XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

数学物理方程

经验分享

主讲人：计试2101 姚彦羽

PART 1

题型总结

一、选择/填空（约5题）

二、简答/证明/计算（约2题）

三、求解特征值问题、定解问题（约5题）

利用分离变量法、特征线法、格林函数

PART 2

知识点总结

模型建立

一、数学物理基本方程建立

1. 弦振动方程 $u_{tt}(\boldsymbol{x},t)=a^2\Delta u(\boldsymbol{x},t)+f(\boldsymbol{x},t)$

2. 热传导方程 $u_t(\boldsymbol{x},t)=a^2\Delta u(\boldsymbol{x},t)+f(\boldsymbol{x},t)$

3. 泊松方程 $-\Delta u(\boldsymbol{x},t)=f(\boldsymbol{x},t)$

   拉普拉斯(Laplace)方程 $f\equiv 0$

拉普拉斯算子 Δ

当$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$时，

$$\Delta u(\boldsymbol{x})=u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}$$

模型建立

二、定解条件

1. 初值条件

①弦振动方程 $\begin{cases} \text{初始位移} & u|_{t=0} \\ \text{初始速度} & u_t|_{t=0} \end{cases}$

②热传导方程　初始时刻的温度分布 $u|_{t=0}$

③Laplace(Poisson)方程　不含初始条件，只含边界条件

模型建立

二、定解条件

2. 边界条件

①第一类边界条件：物理量在边界上的分布 $u|_{\partial\Omega} = f_1$

②第二类边界条件：物理量沿边界外法线方向导数在边界上的分布 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = f_2$

③第三类边界条件：物理量及其边界上外法线方向导数的线性关系 $[\sigma u + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}]_{\partial\Omega} = f_3$

模型建立

选择/填空

1. 长为 π 的两端固定在平衡位置的弦自由振动，如果初始位移为 $x\sin 2x$，初始速度为 $\cos 2x$。则其定解条件是________________。

2. 对非齐次边界条件 $u_x|_{x=0}=t$，$u|_{x=l}=t^2$，令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，取 $w(x,t)=$____________________，可使 $v_x|_{x=0}=v|_{x=l}=0$，即边界条件齐次化。

一、单项选择题（3 分/题×4 题=12 分）

1. 拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的一个解是(D)。

(A) $u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (B) $u(x,y)=e^x\sin xy$

(C) $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (D) $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

2. 设 u_1,u_2 是方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的两个解，λ_1,λ_2 为任意常数，c_1 和 c_2 是 x 和 t 的任意函数，则下列(A)种组合也一定是 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的解。

(A) $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$ (B) $c_1u_1+c_2u_2$ (C) $\lambda_1\lambda_2u_1u_2$ (D) $c_1c_2u_1u_2$

3. 设有一块长为 a 宽为 b 的长方形板，$x=0$ 与 $x=a$ 边保持零度，$y=0$ 边绝热，$y=b$ 边保持 T 度，求板内稳定的温度分布。此问题的定解问题为(D)

(A) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,0<y<b \\ u_x(0,y)=0,\ u_x(a,y)=0, & 0\le y\le b \\ u(x,0)=0,\ u(x,b)=T, & 0\le x\le a \end{cases}$

(B) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,0<y<b \\ u(0,y)=0,\ u(a,y)=0, & 0\le y\le b \\ u_x(x,0)=0,\ u(x,b)=T, & 0\le x\le a \end{cases}$

(C) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,0<y<b \\ u(0,y)=0,\ u(a,y)=0, & 0\le y\le b \\ u_y(x,0)=0,\ u(x,b)=0, & 0\le x\le a \end{cases}$

(D) $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,0<y<b \\ u(0,y)=0,\ u(a,y)=0, & 0\le y\le b \\ u_y(x,0)=0,\ u(x,b)=T, & 0\le x\le a \end{cases}$

分离变量法

一、分离变量法解题步骤

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) & t \geq 0 \end{cases}$$

其中A为常数

①求特征函数

分离变量

$$u(x,t) = X(x)T(t) \longrightarrow$$

特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 & 0 < x < l \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

利用边界条件
求特征值、特征函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x, n = 1,2,3$$

②正交分解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x), \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\, d\alpha \\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x), \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\alpha)\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\, d\alpha \\ A = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), f_n = \frac{2}{l}\int_0^l A\sin\frac{n\pi}{l}\alpha\, d\alpha \end{cases}$$

