pressure Vessels and Piping*, 1995, 302: 141~146
- [139] J. Fish, Q. Yu. Two-scale damage modeling of brittle composites[J]. *Composites Science and Technology*, 2001, 61: 2215~2222

- [140] X. Wu, N. Ohno. A homogenization theory for time-dependent nonlinear of composites with periodic internal structures[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 36: 4991~5012
- [141] S. Ghosh, K. Lee, S. Moorthly. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and Voronoi cell finite element model[J]. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, 132: 63~116
- [142] Chellappa S, Diaz AR, Bendsøe M P. Lay out optimization of structures with finite-sized features using multiresolution analysis[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, 26(1), 77-91.
- [143] 阎军, 程耿东, 刘岭. 基于均匀材料微结构模型的热弹性结构与材料并发优化[J]. *计算力学学报*, 2009, 26(1), 1-7
- [144] Liu S T, Su W Z. Topology optimization of couple-stress material structures[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 40(1), 319-327.
- [145] Wang B, Cheng G. Design of cellular structures for optimum efficiency of heat dissipation[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2005, 30(6), 447-458.
- [146] 董纪伟. 基于均匀化理论的三维编织复合材料宏观力学性能数值模拟[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007, 14~16
- [147] Feng Yongping, Cui Junzhi. Multi-scale FE computation for the structure of composite materials with small period configuration under condition of coupled thermoelasticity[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, 20(1): 54~63
- [148] 余新刚. 复合材料强度参数预测的多尺度分析方法[D]. 北京: 中国科学院研究生院, 2006, 51(14): 54~63
- [149] Yan J, Cheng G D, Liu L. A Uniform Optimum Material Based Model for Concurrent Optimization of Thermoelastic Structures and Materials[J]. *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*, 2008, 4(2): 259-266.
- [150] Niu B, Yan J, Cheng G D. Optimum Structure with Homogeneous Optimum Cellular Material for Maximum Fundamental Frequency[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 39(2):115-132.
- [151] Xie Y. M., Steven G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. *Computers and Structures*, 1993, 49:885-886
- [152] 谢亿民, 黄晓东, 左志豪, 唐继武, 荣见华. 渐进结构优化法 ESO 和双向渐进结构优化法 BESO 的近期发展[J]. *力学进展*, 2011, 41(4), 462-469
- [153] 荣见华, 谢亿民, 姜节胜. 渐进结构优化设计的现状与进展[J]. *长沙: 长沙交通学院学报*, 2001, 44(3):16-23

- [154] 谢亿民,杨小英, Steven G P. 渐进结构优化法的基本理论及应用[J]. 工程力学, 1999, 6(16): 70-81.
- [155] H. Kim, O. M. Querin, G. P. Steven. Improving efficiency of evolutionary structural optimization by implementing fixed grid mesh[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2003, 24:441-448.
- [156] Li Q, Steven G P, Xie Y. M.. A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 22: 230-239.
- [157] D. Nha Chu, Y. M. Xie, G. P. Steven. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints[J]. Finite elements in analysis and design, 1996, 21:239-251.
- [158] Pasi Tanskanen. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2002, 191:5485-5498.
- [159] 郭中泽, 陈裕泽, 张卫红, 邓克文. 渐进结构优化的一种高阶棋盘格式抑制方法[J]. 机械设计, 2006, 23(5) :58-59.
- [160] 罗志凡, 荣见华, 杜海珍. 一种基于主应力的双方向渐进结构拓扑优化方法[J]. 应用基础与工程科学学报, 2003, 11(1):98-105.
- [161] 陈敏志. 基于自适应有限元的结构拓扑优化法[D].南京: 河海大学, 2006 :172-175.
- [162] 荣见华, 姜节胜, 颜东煌. 基于人工材料的结构拓扑渐进优化设计[J]. 工程力学, 2004, 44(5): 64-71.
- [163] 荣见华, 姜节胜, 胡德文. 基于应力及其灵敏度的结构拓扑渐进优化方法[J]. 力学学报, 2003, 12(5): 584-591.
- [164] Young V, Querin O M, Steven G.P. 3D and multiple load case bi-directional evolutionary structural optimization (BESO)[J]. Structural Optimization, 1999, 18(2-3):183-192.
- [165] Huang X, Xie Y. M.. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 43:1039-1049.
- [166] 孔文秦. 连续体结构双向渐进优化方法研究[D]. 南京:南京航空航天大学, 2004, 13-19.
- [167] Chu D N. Evolutionary Structural Optimization Method for Systems with Stiffness and Displacement Constraints[D]. Australia: Victoria University of Technology, 1997, 13-14.
- [168] Xie Y. M, Steven G. P. Evolutionary structural optimization for dynamic problems[J]. Computers and Structures, 1996, 58(6):1067-1073.
- [169] Chu D. Nha, Y. M. Xie, G. P. Steven. An evolutionary structural optimization method for sizing problems with discrete design variables[J]. Computers and Structures, 1998, 68:

