2015年版

南卷汇

大二上数理方程考试试题汇编

南洋书院学生会 制作

目录

2012 年数理方程期末

一、1、长为 π 的固定在平衡位置的弦自由振动，如果初始位移为$xsin2x$,初始速度为$cos2x$，则其定解条件是__________。

2、对非其次边界条件$u_x|_{x=0}=t, u|_{x=2}=t^2$,令$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$。取$w(x,t)$=__________,可使$v_x|_{x=0}=v|_{x=l}=0$,及边界条件齐次化。

3、方程 $x^2y''+xy'+(x^2-9)y=0$ 的通解为______________。

4、三维拉普拉斯方程在下半空间 Dirichlet 问题的格林函数为____________。

二、验证函数$u=f(x+3t)+g(x-3t)$(其中f、g是任意两个连续可微函数)满足方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

三、将函数$f(\rho)=1-\rho^2$在区间[0，1]上按特征函数系$\{J_0(u_m^{(0)},\rho)|m\geq 1\}$展开为 Fourier-Bessel 级数。其中$u_m^{(0)}(m\geq 1)$是$J_0(x)$的正零点。

四、求解特征值问题。

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<\frac{\pi}{2} \\ X''(0)=0, X'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}.$$

五、用分离变量法求解下面定值问题。

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, 0<u<3, t>0 \\ u(0,t)=0, u(3,t)=0, t\geq 0 \\ u(x,0)=3x, u(3,t)=0, 0\leq t\leq 3 \end{cases}.$$

六、用分离变量法求解定值问题。

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+3u, 0<x<1, t>0 \\ u_x(0,t)=0, u(1,t)=0, t\geq 0 \\ u(x,0)=\cos\frac{3\pi}{2}x, 0\leq x\leq 1 \end{cases}.$$

七、 设$\Omega=\{(x,y)|x\geq 2\}$在Ω上 Laplace 方程第一边值问题为

$$\begin{cases}-\Delta u(x,y)=0,-\infty<y<+\infty,x>2\\ u(2,y)=\varphi(y),-\infty<y<+\infty\end{cases},$$

试用对称法求出对应 Green 函数并写出解的积分公式。

八、 2 选 1。

1、用特征线法求解下面 Cauchy 问题

$$\begin{cases}u_t+\frac{1}{3}u_x=0,-\infty<x<+\infty,t>0\\ u(x,0)=8e^{3x},-\infty<x<+\infty\end{cases}.$$

2、用积分变换法解无界杆热传导问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx},-\infty<x<+\infty,t>0\\ u|_{t=0}=\varphi(x),-\infty<x<+\infty\end{cases}.$$

2011 年数理方程期末（A）

一、 填空，第 1 题 8 分，其余两题每题 5 分。

1. 长为l的均匀金属细杆，侧面绝热而内部无热源。左端$(x=0)$有热流$q(t)$（$J/s\cdot m^2$）流入杆内而右端$x=l$温度恒为零（度），若初始温度为$\varphi(x)$，试写出杆上温度$u(x,t)$满足的定解问题。

2. 长为l的均匀细弦，$x=0$端固定在平衡位置$u=0$，$x=l$端受到垂直方向作用力为)$g(t)$（牛顿），试写出相应的边界条件。

3. 找已知函数$w(x,t)$将非齐次边界条件$u(0,t)=\sin t,u_x(l,t)=1+t^3$化为齐次边界条件。

二、 求解以下各题，每题 10 分。

1. 求解特征值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < l \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases}$$

2. 利用 Green 函数法求解边值问题

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \ y > 0 \\ u(x,0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

3. 利用特征线方法求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + 2u_x = t, \ -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = x, \quad -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

4. 将函数$f(\rho) = \rho^2$在区间$[0,l]$上按正交函数系 $\left\{J_0(\mu_m^{(0)}\rho)\middle| m \geq 1\right\}$ 展成傅立叶—贝塞尔级数，这里$\mu_m^{(0)}, m \geq 1$是$J_0(x)$的正零点.

