西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称： 数理方程 B　课时：32　考试时间：2017 年 1 月 10 日

一、(5 分/题×4 题=16 分)

1、C　2、C　3、D　4、B

二．(每小题 5 分，共 10 分)

1. $\int_0^{\mu_m^{(0)}} x^3 J_0(x)dx = \int_0^{\mu_m^{(0)}} x^2 d(xJ_1(x)) = x^3 J_1(x)\big|_0^{\mu_m^{(0)}} - \int_0^{\mu_m^{(0)}} 2x^2 J_1(x)dx$

$= \left[\mu_m^{(0)}\right]^3 J_1(\mu_m^{(0)}) - 2\int_0^{\mu_m^{(0)}} dx^2 J_2(x) = \left[\mu_m^{(0)}\right]^3 J_1(\mu_m^{(0)}) - 2\left[\mu_m^{(0)}\right]^2 J_2(\mu_m^{(0)})$

$= \mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})\left(\left[\mu_m^{(0)}\right]^2 - 4\right)$

2. 令 $t = x^2$，$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} d\sqrt{t} = \int_0^\infty \frac{1}{2} t e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}\Gamma(1) = \frac{1}{2}$

三. (10 分)　首先证明特征值非负：　方程两边同乘以 $X(x)$，即

$$X''(x)X(x) + \lambda X^2(x) = 0, \int_0^l X''(x)X(x)dx + \lambda\int_0^l X^2(x)dx = 0$$

$$X(x)X'(x)\Big|_0^l - \int_0^l (X'(x))^2 dx + \lambda\int_0^l X^2(x)dx = 0$$

由于 $X'(0)=0, X(l)=0$，所以 $\lambda = \dfrac{\int_0^l (X'(x))^2 dx}{\int_0^l X^2(x)dx} \ge 0$　　（6 分）

①当 $\lambda = 0$ 时，$X''(x) = 0$，则 $X(x) = C_1 + C_2 x, X'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, X(l) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$，则 X=0，不是特征函数

②当 $\lambda > 0$ 时，

$$X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

$$X'(0)=0 \quad X(l)=0 \Rightarrow C_2 = 0,\ \sqrt{\lambda}l = \frac{(2n+1)}{2}\pi \quad n \ge 0$$　（10 分）

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n+1)}{2l}\pi\right]^2 \qquad X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)}{2l}x$$

四. (每小题 15 分，共 30 分)

1.　$u(x,t) = X(x)T(x)$ 代入齐次方程得：

$$XT'' - a^2X''T = 0 \qquad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda，$$

特征值问题为 ： $\begin{cases} X''+\lambda X=0 & 0<x<l \\ X(0)=0\ ,\ X'(l)=0 \end{cases}$

其特征值与特征函数为：$\lambda_n=\left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2 (n\geq 0)$， $X_n(x)=\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x$ （6 分）

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

$$\sin\frac{\pi x}{2l}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n X_n(t) \qquad \varphi_0=1 \quad \varphi_n=0\ (n\geq 0)$$ （9 分）

$$\sin\frac{3\pi}{2l}x=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n X_n(x) \quad \psi_1=1 \quad \psi_n=0\ (n\geq 0\text{且}n\neq 1)$$

代入方程得关于 T 的定解问题

$$\begin{cases} T_n''(t)-\lambda_n T_n(t)=0 \\ T_n(0)=\varphi_n, \qquad T_n'(0)=\psi_n \end{cases}$$

通解为：$T_n(t)=C_1\cos\sqrt{\lambda_n}t+C_2\sin\sqrt{\lambda_n}t$

$n=0$ 时，

$T_0(0)=\varphi_0=1 \quad \mathrm{T}_0'(0)=\psi_0=0$，

所以 $C_1=1, C_2=0$，

$$T_0(t)=\cos\sqrt{\lambda_0}t=\cos\frac{\pi}{2l}t$$

当 $n=1$ 时，

$T_1(0)=\varphi_1=0$

$T_1'(0)=\psi_1=1$，

所以 $C_1=0, C_2=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}=\dfrac{2l}{3\pi}, T_1(t)=\dfrac{2l}{3\pi}\sin\dfrac{3\pi}{2l}t$

