离散数学

西安交通大学
计算机学院

个人介绍

曹相湧

副教授　硕/博导

Email: caoxiangyong@xjtu.edu.cn

研究方向：机器学习、计算机视觉、生成式大模型

个人主页：https://gr.xjtu.edu.cn/en/web/caoxiangyong

办公室：西一楼129

课程安排

- 64课时　4学时/周 1-16周
- 上课时间：周一5-6节、周三9-10节
- 上课地点：主B-102
- 答疑安排：线上+线下答疑（西一楼129）
- 考试：18周左右
- 形式：闭卷

教学方式与要求

- **教学方式　　课堂授课 + 线上辅导**

  用NetID登录思源学堂，进入课程

  查看教学日历、课件，上传作业

  http://syxt.xjtu.edu.cn/

- **线上/下答疑**

离散数学A-2025春-...

群号: 787278681

教学方式与要求

- 上课为主　　不迟到、不缺课
- 作业　　　　独立完成、按时提交

（每周一次作业，每周日晚上12点前提交）

- 助教：首云涛（QQ群里面可联系）
- 考试　　　　平时35% ＋　期末65%

平时成绩包括：作业15%

课堂测试20%（4-5次）

问题

- **什么是离散数学**

　　离散数学的研究对象主要是**离散结构**，离散结构是指由离散元素构成的结构，如集合、图、序列、矩阵等。离散数学研究这些结构的**性质和关系**，例如：集合的基本操作、关系的性质、图的遍历和连通性等。

　　离散数学的研究方法主要是**数学证明**和**计算机实验**。数学证明是通过逻辑推理来证明结论的正确性，计算机实验则通过计算机程序来验证结论的正确性。

- **为什么学习离散数学**

　　发展数学素质，理解和创造数学证明能力。

　　离散数学的学习，不但可以掌握处理离散结构的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且可以提高抽象思维和严格的逻辑推理能力，为将来参与创新性的研究和开发工作打下坚实的基础。

离散数学

- 离散数学是现代数学的一个重要分支，**计算机科学基础理论的核心课程**。它充分描述了计算机科学的离散性特点，是随着计算机科学的发展而逐步建立起来的新兴的基础性学科。
- 本课程作为计算机科学的基础性课程，主要介绍四大块内容：**集合论、代数系统、图论**、**数理逻辑**。
- **离散数学在计算机科学中的广泛应用**，比如，
  - 图论被广泛应用于网络设计、路由算法、图像处理等领域
  - 逻辑被应用于计算机程序设计、数据库设计等领域
  - 代数结构被应用于密码学、编码理论等领域
  - 组合数学被应用于计算机算法设计、图形处理等领域
  - …

离散数学

- 证明方法除了大量的运用常用的（数学）归纳法、演绎法、反证法、归谬法、二难法、二分法、枚举法（穷举法）、相容排斥法等方法之外，特别着重于存在性、结构性、构造性方法，以及各部分内容自己所特有的方法（比如图论的删点增点方法、删边增边方法、伸路蹦圈方法）。
- 课程所提供的训练十分有益于学生概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力的提高，十分有益于学生严谨、完整、规范的科学态度的培养。

教材和参考书

- **教材**

[1] 陈建明,曾明,刘国荣.离散数学（第3版）. 西安:西安交通大学出版社，2012

- **参考书**

[1] Bernard Kolman, Robert C. Busby, Sharon Cutler Ross，Discrete Mathematical Structures，高等教育出版社，2010.

[2] 刘国荣，李文，陈建明，离散数学内容提要与习题解析，西安交通大学出版社，2014.

[3] 离散数学及其应用，机械工业出版社.

网上教学平台

- 思源学堂 **http://syxt.xjtu.edu.cn/**

- 内容包括：课程通知、课程作业、课程资源等
- 作业提交：以PDF格式在思源学堂上传作业

课程主要内容

- 第三章　集合（6学时）
- 第四章　关系（10学时）
- 第五章　函数（6学时）
- 第六章　代数系统（16学时）
- 第七章　格与布尔代数（10学时）
- 第八章　图论（16学时）

离散数学

问题1：1232个学生选了英语课，879个学生选了法语课，114个学生选了德语课。103个学生选了英语和法语，23个学生选了英语和德语，14个学生选了法语和德语。如果2092个学生至少在英语、法语、德语课中选了一门，有多少学生选了所有这3门课？

离散数学

问题2：在公元十八世纪的东普鲁士有个哥尼斯堡城，哥尼斯堡城位于普雷格尔河畔，河中有两个岛，城市中的各个部分由七座桥相连。当时，城中的居民热衷于这样一个问题，从四块陆地的任一块出发，怎样才能做到经过每座桥一次且仅一次，然后回到出发点。

能吗？

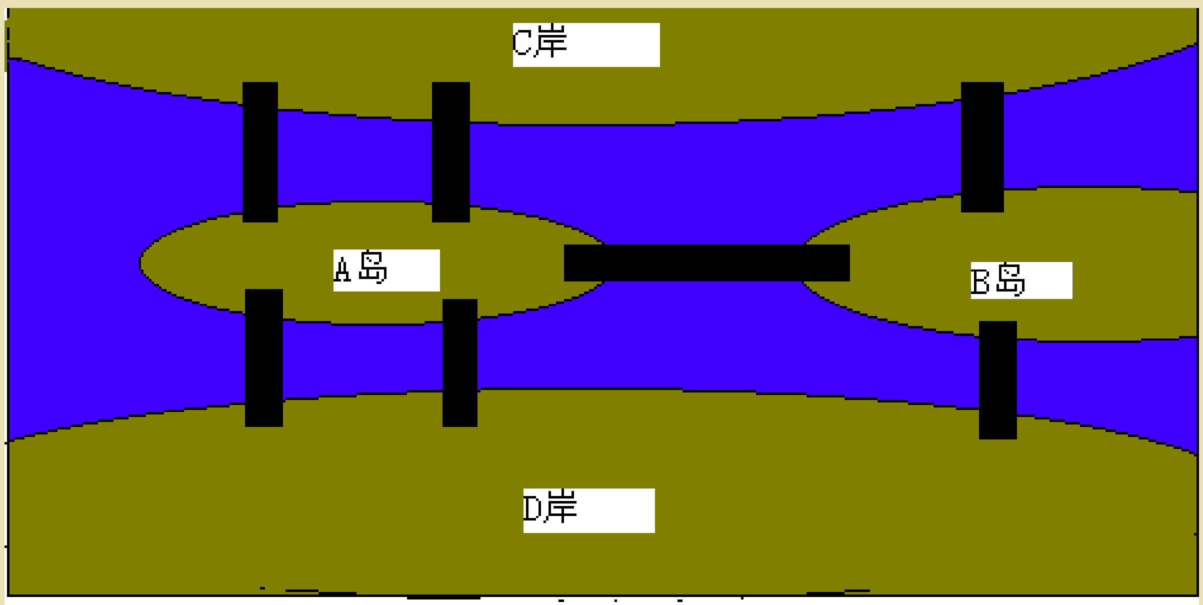


图1. 七桥图

离散数学

1736年，瑞士的数学家L.Euler解决了这个问题。他将四块陆地表示成四个结点，凡陆地间有桥相连的，便在两点间连一条线，这样图1就转化为图2了。

此时，哥尼斯堡七桥问题归结为：**在图2 所示的图中，从 A, B, C, D 任一点出发，通过每条边一次且仅一次而返回出发点的回路是否存在？**后人称如此的问题为**Euler环游**。