分离变量法

一、分离变量法解题步骤

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A \quad 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \quad t \geq 0 \end{cases}$$

其中A为常数

③应用待定系数法确定$T_n(t)$

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n \quad t \geq 0 \\ T_n(0) = \varphi_n, T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

④求解$T_n(t)$

通解$T_n(t) = c_n \cos\frac{n\pi a}{l} t + d_n \sin\frac{n\pi a}{l} t + \frac{f_n}{a^2\lambda_n}$

$\downarrow$

利用初值条件，求解c_n, d_n

$\downarrow$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

分离变量法

二、一维弦振动、热传导方程对应的特征值问题、特征值和特征函数系

方程	边界条件	特征值问题	特征值	特征函数系	
一维波动 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 一维热传导 $u_t=a^2u_{xx}$	11 类 $u\|_{x=0}=u\|_{x=l}=0$	$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X(0)=X(l)=0\end{cases}$	$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$	$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x$	$n=1,2,\cdots$
	12 类 $u\|_{x=0}=u_x\|_{x=l}=0$	$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X(0)=X'(l)=0\end{cases}$	$\lambda_n=\left(\frac{(n+1/2)\pi}{l}\right)^2$	$X_n(x)=\sin\frac{(n+1/2)\pi}{l}x$	$n=0,1,\cdots$
	21 类 $u_x\|_{x=0}=u\|_{x=l}=0$	$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X'(0)=X(l)=0\end{cases}$	$\lambda_n=\left(\frac{(n+1/2)\pi}{l}\right)^2$	$X_n(x)=\cos\frac{(n+1/2)\pi}{l}x$	$n=0,1,\cdots$
	22 类 $u_x\|_{x=0}=u_x\|_{x=l}=0$	$\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X'(0)=X'(l)=0\end{cases}$	$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$	$X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x$	$n=0,1,\cdots$
	解的基本形式为	$u(x,t)=u_0^{2,2}+\sum_{n=\substack{1(11;22)\\0(12;21)}}^{\infty}T_n(\beta_n at)X_n(\beta_n x),\ \lambda_n=\beta_n^2$			
	对于波动方程	$T_n(\beta_n at)=C_n\cos\beta_n at+D_n\beta_n at$			
	对于热传导方程	$T_n(\beta_n at)=C_n\mathrm{e}^{-(\beta_n at)^2}$			

分离变量法

$$\begin{cases} u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0 & 0<\rho<a, 0\le\theta<2\pi \\ u(a,\theta)=\varphi(\theta) & 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

三、Laplace方程的边值问题

利用极坐标$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & x>0, y>0, x^2+y^2<4 \\ u(x,0)=0, u(0,y)=0 & 0\le x\le 2, 0\le y\le 2 \\ u(x,y)=xy+1 & x^2+y^2=4 \end{cases}$$

	区域	边界条件	特征值问题	特征值	特征函数系	
圆域	$0<\theta<2\pi$ $0<\rho<\rho_0$	$u\|_{\rho=\rho_0}=f(\theta)$ $u(\rho,\theta)=u(\rho,\theta+2\pi)$	$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)\end{cases}$	$\lambda_n=n^2$	$\{\Phi_n(\theta)\}=\{1,\cos n\theta,\sin n\theta\}$	$n=1,2,\cdots$
环域	$0<\theta<2\pi$ $\rho_1<\rho<\rho_0$	$u\|_{\rho=\rho_0}=f_0(\theta)$ $u\|_{\rho=\rho_1}=f_1(\theta)$ $u(\rho,\theta)=u(\rho,\theta+2\pi)$	$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)\end{cases}$	$\lambda_n=n^2$	$\{\Phi_n(\theta)\}=\{1,\cos n\theta,\sin n\theta\}$	$n=0,1,\cdots$
	区域	边界条件	特征值问题	特征值	特征函数系	
扇形域	$0<\theta<\alpha$ $0<\rho<\rho_0$	$u\|_{\rho=\rho_0}=f(\theta)$ $u\|_{\theta=0}=u\|_{\theta=\alpha}=0$	$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi(0)=\Phi(\alpha)=0\end{cases}$	$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$	$\{\Phi_n(\theta)\}=\left\{\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\}$	$n=0,1,\cdots$
扇环域	$0<\theta<\alpha$ $\rho_1<\rho<\rho_0$	$u\|_{\rho=\rho_0}=f_0(\theta)$ $u\|_{\rho=\rho_1}=f_1(\theta)$ $u\|_{\theta=0}=u\|_{\theta=\alpha}=0$	$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi(0)=\Phi(\alpha)=0\end{cases}$	$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$	$\{\Phi_n(\theta)\}=\left\{\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta\right\}$	$n=0,1,\cdots$

