

西安交通大学考试题

成绩

课程 高等数学 I, II, 工科分析 (下)

学院 考试日期 2025 年 4 月 19 日

专业班号

姓名 学号 期中 ☒ 期末 ☐

一、单选题 (每小题 3 分, 共 18 分)

- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处 []
(A) $f(x, 0)$ 在 $x=0$ 不连续; (B) $f(0, y)$ 在 $y=0$ 不连续;
(C) 偏导数不存在; (D) 函数不连续.
- 当 $u > 0$ 时 $f(u)$ 有一阶连续导数, 且 $f(1) = 0$. 又二元函数 $z = f(e^x - e^y)$ 满足 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$, 则 $f(u) = []$.
(A) $\ln u$; (B) $-\ln u$; (C) $\ln u + 1$; (D) $1 - \ln u$
- 曲面 $xyz = 1$ 上平行于平面 $x + y + z + 3 = 0$ 的切平面方程为 [].
(A) $x + y + z - 2 = 0$; (B) $x + y + z + 1 = 0$;
(C) $x + y + z - 3 = 0$; (D) $x + y + z = 0$.
- 设函数 $g(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 的邻域内有定义, 且 $g_x(1, 1) = 3$, $g_y(1, 1) = 4$. 以下选项正确的是 [].
(A) $g(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处沿 y 轴负方向的方向导数为 -4 ;
(B) $\frac{\partial g}{\partial t}|_{(1,1)} = \cos \alpha + 4 \cos \beta$, 其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 为 l 方向的方向余弦;
(C) $dg(x, y)|_{(1,1)} = 3dx + 4dy$; (D) $g(1, y)$ 在 $y = 1$ 处不连续.
- 若 $I_1 = \iint_{(D)} (x+y)^2 d\sigma$, $I_2 = \iint_{(D)} (x+y)^3 d\sigma$, $(D): (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1$. 则 I_1 与 I_2 之间的关系是 [].
(A) $I_1 = I_2$; (B) $I_1 > I_2$; (C) $I_1 < I_2$; (D) $I_1^2 = I_2^2$.
- 设 (Ω) 是由曲面 $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ 与 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 围成的空间区域, 三重积分 $\iiint_{(\Omega)} z^2 dv$ 在球面坐标系下化为累次积分为 [].
(A) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin \varphi \cos^2 \varphi dr$; (B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin \varphi \cos^2 \varphi dr$;
(C) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin \varphi \cos \varphi dr$; (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 r^2 \sin \varphi \cos \varphi dr$.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1} =$
- 函数 $u = e^{xyz} + x^2 + y^2$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处沿方向 $l = [1, 4, 3]$ 的方向导数为

共 2 页 第 1 页

- 设 $u = \ln(\tan x + \tan y)$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} \sin 2x + \frac{\partial u}{\partial y} \sin 2y =$
- 螺旋线 $x = 3 \cos \theta, y = 3 \sin \theta, z = 4\theta$ 上从 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$ 的弧长为
- 交换 $I = \int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$ 的积分次序可得 $I =$
- 平面曲线 $f(x) = x^3 - x^2 - x$ 在点 $x = 1$ 处的曲率为

三、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

- 设 $u = f(x+y, xz)$ 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$.
- 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处切线方程及法平面方程.
- 讨论函数 $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值.
- 设 $f(x, y) = \begin{cases} y \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的可微性.
- 计算三重积分 $\iiint_{(\Omega)} z^2 dV$, 其中 (Ω) 是由球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ 围成的闭区域.

四、(8 分) 设 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 和 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是两个向量值函数, 定义如下:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ \sin(yz) \\ x+z \end{pmatrix}, \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} u-v \\ uv \\ u+v \end{pmatrix}.$$

令 $h(u, v) = f(g(u, v))$, 即 h 是 f 和 g 的复合函数. (1) 求 $h(u, v)$ 的显式表达式;

(2) 求 $h(u, v)$ 在点 $(u, v) = (1, 2)$ 处的雅可比矩阵 $Dh(1, 2)$.