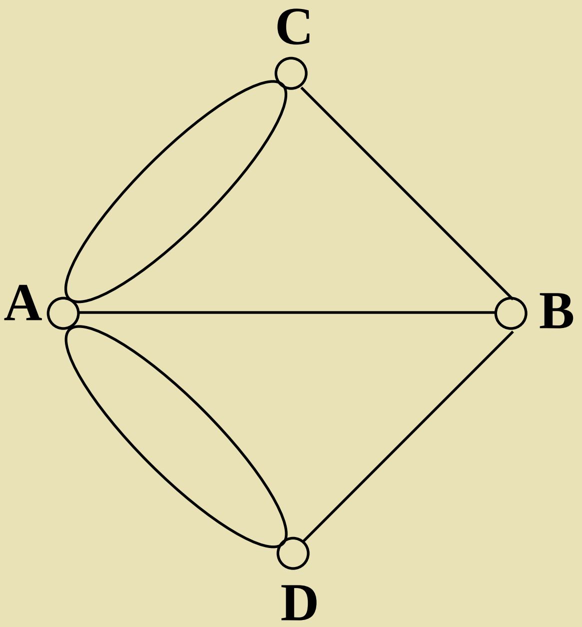
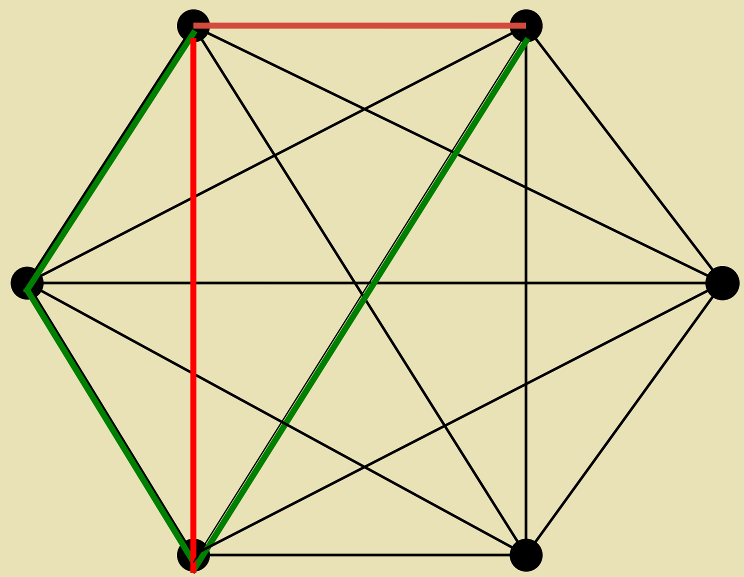


图2

离散数学

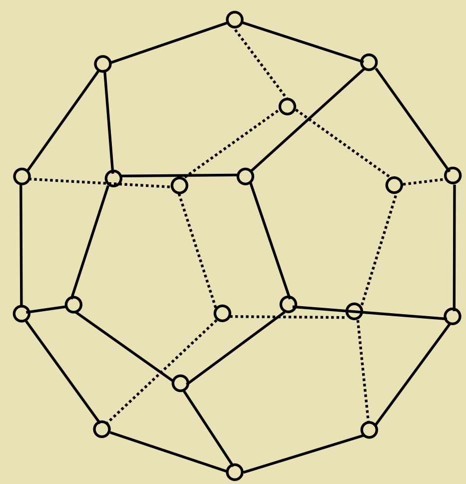
问题3：将下图中的边随意图上红色或绿色，只有这两种颜色，无论你怎么涂，总存在一个红色三角形或绿色三角形。



为什么？

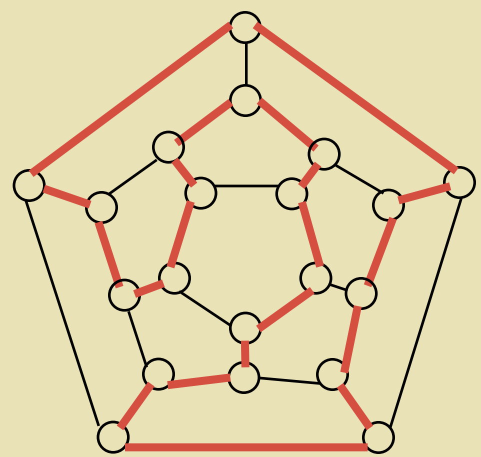
离散数学

问题4：环球航行问题（周游世界问题）：能否在全球选定的二十个都会城市中，从任一城市出发，作全球航行，经过这二十个城市一次且仅一次(不能去其它城市)，然后回到出发点？



正十二面体

图1



正十二面体的平面展开图及其Hamilton圈

图2

其它：握手问题　　　　最短最长路问题等等

离散数学

目　录

离散数学

第三章　集合　（set）

§1.集合理论中的一些基本概念

- 个体与集合之间的关系
- 集合的表示法
- 集合与集合之间的关系
- 幂集

§2.集合代数　集合的基本运算

- 集合的补运算
- 集合的交运算和并运算
- 集合的宏运算

离散数学

第三章　集合 (set)

§ 1 .集合理论中的一些基本概念

集合概念将作为一个不言自明的元概念（基本概念）。它不能用别的术语来精确的定义，只能用别的术语来加以说明。它本身就是用来定义其它概念的概念。

我们来看看一些关于什么是集合的各种不同的说法，以便加深对集合这个元概念的理解。

离散数学

1. 莫斯科大学的那汤松教授说：

　　凡具有**某种特殊性质**的**对象**的**汇集**称之为集。

2. 复旦大学的陈建功教授说：

　　凡可供吾人思维的，不论它有形或无形，都叫做**物**。具有**某种条件**的物，称它们的**全部**谓之一集。

离散数学

3. 南开大学的杨宗磐教授说：

集就是“**乌合之众**”。不考虑怎样“**乌合**”起来的，众**可以具体**，**可以抽象**。

这种乌合性被归纳为集合的一条性质

任意性： 任意性是说组成集合的元素任意；

构成的法则任意；

什么都可以构成集合，不加任何限制

任意性是集合的四大性质之一。

离散数学

4. 集合论之父G.Cantor（1845-1918）说：

集合是由**总括**某些**个体**成一个整体而成的。对于每个个体，只设其为**可思考的对象，辨别它的异同**。个体之间并不需要有任何关系。

离散数学

因此，对于集合，我们接受以下事实：

(a)承认集合的存在性。即，接受集合概念；

(b)承认集合是由一些个体（对象）组成的。这些个体称为该集合的成员或元素（member,element）；

(c)承认个体是可辩认的。即，一个个体要么是一个集合的成员，要么不是；二者必居其一，也只居其一。

离散数学

这种存在性，可辩认性被归纳为集合的一条性质

确定性： 确定性是说集合确定；
个体确定；
集合与个体之间的关系确定。

因此，经典集合的边界是分明的、清晰的。

确定性是集合的四大性质之一。

离散数学

综上所述集合的概念有三要素：

1. 个体（元素）
2. 个体的可辨认性
3. 集合（动词，汇到一块）

- 通常用小写拉丁字母表示个体：a、b、c、d、…
- 通常用大写拉丁字母表示集合：A、B、C、D、…
- 有时还用德文花写字母表示集合：$\mathscr{B},\wp,\mathscr{R},\mathscr{E},\mathscr{F},\mathscr{M}$, …
- 关于个体的辨认有赖于各方面公认的知识。