三、求解以下各题，每题 14 分.

1. $$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin\frac{\pi x}{2l}, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ u_x(l,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = \sin\frac{5\pi}{2l}x, \ 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x), \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, \ u_x(l,t) = 0, \ t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

其中$f(x)$和$\varphi(x)$在区间$[0,l]$具有一阶连续导数。

四、求解以下各题，14 分。

1.（8 分） 设 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$和$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$。

（1）设$u(r) = \frac{c_1}{r} + c_2$，其中$c_1$和$c_2$为任意常数。直接求导验证$u(r)$当$r \neq 0$时满足方程$\Delta u = 0$；

（2）如果进一步还要满足

$\lim_{r\to\infty} u(r) = 0,\quad \iint_{\partial B（0，\delta）} \nabla u \cdot \vec{n}\, ds = -1$，$\lim_{r\to\infty} u(r)=0,\ \iint_{\partial B(0,\delta)} \nabla u\cdot\vec{n} ds=-1$

其中$\partial B(0,\delta)$是以原点为球心,δ为半径的球面，而$\vec{n}$为球面$\partial B(0,\delta)$上的单位外法向量，确定常数c_1 和c_2。

2.（6 分）设$n \geq 1$为正整数,$J_n(x)$为n 阶贝塞尔函数，证明

$$\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) = x^n J_{n-1}(x)$$

2011 年数理方程期末（B）

一、填空题（6×5 分=30 分）

1. 长度为l的导热杆，内部无热源，侧面绝热，温度函数$u(x,t)$满足的热传导方程为____________________；如果左端点($(x=0)$有热流$\sin t\,(\frac{J}{s}\cdot m^2)$流入杆内，而右端点$(x=l)$温度恒为$u_0$（度），则边界条件为：____________________，____________________

2. 定解问题的适定性是指其解必须具有__________，____________，___________。

3. Bessel 方程$x^2y'' + xy' + (x^2-2)y = 0$的通解可表示为$y(x) =$_______________________

4. 函数$u(x,y)$满足 Poisson 方程是指满足___________________形式的方程。

5. 对非齐次边界条件$u_x|_{x=0} = f(t)$，，$u|_{x=l} = g(t)$令$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$，取$w(x,t) =$______________________________，可使$v_x|_{x=0} = v|_{x=l} = 0$，即边界齐次化。

二、（8 分）利用特征线法求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + (1+x)u_x - u = 0 & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x,0) = x^2 & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

三、（8 分） 设$u = u(r), r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, r \neq 0$，并且满足$\lim_{r\to\infty} u(r) = 0$，$\iint_{\partial B（0，\delta）} \nabla u \cdot \vec{n}\, ds = -1$，的解，其中$B(0,\delta)$是以原点为球心$\delta$为半径的球形域，$\vec{n}$为单位外法向量

四、（8 分） 证明：$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

五、（12 分） 用分离变量法求解下面定解问题，给出特征值问题，特征函数系和解的一般形式。

$$\begin{cases} u_{pp} + \frac{1}{\rho} u_p + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r < 2,\ 0 \leq \theta < 2\pi \quad t > 0 \\ u(\rho, 0) = u(\rho, 2\pi) \\ u(2, \theta) = \sin\theta + \cos 2\theta \end{cases}$$

六、(10 分) 将函数$f(x) = x - x^3 (0 < x < 1)$按 Bessel 函数系$J_1\left(u_m^{(1)}\right)$ $(m = 1,2,\cdots)$ 展成级数，其中$u_m^{(1)} (m = 1,2,\cdots)$是 Bessel 函数$J_1(x)$的正零点

七、（12 分） 设$\Omega = \{(x,y)\}|x > 0, -\infty < y < +\infty\}$，$\Gamma$是$\Omega$的边界。在$\Omega$上 Laplace 方程第一边值问题为