分离变量法

四、非齐次边界条件齐次化

非齐次边界条件	齐次化所使用的辅助函数
$u\|_{x=0}=u_1(t),u\|_{x=l}=u_2(t)$	$W(x,t)=\dfrac{u_2(t)-u_1(t)}{l}x+u_1(t)$
$u\|_{x=0}=u_1(t),u_x\|_{x=l}=u_2(t)$	$W(x,t)=u_2(t)x+u_1(t)$
$u_x\|_{x=0}=u_1(t),u\|_{x=l}=u_2(t)$	$W(x,t)=u_1(t)(x-l)+u_2(t)x$
$u_x\|_{x=0}=u_1(t),u_x\|_{x=l}=u_2(t)$	$W(x,t)=\dfrac{u_2(t)-u_1(t)}{2l}x^2+u_1(t)x$
注：以上方法适用于波动方程、热传导方程和位势方程.	

分离变量法（大题）

三、（10 分）求解如下特征值问题

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\\ \Phi(0)=0,\ \Phi(\frac{\pi}{4})=0\end{cases}$$

$\lambda=0$. $\Phi(\theta)=c_1+c_2\theta$

代入 $\Phi(0)=0$. $\Phi(\frac{\pi}{4})=0$ 得 $c_1=c_2=0$. 舍

$\lambda>0$. $\Phi_n(\theta)=c_1\cos\sqrt{\lambda}\theta+c_2\sin\sqrt{\lambda}\theta$

$$\begin{cases}c_1=0\\ c_1\cos\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{4}+c_2\sin\sqrt{\lambda}\frac{\pi}{4}=0\end{cases}$$

$\Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\pi}{4}=0 \Rightarrow \frac{\pi}{4}\sqrt{\lambda}=n\pi \Rightarrow \lambda_n=(4n)^2$

$\Phi_n(\theta)=\sin 4n\theta$. $(n\geq 1)$

五、（14 分）利用分离变量法求解下列定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-4u_{xx}=1, 0<x<2, t>0\\ u_x(0,t)=0, u(2,t)=0, t>0\\ u(x,0)=0, u_t(x,0)=-3, 0\leq x\leq 2\end{cases}$$

$T''(t)X(x)-4X''(x)T(t)=0$

$\Rightarrow \frac{T''(t)}{4T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X'(0)=0,\ X(2)=0\end{cases} \Rightarrow \lambda_n=\left(\frac{2n+1}{4}\pi\right)^2,\ X_n(x)=\cos\frac{2n+1}{4}\pi x,\ n\geq 0$$

$$\begin{cases}T_n''(t)+4\lambda T_n(t)=f_n\\ T_n(0)=0,\ T_n'(0)=\varphi_n\end{cases}$$

$\varphi_n=\frac{2}{2}\int_0^2(-3)\cdot\cos\frac{2n+1}{4}\pi x\,dx=\frac{12(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}$

共 6 页 第 3 页

$f_n=\frac{2}{2}\int_0^2\cos\frac{2n+1}{4}\pi x\,dx=\frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi}$

$T_n(t)=c_1\cos 2\sqrt{\lambda}t+c_2\sin 2\sqrt{\lambda}t+\frac{f_n}{4\lambda_n}$

$\Rightarrow c_1=-\frac{f_n}{4\lambda_n}$, $c_2=\frac{\varphi_n}{2\sqrt{\lambda}}=\frac{24(-1)^{n+1}}{((2n+1)\pi)^2}$

$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$

六.（14 分）利用分离变量法求解下列圆域上的狄利克雷问题

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0, & x^2+y^2<a^2\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=\frac{a^2}{12}xy\end{cases}$$

$u(\rho,\theta)=R(\rho)\Phi(\theta)$

$u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0$, $\rho^2<a^2$.

