复分析-02

Yifan Wei

2018 年 5 月 11 日

1 等价

1.1 等价关系

非空集合 S 上的的一个关系 R 是一个 $S \times S$ 的非空子集. 对 S 中的任意 x, y，当且仅当 $(x, y) \in R$ 时称 "x 与 y 有关系 R"，记作 xRy.

当 R 满足下面三个性质时，称 R 为 S 上的一个等价关系（Equivalence relation），

$$\forall x \in S,\ xRx,$$
$$\forall x, y \in S,\ xRy \Rightarrow yRx,$$
$$\forall x, y, z \in S,\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz.$$

此时通常将 "R" 记作 "$\sim$".

1.2 等价类与商集

如果非空集合 S 上有一个等价关系 $\sim$，则对于 S 中的某一元素 x，我们可以把所有与其等价的元素收集起来构成一个集合，这个集合就叫做 x 的等价类（Equivalent class），简记为 $\langle x \rangle$. 即是说:

$$\langle x \rangle := \{\ y \in S \mid y \sim x\ \}.$$

而这些等价类又可以收集起来形成一个集合，这个集合就叫做 "S 在等价关系 '$\sim$' 下的商集（Quotient set）"，记作 $S/\sim$. 即是说:

$$S/\sim := \{\ \langle x \rangle \mid x \in S\ \}.$$

注意这个集合里面的不同元素都是不相交的（请证明）. 可以说等价关系的存在使得集合 S 被划分成了若干个不相交的等价类. 反过来也成立，见练习 1.

例 1: 实数的构造 记所有的有理数柯西列构成的集合为 $C(\mathbb{Q})$，里面的元素可以用 (a_n) 来表示，a_n 为该数列的通项. 该集合上可以建立如下的等价关系：

$$(a_n) \sim (b_n) \text{ 当且仅当 } \lim_{n \to \infty} |a_n - b_n| = 0.$$

所谓的实数其实就是商集 $C(\mathbb{Q})/\sim$.

2 复平面上的曲线及曲线积分

2.1 光滑曲线

虽然曲线等几何物体都可以看成是复平面上的某种集合，但是为了更好地进行应用，这里采用参数化的方式定义曲线.

区域 Ω 内一段光滑曲线（Smooth curve）的参数化（Parametrization）γ 是一个从 $[0,1]$ 到 Ω 的映射，如果将其实部记为 u，虚部记为 v，则 u 和 v 都是一阶导数存在且连续的，并记 $\gamma'(t)=u'(t)+iv'(t)$.

如果存在一个从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的双射 s 满足 $s'(t)>0$，使得 $\gamma_1(t)=\gamma_2(s(t))$，则称 γ_1 与 γ_2 "等价".（请验证这确实是一个等价关系. 是哪个集合上的等价关系？）

例 **2:** $\gamma(t)=Re^{2\pi it}$，就是一个半径为 R 圆心为原点的逆时针圆. 如果 $R=1$，这样的圆被称为单位圆.

2.2 曲线积分

对区域 Ω 内的某条曲线 γ，复变函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 在该曲线上的积分可以这样定义

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &:= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\\ &= \int_0^1 u(\gamma(t))\gamma'(t)dt + i\int_0^1 v(\gamma(t))\gamma'(t)dt,\end{aligned}$$

其中 u, v 分别为 f 的实部和虚部.

由曲线等价的定义，如果 γ_1 和 γ_2 为两个等价的曲线，则有

$$\int_0^1 f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds = \int_0^1 f(\gamma_1(s(t)))\gamma_1'(s(t))s'(t)dt = \int_0^1 f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt,$$

这就是为什么要那样定义曲线的等价.

例 **3:** 计算 $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$，其中 γ 为圆心在原点，半径为 r 的逆时针圆.

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}\ dz &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\ dt\\ &= i\int_0^{2\pi} 1\ dt\\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

2.3 按段光滑的曲线及曲线积分

对于映射 $\gamma:[0,1]\to\Omega$，如果存在有限个实数 $0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$，使得 γ 在每个 $[a_k,a_{k+1}]$ 区间上都有连续的一阶导数（端点处理解为左右导数），则称 γ 为 Ω 内的一条按段光滑的曲线. 其对应的曲线积分定义为

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

由此可见曲线等价的定义可以不用改变.

2.4 一些简单性质及开集的连通性

对于一条曲线来 γ 说，$\gamma(0)$ 叫做起点，$\gamma(1)$ 叫做终点. 如果 γ 在开区间 $(0,1)$ 上是单射，则称其为不自交的曲线. 如果 $\gamma(0)=\gamma(1)$，则称其为闭合曲线（Closed curve）.

光滑曲线的长度定义为

$$\int_0^1 |\gamma'(t)|dt.$$

按段光滑的曲线的长度也可以类似定义，略.

之前说过联通开集（Connected open set）的定义：开集 Ω 为联通的当且仅当不存在两个不相交的开集 Ω_1, Ω_2 使得 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$. 其实也可以有一个更直观的等价定义：

开集 Ω 是联通的当且仅当对于其中任意两点 w_1, w_2，存在一条 Ω 上的参数化曲线 γ，使得 $\gamma(0)=w_1$, $\gamma(1)=w_2$.

下面我们就来证明这两个定义的等价性.