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = 0, & (x,y) \in \Omega \\ u = y, & (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$

试用对称法求出对应的 Green 函数，并写出解的积分表达式。

八、（12 分） 求下列定解问题(其中A, B为常数)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A， & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = B \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

2010 年数理方程期末（A）

一、填空题（6×4 分=24 分）

1. 在外力 $f(x,t)(0<x<l,t>0)$ 作用下，位移函数 $u(x,t)$ 满足的弦振动方程为____________________；如果左端（$x=0$）固定，右端（$x=l$）与弹性物体连接，则该定解问题的边界条件为____________________。

2. 函数 $u(x,y)$ 满足 Laplace 方程是指满足______________形式的方程。

3. Bessel 方程 $x^2y''+xy'+(x^2-r^2)y=0$（r 不为整数）的通解可表示为 $y(x)=$ __________________________。

4. 对非齐次边界条件 $u_x|_{x=0}=f(t)$，$u|_{x=l}=g(t)$，令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，取 $w(x,t)=$____________________，可使 $v_x|_{x=0}=v|_{x=l}=0$，即边界齐次化。

5. 如果 $\Gamma(x;t)$ 满足：$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(x,0)=\delta(x), & -\infty<x<+\infty \end{cases}$，则定解问题 $\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty \end{cases}$ 的积分解为____________________。

6. 二维和三维 Laplace 方程的基本解分别为__________和____________。

二、（8 分）验证函数 $u(x,y)=f(3x-y)+g(x+y)$（其中 f,g 是任意两个 2 次连续可微的函数）满足方程 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

三、（10 分）求解特征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, & 0<x<\pi \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$

四、（12 分）利用达朗贝尔公式求解下列无限长弦的自由振动问题

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & -\infty<x<+\infty, \quad t>0 \\ u\big|_{t=0}=x^2, & \dfrac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=\sin x \end{cases}$$

并给出点$(x,t)=(1,2)$的依赖区间，以及区间[0,1]的影响区域.

五、（12 分）利用特征函数法，求解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin 2\pi x, & 0<x<1, \quad t>0 \\ u\big|_{x=0}=0, \quad u\big|_{x=1}=0 \\ u\big|_{t=0}=\sin 2\pi x \end{cases}$$

六、（10 分） 设 $\mu_m^{(0)}(m\geq 1)$ 是 Bessel 函数 $J_0(\rho)$ 的正零点，将函数 $f(\rho)=\rho^2(0<\rho<2)$ 在函数系 $\left\{J_0(\dfrac{\mu_m^{(0)}}{2}\rho)\right\}_{m\geq 1}$ 下，展成 Fourier-Bessel 级数，并化简。

七、(12 分)利用 Fourier 变换，求解下面初值问题

$$\begin{cases} u_t=4u_{xx}+2u, & -\infty<x<+\infty, t>0 \\ u\big|_{t=0}=e^{-|x|}, & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

（注：$F(e^{-ax^2})=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, a>0$）

八、（12 分）设$\Omega=\{(x,y)\,|\,x>0\}$，Γ是Ω的边界。右半平面上 Laplace 方程第一边值问题为

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & (x,y)\in\Omega \\ u\big|_{\Gamma}=\varphi(y), & -\infty<y<+\infty \end{cases}$$

试用对称法求出对应的 Green 函数，并写出解的积分表达式、化简。

2010 年数理方程期末（B）

一、填空题（24 分，每空 4 分）

1. 长度为l的导热杆，内部无热源，温度函数$u(x,t)$满足的热传导方程为______________________；如果两端点$(x=0,l)$均绝热，则边界条件为________________。