$u(a,\theta)=\frac{a^4}{12}\cos\theta\sin\theta$

$R''(\rho)\Phi(\theta)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\theta)+\frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\theta)=0$

$\frac{R''(\rho)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)}{-\frac{1}{\rho^2}R(\rho)}=\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\lambda$

$$\begin{cases}\Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0\\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)\end{cases}\Rightarrow \lambda_n=n^2,\ \Phi_n(\theta)=c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta$$

共 6 页 第 4 页

$\rho^2R''(\rho)+\rho R'(\rho)-\lambda R(\rho)=0$. 令 $\rho=e^\tau$

$R''(\tau)-\lambda R(\tau)=0 \Rightarrow R(\tau)=Ae^{\sqrt{\lambda}\tau}+Be^{-\sqrt{\lambda}\tau}$

$\Rightarrow R_n(\rho)=A\rho^n+B\rho^{-n}$. 且 $|R(0)|<\infty \Rightarrow B=0$. $R_n(\rho)=A\rho^n$

$u(\rho,\theta)=a+b\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(c_n\cos n\theta+d_n\sin n\theta)$ 代入 $u(a,\theta)=\frac{a^4}{12}\cos\theta\sin\theta=\frac{a^4}{24}\sin 2\theta$

不是 ρ^2 和 ρ 无关

$\Rightarrow u(\rho,\theta)=\frac{a^2}{24}\rho^2\sin 2\theta \Rightarrow u(x,y)=\frac{a^2}{12}xy$

贝塞尔函数

一、Γ 函数的定义和性质

①Γ 函数的定义 $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}dx\,(p>0)$

②Γ 函数的性质

1) $\Gamma(1)=1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

2) 递推性质 $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)=p!$

贝塞尔函数

二、贝塞尔方程

r阶贝塞尔方程　　$x^2y'' + xy' + (x^2 - r^2)y = 0$

r阶贝塞尔函数　　$J_r(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(k + r + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$

任意$r \geq 0$，r阶贝塞尔方程的通解可表示为

$$y(x) = cJ_r(x) + dN_r(x)$$

$r > 0$且不为整数时，通解也可表示为

$$y(x) = cJ_r(x) + dJ_{-r}(x)$$

贝塞尔函数

三、贝塞尔函数性质

①奇偶性 $J_n(x) = (-1)^n J_n(-x)$

②零点分布

③递推公式 $(x^n J_n(x))' = x^n J_{n-1}(x)$ $(x^{-n} J_n(x))' = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)$$

贝塞尔函数

四、贝塞尔方程特征值问题

第一类边界条件下贝塞尔方程的特征值和特征函数

$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)R(\rho) = 0 \quad 0 < \rho < \rho_0 \\ R(\rho_0) = 0 \quad |R(0)| < +\infty \end{cases}$$

特征值 $\lambda_m = \left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right)^2$ 特征函数 $R_m(\rho) = J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)$

贝塞尔函数

四、贝塞尔方程特征值问题

第一类边界条件下贝塞尔方程的特征值和特征函数

$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda\rho^2 - n^2)R(\rho) = 0 \quad 0 < \rho < \rho_0 \\ R(\rho_0) = 0 \quad |R(0)| < +\infty \end{cases}$$

特征值 $\lambda_m = \left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\right)^2$ 特征函数 $R_m(\rho) = J_n\left(\dfrac{\mu_m^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)$

贝塞尔函数（选择/填空/证明）

$n=2$

3. 贝塞尔方程 $x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$ 的通解为 $C_1J_2(x)+C_2N_2(x)$

4. 设 n,α,R 为正常数，$J_n(x)$ 为贝塞尔函数，计算积分 $\int_0^R x^{n+1}J_n(\alpha x)\mathrm{d}x=$ $\frac{R^{n+1}}{\alpha}J_{n+1}(\alpha R)$

4. 对于 Bessel 函数 $J_n(x)$（n 为整数），下列说法不正确的是(

(A) $\int x^3J_{-2}(x)dx=x^3J_3(x)+C$ (C 是一常数) ✓

(B) $J_n(x)$ 与 $J_{-n}(x)$ 是线性相关的 ✓

(C) $J_n(x)=0$ 的根全部为单重根

(D) $J_n'(x)$ 有无穷多个零点

七、(10 分) 证明：$J_{\frac12}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$

$$J_{\frac12}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac12}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+\frac12)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac12}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{k+1}}{k!(2k+1)!!\cdot\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k\cdot(2k+1)!!\cdot k!}x^{2k+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

（四）(8 分) 证明

$$\int x^3J_0(x)dx=x^3J_1(x)+2x^2J_0(x)-4xJ_1(x)+C$$

其中 C 是任意常数。

格林函数法（选填/大题）

3. 二维拉普拉斯方程在圆域 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<R^2\}$ 上的狄利克雷问题的格林函数为____________________________。