当 $n\neq 0, n\neq 1$ 时，$T_n(0)=0, T_n{}'(0)=0$，则 $C_1=0, C_2=0, T_n(t)=0$

综上

$$u(x,t)=\cos\frac{\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}+\frac{2l}{3\pi}\sin\frac{3\pi t}{2l}\sin\frac{3\pi}{2l}x$$ （15 分）

2. 令$u(x,t)=X(x)T(t)$．代入齐次方程

$$XT'-a^2X''T=0$$

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}=-\lambda$$

特征值问题为：$\begin{cases}X''(x)+\lambda X=0, & 0<x<\pi\\ X'(0)=0, & X(\pi)=0\end{cases}$，解得

$$\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \qquad X_n=\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \quad n\ge 0$$ （6 分）

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

$$\cos\frac{3x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)X_n(x)\ ,\ f_1=1 \quad f_n=0 \quad (n\ge 0,n\ne 1)$$

代入原方程得$T_n(t)$的定解问题 $\begin{cases}T_n'(t)+\lambda_1 a^2T_n(t)=f_n\\ T(0)=0\end{cases}$ （9 分）

① 当$n=1$时，$\begin{cases}T_1'(t)+\lambda_1 a^2T_1(t)=1\\ T_1(0)=0\end{cases}$，齐次方程通解$\overline{T}_1(t)=C_1e^{-\lambda_1a^2t}$，令特解

$\tilde{T}_1(t)=d$,代入方程得$d=\dfrac{1}{\lambda_1a^2}$，则

$$T_1(t)=C_1e^{-\lambda_1a^2t}+\frac{1}{\lambda_1a^2}\text{。}$$

由$T(0)=0$得，$T_1(t)=\dfrac{1}{\lambda_1a^2}(1-e^{-\lambda_1a^2t})$

② 当$n\ne 1$时，$\begin{cases}T_n'(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0\\ T_n(0)=0\end{cases}$，

由 $$T_n(t)=C_1e^{-\lambda_n{}^2a^2t},T_n(0)=0 \quad \Rightarrow C_1=0,T_n(t)=0$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\lambda_1a^2}(1-e^{-\lambda_1a^2t})\cos\frac{3x}{2}$$ （15 分）

五．作变量代换$x=\sqrt{\lambda}\rho$ ，原方程变为：

$$x^2R''(x)+xR'(x)+(x^2-n^2)R(x)=0$$ （5 分）

为 n 阶贝塞尔方程，其通解为：$R(x)=C_1J_n(x)+C_2N_n(x)$ 。 （7 分）

则 $R(\rho)=C_1J_n(\sqrt{\lambda}\rho)+C_2N_n(\sqrt{\lambda}\rho)$

由于 $|R(0)|<+\infty$ ，则 C_2=0；由于 $R(2)=0$ ，则 $J_n(2\sqrt{\lambda})=0$

$$\lambda_m=(\frac{\mu_m^{(n)}}{2})^2, R_m(\rho)=J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{2}\rho)$$ （10 分）

六.（10 分）设 $\Omega=\{(x,y)|y>0\}$, $P_0(x_0,y_0)\in\Omega$, 则 $P_0(x_0,y_0)$ 关于 $y=0$ 的对称点为 $P_1(x_0,-y_0)$ ，于是可以构造格林函数为

$$G(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_0}-\ln\frac{1}{r_1}\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left(-\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)+\ln\left((x-x_0)^2+(y+y_0)^2\right)\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

显然有 $G(P,P_0)$=0，$P\in\partial\Omega$. （8 分）

直接计算可得

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=-\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0}=-\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right)_{y=0}$$
$$=-\frac{y_0}{\pi}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}\right),$$

（9 分）

所以原定解问题的解为

$$u(x_0,y_0)=-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}ds+\iint_{\Omega}Gfd\sigma$$
$$=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx+\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\ln\frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dx.$$

（10 分）

七.（12 分）该问题特征方程为：

$$(\frac{dy}{dx})^2-2\frac{dy}{dx}-3=0\text{可得}\frac{dy}{dx}=3\text{和}\frac{dy}{dx}=-1$$

特征线为：

$$x-\frac{y}{3}=c_1\text{和}x+y=c_2$$

做变量代换：

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y}{3}\\ \eta=x+y\end{cases}$$