2. 函数$u(x,y)$满足Laplace方程是指满足____________________形式的方程。

3. 设$N_n(x)$是第二类Bessel函数，则$|N_n(0)|=$________________。

4. 设$\mu_m^{(0)}(m\ge 1)$为$J_n(x)=0$的正根，则关于Bessel方程的特征值问题

$\begin{cases}\rho^2R''+\rho R'+(\lambda\rho^2-n^2)R=0, & 0<\rho<2\\ R(2)=0, & |R(0)|<+\infty\end{cases}$ 的特征值$\lambda_m=$________________，

特征函数$R_m(\rho)=$______________________。

5. 对非齐次边界条件$u_x|_{x=0}=f(t)$，$u|_{x=l}=g(t)$，令$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，取$w(x,t)=$______________________________，可使$v_x|_{x=0}=v_x|_{x=l}=0$，即边界齐次化。

6. 设$u(x,y),v(x,y)\in C^2(\Omega)$，则$\nabla(u\nabla v-v\nabla u)=$_________________________。

二、（8 分）验证函数$u=f(x+2y)+g(x-2y)$(其中f,g是任意两个2次连续可微的函数)满足方程$4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$.

三、（10 分）求解函数u(x,y)的定解问题

$$\begin{cases}u_{xy}=1\\ u|_{x=0}=y, \quad u|_{y=0}=x\end{cases}$$

四、（10 分）广义积分$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\alpha>0$，试证：

1. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\alpha>0$；　　　　2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

五、（12 分）用分离变量法求解下面定解问题，给出特征值问题，特征函数系和解的一般形式。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r},0<x<2,t>0\\ u|_{x=2}=0,|u(0,t)|<+\infty\\ u|_{t=0}=\varphi(r)\end{cases}$$

六、（12 分）利用特征函数法，求解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u,0<x<1,t>0\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=1}=0\\ u|_{t=0}=\cos\dfrac{\pi}{2}x\end{cases}$$

七、(12 分)利用Laplace变换，求解下面定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<1,t>0\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\geq 0\\ u|_{t=0}=h\sin\pi x, & 0\leq x\leq 1\end{cases}\qquad (a,h>0\text{ 为常数})$$

八、（12 分）设$\Omega=\{(x,y)|x>0,y>0\}$，Γ是Ω的边界。在Ω上Laplace方程第一边值问题为

$$\begin{cases}-\Delta u(x,y)=f(x,y), & (x,y)\in\Omega\\ u=\varphi(x,y), & (x,y)\in\Gamma\end{cases}$$

试用对称法求出对应的Green函数，并写出解的积分表达式。

2009 年数理方程期末

一、填空，每小题 4 分。

（1）长为l的均匀细杆侧面绝热，x=0 端的温度恒为零度，x=l端有恒定热流$q(J/s\cdot m^2)$流进杆内。若杆的初始温度为$\emptyset(x)$，内部无热源，试写出相应的定解问题：（　　　　　　　　　　　　　　　　　）

（2）长为l的均匀细弦，x=0 端垂直方向作用力为g(t)（牛顿），x=l端固定。试写出相应的边界条件：（　　　　　　　　　　　　　　　　　）

（3）设$u(0,t)$=$sin\, t$，$u_x(l,t)$=1 若将该边界条件齐次化的变换为v=$u-w$，则$w(x,t)$=（　　　　　　　　　　　　　　　　　）

（4）二维 $Laplace$ 方程在右半平面 $Direchlet$ 问题的 $Green$ 函数是：（　　　　　　　　　　　　　　　　　）

二、求解以下各题，每题 10 分。

（1）求解特征值问题：

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0,0<x<l \\ X(0)=0,X'(l)=0 \end{cases}$$

（2）利用$Fourior$变换求解$Cauchy$问题：

$$\begin{cases} u_t-2u_{xx}=e^{-|x|},-\infty<x<\infty,t>0 \\ u(x,0)=0,-\infty<x<\infty \end{cases}$$

（3）利用$Green$函数法求解边值问题：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,(x,y)\in B_R(0) \\ u(x,y)=\mathrm{g}(x,y),(x,y)\in \partial B_u(0) \end{cases}$$

