论文

September 7, 2023

1 介绍

交通运输电气化是实现碳排放减少和可持续发展的关键解决方案。电动汽车的推广将引领绿色智能交通系统在物流和能源领域的发展。在本文中，所提及的电动汽车均指纯电动汽车，其使用电能而几乎不产生污染物排放，因此是一种生态友好型的车辆。因此，电动汽车提供了一种清洁交通系统的选择，并具有巨大的可持续交通发展潜力。此外，电动汽车更容易与智能交通系统融合，从而增强了智能交通服务的效能。电动汽车可以通过智能充电设施进行充电，并与智能手机等设备连接，实现远程监控和管理，为充电提供智能化解决方案。同时，电动汽车还可以与其他交通工具和基础设施进行信息共享和协同，以实现交通系统的整体优化和智能化调度。通过与智能交通系统的结合，电动汽车可以参与智能导航、实时路况监测和拥堵缓解等功能，提高交通系统的效率和可持续性。因此，电动汽车在推动绿色智能交通系统的发展方面扮演着重要的角色，并为未来交通运输的可持续发展提供了新的可能性。

1.1 文献综述

2 问题描述

本研究旨在开发一种能够实现分布式电网削峰提谷的协调方法。在电动汽车充电调度过程中，电动汽车聚合器负责收集充电信息并进行调度。当电动汽车接入电网后，车主会设置充电相关信息并发送给电动汽车聚合器。这些信息包括电动汽车连接到微电网时的到达时间和离开时间，以及电池的充电状态（SOC）。同时还包括充电需求的最低SOC和电池安全的最高SOC。在该模型中，电动汽车用户在将电动汽车接入充电桩时，会向聚合器上传充电需求信息。然后聚合器会向每辆电动汽车用户发送充电计划。充电需求信息中包括到达时间（tic）和出发时间（tid）等信息。电动汽车到达时间tc 和出发时间td 服从正态分布，可表示为:

$$f(t_c)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_c}}exp(-\frac{(t_c+24-\mu_{t_c})^2}{2\sigma_{t_c}^2}),\\ 0<t_c\le\mu_{t_c}-12;\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_c}}exp(-\frac{(t_c-\mu_{t_c})^2}{2\sigma_{t_c}^2}),\\ \mu_{t_c}-12<t_c\le 24;\end{cases}\tag{2.1}$$

$$f(t_{dis})=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{dis}}}exp(-\frac{(t_{dis}-\mu_{t_{dis}})^2}{2\sigma_{t_c}^2}),\\ 0<t_{dis}\le\mu_{t_{dis}}+12;\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{t_{dis}}}exp(-\frac{(t_{dis}-24-\mu_{t_{dis}})^2}{2\sigma_{t_c}^2}),\\ \mu_{t_{dis}}+12<t_{dis}\le 24;\end{cases}\tag{2.2}$$

其中 $\mu_{t_c}=18,\sigma_{t_c}=3.3,\mu_{t_{dis}}=8,$和$\sigma_{t_{dis}}=3.24$

2.1 时间划分

在调度过程中，调度计划通常以时间段为单位执行，以提高执行效率。将调度时间划分为多个时间段。在提出的电动汽车充电调度模型中，将一天离散为96 个时隙，每个时隙的长度为15min，则每辆电动汽车的到达时间和出发时间表示为：

$$J_i^c=[\frac{t_i^c}{\Delta T}],i=1,2,...,N.\tag{2.3}$$

$$J_i^{dis}=[\frac{t_i^{dis}}{\Delta T}],i=1,2,...,N.\tag{2.4}$$

其中N表示为EV数量，i时EV的指数，i=1,2,...,N.j是一天的时间指数,且j=1,...,96.J_i^c和J_i^{dis}表示时隙的序号当电动汽车分别接入分布式电网和断开分布式电网。t_i^c和t_i^{dis}表示第i辆电动汽车到达时间和出发时间，ΔT表示时间步长。

3 充电调度模型

3.1 目标函数

在本节中建立一个协调调度充电模型来控制电动汽车充电,令$\boldsymbol{p}_n\triangleq(p_{n,t};t\in\mathcal{T})\in\mathbb{R}^T,\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_1,\cdots,\boldsymbol{p}_N)$.

3.1.1 充电总成本

$$f_n(p_{n,t})=\sum_{t\in\mathcal{T}}E_tp_{n,t}\Delta t\tag{3.1}$$

它代表第n辆电动汽车的充电总成本,其中,E_t为t 时间段的电价,$p_{n,t}$为电动汽车t时间段的充电功率,Δt 为时间间隔.