特征线法（大题）

三、（10 分）利用特征线法求解柯西问题

$$\begin{cases} u_t+3u_x=xt, & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=x^2, & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt}=3 \Rightarrow x=3t+\tau$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt}=(3t+\tau)t=3t^2+\tau t$$

$$\begin{cases} \\ u(x,0)=\tau^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow u=t^3+\frac{1}{2}\tau t^2+C$ 代入 $u(x,0)=\tau^2$ 得

$$\Rightarrow u=t^3+\frac{1}{2}\tau t^2+\tau^2$$

$$=t^3+\frac{1}{2}t^2(x-3t)+(x-3t)^2$$

七.（10 分）利用格林函数法求解下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & -\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty,z<2 \\ u(x,y,2)=\varphi(x,y), & -\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \\ u(x,y,2)=\varphi(x,y) \end{cases}$$

~~设 P_0 (坐标)~~，设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 则关于 $z=2$ 面的对称点 $P_1(x_0,y_0,4-z_0)$

$$G(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi r_{P_0P}}-\frac{1}{4\pi r_{P_1P}}$$

$$r_{P_0P}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.\quad r_{P_1P}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0-4)^2}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=2}=\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=2}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{z_0-2}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$u(x,y,z)=-\iint_{\partial\Omega}\varphi(x,y)\cdot\frac{\partial G}{\partial n}dS$$

共 6 页　第 5 页

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)\cdot\frac{z_0-2}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dxdy$$

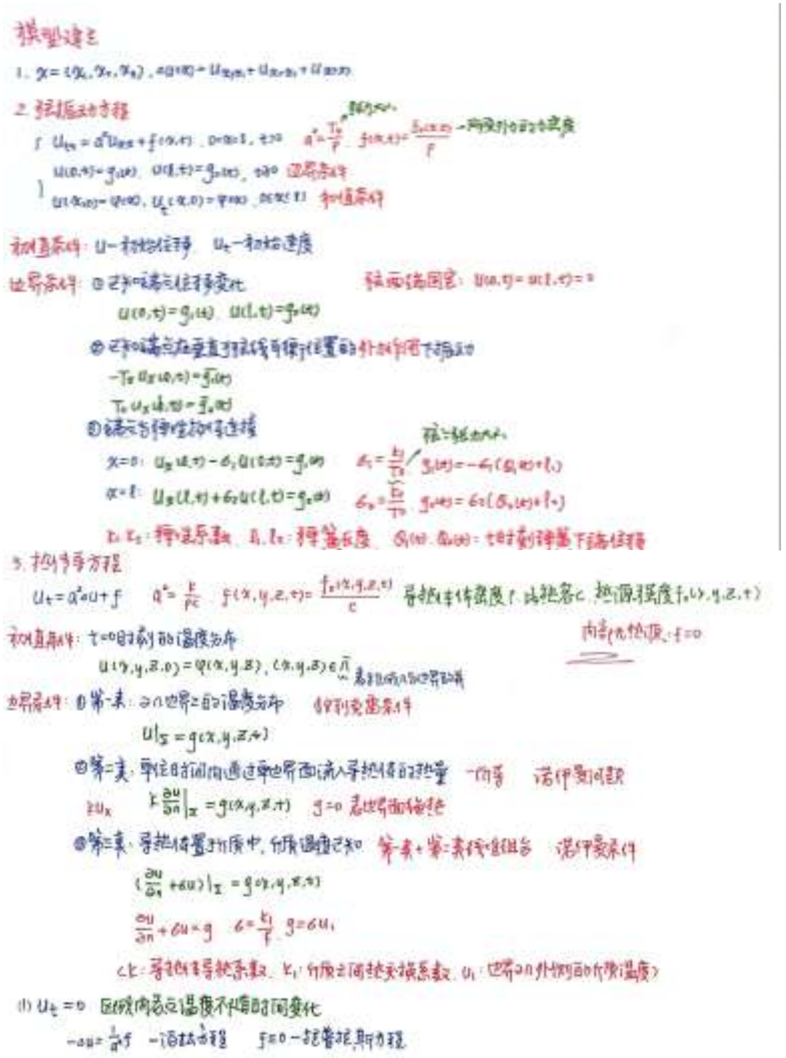
PART 3

学习经验分享

1. 课堂很重要

2. 复习以课本为主，课后习题巩固知识

3. 笔记提炼重要的知识点、易错点



西安交通大學

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

THANK YOU