原方程化简为：

$$\frac{16}{3}u_{\xi\eta}=\eta$$

（7 分）

解之得：

$$\frac{16}{3}u_{\xi}=\frac{\eta^2}{2}+f_1(\xi)$$

$$u(\xi,\eta)=\frac{3}{32}\xi\eta^2+\int f_1(\xi)d\xi+g(\eta)=\frac{3}{32}\xi\eta^2+f(\xi)+g(\eta)$$

$$u(x,y)=\frac{3}{32}(x-\frac{y}{3})(x+y)^2+f(x-\frac{y}{3})+g(x+y)$$

由初始条件得：

$$\begin{cases}u(x,0)=\dfrac{3x^3}{32}+f(x)+g(x)=0\\ u_y(x,0)=\dfrac{5x^2}{32}-\dfrac{1}{3}f'(x)+g'(x)=0\Rightarrow-\dfrac{1}{3}f(x)+g(x)+\dfrac{5x^3}{96}=c\end{cases}$$

$$f(x)=-\frac{3}{4}c-\frac{1}{32}x^3,g(x)=\frac{3}{4}c-\frac{1}{16}x^3$$

$$u(x,y)=\frac{3}{32}(x-\frac{y}{3})(x+y)^2-\frac{1}{32}(x-\frac{y}{3})^3-\frac{1}{16}(x+y)^3$$

（10 分）

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称:数学物理方程(A) 课时：32 考试时间：2018 年 1 月 6 日

一、(5 分/题×4 题=20 分)

1. B　　2. D　　3. D　　4. B

二、(4 分/题×5 题=20 分)

1. $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u_x(l,t) = 0, t \ge 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \le x \le l. \end{cases}$.

2.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, 0 < x < l, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u(l,t) = u_0, t \ge 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l. \end{cases}$$

3. $C_1 J_{\sqrt{2}}(2x) + C_2 J_{-\sqrt{2}}(2x)$

4. $-x^{-2} J_3(x)$， $J_{2018}(1)$

5. $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$， $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$

三、(12 分) $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入齐次方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 得

$$X(x)T''(t) - a^2 X''(x)T(t) = 0$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

代入齐次边界条件得 $X'(0) = 0$， $X(2) = 0$。所以该问题的特征值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < 2 \\ X'(0) = 0, X(2) = 0 \end{cases}$$ (4 分)

特征值为 $\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)^2$，特征函数为 $X_n(\mathrm{x}) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}x\right)$, $n \ge 0$.　　(6 分)

$T_n(t)$ 满足方程 $\begin{cases} T_n''(t) + a^2 \lambda_n T_n(t) = f_n \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0 \end{cases}$

其中 $f_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \ne 1 \end{cases}$　　(8 分)

$T_n(t)$ 通解为 $T_n(t) = c_1 \cos a\sqrt{\lambda_n} t + c_2 \sin a\sqrt{\lambda_n} t + \frac{f_n}{a^2 \lambda_n}$

代入初始条件得 $T_n(t)=\dfrac{f_n}{a^2\lambda_n}(1-\cos a\sqrt{\lambda_n}t)$，

即 $T_n(t)=\begin{cases}\dfrac{f_1}{a^2\lambda_1}(1-\cos a\sqrt{\lambda_1}t), & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$ （10 分）

所以 $u(x,t)=X_1(x)T_1(t)=\dfrac{16}{9a^2\pi^2}(1-\cos\dfrac{3\pi a}{4}t)\cos\dfrac{3\pi}{4}x$ （12 分）

四、（12 分）取 $w(x,t)=x$，令 $v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$ 将边界条件齐次化，原定解问题变为

$$\begin{cases}v_t-3v_{xx}=0,\ 0<x<\pi,\ t>0\\ v(0,t)=0,\ v_x(\pi,t)=0,\ t\geq 0\\ v(x,0)=\sin\dfrac{x}{2},\ 0\leq x\leq\pi.\end{cases}$$ （2 分）

（齐次化，方程各 1 分）

该问题的特征值问题为

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<\pi\\ X(0)=0,\ X'(\pi)=0\end{cases}$$ （6 分）

特征值为 $\lambda_n=\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2$，特征函数为 $X_n(\mathrm{x})=\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right),\ n\geq 0$. （8 分）