Table 1: 符号表示

$\mathcal{N}$	电动汽车个数集合:$\mathcal{N}=\{1,...,N\}$
$\mathcal{T}$	离散时间集合:$\mathcal{T}=\{1,...,T\}$
$\mathcal{L}$	馈线集合:$\mathcal{L}=\{1,...,L\}$
$p_{n,t}$	在t时刻第n辆电动汽车的充电速率
$\mathcal{N}_l$	通过馈线l供电的电动汽车的集合
$\mathcal{N}_m$	在节点m充电的电动汽车的集合
C_n	电动汽车的电车容量
d_t	在t时刻总基本需求

3.1.2 满意度

$$g_n(\sum_{t\in\mathcal{T}} p_{nt}) = -(\sum_{t\in\mathcal{T}} p_{nt} - \Gamma_n)^2. \tag{3.2}$$

表示充电周期内的总能量的满意函数, 并且由(3.2)可知,$EV\ n\in\mathcal{N}$ 不随时间$t\in\mathcal{T}$,电动汽车用户希望尽可能增加配电网提供的电量，直到在期望周期内达到所需能量为止.

3.1.3 $\|\boldsymbol{p}\|_0$

$\|\boldsymbol{p}\|_0$表示 $EV\ n$ 用户的充电计划 $\boldsymbol{p}_n$ 的基数最小化,在一定程度上考虑了EV用户的舒适度.一方面,用于尽量减少充电次数,保护电池健康.另一方面,EV用户希望尽可能地完成任务,因为他们希望尽量减少中断或重新启动EV充电,等待更长的时间来完成任务对大多数用户来说是不可接受的，因此,通过引入稀疏充电计划，可以统一衡量用户满意度的目标

3.1.4 削峰填谷

$$h = (\sum_{n\in\mathcal{N}} (p_{n,t} + B_{n,t}) - \overline{p+B})^2 \tag{3.3}$$

表示削峰填谷,也表示配电网对总电力需求的功率损耗$\sum_{n\in\mathcal{N}} p_{n,t} - \overline{p}, \omega_n \in (0, \omega^{max})$ 为权重参数,反映了减少快速充电行为对电网不利影响的相对趋势.且$\overline{p} = (\sum_{t\in\mathcal{T}}\sum_{n\in\mathcal{N}} p_{n,t})/N$

根据以上各种指标介绍,建立电动汽车用户的充电协调优化目标函数

$$\mathcal{J}_0(\boldsymbol{p}) \triangleq \sum_{n\in\mathcal{N}} \left\{ f_n(p_{nt}) + g_n(\sum_{t\in\mathcal{N}} p_{nt}) + \|\boldsymbol{p}_n\|_0 \right\} + \sum_{t\in\mathcal{T}} h_n(\sum_{t\in\mathcal{T}} p_{nt}) \tag{3.4}$$

3.2 约束

3.2.1 电动汽车充电策略约束

充电策略是影响电网投资的最重要因素,为保证电网安全,我们有如下不等式成立:

$$p_n^{min} \le p_{n,t} \le p_n^{max} \tag{3.5}$$

其中p_n^{min}和p_n^{max}分别是$EV\ n$的最大和最小充电功率

3.2.2 电网状态约束

通过决定电动汽车在每个时隙中是否充电,实现了电动汽车的协调充电调度,第n个EV 充电状态如下:

$$x_{n,t} = \begin{cases} 1 & \text{如果电动汽车在充电,} \\ 0 & \text{其它.} \end{cases} \tag{3.6}$$

约束满足以下形式:

$$(1 - x_{n,t})p_{n,t} = 0 \tag{3.7}$$

3.2.3 离开时对SOC的约束

有迫切充电需求的电动汽车由于连接时间短,可能无法获得足够的电量,因此其离开SOC_n^{end}时的SOC可能与SOC_n^d 不同。

$$SOC_n^{end} = min\{SOC_i^C + \frac{p_{n,t}\cdot\triangle t \times \eta_n}{C_n}, SOC_i^d\} \tag{3.8}$$

$$SOC_n^{min} \le SOC_{n,t} \le SOC_N^{max} \tag{3.9}$$

其中η表示EVn充电能量转换效率，为了延长电池寿命，建议SOC_{min} 和SOC_{max}的值分别为15%和90%.

