一、单选题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-1}{\sin(x^2+y^2)}=2$，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处（　）

(A) 不可偏导；　(B) 可偏导但不可微；

(C) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=1$ 且可微；(D) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ 且可微.

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有 $f_x(x_0,y_0)=a,f_y(x_0,y_0)=b$，下列结论正确的是（　）

(A) $dz|_{(x_0,y_0)}=a\,dx+b\,dy$；(B) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 存在但 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处不一定连续；

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$ 都存在且相等；(D) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

3. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+(z-1)^2\le 1,z\ge 1,y\ge 0\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)dv=$（　）

(A) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi}f(r^2)r^2\sin\varphi dr$；　(B) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}f(r^2)r^2\sin\varphi dr$；

(C) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi}f(r^2)r^2\sin\varphi dr$；　(D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}f(r^2)r^2\sin\varphi dr$.

4. 设曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\x+y+z=0\end{cases}$，则 $\int\limits_{(L)}(x-z+y^2)ds=$（　）

(A) 18π；　(B) 6π；　(C) 9π；　(D) 10π.

5. 下列向量场中是有势场的是（　）.

(A) $\vec{A}=(e^x\cos y,e^x\sin y+2y)$；　(B) $\vec{A}=(e^x\sin y+2y,e^x\cos y)$；

(C) $\vec{A}=(2x\cos y-y^2\sin x,2y\cos x-x^2\sin y)$；(D) $\vec{A}=(2x\cos y-y^2\sin x,3y\cos x-x^2\sin y)$.

6. 下列级数中绝对收敛级数的是（　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n}{n+1}$；　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\arctan\dfrac{1}{n^2}$；　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$；　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{n^n}$.

二、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1. 曲面 $x+yz+e^{x+z}=e$ 在 $M(0,0,1)$ 处的切平面方程为________________；

2. 设曲面$\Sigma:|x|+|y|+|z|=6$，则$\iint\limits_{(\Sigma)}(x+|y|+|z|)dS=$__________；

3. 设$a>0$，改变积分次序$\int_0^a dy\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{y+a}f(x,y)dx=$__________；

4. 设$F(x)=\int_x^{x^2}e^{-xy^2}dy$，则$F'(x)=$__________；

5. 设$u=x^3+y^3-z^3+3xyz$，则$div(gradu)=$__________；

6. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n(4n^2+1)}x^n$的收敛域为__________.

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 设$z=f(xe^y,\frac{y}{x},x^2-y^2)$，其中$f(u,v,w)$具有连续二阶偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

2. 求函数$f(x,y)=x^3+y^3-\frac{3}{2}(x+y)^2$的极值；

3. 计算二重积分$\iint\limits_{(D)}|x^2+y^2+2y|dxdy$，其中$(D):x^2+y^2\le 4$.

4. 计算曲线积分$I=\oint\limits_{(L)}\frac{xdy-ydx}{9x^2+y^2}$，其中$(L):(x-1)^2+y^2=R^2\,(R\ne 1)$取逆时针方向.

5. 设曲面(Σ)的方程为$x^2+y^2=2z\ (0\le z\le 2)$. 计算(1)曲面$(\Sigma)$的面积$S$；

(2)曲面积分$I=\iint\limits_{(\Sigma外侧)}x^3dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx-z^3dx\wedge dy$.

6. 设$f(x)$是以2π为周期的函数，它在$(-\pi,\pi]$上的定义为$f(x)=\begin{cases}x,-\pi<x<0,\\x+2,0\le x\le\pi\end{cases}$，

写出$f(x)$的傅里叶级数及在$(-\pi,\pi]$内的和函数$S(x)$，并求$S(5),S(10)$、

四、(10 分) 设数列$\{a_n\}$满足$a_0=0,a_1=1,a_{n+1}=a_n+2a_{n-1},n=1,2,\cdots$，令

$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$，$x\in(-\infty,+\infty)$，求：（1）和函数$S(x)$；（2）$a_n$的表达式.

五、(6 分) 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,a_{n+1}=\frac{a_n^2+1}{2a_n}$，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$收敛.