离散数学

一． 个体与集合之间的关系：

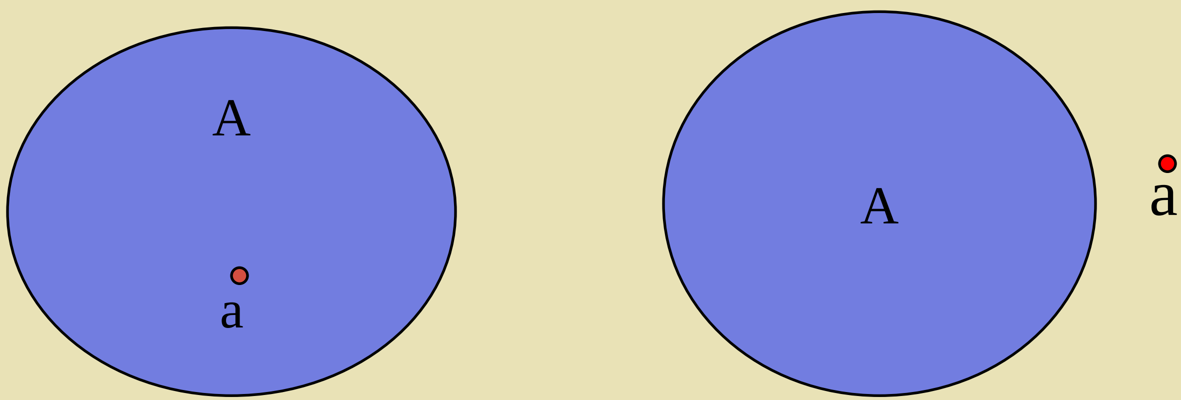
个体与集合之间的关系称为**属于关系**。对于某个个体 a 和某个集合 A 而言， 只有两种可能：

(1) a 属于（belong to） A，记为 $a \in A$，同时称 a 是 A 的元素或A的成员。

记号$\in$ 是希腊字εστi的第一个字母，意思是“是”。由意大利数学家G.Peano首先采用。

离散数学

(2) a 不属于 A，记为 a$\notin$A或a $\bar{\in}$ A ，称 a 不是 A 的元素或a 不是 A 的成员。



a$\in$A   a$\notin$A

离散数学

- 判断个体 a 属于 A 还是不属于 A ，必须使用个体的可辨认性，而且个体的可辨认性是无二义性的，即或者 a 属于 A 或者 a 不属于 A，二者居其一且只居其一。
- 集合论是一种语言。它可以作为别的学科的描述工具语言。

离散数学

二.　集合的表示法：

我们规定用花括号——{ } 表示集合。

- (1)文字表示法：

用文字表示集合的元素，两端加上花括号。

{ 在座的同学 }；

{ 奇数 }；

{ 去年的下雨天 }；

{ 高等数学中的积分公式 }；

{ 闭区间[0,1]上的连续函数 }；

比较粗放。比较适合在对集合中的元素了解甚少、不详，难以用精确的数学语言来刻划时使用。

离散数学

- (2)元素列举法（罗列法）：

  将集合中的元素逐一列出，两端加上花括号。

  { 1，2，3，4，5}；

  { 风，马，牛 }；

  { 2，4，6，8，10，… }；

  { 3，7，11，15，19，… }；

  比较适合集合中的元素有限（较少或有规律），无限（离散而有规律）的情况。

离散数学

- (3)谓词表示法：

  { x:P(x) }　或者　{ x | P(x) }

  其中：P表示 x 所满足的性质（一元谓词）。

{ x | $x \in$ I $\wedge$（且） x<8}

={…，-3，-2，-1，0，1，2，3，4，5，6，7 }

{ x | $x^2 = 1$ }；

{ y | y 是开区间 (a,b) 上的连续函数 }；（混合表示法）

离散数学

{ 使 $x^2 = 1$ 的实数 }

={ 1， -1 }

$=\{ x \mid x^2 = 1 \}$

比较适合在对集合中的元素性质了解甚详，且易于用精确的数学语言来刻划时使用。

离散数学

- **外延**(extension)：集合$\{ x \mid P(x) \}$称为性质谓词$P(x)$的外延；
- **内涵**(intension,connotation)：性质谓词$P(x)$称为集合$\{ x \mid P(x) \}$的内涵；

  由此看到，采用谓词法定义集合，关键是要得出内涵$P(x)$。
- **概括原理**：集合$\{ x \mid P(x) \}$恰由那些满足性质谓词$P(x)$的元素组成。即

  $x \in \{ x \mid P(x) \} \Leftrightarrow$（当且仅当）$P(x)$真。

离散数学

◆ 三大悖论

1900年前后，在集合论中出现了三个著名的悖论。

- 罗素悖论
- 康托尔悖论
- 布拉列-福尔蒂悖论

悖论 (paradox)

所谓悖论是指这样一个所谓的命题P，由P真立即推出P假；由P假立即推出P真；即:

$$P真 \Leftrightarrow P假$$

离散数学

理发师悖论：

某偏远小山村仅有一位理发师。这位理发师规定：

他只给那些不给自己刮脸的人刮脸。

问题：这位理发师的脸由谁来刮？

如果他给自己刮脸，那么，按他的规定：他不应该给自己刮脸；

如果他不给自己刮脸，那么，按他的规定：他应该给自己刮脸。

罗素悖论 (Russell paradox (1902))

罗素1902年在集合论中发现了如下的悖论。他构造了这样一个集合：

$$S=\{\, x \mid x \notin x \,\}$$

问题：$S \in S$成立吗？

* 罗素悖论的发现，几乎毁灭集合论，动摇数学的基础，倾危数学的大厦。直接引发了数学的第三次危机。

如果$S \in S$，那么，按罗素给S的定义，则应有 $S \notin S$；

如果$S \notin S$，那么，按罗素给S的定义，则应有 $S \in S$。

新问题：$S \notin S$ 与$S \in S$同时成立？！

离散数学

为了解决集合论中的悖论问题，

人们产生了**类型论**和**形式化公理化集合论**(ZF和ZFC公理系统)，以求排除集合论中的悖论。

在公理化集合论中，人们引进类(class)的概念。

$$\text{类}\begin{cases}\text{不包含悖论的类}(\textbf{\textit{OK}}\text{类})---\text{集合}(\text{可进行运算}) \\ \text{包含悖论的类}(\text{固有类})-\text{非集合}(\text{不能进行运算})\end{cases}$$