设$\boldsymbol{p} \triangleq (\boldsymbol{p}_n; n\in\mathcal{N})$代表电动汽车集群的充电策略。$EVn$的可允许充电策略用$\mathcal{X}_n$表示，所有电动汽车可允许充电策略用$\mathcal{X}$表示，为

$$\mathcal{X} \triangleq \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_N \tag{3.10}$$

3.3 优化问题

使用l_1范数逼近l_0范数。我们将(3.4)重新建模为以下稀疏促进充电控制模型

$$\mathcal{J}_1(\boldsymbol{p}) \triangleq \sum_{n\in\mathcal{N}} \left\{ f_n(p_{nt}) + g_n(\sum_{t\in\mathcal{N}} p_{nt}) + \|\boldsymbol{p}_n\|_1 \right\} + \sum_{t\in\mathcal{T}} h_n(\sum_{t\in\mathcal{T}} p_{nt}) \tag{3.11}$$

将集中式电动汽车快速充电协调制定为以下优化问题:

$$\min_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{X}} \quad \mathcal{J}_1(\boldsymbol{p}) \tag{3.12}$$

4 基于$Jacobi-ProximalADMM$的电动汽车充电框架

ADMM方法已经成为大规模结构化的有力工具,值得注意的是,$ADMM$ 可以解耦空间耦合约束,并将解耦问题分解为许多个小问题,其中每个子问题分解都很容易解决.在[1]中提出了并行分布式计算$Jacobi-Proximal\ ADMM$.近端项的灵活使用以不同的方法解决子问题提高了标准$ADMM$的收敛率.$Jacobi-Proximal\ ADMM$对于稀疏性问题保持了很好的性质。在每次迭代中，该方法使用软阈值操作来更新变量，这可以促进解在稀疏表示下的稀疏性，即保持或增强变量的稀疏性质,该算法扩展了乘法器交替方向法(ADMM)，将原问题分解为N个较小的子问题，并在每次迭代时并行求解。

值得注意的是,在模型(11)中的第二项耦合了所有的变量$p_{n,t}$, $n\in\mathcal{N}$,为了解耦此项,引入辅助变量

$$\boldsymbol{p}_{N+1}=(p_{N+1,1},\cdots,p_{N+1,1})^T\in\mathbb{R}^T$$

其中$p_{N+1,t}=\sum\limits_{t\in\mathcal{T}}p_{nt}-\Gamma_n, t\in\mathcal{T}$,因此模型(3.4)等价表示如下:

$$\min_{\boldsymbol{p}}\ \mathcal{J}(\boldsymbol{p}) \tag{4.1}$$

$$s.t.\ \sum_{n\in\mathcal{M}_l}p_{n,t}\le c_{lt} \tag{4.2}$$

$$p_{N+1,t}=\sum_{t\in\mathcal{T}}p_{nt}-\overline{\boldsymbol{p}},\ t\in\mathcal{T} \tag{4.3}$$

为了使用$Jacobi-Proximal\ ADMM$,定义

$$\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_N,\boldsymbol{p}_{N+1}\}^T\in\mathcal{R}^{(N+1)\times T} \tag{4.4}$$

也可以写成$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_T)\in\mathbb{R}^{(N+1)\times T}$, 其中

$$\boldsymbol{p}_t=(p_{1,t},...,p_{N+1,t})\in\mathbb{R}^{N+1},\ t\in\mathcal{T}. \tag{4.5}$$

定义

$$\mathcal{P}_t^{(2)}=\{\boldsymbol{p}_t|\boldsymbol{p}_t\ \text{满足}\ (4.2)\ and\ (4.3)\} \tag{4.6}$$

且

$$\mathcal{P}_t^{(2)}=\mathcal{P}_1^{(2)}\times\cdots\times\mathcal{P}_t^{(2)}\times\cdots\times\mathcal{P}_T^{(2)} \tag{4.7}$$

其中约束$P_t^{(2)}$是一个全局约束,在空间上耦合所有EV的充电时间表.$P_t^{(2)}$是闭的、非空凸集的指示函数是恰当的、闭的和凸的,所以为了使用$Jacobi-Proximal\ ADMM$更一步介绍以下凸集$P^{(i)}, i=1,2,$ 如下，

$$\mathcal{I}_i(\boldsymbol{p})=\begin{cases}0 & if\quad \boldsymbol{p}\in\mathcal{P}^{(i)},\\ +\infty & otherwise.\end{cases} \tag{4.8}$$

很清楚地,$\mathcal{I}_i(\boldsymbol{p}),\ i=1,2$是凸函数.

