西安交通大学考试题

成绩	

课　程 高等数学 I,II,III-1　学　院 ________

专业班号 ________　考 试 日 期 2023 年 11 月 4 日

姓　名 ________　学　号 ________　期中 √　期末 ☐

一、单选题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^5+3n^2+6n+1}{3n^5+6n^4+n^3+2n}$的值为（　　）.

(A) $\frac{4}{3}$;　(B) 0;　(C) $+\infty$;　(D) $-\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$ 的值为（　　）.

(A) 1;　(B) -1;　(C) ∞;　(D)不存在，但不为 ∞.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x|\neq 1,\\ 1, & |x|=1,\end{cases}$ 则$x=-1$为$f(x)$的（　　）.

(A)（第一类中）不可去间断点　(B)（第一类中）可去间断点

(C) 第二类间断点　(D) 连续点

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x^2}-1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则$f'(0)=($　　$)$.

(A) 0;　(B) $\frac{1}{2}$;　(C) 1;　(D) 2

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h^2)}{h^2}=1$，则（　　）

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在.　(B) $f(0)=1$ 且 $f'(0)$ 存在.

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.　(D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

6. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x^2+x^4}-1$ 是 x^{k} 的同阶无穷小，则 $\mathrm{k}=($　　$)$.

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\sin(2x)}{x}\right]$ ______.

2. 已知 $f'(x_0)=-1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=$______.

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{a-e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{1}{x}}}, & x>0,\\ a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则 $a=$____.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=$____________.

5. 设$y=\ln(1+x+\sqrt{x^2+2x})$, 则$dy=$ ____________.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4+x}{3+x})^{2x} =$ ____________.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 已知摆线的方程为$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$求该方程所确定的函数的一、二阶导数

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

2. 确定常数a, b，使函数$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 2, \\ ax+b, & x > 2 \end{cases}$在点$x=2$处可导.

3. 确定 $f(x) = \frac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}$ 的间断点并判断其类型.

4. 设函数$f(x) = \arctan x$，若$f(x) = xf'(\xi)$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}$的值.

5. 设函数$f(x)$二阶可导,且$f(0)=f(1)=0$, $f(x)$在$[0,1]$上的最小值为-1, 证明：至少存在一点$\xi \in (0,1)$,使得$f''(\xi) \geqslant 8$.

四. (15 分) 设$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$，讨论该函数的单调性、极值、凹凸性、拐点、渐近线.

五. (9 分) 已知函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0, f(1)=1$.

证明：(I) 存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi) = 1-\xi$；
(II) 存在两个不同的点 $\eta, \xi \in (0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\xi) = 1$.

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：高等数学 I.II.III-I 课时：________ 考试时间：2 0 2 3 年 11 月 4 日

一、单选题（每小题 3 分，共 18 分）

1. A 2.D 3.B 4.C 5.C 6.B

二、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1. 2; 2. 1; 3. $-\frac{1}{2}$; 4. $\frac{1}{2}$; 5. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}dx$; 6. e^2.

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. $\frac{dy}{dx} == \frac{\sin t}{(1-\cos t)}$, (4 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{\cos t\cdot(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{a(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.(8 分)$$

2. 解: (1) $\because f(2-0) = \lim\limits_{x\to2^-} e^x = e^2, f(2+0) = \lim_{x\to2^+}(ax+b) = 2a+b$,

$\therefore$ 应有 $f(2-o) = f(2+o) = f(2)$, 即 $2a+b = e^2$. (4 分)

(2) $\because f'-(2) = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{e^x-e^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^-}\frac{e^2(e^{x-2}-1)}{x-2} = e^2$, (5 分)

且 $f'(2) = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{(ax+b)-e^2}{x-2}$ (6 分)

在 (1) 中已得 $2a+b=e^2$, 代入上式得 $f'+(2) = \lim\limits_{x\to2^+}\frac{ax-2a}{x-2} = a$

由于 f(x) 在 x = 2 处可导, $\therefore a = e^2$, (7 分) $b = -e^2$ (8 分)

3、$f(x) = \frac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}$.考察分母为 0 的点，即$x=0, x=-1, x=1$ (2 分)

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}$=1，但该函数在 x=0 处无定义，故$x=0$ 为第一类可去间断点. (4 分)

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{(x+1)\sin x}{x(1-x^2)} = \frac{\sin 1}{2}$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|} = \lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)\sin x}{x(x^2-1)} = -\frac{\sin 1}{2}$.

即左右极限存在但不等,故$x=1$ 为第一类跳跃间断点. (6 分)

$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|} = \infty$, 故$x=1$ 为第二类无穷间断点.(8 分)

4. 由题设, $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$, (2 分). 从而题设等式化为 $\arctan x = \frac{x}{1+\xi^2}, \xi\in(0,x)$, (4 分)

并解出 $\xi^2 = \frac{x}{\arctan x} - 1$. 于是 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}$ (6 分)

$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{\to\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} = \frac{1}{3}$.(8 分).

5. 令 $f(a)=\min_{0<x<1} f(x)=-1$,则由Fermat定理知 $f'(a)=0$ (2')

$\therefore f(x)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)^2, \xi\in(a,x)$, (~~2分~~) 分别取 $x=0,1$,则

$0=-1+\frac{1}{2}f''(\zeta_1)(0-a)^2, \zeta_1\in(0,a), 0=-1+\frac{1}{2}f''(\zeta_2)(1-a)^2, \zeta_2\in(a,1)$ (4 分) 4'

$\therefore f''(\zeta_1)=\frac{2}{a^2}, f''(\zeta_2)=\frac{2}{(1-a)^2}$, (5 分) 5' $\therefore a<\frac{1}{2}$时, $f''(\zeta_1)=\frac{2}{a^2}>8$; 6'

$a\ge\frac{1}{2}$时, $f''(\zeta_2)=\frac{2}{(1-a)^2}>8$ 7' $\therefore \max_{x\in(0,1)} f''(x)\geqslant 8$. (8 分) 8'

四.(共 15 分)

$$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}, \qquad (4\text{ 分})$$

令 $y'=0$, 解得驻点 $x=1,5$; 令 $y''=0$, 解得 $x=-1$. 列表讨论如下:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
	+	0	+	−	0	+
	−	0	+	+	+	+
y	↑上凸	0	↑下凸	↓下凸	极小值	↑下凸

所以, y 在 $(-\infty,1)$ 与 $(5,+\infty)$ 上单调增, 在 $(1,5)$ 上单调减; (7 分)

在 $(-\infty,-1)$ 上为上凸, 在 $(-1,1)$ 与 $(1,+\infty)$ 上为下凸; (10 分)

$y(5)=\frac{27}{2}$ 为极小值; $(-1,0)$ 为拐点. (12 分)

由于 $\lim_{x\to 1}=\infty$, 所以 $x=1$ 为铅直渐近线, (13 分)

由于 $a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=1$,

$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right]=5$, 所以 $y=x+5$ 为斜渐近线. (15 分)

五、(共 **9** 分)

证明: (1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$ 则 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$,

由连续函数零点定理知, $\exists\xi\in(0,1)$, 使 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=1-\xi$. (5 分)

(2) 在区间 $[0,\xi],[\xi,1]$上分别对$f(x)$使用拉格朗日中值定理,得

$\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=f'(\eta), \eta\in(0,\xi)$, $\qquad \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(\xi), \xi\in(\xi,1)$, (7 分)

易知 η,ξ为两个不同的点，整理可得, $\frac{f(\xi)}{\xi}=f'(\eta)$, $\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=f'(\xi)$,

$\therefore f'(\eta)f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=1$. (9 分)