（4）利用$Fourior$变换求解$Cauchy$问题：

$$\begin{cases} u_t+2u_x=0,-\infty<x<\infty,t>0 \\ u(x,0)=\emptyset(x),-\infty<x<\infty \end{cases}$$

（5）求解一维波动$Cauchy$方程问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=t+x,-\infty<x<\infty,t>0 \\ u(x,0)=0,u_t(x,0)=\sin x\,,-\infty<x<\infty \end{cases}$$

三、求解以下各题，前两题每题 13 分。

（1）$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = tx, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, 0 \leq x \leq l \end{cases}$

（2）$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 1, 0 < x < \pi, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 0, t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \cos 2x, 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

四、（8 分）考虑如下$\boldsymbol{Bessel}$方程特征值问题：

$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda \rho^2 - 4) R(\rho) = 0, 0 < \rho < \rho_0 \\ R(\rho_0) = 0, |R(0)| < \infty \end{cases}$$

（1）求解该特征值问题（$\lambda > 0$不必证明）；

（2）证明所得特征函数系的加权正交性。

2008 年数理方程期末（A）

一、填空题（24 分，每空 4 分）

1. 设长为l的均均匀柔软细弦作微小横振动，弦的两端保持自由，则位移函数$u(x,t)$所满足的边界条件为__________________________。

2. 设长为l的细杆，左端温度保持为零度，右端绝热，则温度分布$u(x,t)$所满足的边界条件为__________________________。

3. 一般的二阶线性偏微分方程$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu =$

f，$(x,y)\in\Omega$，其delta判别式定义为$\Delta=$____________；且当$\Delta|_{(x_0,y_0)}>0$时，则方程在点(x_0,y_0)是________________型的。

4. 设n为非负整数，则n阶贝塞尔方程$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$的通解为________________，其第一类贝塞尔函数的表达式为________________。

5. 设$P_n(x)$为n阶勒让德多项式，则$\int_{-1}^{1}P_2(x)P_4(x)dx=$______________，$\int_{-1}^{1}P_5^2(x)dx=$________________。

二、（12 分）应用达朗贝尔法求解下列Cauchy初值问题：

$$\begin{cases}u_{xy}=x+y, & x>0,y>0\\ u(0,y)=x+1, & u(x,0)=1\end{cases}$$

三、（12 分）求解下列本征值问题：

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0, & 0<x<l\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

四、（12 分）用分离变量法求解下列定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,t>0\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0\\ u|_{t=0}=0,\ u|_{t=0}=\psi(x),\end{cases}$$

五、（12 分）用本征函数法求解下列定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+t\cdot\sin3x,0<x<\pi,t>0\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=\pi}=0\\ u|_{t=0}=0\end{cases}$$

六、（12 分） 求解下列扇形区域上的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,\ \ 0<r<1,0<\theta<\pi/2\\ u|_{\theta=0}=0,u|_{\theta=\pi/2}=0\\ u|_{r=1}=\sin\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta\end{cases}$$

七、(12 分)将函数$f(x)=x(0<x<1)$展开成贝塞尔函数系$\left\{J_1\left(\mu_m^{(1)}x\right)\right\}$的级数，其中$\mu_m^{(1)}(m\geq 1)$是$J_1(x)$的正零点。

八、（8 分） 下列两题任选一道：

1. 将函数$f(x)=5x^2+6$在区间$(-1,1)$内展开为勒让德多项式$P_n(x)(n=0,1,2,\cdots)$的级数。

2. 证明勒让德多项式$\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$的正交性，即当$n\neq m$时，有$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)=0$。

2008 年数理方程期末（B）

一、填空，每题 3 分。

（1）长为l的均匀杆，侧面绝热，内部无热源。如杆的初始温度为$x(l-x)$, 左端温度为零，右端有恒定热源q（$\frac{焦耳}{秒\cdot米^2}$）流入杆内，试写出相应的定解问题。