很容易地将(4.1) – (4.3)所描述的问题写成标准的ADMM 形式，如下所示

$$\min_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Y}}\mathcal{J}(\boldsymbol{P})+\mathcal{I}_1(\boldsymbol{P})+\mathcal{I}_2(\boldsymbol{Y}) \tag{4.9}$$
$$s.t\ \ \boldsymbol{P}-\boldsymbol{Y}=0.$$

这里定义:

$$F(\boldsymbol{P})\triangleq\mathcal{J}(\boldsymbol{P})+\mathcal{I}_1(\boldsymbol{P})$$
$$G(\boldsymbol{Y})\triangleq\mathcal{I}_2(\boldsymbol{Y})$$

定义增广拉格朗日函数如下:

$$\mathcal{L}_\rho(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{U})=F(\boldsymbol{P})+G(\boldsymbol{Y})+\Lambda^T(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Y})+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Y}\|_F^2 \tag{4.10}$$
$$=f(\boldsymbol{P})+g(\boldsymbol{Y})+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{U}\|_F^2$$

其中$\rho>0$是惩罚参数,Λ称为对偶变量或者拉格朗日乘子,$\boldsymbol{U}$ 称为缩放后的对偶变量,i.e.$\boldsymbol{U}=(1/\rho)\Lambda$变量$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{U}$的更新

$$\boldsymbol{P}^{k+1}\triangleq\underset{\boldsymbol{P}}{argmin}\left\{\mathcal{L}_\rho(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{U}^k)+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^k\|_\Phi^2\right\} \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{Y}^{k+1}\triangleq\underset{Y}{argmin}\left\{\mathcal{L}_\rho(\boldsymbol{P}^k,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{U}^k)+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^k\|_\Psi^2\right\} \tag{4.12}$$

$$\boldsymbol{U}^{k+1}\triangleq\boldsymbol{U}^k-\zeta\rho(\boldsymbol{P}^{k+1}-\boldsymbol{Y}^{k+1}) \tag{4.13}$$

Definition 4.1. 如果选择$\delta_i>0$使得参数$\rho,\ \zeta,\ \Phi,\ \Psi$满足以下的情况:

$$\begin{cases}\Phi\succ\rho(\frac{1}{\delta_1}-1)I,\\ \Psi\succ\rho(\frac{1}{\delta_2}-1)I,\\ \delta_1+\delta_2<2-\zeta,\end{cases}$$

选择参数$\rho,\ \zeta,\ \Phi,\ \Psi$的方法多种多样, 本文采用一个简单的选择$\Phi=\phi I,\Psi=\psi I$使得

$$\begin{cases}\phi\succ\rho(\frac{1}{\delta_1}-1),\\ \psi\succ\rho(\frac{1}{\delta_2}-1),\\ \delta_1+\delta_2<2-\zeta,\end{cases}$$

5 计算P

本节给出了在计算$\boldsymbol{P}$的详细信息,从指示函数的定义中可以容易地看出,$\boldsymbol{p}^{k+1}$的实际优化策略如下:

$$\boldsymbol{P}^{k+1}=\underset{P\in\mathcal{P}^{(1)}}{argmin}\left\{F(\boldsymbol{P})+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Y}^k+\boldsymbol{U}^k\|_F^2+\frac{\phi}{2}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^k)^T(\boldsymbol{P}- \tag{5.1}$$

当$n=N+1$时

$$\boldsymbol{p}_{N+1}^{k+1}=\frac{\rho(\boldsymbol{U}_n^k-\boldsymbol{y}_{N+1}^k)+\phi\boldsymbol{P}_{N+1}^k}{2+\rho+\phi} \tag{5.2}$$

对于每一个 n=1,...,N, 令

$$f(\boldsymbol{p})\triangleq\sum_{n\in\mathcal{N}}\left\{f_n(p_{nt})-\omega_n g_n(\sum_{t\in\mathcal{T}}p_{nt})+\gamma\|\boldsymbol{p}_n\|_1\right\}$$

相应的子问题计算如下

$$\boldsymbol{p}_n^{k+1}=\underset{\boldsymbol{p}_n\in\mathcal{P}_n^{(1)}}{argmin}\left\{f(\boldsymbol{p})+\frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{y}_n^k+\boldsymbol{U}_n^k\|_F^2+\frac{\psi}{2}(\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{p}_n^k)^T(\boldsymbol{p}_n- \tag{5.3}$$