419-431

- [170] G. P. Steven, Q. Li, Y. M. Xie. Multicriteria optimization that minimizes maximum stress and maximizes stiffness[J]. Computers and Structures, 2002, 8: 2433-2448
- [171] Mohammad Hossein Abolbashari, Shadi Keshavarzmanesh. On various aspects of application of the evolutionary structural optimization method for 2D and 3D continuum structures[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2006, 42:478-491
- [172] D. Manickarajah, Y. M. Xie, G. P. Steven. Optimum design of frames with multiple constraints using an evolutionary method[J]. Computers and Structures, 2000,74: 731-741
- [173] Manickarajah D, Xie Y. M., Steven G. P. An evolutionary method for optimization of plate buckling resistance[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1998, 29(3): 205-230.
- [174] Li Q, Steven G P, Xie Y. M. Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting fields[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2004, 47(23): 5071-5083
- [175] Das R, Jones R, Xie Y. M.. Design of structures for optimal static strength using ESO[J]. Engineering Failure Analysis, 2005, 12(1):61-80.
- [176] Yang X Y, Xie Y. M., Steven G P. Evolutionary methods for topology optimization of continuous structures with design dependent loads[J]. Computers and Structures, 2005, 83(12): 956-963
- [177] Ansola R, Canales J, Tarrago J A. An efficient sensitivity computation strategy for the evolutionary structural optimization of continuum structures subjected to self-weight loads[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2006, 42(14):1220-1230.
- [178] Li Q, Steven GP, Querin O.M, Xie YM. Shape and topology design for heat condition by evolutionary structural optimization[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 1999, 42:3361-3371.
- [179] C. B. Zhao, G. P. Steven, Y. M. Xie. Evolutionary optimization of maximizing the difference between two natural frequencies of vibrating structure[J]. Structural Optimization, 1997, 13:148-154.
- [180] Xie Y. M., Steven G P. Evolutionary Structural Optimization[M]. London: Springer, 1997.
- [181] W Li, Q Li, Steven G P, Xie Y. M.. An evolutionary approach to elastic contact optimization of frame structures[J]. Finite element in analysis and design, 2003, 40:61-81.
- [182] Nha C D, Xie Y. M., Steven G P. An evolutionary structural optimization method for sizing problems with discrete design variables[J]. Computers and Structures, 1998, 68(4):