五、(10 分) (1) 已知 $f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$, 在位于第一卦限的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ 上找一点, 使函数在此点取最大值; (2) 由此证明: 对任意正实数 a, b, c , 恒有不等式 $abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5$.

六、(10 分) 函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = \psi(x-y+z)$ 所确定的函数, 其中 ψ 具有二阶导数, 且 $\psi' \neq 2z$.

(1) 求 dz ; (2) 记 $v(x, y) = \frac{1}{x+y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, 求 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

七、(6 分) 设 $f(x, y)$ 在区域 $(D): x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续的二阶偏导数, 且满足 $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$ 及 $f(0, 0) = 0, f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$. 证明:

$$\left| \iint_{(D)} f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi \sqrt{M}}{4}.$$

共 2 页 第 2 页

西安交通大学本科生课程期中考试试题参考答案与评分标准

课程名称: 高等数学 I, II, 工科数学分析(下) 课时: 考试时间: 2025.4.19.

一、单项选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. D 2. A 3. C 4. A 5. C 6. B

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

(1) 6; (2) $\frac{1}{\sqrt{26}}(8e + 10)$; (3) 2; (4) 10π ; (5) $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_2^{2\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy$;

(6) 4.

三、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. 设 $u = f(x + y, xz)$ 有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$.

解: $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 + zf_2$ (3 分), $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = xf_{12} + f_2 + xzf_{22}$. (6 分)

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处切线方程及法平面方程.

解: 将曲线方程对 x 求导, 得 $\begin{cases} 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx} - 3 = 0 \\ 2 - 3 \frac{dy}{dx} + 5 \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$ (2 分)

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{-15+10x-4z}{-10y-6z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{4y+6x-9}{-10y-6z}$, 故 $\frac{dy}{dx}|_{(1,1,1)} = \frac{9}{16}$, $\frac{dz}{dx}|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{16}$ (4 分)

切线的方向向量为 $\{1, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}\}$ 或 $\{16, 9, -1\}$ 得切线方程: $\frac{x-1}{16} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-1}{-1}$. (5 分) 法平面方程: $16x + 9y - z - 24 = 0$ (6 分)

3. 求函数 $f(x, y) = x^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极值.

解: $f_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9$, $f_y(x, y) = 6y$. 令 $\begin{cases} 3x^2 + 6x - 9 = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$

解得函数 $f(x, y)$ 的驻点为 $(-3, 0)$ 和 $(1, 0)$. (2 分)

求二阶偏导数得 $f_{xx}(x, y) = 6x + 6$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = 6$.

对驻点 $(-3, 0)$: $A = f_{xx}(-3, 0) = -12$, $B = f_{xy}(-3, 0) = 0$, $C = f_{yy}(-3, 0) = 6$. $\Delta = 72 > 0$, 根据极值判别法, 当 $\Delta > 0$ 时, 该点不是极值点. (4 分)

对驻点 $(1, 0)$: $A = f_{xx}(1, 0) = 12$, $B = f_{xy}(1, 0) = 0$, $C = f_{yy}(1, 0) = 6$. $\Delta = -72 < 0$, 且 $A > 0$, 根据极值判别法, 当 $\Delta < 0$ 且 $A > 0$ 时, 函数在该点取得极小值. 将 $(1, 0)$ 代入函数 $f(x, y)$ 可得: $f(1, 0) = -5$. (6 分)

综上, 函数 $f(x, y)$ 的极小值为 -5 , 在点 $(1, 0)$ 处取得, 无极大值.

4. 设 $f(x, y) = \begin{cases} y \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的可微性.

