ECON 7920
Econometrics II
Philip Shaw
Problem Set 5
Due Date: April 19, 2022

Chapter 13 Problems:
13.1, 13.2, 13.3

Problem 1

Using the data set apple.csv, create a variable $ecobuy = I(ecolbs > 0)$. Using as the explanatory variables *regprc*, *ecoprc*, and *age* conduct the following analysis.[1]

a. Under the assumption that the structural error term is independent of all x-variables and has a standard normal distribution derive the log-likelihood function.

b. Using the log-likelihood function from above, modify the qfunction.R script file to estimate the paramaters of interest via M-estimation.

c. Compute the t statistics under the zero null for each of the x-variables on interest. Do you reject the zero null for all variables?

d. Now using the probit command in R, compare your results to the ones under probit estimation. Do you conclusions change?[2]

e. Now compute the likelihood ratio test under the null hypothesis that *ecoprc* and *age* are jointly insignificant in determining $P(ecobuy = 1|x)$. Do you reject the null hypothesis?[3]

[1] For this problem you will need the script files qfunction.R, qderivfun.R, and qderivfun2.R.
[2] probitout = glm(y∼ x,family=binomial(link="probit"))
[3] Recall the command in R for the Chi-sqaured distribution function is $dchisq(LR, Q)$.

习　题

13.1　如果 $f(\mathbf{y}|\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ 表示对给定 $\mathbf{x}_i$ 时 $\mathbf{y}_i$ 密度的正确设定，那么 $\boldsymbol{\theta}_o$ 可以求解 $\max_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}\mathrm{E}[f(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i;\boldsymbol{\theta})]$ 吗？

13.2　假定对于一个随机样本，$y_i|\mathbf{x}_i\sim\mathrm{Normal}[m(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}_o),\sigma_o^2]$，其中 $m(\mathbf{x},\boldsymbol{\beta})$ 表示解释变量 $\mathbf{x}$ 的 K 维向量与 $P\times1$ 维参数向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的函数。回想起，$\mathrm{E}(y_i|\mathbf{x}_i)=m(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}_o)$ 且 $\mathrm{Var}(y_i|\mathbf{x}_i)=\sigma_o^2$。

a. 写出关于观测值 i 的条件对数似然函数。证明，$\boldsymbol{\beta}_o$ 的 CMLE 可求解问题 $\min_{\boldsymbol{\beta}}\sum_{i=1}^{N}[y_i-m(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})]^2$。换句话讲，$\boldsymbol{\beta}_o$ 的 CMLE 是非线性最小二乘法估计量。

b. 设 $\boldsymbol{\theta}\equiv(\boldsymbol{\beta}',\sigma^2)'$ 表示 $(P+1)\times1$ 维参数向量。求出一般 i 的对数似然得分。直接证明，$\mathrm{E}[\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)|\mathbf{x}_i]=\mathbf{0}$。为了证明得分条件期望为 0，你需要正态分布的什么特性是被正确设定的？

c. 利用一阶条件求出用 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 表示的 $\hat{\sigma}^2$。

d. 求出关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的对数似然函数的海赛矩阵。

e. 直接证明，$-\mathrm{E}[\mathbf{H}_i(\boldsymbol{\theta}_o)|\mathbf{x}_i]=\mathrm{E}[\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)'|\mathbf{x}_i]$。

f. 写出 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 的估计渐近方差，然后解释如何获得渐近标准误。

13.3　考察一般的二值响应模型 $\mathrm{P}(y_i=1|\mathbf{x}_i)=G(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\theta}_o)$，其中对于所有 $\mathbf{x}$ 与 $\boldsymbol{\theta}$，$G(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})$ 严格地位于 0 与 1 之间。此处，$\mathbf{x}$ 与 $\boldsymbol{\theta}$ 并不需要拥有相同的维数，设 $\mathbf{x}$ 表示一个 K 维向量，而 $\boldsymbol{\theta}$ 表示一个 P 维向量。

a. 写出关于观测值 i 的对数似然。

b. 对于每一个 i，求出得分。直接证明 $\mathrm{E}[\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)|\mathbf{x}_i]=\mathbf{0}$。

c. 当 $G(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})=\Phi[\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}+\delta_1(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta})^2+\delta_2(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta})^3]$ 时，求出检验 $\mathrm{H}_0:\delta_{o1}=0,\delta_{o2}=0$ 的 LM 统计量。

13.4　在纽韦-托奇-怀特（Newey-Tauchen-White）设定的检验背景下，请解释为什么我们可以取 $\mathbf{g}(\mathbf{w},\boldsymbol{\theta})=a(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})\mathbf{s}(\mathbf{w},\boldsymbol{\theta})$，其中 $a(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})$ 本质上是 $\mathbf{x}$ 与 $\boldsymbol{\theta}$

13.1　如果 $f(\mathbf{y}|\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ 表示对给定 $\mathbf{x}_i$ 时 $\mathbf{y}_i$ 密度的正确设定，那么 $\boldsymbol{\theta}_o$ 可以求解 $\max_{\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{\Theta}}\mathrm{E}[f(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i;\boldsymbol{\theta})]$ 吗？

For θ_0 as given, we can derive

$$\max_{\theta\in\Theta} E[\log f(y_i|x_i;\theta)]$$

But when we add exp to the above,

it becomes

$$\max_{\theta\in\Theta} E[\exp\{\log f(y_i|x_i;\theta)\}]$$

that's may not equal to the formula

$$\max_{\theta\in\Theta} E[f(y_i|x_i;\theta)]$$

So the answer to this question is no.