$T_n(t)$ 满足方程 $\begin{cases}T_n'+3\lambda_nT_n(t)=0\\ T_n(0)=\varphi_n\end{cases}$，其中 $\varphi_n=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$

$T_n(t)$ 通解为 $T_n(t)=ce^{-3\lambda_nt}$

代入初始条件得 $T_n(t)=\varphi_ne^{-3\lambda_nt}$，即 $T_n(t)=\begin{cases}\varphi_0e^{-3\lambda_0t}, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$ （10 分）

所以 $u(x,t)=X_0(x)T_0(t)=x+\sin\dfrac{x}{2}e^{-\frac{3t}{4}}$ （12 分）

五、(10 分) 设 $\rho^n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_mJ_n(\mu_m^{(n)}\rho)$ 4 分)

$$A_m=\frac{2\int_0^1\rho\rho^nJ_n\left(\mu_m^{(n)}\rho\right)d\rho}{[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}=\frac{\dfrac{2}{\left(\mu_m^{(n)}\right)^{n+2}}\int_0^{\mu_m^{(n)}}t^{n+1}J_n(t)\mathrm{d}t}{[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}$$ (8 分)

少权函数扣一分。

$$=\frac{\frac{2}{\left(\mu_m^{(n)}\right)^{n+2}}t^{n+1}J_{n+1}(t)\Big|_0^{\mu_m^{(n)}}}{[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}=\frac{\frac{2}{\mu_m^{(n)}}J_{n+1}(\mu_m^{(n)})}{[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)]^2}=\frac{\frac{2}{\mu_m^{(n)}}J_{n+1}(\mu_m^{(n)})}{[J_{n+1}(\mu_m^{(n)})]^2}=\frac{2}{\mu_m^{(n)}J_{n+1}(\mu_m^{(n)})}$$ (10 分)

六、(6 分) $z'=J_n(x)+xJ_n'(x)$,

$$z''=J_n'(x)+J_n'(x)+xJ_n''(x)=2J_n'(x)+xJ_n''(x)$$ (4 分)

$$x^2z''-xz'+(1+x^2-n^2)z$$

$$=x^2(2J_n'(x)+xJ_n''(x))-x(J_n(x)+xJ_n'(x))+(1+x^2-n^2)xJ_n(x)$$

$$=x^2J_n'(x)+x^3J_n''(x)+(x^2-n^2)xJ_n(x)$$ (5 分)

$$=x[x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)]=0$$ (6 分)

七、(10 分) 取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$, 其对称点为 $M_1(x_0,y_0,2-z_0)$ (2 分)

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}-\frac{1}{4\pi r_{MM_1}}$$ (4 分)

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-2+z_0)^2}}$$ (6 分)

$$u(M_0)=-\iint_\Gamma\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}f(M)\mathrm{dS}=\iint_\Gamma\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial z}\Big|_{z=1}f(x,y)\mathrm{d}S$$ (8 分)

方向导数、公式各一分。

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0-1}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z_0-1)^2\right]^{3/2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ (10 分)

七、(10 分) 特征方程为 $\begin{cases}3\dfrac{dx}{dt}+2=0,t>0\\x(0)=\tau\end{cases}$ (2 分)

特征线为 $x=\dfrac{2t}{3}+\tau$ (4 分)

沿特征线, 原问题转化为 $\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=0\\u(0)=u(x(0),0)=1-x(0)=1-\tau\end{cases}$ (6 分)

解得 $u(t)=1-\tau$ (8 分)

将 $\tau=x-\dfrac{2t}{3}$ 代入得到最终解 $u(x,t)=1-x+\dfrac{2t}{3}$. (10 分)

西安交通大学考试题

成绩	

课　程　数学物理方程 A 卷

学　院 ____________________

专业班号 ____________________　　考试日期 2018 年 1 月 6 日

姓　名 ____________________　　学　号 ____________________　期末 √

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一、单项选择题（5 分/题×4 题=20 分）

1. 下列方程是二阶线性偏微分方程的是(　　).

