

### 一、 填空题(每空 2 分,共 48 分)

1. 准确解与近似解之差称为\_\_\_\_\_误差,而当把数据输入到计算机中时由于计算机硬件的性能限制而产生的误差称为\_\_\_\_\_误差。在浮点数系 $F(\beta, t, L, U)$ 中,计算机的相对精度为\_\_\_\_\_。
2. 当 $|x|$ 的绝对值充分大时,为了使计算结果更加准确,应将公式 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ 变形为\_\_\_\_\_进行计算。
3. 已知  $x = \begin{pmatrix} 2 & 3\sqrt{2} & 4 & -5\sqrt{2} \end{pmatrix}^T$ , 则  $\|x\|_1 = \text{_____}$ ,  $\|x\|_\infty = \text{_____}$ ,  $\|x\|_2 = \text{_____}$ 。
4. 在一个算法中,如果在计算过程中,所产生的舍入误差可以被有效的控制,那么这种算法称为\_\_\_\_\_的,它所产生的结果是比较准确的。
5. 方程组  $Ax = b$  中如果采用高斯消去法求解时,它能顺利进行下去的条件是\_\_\_\_\_. 该方程的条件数是\_\_\_\_\_,若当此数较大时,方程组则称为\_\_\_\_\_,则其解可能误差较大。
6. 由  $n$  个点  $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$  所构成的 *Lagrange* 插值基函数具有下面的性质  $l_i(x) = \text{_____}, l_1(x) + l_2(x) + \dots + l_n(x) = \text{_____}$ 。
7. 若  $f(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + p$ , 则四阶差商  $f[1,2,3,4,5] = \text{_____}$ ,  $f[0,1,2,3,4,5] = \text{_____}$ ; 若  $f[1,2,3,4] = 2$ , 则  $f[0,1,2,3] = \text{_____}$ 。
8. Simpson 数值积分公式为  $\int_a^b f(x)dx \approx \text{_____}$ , 局部截断误差为\_\_\_\_\_, 其代数精度为\_\_\_\_\_。
9. 对于常微分方程的初值问题  $y'(x) = f(x, y(x)), a \leq x \leq b, y(a) = y_0$ , 则求解该初值问题的欧拉公式可写为\_\_\_\_\_, 其局部截断误差为\_\_\_\_\_。
10. 若有非线性方程  $f(x) = 0$ , 则其牛顿迭代格式为\_\_\_\_\_, 若该格式收敛, 则收敛速度可以达到\_\_\_\_\_. 而相应的简单迭代格式

的收敛性则依赖于迭代格式，若收敛，则收敛速度只能达到\_\_\_\_\_。

## 二、简答题(共 52 分)

1. 已知  $|x| \ll 1$ ，如何计算下列公式，可以使得到的结果比较准确。(6 分)

$$(1) \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{|x|} \quad (2) (x - 5)^4 + 9(x - 5)^3 + 7(x - 5)^2 + 6(x - 5) + 5$$

2. 已知矩阵为  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ ，给出其 LU 分解的矩阵形式。(8 分)

3. 方程组  $\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 72 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 83 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 42 \end{cases}$  采用迭代法求解，当  $x^{(0)} = (1 \ 1 \ 1)^T$  时，给出高斯-赛德尔迭代格式下的  $x^{(1)}, x^{(k)}$ ，并讨论当  $k \rightarrow \infty$  时  $x^{(k)}$  是否收敛。(8 分)

4. 求插值以下数据的不超过 3 次的插值多项式，并给出余项公式。(8 分)

$$\begin{array}{cccc} x_i & -1 & 0 & 1 \\ y_i & 0 & -4 & -2 \\ y'_i & & 0 & \end{array}$$

5. 求以下数值积分公式中的系数使其具有尽可能高的代数精度，并给出截断误差估计式。(12 分)

$$\int_{-h}^h f(x)dx \approx A_0 f(-h) + A_1 f(0) + A_2 f(h)$$

6. 若有方程  $x^3 - 2x - 5 = 0$  在  $(2, 3)$  中有一个根，给出合适的初值，构造收敛的牛顿迭代格式，并说明该格式收敛。(8 分)