解 $\arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0, 0)$. 故 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续. $f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$, (1 分)

$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{|y|} = \frac{\pi}{2}$ (2 分) 当 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ 时, (2 分)

$\frac{\Delta f - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(\arctan \frac{1}{\rho} - \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow 0 \quad \left(\left| \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1 \right)$. (4 分)

故 $\Delta f(0, 0) = f(x, y) - f(0, 0) = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + o(\rho)$, 所以 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微. (6 分)

5. 计算三重积分 $\iiint_{(\Omega)} z^2 dV$, 其中 (Ω) 是由球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ 围成的闭区域.

解 先重后单法. $\iiint_{\Omega} z^2 dV = \int_0^2 z^2 \cdot \pi(2z - z^2) dz = \int_0^2 \pi(2z^3 - z^4) dz = \pi \left(\frac{2}{4} z^4 - \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{5}$. (6 分)

四、(8 分) 设 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 和 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是两个向量值函数, 定义如下:

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ \sin(yz) \\ x+z \end{pmatrix}, \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} u-v \\ uv \\ u+v \end{pmatrix}.$$

令 $h(u, v) = f(g(u, v))$, 即 h 是 f 和 g 的复合函数. (1) 求 $h(u, v)$ 的显式表达式;

(2) 求 $h(u, v)$ 在点 $(u, v) = (1, 2)$ 处的雅可比矩阵 $Dh(1, 2)$.

解 (1) $h(u, v) = f(g(u, v)) = f(u-v, uv, u+v) = \begin{pmatrix} e^{(u-v)+uv} \\ \sin((uv)(u+v)) \\ (u-v) + (u+v) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} e^{u-v+uv} \\ \sin(u^2v + uv^2) \\ 2u \end{pmatrix}$. (2 分) (4 分)

(2) $Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} & 0 \\ 0 & z \cos(yz) & y \cos(yz) \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $g(1, 2) = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1 \cdot 2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

将 $g(1,2) = (-1,2,3)$ 代入 $Df(x,y,z)$ 得:

$$Df(-1,2,3) = \begin{pmatrix} e^{-1+2} & e^{-1+2} & 0 \\ 0 & 3\cos(2 \cdot 3) & 2\cos(2 \cdot 3) \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e & 0 \\ 0 & 3\cos(6) & 2\cos(6) \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(4 \text{ 分}) \quad Dg(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 将 } (u,v) = (1,2) \text{ 代入得 } Dg(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. (6 \text{ 分})$$

将 $Df(-1,2,3)$ 和 $Dg(1,2)$ 相乘:

$$Dh(1,2) = \begin{pmatrix} e & e & 0 \\ 0 & 3\cos(6) & 2\cos(6) \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e & 0 \\ 8\cos(6) & 5\cos(6) \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. (4 \text{ 分})$$

五、(10 分) (1) 已知 $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$, 在位于第一卦限的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ 上找一点, 使函数在此点取最大值. (2) 由此证明: 对任意正实数 a, b, c , 恒有不等式 $abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5$.

解 (1) 构造 $\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = \ln x + \ln y + 3 \ln z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5r^2)$. (2 分)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{1}{x} - 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2x^2}, \quad (2 \text{ 分}) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{1}{y} - 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2y^2}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{3}{z} - 2\lambda z = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2z^2}. \quad (4 \text{ 分}) \quad \text{由 } \lambda = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2y^2} = \frac{3}{2z^2}, \text{ 可以得到: } x = y, \quad z = \sqrt{3}x. \quad (5 \text{ 分})$$

代入约束条件: 将 $y = x$ 和 $z = \sqrt{3}x$ 代入 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$: $5x^2 = 5r^2 \Rightarrow x = r, \quad y = r, \quad z = \sqrt{3}r$. 因此, 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $(r, r, \sqrt{3}r)$ 处取得最大值. (6 分)

最大值为: $f(r, r, \sqrt{3}r) = \ln r + \ln r + 3 \ln(\sqrt{3}r) = \frac{5}{2} \ln(3r^2)$. (7 分)

(2) 设 $a = x^2, \quad b = y^2, \quad c = z^2$ (因 $a, b, c > 0$), 则不等式变为: $x^2 y^2 z^6 \leq 27 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5} \right)^5$.