- 419-431.
- [183] Li Q, Steven G R, Querin O. M., Xie Y. M. On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization[J]. *Structural Optimization*, 1999, 18:67-73.
- [184] G. P. Steven, Q. Li, Y. M. Xie. Multicriteria optimization that minimizes maximum stress and maximizes stiffness[J]. *Computers and Structures*, 2002, 80(4): 2433-2448.
- [185] Li W., Li Q., Steven G. P., Xie Y. M. An evolution approach to elastic contact optimization of frame structures[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2003, 40: 122-132.
- [186] 杜海珍, 荣见华, 傅建林. 基于应变能的双方向结构渐进优化方法[J]. *机械强度*, 2005, 57(41): 72-77.
- [187] 荣见华, 唐国金. 一种三维结构拓扑优化设计方法[J]. *固体力学学报*, 2005, 26(3): 289-296.
- [188] 倪晓宇, 易红. 机床床身结构的有限元分析与优化[J]. *制造技术与机床*, 2005, 96(2): 47-50.
- [189] 王必军. 渐进结构优化方法在结构动力优化中的应用[J]. *山西建筑*, 2006, 26(4): 88-89.
- [190] 刘毅, 金峰. 用反向渐进结构优化方法研究洞室支护优化[J]. *计算力学学报*, 2006, 78(6): 659-662.
- [191] 李晶, 鹿晓阳, 赵晓伟. 统一强度双方向渐进结构拓扑优化方法[J]. *山东建筑大学学报*, 2008, 23(1):66-70.
- [192] 秦文炳. 基于应变能准则的斜拉桥结构优化设计研究[D]. 南京: 河海大学, 2007: 46-47.
- [193] V Young, O. M. Querin, G. P. Steven and Y. M. Xie. 3D bi-directional evolutionary structural optimization[C]. Sydney: Proceedings of the Australian conference on structural optimization, 1998: 275-282.
- [194] Qing Li, G. P. Steven, Y. M. Xie. Displacement minimization of thermoelastic structures by evolutionary thickness design[J]. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, 17(9):361-378.
- [195] Qing Li, G. P. Steven, Y. M. Xie, O. M. Querin. Evolutionary topology optimization for temperature reduction of heat conducting field[J]. *International Journal of Heat and Mass Trasfer*, 2004, 47(8):5071-5083
- [196] G. P. Steven, Y. M. Xie. Evolutionary topology and shape design for general physical field problems[J]. *Computational Mechanics*, 2000, 26:129-139

- [197] Hong Guan. G. P. Steven, Y. M. Xie. Evolutionary structural optimization incorporating tension and compression materials[J]. *Advances in Structural Engineering*, 1999, 2(4): 273-288
- [198] 孙圣权. 基于 ESO 的液压机下横梁结构拓扑优化及双向进化结构优化方法研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2008, 24(52): 273-288
- [199] 李芳, 凌道盛. 平面应力问题的结构拓扑优化[J]. *浙江工业大学学报*. 2000, 28(3): 220-223
- [200] 宿新东, 管迪华. 利用双向渐进结构优化法对结构固有振型的优化[J]. *机械强度*, 2004, 63(5):542-546.
- [201] Huang X, Xie Y. M., Burry M C. A new algorithm for bidirectional evolutionary structural optimization[J]. *International Journal Series*, 2006, 49(4):1091-1099.
- [202] Allaire G, Jouve F, Toader A M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 194:363-393.
- [203] Sethian J A, Wiegmann A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, 163(32):489-528.
- [204] M.P.Bendsø, O.Sigmund. *Topology Optimization Theory, Methods and Applications*[M]. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003:42-44.
- [205] Bendsøe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(1):197-224.
- [206] Zhou, M. and Rozvany, G.I.N. On the validity of ESO type methods in topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(75): 80–83.
- [207] Huang X, Xie Y. M.. *Evolutionary topology optimization of continuum structures methods and applications*[M]. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 2010:19-23.
- [208] 闫晓磊. 储能飞轮优化设计理论与方法研究[D]. 湖南: 湖南大学, 2012,15-16.
- [209] Querin O M, Young V, Steven G P. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 2000, 189(2): 559-573.
- [210] Huang X, Xie YM. A new look at the ESO/BESO optimization methods[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, 35(1): 89-92.
- [211] 罗阳军, 亢战. 连续体结构非概率可靠性拓扑优化[J]. *力学学报*, 2007, 39(1): 125-131.
- [212] Norato, J.A., Bendsøe, M.P. and Harber, R. A topological derivative method for topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33(3):