（2）设$u(x,t)$满足边界条件

$$u(0,t)=g_1(t)，u_x(l,t)=g_2(t),t\geq 0.$$

试选$w(x,t)$，使得$v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$满足齐次边界条件。

（3）考虑以下定解问题

$$\begin{cases}u_{ll}-u_{xx}=t, & -\infty<x<\infty,\ l>0,\\ u(x,0)=\sin x,\ u_1(x,0)=0, & -\infty<x<\infty.\end{cases}$$

写出该定解问题的解

（4）考虑以下三阶$Bessel$方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-9)y=0,$$

写出该方程的通解（不必写出基解的具体表达式）。

二、求解或证明以下各题，每题 11 分。

（1）求解特征值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,0<x<l,\\ X'(0)=0,X'(l)=0.\end{cases}$$

(2) 利用$Fourlor$变换法求解下面$Cauchy$问题

$$\begin{cases}u_t+2u_x=0,-\infty<x<\infty,t>0,\\ u(x,0)=\phi(x),-\infty<x<\infty.\end{cases}$$

(3) 利用$Fourlor$变换法求解下面$Cauchy$问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,-\infty<x<\infty,t>0,\\ u(x,0)=0,u_1(x,0)=\psi(x),-\infty<x<\infty.\end{cases}$$

(4) 利用$Green$函数法求解下面边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=0,(x,y)\in\Omega,\\ u=\phi(x),(x,y)\in\partial\Omega.\end{cases}$$

其中$\Omega=\{(x,y)|y>0\}$.

三、利用特征函数法求解以下各题，每题 13 分。

(1) $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin 3x, 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin x \cos x, u_t\,(x,0) = 0,0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho\right) + B, 0 < \rho < R, t > 0, \\ u(R,t) = 0, |u(0,t)| < \infty, t \geq 0, \\ u(\rho,0) = 0,0 \leq \rho \leq R. \end{cases}$

(3) 设$\Omega = B_R(0) = \{(x,y)|x^2 + y^2 < R^2\}$, 求满足边界条件$u(R,\theta) = 1 + 2\sin\theta$的调和函数，即以边值问题的解：

$$\begin{cases} -\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0, (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 1 + \dfrac{2}{R}y, (x,y) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

四、（5 分）设$\Omega \subset \mathrm{R}^2$为有界区域，边界充分光滑。

$P_0(\xi,\eta) \subset \Omega$, $P(x.y) \in \overline{\Omega}$, $\mathrm{u}\epsilon C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

$\Gamma(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{r_0}$,$r_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$

证明下面Green第三公式：

$$u(P_0) = -\iint_\Omega \Delta \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Gamma(\mathrm{P},\mathrm{P}_0)\mathrm{dxdy} + \int_{\partial\Omega}[\Gamma(P,P_0)\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} - \frac{\partial\Gamma(P,P_0)}{\partial n}u(x,y)]ds$$

注：若$f(t) = \begin{cases} E, |t| \leq t/2, \\ 0, 其它 \end{cases}$ 则$\mathrm{F}(\omega) = 2\mathrm{E}\frac{\sin(\omega t/2)}{\omega}$

2007 年数理方程期末（A）

（一） 填空，每题 3 分

（1） 三维 Laplace 方程的基本解是：

（2） 设 $\mu(0,t)=\sin t$，$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=1+t$.若将该边界条件齐次化的变换为 $v=u-w$，则 w(x,t)=

（3） 二维 Poisson 方程在区域 D= $B_r(0)$上 Dirchlet 问题的 Green 函数是：

（4） 特征值问题

$$\begin{cases} X^n+\lambda X=0, 0<x<l \\ X(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$$

的解为 λ_n.$X_n(x)$为：

（5） 二维热传导方程 Cauchy 问题的基本解为：

（6） 若定义变换 $M_\psi(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$, 并记$f_\tau=f(x,t)$, 则有$\int$ M $(xt-\tau)d\tau=$