本章我们所讲解的集合论是‘朴素（naive）’集合论；所讨论的集合一般也不会产生悖论。

离散数学

三. 集合的名字：

(1)大写的拉丁字母：

例如 $A=\{x \mid x=1\}$, $B=\{-1,1\}$；

(2)小写的希腊字母：

例如 $\alpha=\{a,b,c\}$, $\beta=\{n:n\in N\wedge 3 \mid n\}$；

(3)花写的德文字母：

例如 $\wp=\{y:y\in R\wedge 0\le y\le 1\}$,

$\Re=\{u:u\in I\wedge u+3\ge 0\}$；

不够用时可以加下标。同一个集合可以有几个名字。

离散数学

四. 集合的相等（equality）：

外延性原理：两个集合相等，当且仅当，它们的成员完全相同。即

$$A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \Leftrightarrow x\in B) \quad ;$$

两个集合不相等，记为$A\neq B$ ；

根据这个定义，关于集合我们可得下列性质：

(1) **无序性：**

集合中的元素是无序的。例如

$$\{a,b,c\} = \{b, a, c\} = \{b , c, a\}$$

因此，为了使用方便，我们可任意书写集合中元素的顺序。

但一般情况下，通常采用字母序、字典序；有时，还需要强行命名一种序；

无序性是集合的四大性质之一。

(2)无重复性：

集合中元素的重复是无意义的。例如

$\{a, a, a, a, b, b, b, c, c\} = \{a, b, c\}$

包（bag）**：**若允许元素重复称为包。例如

$\{a, a, a, a, b, b, b, c, c\}$

一般记为$\{4a, 3b, 2c\}$

无重复性是集合的四大性质之一。

集合的四大性质

1. 任意性
2. 确定性
3. 无序性
4. 无重复性

五. 空集（empty,null,void set）：记为$\varnothing$

空集是没有成员的集合。即

$\forall x(x\notin\varnothing)$（所谓的空集公理）；

所以$\varnothing=\{\ \}$；

空集是集合（作这点规定是运算封闭性的要求）。

空集是唯一的。因为若有两个空集，则它们有完全相同的元素（都没有任何元素），所以它们相等，是同一集合。

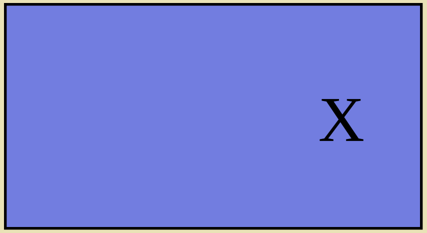
离散数学

六. 全集（universe of discourse）：记为X

全集是所要研究的问题所需的全部对象（元素）所构成的集合。

全集给个体（研究的对象）划定适当的范围。

全集一般用一个矩形框来表示：



离散数学

七. 单元素集合（singleton set）**：**

只含一个元素的集合称为单元素集。

例如 { a }； { 张三 }；

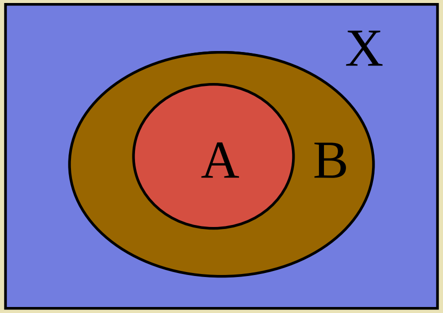
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$ ？

  左边是空集$\varnothing$；右边不是空集，而是单元素集合，有一个成员$\varnothing$；
- 这说明：**差别在于级别**。即，右边的集合级别高。
- 单元素集合是构造复杂集合的‘**原子**’。

八.　子集（subset）：

对于两个集合A，B，若A中的每个元素x都是B 的一个元素，则称A包含在B中（或者说B包含A ），记为$A\subseteq B$。同时称A是B的子集（称B是A 的超集(superset)）。即

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \Rightarrow x\in B)$$ 。



- **真子集**（proper subset）：

  称A是B的真子集或者说A真包含在B中（或者说B真包含A ），记为$A \subset B$。即

  $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ 。

- 子集的两种特殊情况（平凡子集）：

  (1)空集（见下面定理2）；

  (2)每个集合自己（见下面定理1的(1)）；

九. 集合与集合之间的关系:

集合与集合之间的关系有四种。列举如下

(1)B包含A， $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \Rightarrow x\in B)$；

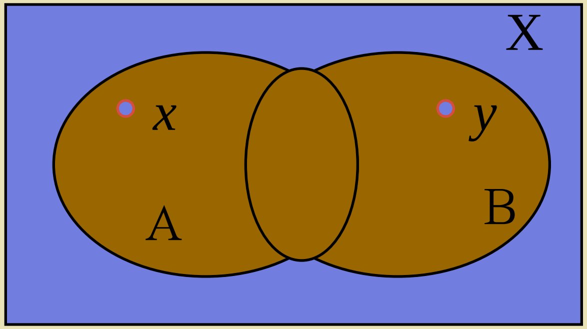
(2)A包含B， $B\subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x\in B \Rightarrow x\in A)$;

(3)A等于B， $A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in B \Leftrightarrow x\in A)$

$\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$；

(4)A与B互不包含， $\neg(A\subseteq B)\wedge\neg(B\subseteq A)$

$\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge x\notin B)\wedge\exists y(y\in B\wedge y\notin A)$；



离散数学

定理1.设A,B,C为任意三个集合。那么

(1) 自反性：$A \subseteq A$ (每个集合是它自己的子集)；

(2) 反对称性：$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A=B$；

(3) 传递性：$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$；

这说明包含关系$\subseteq$是集合间的半序关系(参见第四章§6)。

离散数学

[证明].（采用逻辑法）

(1) $\forall x(x\in A\Rightarrow x\in A)$

$\Rightarrow A\subseteq A$

所以包含关系$\subseteq$是自反的；

(2)$A\subseteq B\wedge B\subseteq A$

$\Rightarrow\forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\Rightarrow x\in A)$

$\Rightarrow\forall x((x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Rightarrow x\in A))$

$\Rightarrow\forall x(x\in A\Leftrightarrow x\in B)$

$\Rightarrow A=B$

所以包含关系$\subseteq$是反对称的；

(3)$A\subseteq B\wedge B\subseteq C$

$\Rightarrow\forall x(x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\Rightarrow x\in C)$

$\Rightarrow\forall x((x\in A\Rightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Rightarrow x\in C))$

$\Rightarrow\forall x(x\in A\Rightarrow x\in C)$

$\Rightarrow A\subseteq C$

所以包含关系$\subseteq$是传递的。

定理2. 空集是任一集合的子集。即

$\varnothing \subseteq A$ 。

[证明].(采用逻辑法)

$\forall x(x \notin \varnothing)$ (空集的定义)

$\Leftrightarrow \forall x \neg (x \in \varnothing)$

$\Rightarrow \forall x\, (\neg(x \in \varnothing) \vee x \in A)$

(析取构成式：$\neg p \Rightarrow (\neg p \vee q)$)

$\Rightarrow \forall x(x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$

(联结词归约：$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \to q)$)

$\Rightarrow \varnothing \subseteq A$ 。

定理2. 空集是任一集合的子集。即

$\varnothing \subseteq A$ 。

[证明].(反证法)