- 375-86.
- [213] 谢亿民, 黄晓东. 渐进结构优化法(ESO)和双向渐进结构优化法(BESO)的近期发展[J]. 力学进展, 2011, 41(4): 462-471.
- [214] Ansola R, Canales J, Tarrago J A. An efficient sensitivity computation strategy for the evolutionary structural optimization of continuum structures subjected to self-weight loads[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2006, 42(14-15):1220-1230.
- [215] 王宪杰, 张洵安. 结构定向拓扑优化及软件实现[J]. 应用力学学报, 2014, 6(31):945-950.
- [216] Huang X, Xie Y. M.. Convergent and mesh-dependent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2007, 43(14):1039-1049.
- [217] Bendsøe M P, Sigmund O. Material interpolation schemes in topology optimization[J]. Archive of Applied Mechanics, 1999, 69: 635-654.
- [218] Zhu J H, Zhang W H, Qin KP. Bi-directional evolutionary topology optimization using element replaceable method[J]. Computational Mechanics, 2007, 40(1):97-109.
- [219] 孙士平. 材料和结构的拓扑优化关键理论与方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2006,111-112.
- [220] 占金青, 卢清华, 张宪民. 多相材料的连续体结构拓扑优化设计[J]. 中国机械工程, 2013, 24(20):42-44.
- [221] Sigmund O. Design of multiphysics actuators using topology optimization - part II: two material structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190: 6605- 6627.
- [222] Haber RB, Bendsøe MP, Jog CS. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on the perimeter[J]. Structural Optimization, 1996, 11(7):9-12.
- [223] Bourdin B. Filters in topology optimization[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(9): 2143-2158.
- [224] Huang X, Xie YM. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials[J]. Computers and Structures, 2009, 43:393-401.
- [225] 刘培生. 多孔材料引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [226] B Hassani, E Hinton. A review of homogenization and topology optimization homogenization theory for media with periodic[J]. Computer and Structure, 1998 (69): 719- 738.
- [227] Bendsøe M P, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structure design using homogenization method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,

- 1988, 71(1): 197-224.
- [228]郭中泽, 张卫红, 陈裕泽. 结构拓扑优化设计综述[J]. 机械设计, 2007, 24(8):1-5.
- [229]孙士平, 张卫红. 多相材料微结构多目标拓扑优化设计. 力学学报, 2006, 38(5): 633- 638.
- [230]Y.H. Chen, S.W. Zhou, Q. Li. Design Optimization of Scaffold Microstructures Using Wall Shear Stress Criterion Towards Regulated Flow-Induced Erosion[J]. Computer and Structural, 2010, 88(16) :806-811.
- [231]E J Haug, K K Choi, V Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural Systems[J]. Academic Press, 1986, 42(11):31-33.
- [232]X. Huang, S.W. Zhou, Y.M. Xie, Q. Li. Topology optimization of microstructures of cellular materials and composites for macrostructures[J]. Computational Materials Science, 2013, 37(7):397-407.
- [233] Kolpakov AG. Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite[J]. Mechanics of Materials, 2005, 37:840-854.
- [234]刘岭. 超轻质材料和结构的协同分析与优化[D]. 大连: 大连理工大学, 2006, 1-2
- [235]Pedersen P. On optimal shapes in materials and structure[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2000, 19(3): 169-182.
- [236]Zuo Zhihao, Huang Xiaodong, Rong Jianhua, Xie, Yimin. Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies. materials and design[J]. 2013, 51:1023-1034.
- [237]高彤, 张卫红, Duysinx Pierre. 多相材料结构拓扑优化: 体积约束还是质量约束? [J]. 力学学报, 2011, 43(2):296-305.
- [238]Sigmund O, Torquato S, Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997, 45(6):1037-1067.
- [239]王凤稳, 张卫红, 孙士平, 龚晓路. 多相材料传热微结构的多目标优化设计[J]. 力学学报, 2007, 39(5): 708-714.
- [240] Mei Yulin, Wang Xiaoming. A level set method for structural topology optimization with multi-constraints and multi-materials[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 20(5): 507-518.
- [241]孙士平, 张卫红. 多相材料结构拓扑优化的周长控制方法研究[J]. 航空学报, 2006, 27(5): 963-968.
- [242]Zhou Shiwei, Wang MY. Multimaterial structural topology optimization with a generalized Cahn-Hilliard model of multiphase transition[J]. Structural and Multidi