（二） 求解下列各题，每题 10 分

（1） 求解特征值问题：

$$\begin{cases} X^n+\lambda X=0 \quad 0<x,l \\ X(0)=X(2\pi)，X'(0)=X'(2\pi) \end{cases}$$

（2） 求解一维热传导 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), -\infty<x<\infty \end{cases}$$

（3） 利用 Green 函数法求解边值问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, -\infty<x<\infty, y>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), -\infty<x<\infty \end{cases}$$

（4） 利用 Fourior 变换求解 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t), -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=0, -\infty<x<\infty \end{cases}$$

（5） 考虑一维波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), -\infty < x < \infty \end{cases}$$

1） 若φ(x), ψ(x)在区间[-1,1]上恒为零，在 xot 平面上画出 u≡0 的区域：

2） 若φ(x), ψ(x)在区间[-1,1]外恒为零，在 xot 平面上画出 u≡0 的区域：

（三）利用特征函数法求解以下各题，每题 13 分

(1)$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, t \geq 0 \\ u(x,0) = 0; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq l \end{cases}$

(2)

其中 A 为非零常数。

2007 年数理方程期末（B）

一、(12 分)简答题(不推导，直接写出答案)

1.一根长为 L 的均匀细杆，侧面绝热，且在端点 x=L 处温度恒为 0，而在端点 x=0 处有恒定热流 q 进入(即单位时间内通过单位面积流入的热量为 q)。假设初始温度分布为φ(x)，试写出杆上温度分布函数 u(x，t)所满足的微分方程和定解条件。

2.一根长为 L 的均匀柔软的细弦做微小横振动，且两端束缚于与弦的平衡位置相垂直的弹簧上。设左右两端处弹簧的弹性系数分别为k_0和k_1，又设弦上的张力为 T(T 为常数)。试写出两端边界条件的数学表达式。

二．(12 分)求解下列固有值问题(即本征值问题)

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0，0 < \theta < 2\pi \\ \Phi(0) = 0，\Phi(2\pi) = 0 \end{cases}$$

三．(12 分)求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x+t，|x|<+\infty，t>0； \\ u|_{t=0}=-\dfrac{x^3}{24}，u_t|_{t=0}=-3x\end{cases}$$

四．(15 分)求解定解问题(其中 A，B 为常数)

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+x，0<x<L，t>0； \\ u|_{x=0}=A，u|_{x=L}=B； \\ u|_{t=0}=\varphi(x)\end{cases}$$

五．(12 分)求解下列定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0，r<R，0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ u|_{\theta=0}=0，u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0 \\ u|_{r=R}=f(\theta)\end{cases}$$

六．(15 分)用固有函数法(即特征函数法)求解下列定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t\cdot\cos(x)，0<x<\pi，t>0； \\ u_x|_{x=0}=0，u_x|_{x=\pi}=0； \\ u|_{t=0}=0，u_t|_{t=0}=\cos(2x)\end{cases}$$

七．(8 分)将函数 $f(x)=\begin{cases}1，0<x<1 \\ \frac{1}{2}，x=1 \\ 0，1<x<2\end{cases}$ 按 Bessel 函数系 $\left\{J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{2}x\right)，m=1，2，\cdots\right\}$ 展开成级数。

八．(8 分)证明：$J_2(x)=J_0''(x)-\frac{1}{x}J_0'(x)$

九．(6 分)以下两题任选其一

1.设 n≥ 0为一个整数，$P_n(x)$表示 n 阶 Legendre 多项式。计算$P_n(-1)$，$P_n(0)$，$P_n(1)$

2.设 n≥2 为一个整数，$P_n(x)$ 和$P_{n-2}(x)$分别表示 n 阶和(n-2)阶 Legendre 多项式。计算$\int_0^1 x^2 P_{n-2}(x)P_n(x)\,dx$