十. **幂集**(power set)：

定义1. 幂集

一个集合A的所有子集构成的集合称为A的幂集。记为 2^A，即

$$2^A = \{ B \mid B \subseteq A \}$$ 。

显然， A的两个平凡子集$\varnothing$ 和A 都属于A的幂集。即

$$\varnothing \in 2^A，A \in 2^A$$ 。

离散数学

例1. 若A={1,2,3}，则

$2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$。

注：(1) 包含关系$\subseteq$两边必须是集合，并且这两个集合的级别（广义上）相同；

(2)属于关系$\in$左边是元素（广义上），右边是集合，两边级别差一级。

定义2. 基数

一个有穷集合（有限集合——元素个数有限的集合）A中元素的个数称为A的基数。记为 $|A|$ (或$^{\#}A$，$\overline{\overline{A}}$)。

显然基数有以下两个性质：

(1)齐性： $|\varnothing|=0$ ；

(2)非负性： $|A|\geq 0$ （对任何集合A ）；

另外，由于$2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$，所以$|2^{\varnothing}|=1$ 。

一般地，关于幂集有以下结果

定理3. 若A是有限集合$|A|=n$， 则 $|2^A|=2^n$

这个定理也说明，我们为什么把一切子集构成的集合称为幂集。

[证明]. 由于集合A有限，故可设

$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，于是

$|A|=n$。A的子集按其基数大小可分为0，1，2，…，n共n+1类。

离散数学

A的所有k个元素的子集（基数为k的类）为从n个元素中取k个元素的组合数 C_n^k 。另外，因 $\varnothing \subseteq A$，故（按加法原理）

$$|2^A| = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$$

但由于二项式定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ x^k y^{n-k}$

令x=y=1，则有$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ ，

从而，有 $|2^A| = 2^n = 2^{|A|}$ 。

定理4. 若A，B是两个集合，那么，

$A=B \Leftrightarrow 2^A = 2^B$。

[证明]. $\Rightarrow$）：由幂集的定义

$\forall x \in 2^A$

$\Rightarrow x \subseteq A$ (幂集的定义)

$\Rightarrow x \subseteq B$ (条件： $A=B$)

$\Rightarrow x \in 2^B$ (幂集的定义)

$\Rightarrow 2^A \subseteq 2^B$

同理可证 $2^B \subseteq 2^A$

因此 $2^A = 2^B$ (集合相等定义)

$\Leftarrow$)：一方面，

$A \subseteq A$ (自反性)

$\Rightarrow A \in 2^A$ (因为$2^A = \{B : B \subseteq A\}$)

$\Rightarrow A \in 2^B$ (充分性条件：$2^A = 2^B$)

$\Rightarrow A \subseteq B$ (因为$2^B = \{A : A \subseteq B\}$)

另一方面，

$B \subseteq B$ (自反性)

$\Rightarrow B \in 2^B$ (因为$2^B = \{A : A \subseteq B\}$)

$\Rightarrow B \in 2^A$ (充分性条件：$2^A = 2^B$)

$\Rightarrow B \subseteq A$ (因为$2^A = \{B : B \subseteq A\}$)

因此，由包含关系的反对称性，得到

$A = B$ 。

离散数学

§2. 集合的基本运算

定义1. 补(余或非)运算 ((absolute)complment)

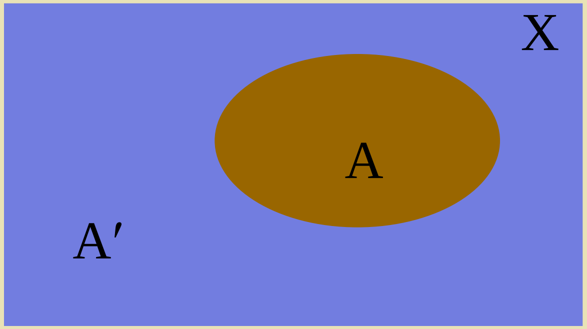
设X是全集。

对任何集合A $\subseteq$ X， 使得A′={ x ｜ $x \in$X $\wedge$ $x \notin$A }

(当全集明确时， A′ ={x ｜ $x \notin$A })

称′为集合的补运算。称A′是A关于X的补集。

补运算有时也记为 $\overline{A}$ ， 或~A或¬A。



离散数学

例1. $X=\{a,b,c,d,e,f\}$， $A=\{a,c,d\}$。则

$A' = \{b,e,f\}$ 。

定理1. 补运算基本定理

设X是全集，A，B是X的子集。则

(1)反身律(对合律)：$(A')'=A$；

(2)换质位律（逆否律）；$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$；

(3)$A = B \Rightarrow A' = B'$ ；

(4)零壹律：$X' = \varnothing$，$\varnothing' = X$。

[证明]. (采用逻辑法)

(1) $(A')'=A$；

对任何元素$x\in X$， $x\in(A')'$

$\Rightarrow x\notin A'$

$\Rightarrow x\in A$

所以 $(A')'\subseteq A$ ；

对任何元素$x\in X$， $x\in A$

$\Rightarrow x\notin A'$

$\Rightarrow x\in(A')'$

所以 $A\subseteq(A')'$ 。

(2) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

对任何元素$x \in X$， $x \in B'$

$\Rightarrow x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A$ (条件：$A \subseteq B$)

$\Rightarrow x \in A'$

所以 $B' \subseteq A'$ ；

对吗???

(4)对任何元素x， $x \in X'$

$\Leftrightarrow x \notin X$

$\Leftrightarrow x \in \varnothing$ ？？？

所以 $X'=\varnothing$ ；

对任何元素x，$x \in \varnothing'$

$\Leftrightarrow x \notin \varnothing$

$\Leftrightarrow x \notin X'$ (已证：$X'=\varnothing$)

$\Leftrightarrow x \in X$

所以 $\varnothing'=X$ 。

定义2. 交运算， 并运算

(intersection, union)

设X是全集。

(1)二元运算 $\cap$:

对任何集合 $A,B\subseteq X$ ，使得

$$A\cap B=\{\,x \mid x\in A\wedge x\in B\,\}$$

称∩为集合的交运算。称 $A\cap B$ 为A与B的交集。

∩ 英语读作cap（帽子）。

若 $A\cap B=\varnothing$ ，则称A与B互不相交((pairwise)disjoint)。

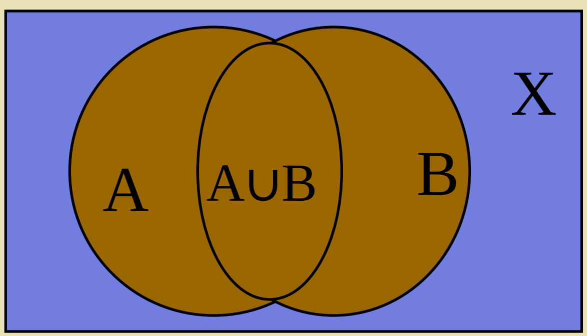
(2)二元运算 ∪:

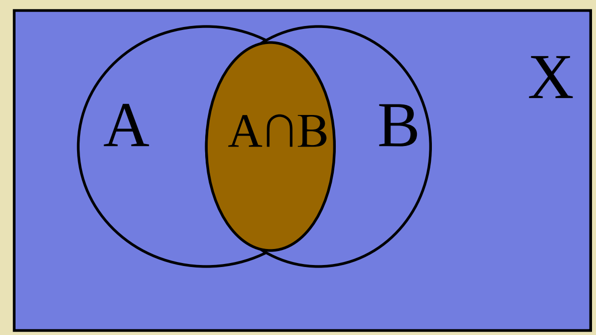
对任何集合A,B $\subseteq$X，使得

$$A\cup B = \{ x \mid x\in A \vee x\in B \}$$

称∪为集合的并运算。称A∪B为A与B的并集。

∪英语读作cup（酒杯）。





离散数学

例2. 设X={a,b,c,d,e,f}，A={a,c,d,f}， B={b,d,f}。

则 $A \cap B = \{d,f\}$

$A \cup B = \{a,b,c,d,f\}$

定理2. 交、并、补运算的基本定理

设X是全集，A，B，C是X的三个子集。则

(1) 幂等律：$A \cap A = A$， $A \cup A = A$；

(2) 互补律：$A \cap A' = \varnothing$， $A \cup A' = X$；

(2')零壹律：$A \cap X = A$，$A \cup X = X$ ；

(全集是交的幺元,并的零元)

(2")零壹律：$A \cap \varnothing = \varnothing$ ， $A \cup \varnothing = A$；

(空集是交的零元,并的幺元)

(3) 上界：$A \subseteq A \cup B$， $B \subseteq A \cup B$ ；

下界：$A \cap B \subseteq A$ ， $A \cap B \subseteq B$;

(3’)上确界： $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$；

(并集$A \cup B$是同时包含A和B的集合中最小的一个)

(3”)下确界：$C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B$；

(交集$A \cap B$是同时被A和B所包含的集合中最大的一个)

离散数学

(4)吸收律： $A\cap(A\cup B) = A$， $A\cup(A\cap B) = A$

(5)交换律：$A\cap B= B\cap A$， $A\cup B= B\cup A$；

(6)结合律：$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$，

$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$；

(7)分配律：$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$；

离散数学

(3’) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;

[证明]. (采用逻辑法)

对任何元素$x \in X$，

$x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Rightarrow x \in C \vee x \in C$ (已知条件：$A \subseteq C$，$B \subseteq C$)

$\Rightarrow x \in C$ (幂等律：$p \vee p \Leftrightarrow p$)

所以，$A \cup B \subseteq C$ 。

(7) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

先证：$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(采用元素法)

对任何元素$x\in X$，若$x\in A\cap(B\cup C)$，则$x\in A$，且$x\in B\cup C$。于是$x\in A$，且$x\in B$或者$x\in C$。

若$x\in B$，则$x\in A$且$x\in B$，于是$x\in A\cap B$；

若$x\in C$，则$x\in A$且$x\in C$，于是$x\in A\cap C$；

综合$x\in A\cap B$或者$x\in A\cap C$，因此

$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

所以，$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

次证：$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$(采用包含法)

由(3)有 $A\cap B\subseteq A$， $A\cap B\subseteq B\subseteq B\cup C$（逐步放大法）。

于是根据(3”)可得 $A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C)$

同理可得 $A\cap C\subseteq A\cap(B\cup C)$

于是根据(3’)可得

$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$ 。

最后，根据包含关系的反对称性，就得到

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 。

定理3. de Morgan律（也叫对偶律）

设A，B为两个集合。则

(1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$，

(2) $(A \cap B)' = A' \cup B'$。

[证明]. 只证(1) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

先证：$(A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$ (采用包含法)

由定理2(3)有 $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$

于是由定理1(2)可得 $(A\cup B)'\subseteq A'$，$(A\cup B)'\subseteq B'$

再用定理2(3”)，就有 $(A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$；

次证：$A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$ (采用逻辑法)

对任何元素$x\in X$，

$x\in A'\cap B'$

$\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B'$

$\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$

$\Rightarrow x \notin A \cup B$

(否则 $x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$，这与$x \notin A \wedge x \notin B$矛盾)

$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$

所以 $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

最后，根据包含关系的反对称性，就得到

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ 。

定理4 设A，B为两个集合。则下面三式等价。

(1) $A \subseteq B$；

(2) $A \cup B = B$；

(3) $A \cap B = A$。

$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

[证明]. (采用循环论证法)

(1) $\Rightarrow$(2)：(采用包含法) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

首先，根据定理2(3)，我们得到 $B \subseteq A \cup B$；

其次，由已知条件$A \subseteq B$，及自反性$B \subseteq B$，根据定理2(3’)，我们得到 $A \cup B \subseteq B$；

最后，根据包含关系的反对称性，我们就得到

$A \cup B = B$ 。

(2)⇒(3)：(采用变换法) $A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$

$A \cap B = A \cap (A \cup B)$ (根据(2) $A \cup B = B$)

$= A$ (根据定理2(4)吸收律)

即 $A \cap B = A$ 。

(3)⇒(1)：(采用：包含法) $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$

$A = A \cap B$ (根据(3)$A \cap B = A$)

$\subseteq B$ (根据定理2 (3)$A \cap B \subseteq B$)

即 $A \subseteq B$ 。

定义3 . 差运算(difference)

设X是全集。

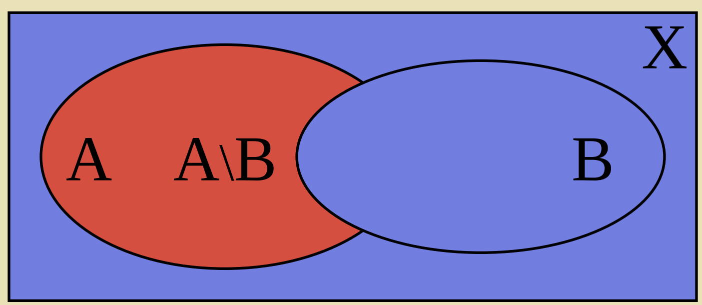
二元运算 \ :

对任何集合A,B$\subseteq$X，

使得 $A \backslash B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$称为集合的差运算。称 A\B 为 A 和 B 的差集。

差集有时也称为相对补(relative complement)。

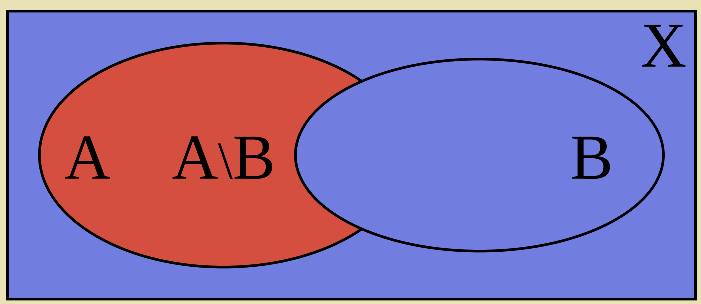
而余运算可看成绝对补。即 $A' = X \backslash A$ 。



离散数学

例3. X={a,b,c,d,e,f}， A={a,c,d,f} B={b,d,f}。
则 A\B = {a,c} ， B\A = {b} 。

- 由差运算、交运算、补运算的定义知
  $A \backslash B = A \cap B'$。
- $A \backslash B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}$