一.单选题

1. 由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)-1}{\sin(x^2+y^2)}=2$ 可知，存在 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varepsilon(x,y)=0$，使

$$\frac{f(x,y)-1}{\sin(x^2+y^2)} = 2+\varepsilon(x,y).$$

$$\therefore\ f(x,y)=1+2\sin(x^2+y^2)+\varepsilon(x,y)\sin(x^2+y^2)$$

$\therefore\ f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=1$ 且 $(x,y)\to(0,0)$ 时

$$f(x,y)=f(0,0)+0\cdot x+0\cdot y+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

$\therefore\ f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微且 $f_x(0,0)=0$ $f_y(0,0)=0$. 选(D).

2. $f_x(x_0,y_0)=\dfrac{d f(x,y_0)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 存在，则 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处一定连续 $\therefore\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$.

同理，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$，选(C)

3. $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 2z,\ z\ge 1,\ y\ge 0\}$

$$\iiint_\Omega f(x^2+y^2+z^2)\,dV=\int_0^{\pi}d\theta\cdot\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2\cos\varphi} f(r^2)\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$，选(C)

4. (L) 关于 x,y,z 轮换对称，故

$$\int_{(L)}(x-z+y^2)\,ds=\int_{(L)}\frac{1}{3}(1-1)(x+y+z)\,ds+\int_{(L)}\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)\,ds$$

$$=0+\frac{9}{3}\int_{(L)}ds=3\cdot\pi\cdot 2\cdot 3=18\pi.$$ 选(A)

5. $P=2x\cos y-y^2\sin x$，$Q=2y\cos x-x^2\sin y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-2y\sin x,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\sin x-2x\sin y=\frac{\partial P}{\partial y}$$

选(C)

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\ln(1+\frac{1}{n})$ 条件收敛.

$n\to\infty$，$(n+1)\arctan\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{n}$，$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\arctan\frac{1}{n^2}$ 发散.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2n+1}$ 不存在. $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2n+1}$ 发散.

$a_n=\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot n!}{n^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(-1)^n\cdot 2^n\cdot n!}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1.$$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot n!}{n^n}$ 绝对收敛. 选 (D)

二. 填空题.

1. $\vec{n}=\{1+e^{x+z},z,y+e^{x+z}\}\big|_{(0,0,1)}=\{1+e,1,e\}$

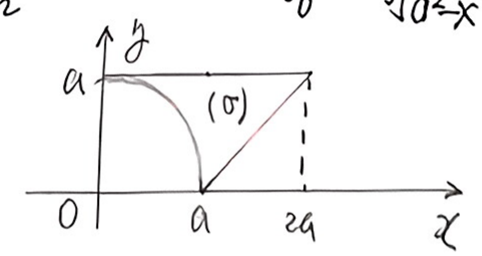
切平面方程为 $(1+e)x+y+e(z-1)=0$

2. (Σ)关于$x=0$对称，关于x,y,z轮换对称. 故

$$\iint_{(\Sigma)}(x+|y|+|z|)dS=\iint_{(\Sigma)}(|y|+|z|)dS=\frac{2}{3}\iint_{(\Sigma)}(|x|+|y|+|z|)dS$$

$$=\frac{2}{3}\times 6\cdot\iint_{(\Sigma)}dS=4\times 8\iint_{(\Sigma_1)}dS=32\times 18\sqrt{3}=576\sqrt{3}.$$

3. $\int_0^a dy\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{y+a}f(x,y)dx=\int_0^a dx\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{a}f(x,y)dy+\int_a^{2a}dx\int_{x-a}^{a}f(x,y)dy.$



4. $f(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$. $f'(x)=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_x^{x^2} y^2e^{-xy^2}dy$.

5. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=6x+6y-6z$.

6. $a_n=\dfrac{(-1)^n n}{3^n(4n^2+1)}$. 则 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^n n}{3^n(4n^2+1)}\cdot\dfrac{3^{n+1}\cdot(4(n+1)^2+1)}{(-1)^{n+1}(n+1)}\right|=3$

又 $x=-3$ 时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4n^2+1}$ 发散. $x=3$ 时. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{4n^2+1}$ 收敛.

故收敛域为 $(-3,3]$.