- disciplinary Optimization, 2007, 33(2): 89-111.
- [243] 袁振, 吴长春. 复合材料扭转轴截面微结构拓扑优化设计[J]. 力学学报, 2003, 35(1): 39-41.
- [244] 张卫红, 孙士平. 多孔材料/结构尺度关联的一体化拓扑优化技术[J]. 力学学报, 2006, 38(4): 522-529.
- [245] 阎军, 刘岭, 刘晓峰, 邓佳东. 考虑尺寸效应的模块化结构两层级优化设计[J]. 力学学报, 2010, 42(2): 268-274.



## 致 谢

岁月如梭，近十年的大学生活就要结束。回想起来，此时百感交集，快乐而艰辛。期间，困惑、彷徨与失落，伴随着我完成了一个幼稚少年到科研工作者的蜕变。在此，谨对给予我支持与帮助的良好师友和亲人们致以最诚挚的谢意！

首先要感谢我的恩师张洵安教授。承蒙老师首肯，得以进入师门，这是我求学生涯中最幸运的事，在此我由衷的向他表示深深的谢意！硕士、博士期间，是他给我指引了人生道路的航标，给了我学习、生活和工作上无微不至的关怀。特别是在博士大论文的写作过程中，从研究方向确定到参考文献选取阅读、从理论公式推导到结构建模计算，每一步都凝聚着张老师的心血，学生在此表示由衷的感谢和深深的敬意！他宽厚仁慈、平易近人，真正秉承“传道、授业、解惑”的精神，在教授学生专业知识的同时，更从生活上关心学生。他为人师表，不仅是我的导师，更是我以后工作中学习的楷模。与此同时，感谢师母焦平老师。在平日生活中给予我很多的帮助，鼓励我不断进取。值此论文完成之际，谨向他们表示最诚挚的谢意！

感谢我的外导 Xie Y.M. 院士，在墨尔本皇家理工联合培养博士期间，Xie Y. M. 院士以严谨的治学态度、开阔的视野带给我深刻的启迪和奋进的动力，使我不仅学到丰富的知识、打下了坚实的专业基础，更锻炼了独立科研能力，为我以后的科研工作提供了巨大的助力。感谢 Huang X. D 副教授、Zhou S.W 老师、Shen J.H 研究员、Zuo Z. H 研究员，皇家理工学习期间在学习和生活中给予了我关心和帮助；与你们在一起的相处时光是我人生中最美好的回忆。谢谢！

特别感谢徐斌副教授、唐继武副教授，无论是澳大利亚共同学习期间，还是回国后的科研路上，你们给予我的指导、督促，这为我带来了巨大的帮助！感谢闫晓磊老师，在 Innovative Structures and Materials Centre 共同学习生活中点点滴滴，您的指点至今使我受益非浅。

感谢师兄连业达副教授和教研室的所有同学，在博士学习期间，通过与大家的交流，开阔了我视野、活跃了思维，也体验到了科研团队的团结协作所带来的乐趣，希望大家在以后的学习生活中都能一帆风顺！

感谢我的妻子宋雪，我今天的成就离不开你这些年来默默的支持与付出。这两年，我没能尽到应有的责任，是你的付出为家撑起一片天。感谢我的女儿和禾，半年前你的降临，是我爸爸拼搏的最大动力，让我在奋斗的历程中不感到疲倦。

最后感谢我的父母。你们含辛茹苦、默默的付出，让我顺利走完这二十多年的求学之道路，没有你们，就没有儿子的今天。父母之恩，水不能溺，火不能灭，唯有日后尽心尽孝！

感谢在百忙之中评审我博士学位论文的各位专家和学者！

谨以此文向关心和帮助过我的人表示最诚挚的谢意！

王宪杰

2015 年 6 月

## 攻读博士学位期间发表的学术论文和参加科研情况

已发表学术论文:

- [1] Xianjie Wang, Jianhu Shen, Zhi Hao Zuo, Xiaodong Huang, Shiwei Zhou, Yi Min Xie. Numerical investigation of compressive behavior of Luffa-filled Tubes[J]. International journal of Composites Part B: Engineering, 2015. (73): 149-157. (SCI: 000350780700017, IF: 2.91, JCR: 2 区; EI: 20150800536467)
- [2] Toi Limazie, Xun'an Zhang, Xianjie Wang. Vibration control parameters investigation of the mega-sub controlled structure system[J]. International journal of Earthquake and Structure, 2013, 5(2): 225-237. (SCI:000324814800005, IF: 1.951, JCR: 2 区)
- [3] 王宪杰, 张洵安. 基于宏观性能的微观多孔材料拓扑优化[J]. 功能材料, 2014. 18 (45): 18078 - 18082. (EI: 201446200024)
- [4] Wang Xianjie, Zhang Xun'an, Lian Yeda. The multi-objective optimization under random loads[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012. (166): 548 - 552. (EI: 20122315095938)
- [5] Lian Yeda, Wang Xianjie, Li Tao. Analysis of seismic response for the mega-sub controlled frame with friction damper[J]. Advanced Materials Research, 2012. (450): 1269-1273. (EI: 20120814782391)
- [6] Wang Xianjie, Zhang Xun'an, Toi Limazie, Lian Yeda. Structural Two-Parameter Exponential Damage Model Performance Analysis under Earthquake Excitation[J]. Procedia Earth and Planetary Science, 2014. (5): 275-279. (EI 待索引)
- [7] 王宪杰, 张洵安. 结构定向拓扑优化及软件实现[J]. 应用力学学报, 2014. 6 (31): 945 - 951.
- [8] 王宪杰, 张洵安. 多相材料布局及材料/结构一体化设计[J]. 固体力学学报, 2014. 4 (35): 341 - 346.
- [9] 连业达, 王宪杰, 张洵安, Limazie Toi. 结构地震累积损伤指标研究进展[J]. 工业建筑, 2012. 4(42):118-142.
- [10] 王宪杰, 张洵安. 多相复合材料微观拓扑优化设计[J]. 应用力学学报, 2015. 2(32): 225 - 230.
- [11] Toi Limazie, Xun'an Zhang and Xianjie Wang. The Nonlinear Dynamic Elasto- Plastic Analysis for Evaluating the Controlling Effectiveness and Failure Mechanism of the MSCSS [J]. World Academy of Science, Engineering and Technology, 2011, 5(12), 327-332 (EI: 20134216851439)

[12] Ye Jianjun, Zhang Xun'an, Wang Xianjie. Analysis of structural parameters of MSCS on of the overall failure probability of the structure[J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, (256-259): 635-640 (EI: 20130515975265)

[13] Yang Tao, Zhang Xun'an, Lian Yeda, Wang Xianjie, Wei Zheng. Impacts of additional columns on the vertical dynamic response of mega-beam in MSCSS[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012. (193): 810-813 (EI: 20124215583029)

**博士期间参与科研项目：**澳大利亚国家基金（41215001）；国家自然科学基金(51078311)；国家自然科学基金（51248007）；西北工业大学基础研究基金（3102014JCQ01042）；西北工业大学研究生种子基金（Z2012063 独立申请人，结题一等奖）

## 西北工业大学

### 学位论文知识产权声明书

本人完全了解学校有关保护知识产权的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属于西北工业大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版。本人允许论文被查阅和借阅。学校可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。同时本人保证，毕业后结合学位论文研究课题再撰写的文章一律注明作者单位为西北工业大学。

保密论文待解密后适用本声明。

学位论文作者签名： 王宪杰

2015 年 6 月 9 日

指导教师签名： 张红明

2015 年 6 月 9 日

## 西北工业大学

### 学位论文原创性声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容和致谢的地方外，本论文不包含任何其他个人或集体已经公开发表或撰写过的研究成果，不包含本人或其他已申请学位或其他用途使用过的成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式表明。

本人学位论文与资料若有不实，愿意承担一切相关的法律责任。

学位论文作者签名： 王宪杰

2015 年 6 月 9 日