6 计算Y

本节详细介绍(4.12)中变量$\boldsymbol{Y}$的更新, 等价于求解以下凸优化问题的解:

$$\boldsymbol{Y}^{k+1} = \underset{\boldsymbol{Y}}{argmin}\ \mathcal{I}_2(\boldsymbol{Y}) + \frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{U}^k\|_F^2 + \frac{\psi}{2}\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^k\|_F^2 \tag{6.1}$$

$$= \underset{\boldsymbol{Y}\in\mathcal{P}^{(2)}}{argmin}\ \frac{\rho}{2}\|\boldsymbol{Y} - (\boldsymbol{P}^k + \boldsymbol{U}^k)\|_F^2 + \frac{\psi}{2}\|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^k\|_F^2$$

对于 $\boldsymbol{y}-update$ 的更新, 可以由以下分散方式计算变量

$$\min_{\boldsymbol{y}_t\in\mathcal{P}_t^{(2)}} \quad \{(\rho+\psi)\boldsymbol{y}_t^T\boldsymbol{y}_t - 2(\rho(\boldsymbol{p}_t^k + \boldsymbol{U}_t^k) + \psi\boldsymbol{y}_t^k)\boldsymbol{y}_t\} \tag{6.2}$$

子问题(6.2)是一个CQP问题. 为了简化符号, 我们引入一个 $(L\times N)$ 矩阵 A^t 来表示时刻t的馈线用户关联矩阵及其在 $a_{l,n}^t$ 处的分量

$$a_{l,n}^t = \begin{cases} 1 & if\ PEV\ n\ uses\ feeder\ l\ at\ time\ t \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{6.3}$$

设 $A^t = (a_1^t,...,a_N^t)$ a_n^t 是 A^t 的第n列向量, 表示EVn使用的相应馈线) $a_{N+1}^t = 0 \in \mathcal{R}^l$, $c^t = (c_{1,t},...c_{l,t}), b_n - 1, n \in \mathcal{N}, b_{N+1} = 1$, 那么子问题重写为

$$min \quad \sum_{n=1}^{N+1}[(\rho+\psi)y_{n,t}^2 - 2(\rho(p_{n,t}^k + U_{n,t}^k) + \psi y_{n,t}^k)y_{n,t}] \tag{6.4}$$

$$s.t. \quad \sum_{n=1}^{N+1} a_n^t y_{n,t} \leq c^t \tag{6.5}$$

$$\sum_{n=1}^{N+1} b_n y_{n,t} = d_t \tag{6.6}$$

引入子问题(6.4)-(6.6)的拉格朗日函数

$$\mathcal{L}^t(\boldsymbol{y}_t;\lambda_t,\mu_t) = \sum_{n=1}^{N+1}[(\rho+\psi)y_{n,t}^2 - 2(\rho(p_{n,t}^k + U_{n,t}^k) + \psi y_{n,t}^k)y_{n,t}] \tag{6.7}$$

$$+ \lambda_t^T[a_n^t y_{n,t} - c^t/(N+1)] + \mu_t[b_n y_{n,t} - d_t/(N+1)]$$

$$:= \sum_{n=1}^{N+1}\mathcal{L}_{n=1}^t(y_t;\lambda_t,\mu_t)$$

(6.7)的对偶问题为

$$\max_{\lambda_t\succeq 0,\mu_t}\left\{D^t(\lambda_t,\mu_t) = \sum_{n=1}^{N+1}\min_{y_t}\mathcal{L}^t(y_t;\lambda_t,\mu_t)\right\} \tag{6.8}$$

根据(6.8), 目标函数被重写为

$$D^t(\lambda_t,\mu_t) = \sum_{n=1}^{N+1}\min_{y_{n,t}}\mathcal{L}_n^t(y_t;\lambda_t,\mu_t) \tag{6.9}$$

第二种思路:
由于(6.1)中的函数是解耦的,因此计算其变量y_t^k, t=1,...,T. 的优化问题为

$$\min_{y_t\in\mathcal{P}_t^{(2)}} \quad [(\rho+\psi)y_t^2 - 2(\rho(p_i^k + \boldsymbol{u}_i^k) + \psi y_i^k)y_t] \tag{6.10}$$

$$s.t. \quad \hat{p}_{nt}^{min} \leq y_t \leq \hat{p}_{nt}^{max} \tag{6.11}$$

它的解析解很容易得:

$$y_t^{k+1} = \begin{cases} \hat{p}_{nt}^{min} & \overline{y}_t^{k+1} < \hat{p}_{nt}^{min} \\ \overline{y}_t^{k+1} & \hat{p}_{nt}^{min} \leq \overline{y}_t^{k+1} \leq \hat{p}_{nt}^{max} \\ \hat{p}_{nt}^{max} & \overline{y}_t^{k+1} < \hat{p}_{nt}^{max} \end{cases} \tag{6.12}$$