- 由于差运算可以由交、并、补运算表示，因此称差运算为宏运算。

离散数学

定理5.差运算基本定理

设X是全集，A，B，C是X的三个子集。则

(1)$A\backslash B \subseteq A$；

(2)$A \subseteq B \Rightarrow A\backslash B = \varnothing$；

(3)$A\backslash A = \varnothing$；

(4)$X\backslash A = A'$； $A\backslash X = \varnothing$；

(5)$A\backslash \varnothing = A$； $\varnothing\backslash A = \varnothing$；

(6)$A\cap(B\backslash C)= (A\cap B) \backslash (A\cap C)$ (交对差的分配律)；

(7)$A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$；

(8)$A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B) \cap(A\backslash C)$ (相对补的de Morgan律);

(9) $A\backslash(B\cap C) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C)$ (相对补的de Morgan律) 。

[证明]. (采用包含法和变换法(公式法)法)

(1) $A\backslash B\subseteq A$

$A\backslash B=A\cap B'$

$A\cap B' \subseteq A$ (根据定理2 (3)$A\cap B'\subseteq A$);

$A\backslash B\subseteq A$

(2) $A\subseteq B\Rightarrow A\backslash B = \varnothing$

$A\backslash B=A\cap B'$

$=(A\cap B)\cap B'$

(由已知条件$A\subseteq B$根据定理4(3)有$A\cap B=A$)

$=A\cap(B\cap B')$ (结合律)

$=A\cap\varnothing$ (互补律$B\cap B'=\varnothing$)

$=\varnothing$ (零壹律)；

(6) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

$A\cap(B\setminus C)$

$= A\cap(B\cap C')$

$=\varnothing\cup(A\cap B\cap C')$ (零壹律,结合律)

$=(B\cap\varnothing)\cup(A\cap B\cap C')$ (零壹律)

$=(B\cap A\cap A')\cup(A\cap B\cap C')$ (互补律,结合律)

$=(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap C')$ (交换律)

$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$ (分配律)

$=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$ (de Morgan律)

$=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$;

离散数学

(7)$A\backslash(B\backslash C)$

$=A\backslash(B\cap C')$

$=A\cap(B\cap C')'$

$=A\cap(B'\cup C)$ (de Morgan律,反身律)

$=(A\cap B')\cup(A\cap C)$ (分配律)

$=(A\backslash B)\cup(A\cap C)$;

(8)$A\backslash(B\cup C)$

$=A\cap(B\cup C)'$

$=A\cap(B'\cap C')$ (de Morgan律)

$=(A\cap A)\cap(B'\cap C')$ (幂等律)

$=(A\cap B')\cap(A\cap C')$ (结合律，交换律)

$=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$;

$(9) A \backslash (B \cap C)$

$= A \cap (B \cap C)'$

$= A \cap (B' \cup C')$ (de Morgan律)

$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$ (分配律)

$= (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$ 。

练习：

$(A \backslash B) \cup B = A \cup B$

$(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$

离散数学

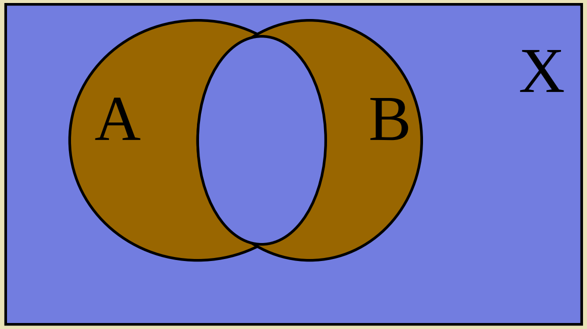
定义4. 对称差（环和）运算(symmetric difference)

设X是全集。　二元运算 ⊕：

对任何集合$A,B\subseteq X$，使得

$$A\oplus B=\{x \mid (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$$

称为集合的对称差运算。称 $A\oplus B$ 为 A 和 B 的对称差集。



$A\oplus B$

离散数学

- 由环和运算和并、差运算的定义可知

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- 由环和运算和交、并、余运算的定义可知

$$A \oplus B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

因此环和运算也是宏运算。

例4. 设$X=\{a,b,c,d,e,f\}$，$A=\{a,c,d,f\}$， $B=\{b,d,f\}$

则 $A \setminus B = \{a,c\}$,

$B \setminus A = \{b\}$,

$A \oplus B = \{a,b,c\}$ 。

定理6 .环和运算基本定理

设X是全集，A，B，C是X的三个子集。则

(1)$A\oplus B = (A\cup B)\backslash(A\cap B) = (A\cup B)\cap(A'\cup B')$；

(2)$A\oplus\varnothing = A$ （空集是环和的幺元）；

$A\oplus X = A'$；

(3)$A\oplus A = \varnothing$ （自己是自己（环和）的逆元）；

$A\oplus A'= X$ ；

(4)$A'\oplus B' = A\oplus B$；

(5)$(A\oplus B)' = A'\oplus B = A\oplus B'$；

(6)交换律：$A\oplus B = B\oplus A$；

(7)结合律：$A\oplus(B\oplus C) = (A\oplus B)\oplus C$；

(8)分配律：$A\cap(B\oplus C) = (A\cap B)\oplus(A\cap C)$ (交对环和的);

(9)消去律：$A\oplus B = A\oplus C \Rightarrow B=C$ 。

[证明].(采用变换法(公式法))只证(5)，(7)，(9)

(5)$(A\oplus B)'$

$=((A\cap B')\cup(A'\cap B))'$

$=(A\cap B')'\cap(A'\cap B)'$ (de Morgan律)

$=(A'\cup B)\cap(A\cup B')$ (de Morgan律，反身律)

$=((A'\cup B)\cap A)\cup((A'\cup B)\cap B')$ (分配律)

$=(A'\cap A)\cup(B\cap A)\cup(A'\cap B')\cup(B\cap B')$

(分配律，结合律)

$=(A\cap A')\cup(A\cap B)\cup(A'\cap B')\cup(B\cap B')$ (交换律)

$=\varnothing\cup(A\cap B)\cup(A'\cap B')\cup\varnothing$ (互补律)

$=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$ (零壹律)

离散数学

$A'\oplus B=(A'\cap B')\cup(A''\cap B)$

$\quad=(A'\cap B')\cup(A\cap B)$ (反身律)

$\quad=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$ (交换律)

$A\oplus B'=(A\cap B'')\cup(A'\cap B')$

$\quad=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$ (反身律)

所以 $(A\oplus B)'=A'\oplus B=A\oplus B'=(A\cap B)\cup(A'\cap B')$ ；

(7)$A\oplus(B\oplus C)$

$=(A\cap(B\oplus C)')\cup(A'\cap(B\oplus C))$

$=(A\cap((B\cap C)\cup(B'\cap C')))\cup(A'\cap((B\cap C')\cup(B'\cap C)))$

(根据本定理的(5)的证明)

$=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)$

(分配律，结合律)

$(A\oplus B)\oplus C$

$=((A\oplus B)\cap C')\cup((A\oplus B)'\cap C)$

$=(((A\cap B')\cup(A'\cap B))\cap C')\cup(((A\cap B)\cup(A'\cap B'))\cap C)$

(根据本定理的(5)的证明)

$=(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A\cap B\cap C)\cup(A'\cap B'\cap C)$

(分配律，结合律)

$=(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B'\cap C')\cup(A'\cap B\cap C')\cup(A'\cap B'\cap C)$