13.2 假定对于一个随机样本，$y_i|\mathbf{x}_i \sim \text{Normal}[m(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}_o),\sigma_o^2]$，其中 $m(\mathbf{x},\boldsymbol{\beta})$ 表示解释变量 $\mathbf{x}$ 的 K 维向量与 $P\times 1$ 维参数向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的函数。回想起，$\mathrm{E}(y_i|\mathbf{x}_i)=m(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}_o)$ 且 $\mathrm{Var}(y_i|\mathbf{x}_i)=\sigma_o^2$。

a. 写出关于观测值 i 的条件对数似然函数。证明，$\boldsymbol{\beta}_o$ 的 CMLE 可求解问题 $\min_{\boldsymbol{\beta}}\sum_{i=1}^{N}[y_i-m(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})]^2$。换句话讲，$\boldsymbol{\beta}_o$ 的 CMLE 是非线性最小二乘法估计量。

b. 设 $\boldsymbol{\theta}\equiv(\boldsymbol{\beta}',\sigma^2)'$ 表示 $(P+1)\times 1$ 维参数向量。求出一般 i 的对数似然得分。直接证明，$\mathrm{E}[\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)|\mathbf{x}_i]=\mathbf{0}$。为了证明得分条件期望为 0，你需要正态分布的什么特性是被正确设定的?

c. 利用一阶条件求出用 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 表示的 $\hat{\sigma}^2$。

d. 求出关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的对数似然函数的海赛矩阵。

e. 直接证明，$-\mathrm{E}[\mathbf{H}_i(\boldsymbol{\theta}_o)|\mathbf{x}_i]=\mathrm{E}[\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)'|\mathbf{x}_i]$。

f. 写出 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 的估计渐近方差，然后解释如何获得渐近标准误。

a. ∵ given x_i, y_i is normal distribution.

$$\therefore f(y_i|x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\cdot \exp\left(-\frac{(y_i-m(x_i,\beta_0))^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad ①$$

take log on Eqn (1)

$$\therefore \log f(y_i|x_i) = \underbrace{-\frac{1}{2}\log(2\pi)-\frac{1}{2}\log(\sigma^2)}_{\text{const}} - \underbrace{\frac{(y_i-m(x_i,\beta))^2}{2\sigma^2}}_{\text{not const.}}$$

∴ we can simplify the above equation to:

if wants to $\max \log f(y_i|x_i) \Longleftrightarrow \max -\frac{\sum^N (y_i-m(x_i,\beta))^2}{\sigma^2}$

$$\Longleftrightarrow \min \sum_{i=1}^{N}(y_i-m(x_i,\beta))^2$$

b. 设 $\boldsymbol{\theta}\equiv(\boldsymbol{\beta}',\sigma^2)'$ 表示 $(P+1)\times 1$ 维参数向量。求出一般 i 的对数似然得分。直接证明，$\mathrm{E}[\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)|\mathbf{x}_i]=\mathbf{0}$。为了证明得分条件期望为 0，你需要正态分布的什么特性是被正确设定的?

$$\because l_i(\beta,\sigma^2) = -\frac{(y_i-m(x_i,\beta))^2}{2\sigma^2}$$

$$\therefore \nabla_\beta l_i(\beta,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2}(y_i-m(x_i,\beta))\nabla_\beta m(x_i,\beta)$$

$$\nabla_{\sigma^2} \ell_i(\beta, \sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}[y_i - m(x_i, \beta)]^2$$

$\because$ two parameters, the score is a matrix:

$$S_i(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2}(y_i - m(x_i, \beta)) \nabla_\beta m(x_i, \beta) \\ -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}[y_i - m(x_i, \beta)]^2 \end{bmatrix}$$

if $E[y_i - m(x_i, \beta) \mid x_i] = 0$

$\Rightarrow$ the first row would be 0

Now discuss how to make sure the second row is 0:

$$-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}[y_i - m(x_i, \beta)]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\cancel{\frac{1}{2\sigma^4}}[y_i - m(x_i, \beta)]^2 = \cancel{2}\sigma^2$$

$$\therefore \quad [y_i - m(x_i, \beta)]^2 = \sigma^2$$

$\therefore$ when $E[(y_i - m(x_i, \beta))^2 \mid x_i] = \sigma^2$, 0

In sample:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (y_i - m(x_i, \beta))^2 = \hat{\sigma}.$$

c. 利用一阶条件求出用$\hat{\boldsymbol{\beta}}$表示的$\hat{\sigma}^2$。

Derive Hessian Matrix:

$$H_i(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{-\nabla_\beta m_i(\beta)'}{\sigma^2} \nabla_\beta m_i(\beta) + \frac{\nabla_\beta^2 m_i(\beta)(y_i - m(x_i,\beta))}{\sigma^2}, & \frac{-\nabla_\beta m_i(\beta)'(y_i - m(x_i,\beta))}{\sigma^4} \\ \frac{-\nabla_\beta m_i(\beta)(y_i - m(x_i,\beta))}{\sigma^4}, & \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{(y_i - m(x_i,\beta))^2}{\sigma^4} \end{bmatrix}$$

d. 求出关于$\boldsymbol{\theta}$的对数似然函数的海赛矩阵。

$$\because E(y_i - m(x_i,\beta) \mid x_i) = 0$$

$$\therefore H_i(\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{\nabla_\beta m_i(\beta)'}{\sigma^2} \nabla_\beta m_i(\beta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

where we use the conclusions and conditions from (b).

e. 直接证明，$-E[\mathbf{H}_i(\boldsymbol{\theta}_o)|\mathbf{x}_i]=E[\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)'|\mathbf{x}_i]$。

$$E(S_i(\theta_0)S_i(\theta_0)'|x_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\nabla_\beta m(\beta_0)'\nabla_\beta m_i(\beta_0)}{\sigma_0^2} & 0 \\ 0 & E\left[\left(-\dfrac{1}{2\sigma_0^2}+\dfrac{1}{2\sigma_0^4}[y_i-m(x_i,\beta)]^2\right)^2\right] \end{bmatrix}$$

$$\because E[(y_i-m(x_i,\beta))^4|x_i]=3\sigma_0^4$$

$$\therefore = \frac{1}{4\sigma_0^2}+2\cdot\frac{1}{2\sigma_0^4}[\ ]^4\left(-\frac{1}{2\sigma_0^2}\right)+\frac{3\sigma_0^4}{4\sigma_0^8}$$

$$=\frac{1}{2\sigma_0^4}$$

$$\therefore -E[H_i(\theta_0)|x_i] = E[S_i(\theta_0)S_i(\theta_0)'|x_i]$$

f. 写出$\hat{\boldsymbol{\beta}}$的估计渐近方差，然后解释如何获得渐近标准误。

$\because$ $\operatorname{Avar}\sqrt{N}(\hat{\beta}-\beta_0)=\sigma_0^2\{E[\nabla_\theta m_i(\beta_0)'\nabla_\beta m_i(\beta_0)]\}^{-1}$

By Delta-method

we can obtain:

$$\widehat{\operatorname{Avar}}(\hat{\beta})=\hat{\sigma}^2\left(\sum_{i=1}^{N}\nabla_\beta\hat{m}_i'\nabla_\beta\hat{m}_i\right)^{-1}.$$

when it's linear, we can obtain the avar for OLS under heteroskedasticity condition.

13.3 考察一般的二值响应模型 $P(y_i=1|\mathbf{x}_i)=G(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\theta}_o)$，其中对于所有 $\mathbf{x}$ 与 $\boldsymbol{\theta}$，$G(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})$严格地位于0与1之间。此处，$\mathbf{x}$ 与 $\boldsymbol{\theta}$ 并不需要拥有相同的维数，设 $\mathbf{x}$ 表示一个 K 维向量，而 $\boldsymbol{\theta}$ 表示一个 P 维向量。

a. 写出关于观测值 i 的对数似然。

b. 对于每一个 i，求出得分。直接证明 $E[\mathbf{s}_i(\boldsymbol{\theta}_o)|\mathbf{x}_i]=\mathbf{0}$。

c. 当 $G(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})=\Phi[\mathbf{x}\boldsymbol{\beta}+\delta_1(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta})^2+\delta_2(\mathbf{x}\boldsymbol{\beta})^3]$ 时，求出检验 $H_0:\delta_{o1}=0,\delta_{o2}=0$ 的LM统计量。

$p^y(1-p)^{1-y}$

a. log likelihood function:

$$l_i(\theta)=y_i\log[G(x_i,\theta)]+(1-y_i)\log[1-G(x_i,\theta)]$$

b. take FOC w.r.t θ to obtain the score:

$$s_i(\theta)=y_i\frac{\nabla_\theta G(x_i,\theta)'}{G(x_i,\theta)}-(1-y_i)\frac{\nabla_\theta G(x_i,\theta)'}{1-G(x_i,\theta)}$$

$$=\frac{\nabla_\theta G(x_i,\theta)'[y_i-G(x_i,\theta)]}{G(x_i,\theta)[1-G(x_i,\theta)]}$$

b/c $y_i - G(x_i, \theta) = 0$

$\Rightarrow S_i(\theta) = 0$

c. $\because G(x, \theta) = \Phi[x\beta + \delta_1 (x\beta)^2 + \delta_2 (x\beta)^3]$

Let $\hat{\theta}$ be unrestricted parameter, $\tilde{\theta}$ be the $\tilde{\theta}$ be the estimators.

The $LR = 2[\mathcal{L}(\hat{\theta}) - \mathcal{L}(\quad)]$