假设任意两个点都可以被参数化曲线段相连，但是存在两个不相交的非空开集 Ω_1 和 Ω_2 使得 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$. 从 Ω_1 中选一个点 ω_1，再从 Ω_2 中选一个点 ω_2. 设 γ 为从 ω_1 到 ω_2 的参数化曲线，令

$$\xi=\sup_{t\in[0,1]}\{\ t \mid \gamma(t)\in\Omega_1\ \}.$$

矛盾就出在 $\gamma(\xi)$ 这里，这个点既不能在 Ω_1 中，也不能在 Ω_2 中.

反过来，如果 Ω 不能被分成两个不相交的非空开集之并，但是有不能被参数化曲线相连的两个点 ω_1 和 ω_2 存在. 在 Ω 上构建关系 R:

$$\eta_1 R\,\eta_2 \text{ 当且仅当 } \exists\gamma,\ \gamma(0)=\eta_1,\ \gamma(1)=\eta_2.$$

稍加验证便可知道这是一个等价关系，并且每个等价类都是开集. 令 $\Omega_1=\langle\omega_1\rangle$，$\Omega_2=\Omega-\langle\omega_1\rangle$. 由于 Ω_2 是除了 $\langle\omega_1\rangle$ 之外的所有等价类的并，因此也是开集，并且 $\omega_2\in\Omega_2$. 这样将有 Ω_2 非空，所要的矛盾也就得到了.

2.5 原函数

对于定义在区域 Ω 上的函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 如果能找到一个全纯函数 $F:\Omega\to\mathbb{C}$ 使得在 Ω 上有

$$f(z)=F'(z),$$

则称 f 在 Ω 上有原函数，F 就是 f 的一个原函数（Primitive）.

结合 Newton-Leibniz 公式，如果 γ 是 Ω 中一条以 z_1 为起点以 z_2 为终点的参数化曲线，则有

$$\int_\gamma f(z)\ dz=F(z_2)-F(z_1),$$

这说明如果 f 在 Ω 上存在原函数，则曲线积分的值就只与曲线的始末位置有关. 等价地说，f 在 Ω 内的闭合曲线上积分必定为 0.

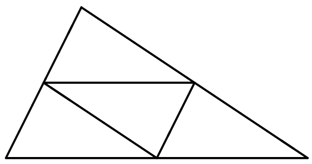
例 **4:** 幂级数在其收敛圆盘内有原函数.

到底哪些函数有原函数呢？接下来的两节将回答这个问题：

在区域 Ω 比较简单的时候，全纯函数将有原函数，有原函数的函数必定是全纯函数.

3 Cauchy 定理及应用

3.1 Goursat 定理



看图说话. 如果 f 是开集 Ω 上的全纯函数，T 为一个三角形，其内部完全包含于 Ω 中. 则有

$$\int_T f(z)\ dz = 0.$$

这样一来，在一些比较简单区域如矩形，圆盘等区域上，能方便地构造出全纯函数的原函数.

3.2 简单区域上的 Cauchy 定理

全纯函数在简单区域上存在原函数，因此任一闭合曲线积分为 0.

4 练习

1. 非空集合 S 上的一个划分 P 是 S 的一些子集构成的集合，并且 P 中的元素满足:

$$\forall X,\ Y \in P,\ X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \emptyset,$$
$$S = \bigcup_{X \in P} X.$$

例如 $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ 就是 $\{1,2,3,4\}$ 的一个划分.

(a) 如果 S 上有一个等价关系 $\sim$，验证商集 $S/\sim$ 为 S 的一个划分.

(b) 如果 S 上有一个划分 P，验证:

$$aR\,b \Leftrightarrow \exists X \in P,\ \{a,\ b\} \subseteq X,$$

为 S 上的一个等价关系.

2. 设 γ 为单位圆，计算

$$\int_\gamma z^n\ dz,$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$.

3. 函数 $\frac{1}{z}$ 在去掉 0 的复平面上都全纯，其实 0 这个点对于该函数还有更为奇特的表现. 在例 3中，如果让 γ 为去 0 复平面中任意的一个圆，计算对应曲线积分.

提示：问题可以转化成计算下面两个积分：

$$\int_0^{2\pi} \frac{r\sin t}{r^2+2r\cos t+1}\ dt, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{r\cos t+1}{r^2+2r\cos t+1}\ dt,$$

其中 $r > 0$ 且 $r \neq 1$. 显然前一个积分为 0，结合在 $A > 1$ 时 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{A-\cos t}\ dt = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2-1}}$ 对后一个积分进行计算.

4. 证明 f 在区域 Ω 上的不同原函数之间只相差一个常数.

5. 用 Green 公式，结合 Cauchy-Riemann 方程证明全纯函数在简单区域上曲线积分为 0.

6. 计算 Fresnel 积分
$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N \sin x^2\ dx, \qquad \lim_{N\to\infty}\int_0^N \cos x^2\ dx.$$

7. 计算 Dirichlet 积分
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx.$$

8. 这是上面两个练习的的推广，目的是计算下面的积分
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\ dx \quad p \in \mathbb{R}.$$
   (a) 求 p 的范围使得上述积分收敛. 并说明问题可以转化为对下面的积分进行计算
$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N \sin x^\alpha\ dx.$$
   (b) 在复平面去掉原点和负实数轴的区域上，如果让 u, v 分别表示某复变函数的实部和虚部，验证极坐标下的 Cauchy-Riemann 方程
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial v}{\partial r}, \end{cases}$$
   并推出函数
$$f(re^{i\theta}) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$$
   为该区域上的全纯函数.
   (c) 运用柯西定理，完成积分的计算.