三. 计算题

1. $z=f(xe^y,\frac{y}{x},x^2-y^2)$. 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^yf_1-\frac{y}{x^2}f_2+2xf_3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^y\cdot f_1+e^y\cdot[f_{11}\cdot xe^y+f_{12}\cdot\frac{1}{x}+f_{13}\cdot(-2y)]$$

$$-\frac{1}{x^2}f_2-\frac{y}{x^2}[f_{21}\cdot xe^y+f_{22}\cdot\frac{1}{x}+f_{23}(-2y)]$$

$$+2x[f_{31}xe^y+f_{32}\cdot\frac{1}{x}+f_{33}(-2y)]$$

$$=e^yf_1-\frac{1}{x^2}f_2+xe^{2y}f_{11}-\frac{y}{x^3}f_{22}-4xyf_{33}$$

$$+\frac{1-y}{x}e^yf_{12}+2(x^2-y)e^yf_{13}+2(\frac{y^2}{x^2}+1)f_{23}$$

2. $f(x,y)=x^3+y^3-\frac{3}{2}(x+y)^2$.

令 $\begin{cases}f_x=3x^2-3(x+y)=0\\ f_y=3y^2-3(x+y)=0\end{cases}$. 驻点 $(0.0).(2.2)$.

$f_{xx}=6x-3$. $f_{xy}=-3$. $f_{yy}=6y-3$

驻点 $(0,0)$ 处．$H=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -3 & -3\end{pmatrix}$ 半负定．

考虑 (x,y) 沿 $x+y=ax^2$ 趋于 $(0,0)$．

$f(x,y)=x^3+(ax^2-x)^3-\frac{3}{2}\cdot a^2x^4=\frac{3}{2}a(2-a)x^4-3a^2x^5+a^3x^6$

取 $a\in(0,2)$．当 $|x|$ 充分小时．$f(x,y)>0=f(0,0)$

取 $a<0$ 或 $a>2$．当 $|x|$ 充分小时．$f(x,y)<0=f(0,0)$

所以 $(0,0)$ 不是极值点．

驻点 $(2,2)$ 处．$H=\begin{pmatrix}9 & -3\\ -3 & 9\end{pmatrix}$ 为正定．$f(2,2)=-8$ 为极小值．

3．设 $(D_1)=\{(x,y)\mid x^2+y^2+2y\le 0\}$，则

$$\iint\limits_{(D)}|x^2+y^2+2y|\,d\sigma=\iint\limits_{(D)-(D_1)}(x^2+y^2+2y)\,d\sigma-\iint\limits_{(D_1)}(x^2+y^2+2y)\,d\sigma$$

$$=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2+2y)\,d\sigma-2\iint\limits_{(D_1)}(x^2+y^2+2y)\,d\sigma$$

$$=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,d\sigma-2\iint\limits_{(D_1)}(x^2+(y+1)^2-1)\,d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho^2\cdot\rho\,d\rho-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho^2-1)\rho\,d\rho$$

$$=8\pi-2\times2\pi\times\left(-\frac{1}{4}\right)=9\pi.$$

4．如果 $0<R<1$．则 $(0,0)$ 不在 (L) 围成区域 (σ) 内．

$P=\dfrac{-y}{9x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{9x^2+y^2}$．

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=0.$$

如果 $R>1$. 作 (L_ε): $9x^2+y^2=\varepsilon^2$. $(0<\varepsilon\ll 1)$ 取顺时针方向.

(L_ε) 围成 (σ_ε): $9x^2+y^2\le\varepsilon^2$. $(L)+(L_\varepsilon)$ 围成环状区域 (σ)

$$I=\oint_{(L)+(L_\varepsilon)}-\oint_{(L_\varepsilon)}=\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{(L_\varepsilon)}-y\,dx+x\,dy$$

$$=0+\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{(\sigma_\varepsilon)}2\cdot d\sigma=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{3}\cdot\varepsilon=\frac{2\pi}{3}.$$

5. (Σ): $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$. $(x,y)\in(\sigma)$: $x^2+y^2\le 4$.

(1) $$S=\iint_{(\Sigma)}dS=\iint_{(\sigma)}\sqrt{1+x^2+y^2}\,d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\,d\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{3/2}\Big|_0^2=\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1).$$

(2) 作 (Σ_1): $z=2$, $(x,y)\in(\sigma)$, 取上侧.