7 算法

算法收敛的表证如下:

$$\boldsymbol{r}^k = \|\boldsymbol{P}^k - \boldsymbol{Y}^k\|_F$$

$$\boldsymbol{s}^k = \|\rho(\boldsymbol{Y}^{k+1} - \boldsymbol{Y}^k)\|_F$$

其中$\boldsymbol{r}^k$和$\boldsymbol{s}^k$分别表示在第k次迭代时的原始和对偶残差。且满足如下形式:

$$\|\boldsymbol{r}\|_2 \leq \varepsilon^{pri} \qquad \|\boldsymbol{s}\|_2 \leq \varepsilon^{dual} \tag{7.1}$$

Definition 7.1. 如果选择 $\delta_i > 0$ 使得参数 ρ, ζ, Φ, Ψ 满足以下的情况:

$$\begin{cases} \Phi \succ \rho(\frac{1}{\delta_1} - 1)I, \\ \Psi \succ \rho(\frac{1}{\delta_2} - 1)I, \\ \delta_1 + \delta_2 < 2 - \zeta, \end{cases}$$

选择参数ρ, ζ, Φ, Ψ的方法多种多样, 本文采用一个简单的选择$\Phi = \phi I, \Psi = \psi I$ 使得

$$\begin{cases} \phi \succ \rho(\frac{1}{\delta_1} - 1), \\ \psi \succ \rho(\frac{1}{\delta_2} - 1), \\ \delta_1 + \delta_2 < 2 - \zeta, \end{cases}$$

Theorem 7.2. *aaaa*

算法收敛的表证如下:

$$\boldsymbol{r}^{k+1} = \|\boldsymbol{P}^{k+1} - \boldsymbol{Y}^{k+1}\|_F$$

$$\boldsymbol{s}^{k+1} = \|\rho(\boldsymbol{Y}^{k+1} - \boldsymbol{Y}^k)\|_F$$

一个合理的终止标准是原始残差和对偶残差要足够小, 如下:

$$\|\boldsymbol{r}^k\|_2 \leq \varepsilon^{pri} \qquad \|\boldsymbol{s}^k\|_2 \leq \varepsilon^{dual}$$

where $\varepsilon^{pri} > 0$ 和 $\varepsilon^{dual} > 0$ are feasibility tolerances for the primal and dual feasibity condition-

Algorithm 1 Jacobi-Proximal ADMM

Input: $\mathbf{p}_n^0(n = 1, ..., N+1)$, Λ^0
Output: $\mathbf{p}_n^k(n = 1, ..., N+1)$

for k=0,1,... **do**
  Update $\mathbf{p}_n$ for $n = 1, ..., N+1$ in parallel by:
    $\mathbf{p}_n^{k+1} = \text{argmin}\left\{f_n(\mathbf{p}_n) + \frac{\rho}{2}\|A_n\mathbf{p}_n + \sum\limits_{j\neq n} A_j\mathbf{p}_j^k - c - \frac{\Lambda^k}{\rho}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_n^k\|_\Psi^2\right\}$
  Update Λ by:
    $\Lambda^{k+1} = \Lambda^k - \gamma\rho(\sum_{n=1}^N A_n\mathbf{p}_n^{k+1} - c)$
  if $\sum_{n=1}^{N+1}\|\mathbf{p}_n^{k+1} - \mathbf{p}_n^k\|_F \leq \varepsilon^{pri}$ **then**
    Break.
  end if
end for

s () and ().These tolerances can be chosen using an absolute and relative criterion,such as

$$\varepsilon^{pri} = \sqrt{N}\varepsilon^{abs} + \varepsilon^{rel} max\{\|p\|_2, \| - x\|_2\},$$
$$\varepsilon^{dual} = \sqrt{N}\varepsilon^{abs} + \varepsilon^{rel}\|\mu^k\|_2$$

where $\varepsilon^{abs} > 0$ is an absolute tolerance and $\varepsilon^{rel} > 0$ is a relative tolerance.A reasonable value for the relative stopping criterion might be 10^{-3} or 10^{-4}. A pseudocode for the proposed Prox-JADMM is then give in Algorithm 1.

Theorem 7.3. *aaaa*

8 实验结果