(A) $u_{xx}y^2+u_xu_y=x^2y$　　(B) $-x^2u_{xx}+u_t=0$

(C) $xyu_{tt}-u_{xxx}=\dfrac{2}{3}u_x$　　(D) $u_{xx}u_{yy}+xu_x^2=e^x$

2. 设$\varphi(x),\psi(x)$具有二阶连续导数，下列不是偏微分方程$u_xu_{xy}-u_yu_{xx}=0$解的函数是(　　).

(A) $x+\varphi(y)$　　(B) $x-\varphi(y)$

(C) $\psi(x+\varphi(y))$　　(D) $\psi(y+\varphi(x))$

3. 对于特征值问题$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l \\ X'(0)=X'(l)=0 \end{cases}$

下列说法错误的是（　　）

(A) 所有的特征值$\lambda\geq 0$.　　(B) 不同特征值对应的特征函数是正交的.

(C) 对于任意的整数$n\geq 0$，特征值$\lambda_n=(\dfrac{n\pi}{l})^2$，特征函数$X_n(x)=\cos\dfrac{n\pi}{l}x$.

(D) 任一区间$\left[0,l\right]$上分段光滑的函数$f(x)$都可按特征函数系展成傅里叶级数，其中傅里叶系数为$f_n=\dfrac{l}{2}\int_0^l f(x)X_n(x)dx, n\geq 0$.

4. 关于整数阶的贝塞尔函数$J_n(x)$（$n\geq 0$），下列说法错误的是（　　）

(A) $J_n(x)$是n阶贝塞尔方程的解.　(B) $J_n(x)$与$J_{-n}(x)$线性无关.

(C)随$x>0$增大 $J_n(x)$ 振荡衰减.

(D) $J_n(x)$有无穷多个关于原点对称分布的实根，没有复根.

二、填空题（4 分/题×5 题=20 分）

1. 有一根长为l的均匀柔软细弦在无外力时做微小横振动，其左端$x=0$固定在平衡位置，右端$x=l$为自由端，初始位移和速度均为 0, 试写出弦振动的定解问题

____。

2. 长为l的均匀细杆侧面绝缘，内部无热源，左端$x=0$处封闭, 右端$x=l$处温度为u_0，初始温度为$\varphi(x)(0\le x\le l)$, 试写出相应的温度分布的定解问题

____。

3. 利用贝塞尔方程的性质写出$x^2y''+xy'+(4x^2-2)y=0$的通解

______________________。

4. 设$J_n(x)$为n阶 Bessel 函数，则$\frac{d}{dx}[x^{-2}J_2(x)]=$_______________，

$\int_0^1 x^{2018}J_{2017}(x)\mathrm{d}x=$_______________________。

5. 已知$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，其中$\Gamma(\cdot)$表示 Gamma 函数，则$\Gamma(\frac{3}{2})=$_____，$\Gamma(-\frac{1}{2})=$_____。

三、（12 分）利用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \cos\dfrac{3\pi x}{4}, 0 < x < 2, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, u(2,t) = 0, t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

四、（12 分）利用分离变量法求解定解问题

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0, 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = 0, u_x(\pi,t) = 1, t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin\dfrac{x}{2} + x, 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

五、(10 分)将函数 $f(\rho) = \rho^n$ 在区间 $[0,1]$ 上按 $J_n(\mu_m^{(n)}\rho)$ 展成傅里叶−贝塞尔级数。

六、(6 分)证明 $z = xJ_n(x)$ 是方程 $x^2 z'' - xz' + (1 + x^2 - n^2)z = 0$ 的解。

七、（10 分）利用格林函数法求解下列狄利克雷问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, z > 1$$

$$u(x,y,1) = f(x,y), \qquad -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

八、（10 分）利用特征线法求解柯西问题

$$\begin{cases} 3u_t + 2u_x = 0, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = 1 - x, -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称： 数理方程 B　课时：32　考试时间：2017 年 1 月 10 日

一、(5 分/题×4 题=16 分)

1、C　2、C　3、D　4、B

二.（每小题 5 分，共 10 分）

1. $\int_0^{\mu_m^{(0)}} x^3 J_0(x)dx = \int_0^{\mu_m^{(0)}} x^2 d(xJ_1(x)) = x^3 J_1(x)\Big|_0^{\mu_m^{(0)}} - \int_0^{\mu_m^{(0)}} 2x^2 J_1(x)dx$