2006 年数理方程期末（一）

一、长为 L 的均匀柔软细弦作微小横振动，以$u(x,t)$表示弦上点 x 在时刻 t 的位移。已知初始位移和初始速度分别为$\varphi(x)$和$\Psi(x)$又设弦的两端保持自由，试写出位移函数$u(x,t)$所满足的偏微分方程和定解条件（不推导）。

二、求解下列本征值问题（下式中 T>0 为常数）

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, -\infty<x<\infty; \\ X(x+T)=X(x) \end{cases}$$

三、将函数 f(x)=$\begin{cases} x^2, 0\le x<1 \\ 2, \quad x=1 \\ 3, \ 1<x\le 3 \end{cases}$展开成 Bessel 函数系$\left\{J_0\left(\frac{\mu_m}{3}x\right)\right\}$, m=1, 2⋯的级数，其中$\mu_m^{(0)}$是零阶 Bessel 函数$J_0(x)$的正零点.

四、求解$\begin{cases} 3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \ , |x|<+\infty \ , t>0; \\ u|_{t=0}=\sin x, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\cos x. \end{cases}$

五、求解下列定解问题$\begin{cases} 4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u|_{x=0}=0 \ , u|_{x=\pi}=0 \\ u|_{t=0}=\sin(7x) \ , \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\sin(3x) \end{cases}$

六、求解下列定解问题$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ,0<x<L \ ,t>0; \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=0 \ ,u|_{x=L}=t; \\ u|_{t=0}=1 \end{cases}$

七、二选一

1. 求解$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0\text{，}\ 0<\theta<2, r<1 \\ u|_{\theta=0}=0\ \ \text{，}\ u|_{\theta=2} \\ u|_{r=1}=f(\theta) \end{cases}$

2. 计算$\int_{-1}^{1}x^2\cdot P_{n-2}(x)\cdot P_n(x)dx$，其中 n≥2 为整数，而$P_{n-2}(x)$与$\cdot P_n(x)$分别表示(n-2) 阶和 n 阶 Legendre 多项式。

八、将函数 f(x)=1+2x+3x²+4x³在区间(-1,1)内展开为Legendre 多项式的级数。

2006 年数理方程期末（二）

1. (5 分)有一长为 L 的细杆，初始温度分布为$\varphi(x)$，两端温度恒为零，试写出描述杆的温度分布的定解问题（不推导）。

2. (5 分)有一做微小振动的细弦，左端固定，右端为自由边界，请写出弦的边界条件。

3. (10 分)计算积分$\int_0^1 r^2 J_1(\mu_m^{(1)}r)dr$，其中$J_1(r)$是一阶贝塞尔函数，$\mu_m^{(1)}$是一阶贝塞尔函数的正零点。

4. (10 分)求解下列初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}\text{，}\quad -\infty<x<\infty, t>0 \\ u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=\sin x \end{cases}$$

5.（10 分）求解下列本征值问题

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0, & 0<x<L \\ y(0)=y(L)=0 \end{cases}$$

6.（10 分）将函数 f(x)=x，0<x<1 按贝塞尔函数系$\{J_1(\lambda_k x)\}$展成级数。这里λ_k是$J_1(x)$的正零点（k=1, 2, …）。

7.（10 分）求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<L, t>0 \\ u|_{x=0}=0, u|_{x=L}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x), u_x|_{t=0}=0 \end{cases}$$

8.（10 分）求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<L, t>0 \\ u|_{x=0}=1, u_x|_{x=L}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$$

9.（15 分）用本征函数法求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}+\sin\pi x, & 0<x<L, t>0 \\ u|_{x=0}=0, u|_{x=L}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \end{cases}$$

10.（10 分）求解下列扇形区域上的定解问题

$$\begin{cases} \Delta u=0, & 0<r<1, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2} \\ u|_{\theta=0}=0, & u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0 \\ u|_{r=1}=f(\theta) \end{cases}$$