取对数得: $2 \ln x + 2 \ln y + 6 \ln z \leq \ln 27 + 5 \ln \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5} \right)$. (8 分) 利用 (1) 的结果:

在约束 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ 下, 有: $\ln x + \ln y + 3 \ln z \leq \frac{5}{2} \ln(3r^2)$.

代入 $r^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}$, 得到: $2 \ln x + 2 \ln y + 6 \ln z \leq 5 \ln \left(\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{5} \right)$. (9 分)

故: $x^2 y^2 z^6 \leq 27 \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{5} \right)^5$. 还原 a, b, c 即得: $abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5$. (10 分)

六、(10 分) 函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 + z^2 = \psi(x - y + z)$ 所确定的函数, 其中 ψ 具有二阶导数, 且 $\psi' \neq 2z$.

(1) 求 dz ; (2) 记 $v(x, y) = \frac{1}{x+y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, 求 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 (1) 对 $x^2 + y^2 + z^2 = \psi(x - y + z)$ 两边同时求全微分得: $2xdx + 2ydy + 2zdz = \psi' dx - \psi' dy + \psi' dz$, (3 分) 解出 dz , 因 $\psi' \neq 2z$, 所以 $dz = \frac{\psi' - 2x}{2z - \psi'} dx - \frac{\psi' + 2y}{2z - \psi'} dy$. (5 分)

(2) 由 (1) 知 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\psi' - 2x}{2z - \psi'}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\psi' + 2y}{2z - \psi'}$, 则 $v(x, y) = \frac{1}{x+y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = -\frac{2}{2z - \psi'}$ (7 分)

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{(2z - \psi')^2} \times \left[2 \frac{\partial z}{\partial y} - \psi'' \left(-1 + \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] \quad (9 分)$$

$$= \frac{2}{(2z - \psi')^2} \times \left[2 \times \left(-\frac{\psi' + 2y}{2z - \psi'} \right) - \psi'' \left(-1 - \frac{\psi' + 2y}{2z - \psi'} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{(2z - \psi')^2} \cdot \frac{-2(\psi' + 2y) + \psi''(2z + 2y)}{2z - \psi'} = \frac{4\psi''(z+y) - 4\psi' - 8y}{(2z - \psi')^3} \quad (10 分)$$

七、(共 6 分) 设 $f(x, y)$ 在区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上有连续的二阶偏导数, 且满足 $f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leq M$ 及 $f(0, 0) = 0, f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$, 证明:

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\pi \sqrt{M}}{4}.$$

证: 注意到 $f(x, y) = [f(x, y) - f(x, 0)] + [f(x, 0) - f(0, 0)]$, 由一元函数 Taylor 公式, 得 $f(x, y) = \left[f_y(x, 0)y + \frac{1}{2} f_{yy}(x, \xi)y^2 \right] + \left[f_x(0, 0)x + \frac{1}{2} f_{xx}(\eta, 0)x^2 \right]$

(2 分) 其中 ξ 介于 0 与 y 之间, η 介于 0 与 x 之间. 由题知在 D 上有 $|f_{xx}(x, y)| \leq \sqrt{M}, |f_{yy}(x, y)| \leq \sqrt{M}$. 故 $f(x, y) = f_y(x, 0)y + \frac{1}{2} f_{yy}(x, \xi)y^2 + \frac{1}{2} f_{xx}(\eta, 0)x^2 \leq$

$$f_y(x, 0)y + \frac{\sqrt{M}}{2} (x^2 + y^2) \quad (4 分)$$

根据二重积分的对称性, 得 $\iint_D f_y(x, 0)y dx dy = 0$, (5 分) 因此

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \frac{\sqrt{M}}{2} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\sqrt{M}}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi \sqrt{M}}{4} \quad (6 分)$$