(交换律，结合律)

所以 $A\oplus(B\oplus C)=(A\oplus B)\oplus C$ ；

$(9) B = \varnothing \oplus B$ （根据本定理的(2)）

$= (A \oplus A) \oplus B$ （根据本定理的(3)）

$= A \oplus (A \oplus B)$ （根据本定理的(7)结合律）

$= A \oplus (A \oplus C)$ （已知条件 $A \oplus B = A \oplus C$）

$= (A \oplus A) \oplus C$ （根据本定理的(7)结合律）

$= \varnothing \oplus C$ （根据本定理的(3)）

$= C$ （根据本定理的(2)）。

定义5 .环积运算

设X是全集，二元运算

$\otimes : 2^{X} \times 2^{X} \rightarrow 2^{X}$

对任何集合A,B$\subseteq$X， 使得

$A \otimes B = \{ x : (x \in A \vee x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \notin A) \}$

称为集合的环积运算。称 A⊗B 为 A 和 B 的环积集。

- 由环积运算和交、并、余运算的定义可知

$A \otimes B = (A \cup B') \cap (B \cup A')$

因此环积运算也是宏运算。

定理7.环积运算基本定理

设X是全集，A，B，C是X的三个子集。则

(1)$A\otimes B = (A\cap B)\cup(A'\cap B') = (A\cap B)\cup(A\cup B)'$；

(2)$A\otimes B = (A\oplus B)' = A'\oplus B = A\oplus B'$；

(3)$A\otimes\varnothing = A'$；

$A\otimes X = A$（全集是环积的幺元）；

(4)$A\otimes A = X$（自己是自己（环积）的逆元）；

$A\otimes A' = \varnothing$；

(5)$A'\otimes B' = A\otimes B$；

(6)$(A\otimes B)' = A'\otimes B = A\otimes B'$；

(7)交换律：$A\otimes B = B\otimes A$；

(8)结合律：$A\otimes(B\otimes C) = (A\otimes B)\otimes C$；

(9)分配律：$A\cup(B\otimes C) = (A\cup B)\otimes(A\cup C)$ (并对⊗的);

(10)消去律：$A\otimes B = A\otimes C \Rightarrow B=C$ 。

[证明].(采用变换法(公式法))只证(9)

(9)$A\cup(B\otimes C)$

$=A\cup((B\cup C')\cap(B'\cup C))$

$=(A\cup B\cup C')\cap(A\cup B'\cup C)$ (分配律，结合律)

$=X\cap(A\cup B\cup C')\cap X\cap(A\cup B'\cup C)$ (零壹律)

$=(A\cup B\cup A')\cap(A\cup B\cup C')\cap(A\cup C\cup A')\cap(A\cup B'\cup C)$

(互补律，零壹律，交换律，结合律)

$=((A\cup B)\cup((A'\cap C'))\cap((A'\cap B')\cup(A\cup C))$

(交换律，结合律，分配律)

$=((A\cup B)\cup((A\cup C)')\cap((A\cup B)'\cup(A\cup C))$

(de Morgan律)

$=(A\cup B)\otimes(A\cup C)$;

定义5 .

(1)初级交：$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

$= \{x \mid (\forall k \in N)(1 \le k \le n)(x \in A_k)\}$

$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$

$= \{x \mid (\forall k \in N)(k \ge 1)(x \in A_k)\}$

(2)初级并：$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

$= \{x \mid (\exists k \in N)(1 \le k \le n)(x \in A_k)\}$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$

$= \{x : (\exists k \in N)(k \ge 1)(x \in Ak)\}$

(3)广义交：$\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x : (\forall\gamma\in\Gamma)(x\in A_\gamma)\}$

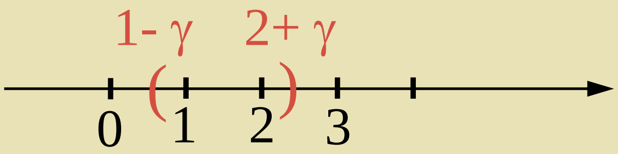
(4)广义并：$\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x : (\exists\gamma\in\Gamma)(x\in A_\gamma)\}$

这里：γ—称为索引，下标，指标；

Γ—称为索引集，下标集，指标集。

例6. $\Gamma=(0,1)$，$A_\gamma = (1-\gamma, 2+\gamma)$。则

$\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma =$



$\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma =$

离散数学

(3)广义交： $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x : (\forall\gamma\in\Gamma)(x\in A_\gamma)\}$

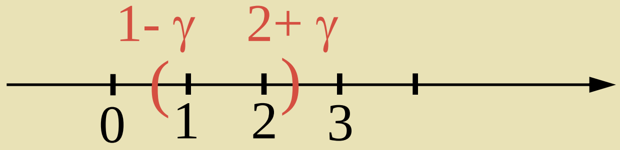
(4)广义并： $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \{x : (\exists\gamma\in\Gamma)(x\in A_\gamma)\}$

这里： γ—称为索引，下标，指标；

Γ—称为索引集，下标集，指标集。

例6. $\Gamma=(0,1)$， $A_\gamma = (1-\gamma, 2+\gamma)$。则

$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = [1,2]$ ；



$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = (0,3)$ 。

定理8.

(1)分配律：

$$A\cap(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\cap A_\gamma)$$

$$A\cup(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\cup A_\gamma)$$

$$A\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap A_\gamma)$$

$$A\cup(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cup A_\gamma)$$

(2) de Morgan律：

$$(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)'=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma'$$

$$(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)'=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma'$$

[证明].(采用逻辑法)

(1)只证第三式

对任何元素$x\in X$，

$$x\in A\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(\exists\gamma\in\Gamma)(x\in A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(x\in A\wedge x\in A_\gamma)$$

(量词前移：$p\wedge\exists xA(x)\Leftrightarrow\exists x(p\wedge A(x))$)

$$\Leftrightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(x\in A\cap A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap A_\gamma)$$

所以 $A\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap A_\gamma)$ ；

离散数学

(2) 只证第一式

对任何元素$x \in X$，

$$x \in (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)'$$

$$\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

$$\Leftrightarrow \neg (x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall \gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma) \neg (x \in A_\gamma)$$

(量词对偶律：$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$)

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(x \notin A_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_\gamma')$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma'$$

所以 $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma'$ 。

离散数学

要求

- 掌握集合、子集、全集、空集、单元素集等概念
- 掌握集合的四大性质:任意性(抽象性)、确定性、无序性、无重复性
- 熟悉常用的表示集合的方法以及用文氏图来表示集合的方法
- 能够判定元素与集合,集合与集合之间的关系
- 理解两个集合间的包含关系和相等关系(外延性原理)的定义和性质,能够利用这些定义、性质来证明两个更复杂的集合的包含和相等。
- 掌握幂集的定义及计算有限集的幂集所含元素个数,所使用的计算、证明的方法和思想。
- 理解**差别在于级别!**的判定集合间关系的思想。
- 掌握集合的五种基本运算:交、并、余(补)、差和对称差(环和)的定义,并熟记集合运算的基本定理(公式),能够熟练的利用它们来证明更复杂的集合公式。

离散数学

- 第三章　集合

  到此已经结束！