$(\Sigma)+(\Sigma_1)$ 围成 (V) 且为外侧方向.

$$I=\oiint_{(\Sigma)+(\Sigma_1)}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_{(V)}(3x^2+3y^2-3z^2)\,dV-\iint_{(\Sigma_1)}(-8)\,dx\,dy$$

$$=\int_0^2dz\iint_{x^2+y^2\le 2z}3(x^2+y^2-z^2)\,d\sigma+8\iint_{(\sigma)}d\sigma$$

$$=\int_0^2dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}3(\rho^2-z^2)\rho\,d\rho+32\pi$$

$$=6\pi\int_0^2[z^2-z^3]\,dz+32\pi$$

$$=-8\pi+32\pi=24\pi.$$

6. $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<0 \\ x+2, & 0\le x\le\pi \end{cases}$ 则

$$f(x)-1=\begin{cases} x-1, & -\pi<x<0 \\ x+1, & 0\le x\le\pi \end{cases}$$ 为奇函数.

∴ $f(x)-1$ 的傅里叶级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx$.

其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x+1}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\left[-\frac{\pi+1}{n}(-1)^n+\frac{1}{n}\right].\ (n\ge 1).$$

$f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x)\sim 1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}-\frac{(\pi+1)(-1)^n}{n}\right]\sin nx.$$

因为 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 内 $x=0$ 和 $x=\pi$ 处间断.

$$\therefore\ S(x)=\begin{cases} x, & -\pi<x<0 \\ x+2, & 0<x<\pi \\ 1, & x=0 \text{ or } x=\pi. \end{cases}$$

$S(5)=S(5-2\pi)=5-2\pi$

$S(10)=S(10-4\pi)=10-4\pi$.

四.(1) 设数列满足 $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$, $(n\geq 1)$

则 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n = a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$

$= x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}$.

$\therefore S'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{n!}x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+2a_{n-1}}{n!}x^n$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_{n-1}}{n!}x^n$

$=1+S(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_{n-1}}{n!}x^n$

$S''(x)=S'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}$

$=S'(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n = S'(x)+a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$

$=S'(x)+2S(x)$.

$\therefore S''(x)-S'(x)-2S(x)=0$.

$\lambda^2-\lambda-2=0$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$

$\therefore S(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$, 由 $S(0)=a_0=0$, $S'(0)=a_1=1$

可知: $c_1=-\frac{1}{3}$, $c_2=\frac{1}{3}$.

$\therefore S(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}$. $(-\infty<x<+\infty)$.

(2) $S(x)=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}\cdot 2^n\right)\cdot\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)}{n!}x^n$

$\therefore a_n=\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)$. $(n\geq 0)$

五. $a_1=2$. $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+1}{2a_n}$. $(n\geq 1)$.

$\forall n\geq 1$. $a_n>0$. 且 $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+1}{2a_n}\geq\dfrac{2a_n}{2a_n}=1$.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2+1}{2a_n}-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leq 0.$$

$\therefore \{a_n\}$单调减且有下界. 故收敛. 设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

$$0<\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{a_{n+1}}(a_n-a_{n+1})\leq a_n-a_{n+1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=2-a$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛. $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

四. 设 $a_0=0,\ a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$.

则特征方程为 $\lambda^2=\lambda+2$. $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2$.

$\therefore a_n = c_1(-1)^n + c_2\cdot 2^n$.

由 $a_0=1,\ a_1=1$ 可知 $c_1=-\frac{1}{3},\ c_2=\frac{1}{3}$

$\therefore a_n=-\frac{1}{3}\cdot(-1)^n+\frac{1}{3}\cdot 2^n$.

$$\therefore S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{n!}x^n+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^n}{n!}x^n\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$$

$$=-\frac{1}{3}(e^{-x}-1)+\frac{1}{3}(e^{2x}-1)$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}.\quad(-\infty<x<+\infty).$$

五. $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+1}{2a_n}$,

$$a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n},\quad a_{n+1}+1=\frac{(a_n+1)^2}{2a_n}$$

$\therefore \dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}=\left(\dfrac{a_n-1}{a_n+1}\right)^2$, 递推可知

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\left(\frac{a_1-1}{a_1+1}\right)^{2^{n-1}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}.\quad\therefore a_n=\frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}}$$

$$0<\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{2a_n^2}{a_n^2+1}-1=\frac{a_n+1}{a_n^2+1}(a_n-1)\le a_n-1=\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}}<4\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}$ 收敛 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.