$= \left[\mu_m^{(0)}\right]^3 J_1(\mu_m^{(0)}) - 2\int_0^{\mu_m^{(0)}} dx^2 J_2(x) = \left[\mu_m^{(0)}\right]^3 J_1(\mu_m^{(0)}) - 2\left[\mu_m^{(0)}\right]^2 J_2(\mu_m^{(0)})$

$= \mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})\left(\left[\mu_m^{(0)}\right]^2 - 4\right)$

2. 令 $t = x^2$，$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2}dx = \int_0^\infty t^{\frac{3}{2}} e^{-t} d\sqrt{t} = \int_0^\infty \frac{1}{2} t e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Gamma(2) = \frac{1}{2}\Gamma(1) = \frac{1}{2}$

三.（10 分）　首先证明特征值非负：　方程两边同乘以 $X(x)$，即

$$X''(x)X(x) + \lambda X^2(x) = 0, \int_0^l X''(x)X(x)dx + \lambda\int_0^l X^2(x)dx = 0$$

$$X(x)X'(x)\Big|_0^l - \int_0^l (X'(x))^2 dx + \lambda\int_0^l X^2(x)dx = 0$$

由于 $X'(0) = 0, X(l) = 0$，所以 $\lambda = \dfrac{\int_0^l (X'(x))^2 dx}{\int_0^l X^2(x)dx} \ge 0$　　（6 分）

①当 $\lambda = 0$ 时，$X''(x) = 0$，则 $X(x) = C_1 + C_2 x, X'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0, X(l) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$，则 X=0，不是特征函数

②当 $\lambda > 0$ 时，

$$X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$

$$X'(0) = 0\ \ X(l) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,\ \sqrt{\lambda}l = \frac{(2n+1)}{2}\pi \quad n \ge 0$$　（10 分）

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n+1)}{2l}\pi\right]^2 \qquad X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)}{2l}x$$

四.（每小题 15 分，共 30 分）

1.　$u(x,t) = X(x)T(x)$ 代入齐次方程得：

$$XT'' - a^2X''T = 0 \qquad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda,$$

特征值问题为 ：$\begin{cases} X''+\lambda X=0 & 0<x<l \\ X(0)=0\text{ , }X'(l)=0 \end{cases}$

其特征值与特征函数为：$\lambda_n=\left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2 (n\geq 0)$，$X_n(x)=\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x$ （6 分）

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

$$\sin\frac{\pi x}{2l}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n X_n(t) \qquad \varphi_0=1 \quad \varphi_n=0\ (n\geq 0)$$ （9 分）

$$\sin\frac{3\pi}{2l}x=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n X_n(x) \quad \psi_1=1 \quad \psi_n=0\ (n\geq 0\text{且}n\neq 1)$$

代入方程得关于 T 的定解问题

$$\begin{cases} T_n''(t)-\lambda_n T_n(t)=0 \\ T_n(0)=\varphi_n, \qquad T_n'(0)=\psi_n \end{cases}$$

通解为：$T_n(t)=C_1\cos\sqrt{\lambda_n}t+C_2\sin\sqrt{\lambda_n}t$

$n=0$ 时，

$T_0(0)=\varphi_0=1\quad \mathrm{T}_0'(0)=\psi_0=0$，

所以 $C_1=1, C_2=0$，

$$T_0(t)=\cos\sqrt{\lambda_0}t=\cos\frac{\pi}{2l}t$$

当 $n=1$ 时，

$T_1(0)=\varphi_1=0$

$T_1'(0)=\psi_1=1$’

所以 $C_1=0, C_2=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}=\dfrac{2l}{3\pi}, T_1(t)=\dfrac{2l}{3\pi}\sin\dfrac{3\pi}{2l}t$

当 $n\neq 0, n\neq 1$ 时，$T_n(0)=0, T_n'(0)=0$，则 $C_1=0, C_2=0, T_n(t)=0$

综上

$$u(x,t)=\cos\frac{\pi t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}+\frac{2l}{3\pi}\sin\frac{3\pi t}{2l}\sin\frac{3\pi}{2l}x$$ （15 分）

2．令$u(x,t)=X(x)T(t)$．代入齐次方程

$$XT'-a^2X''T=0$$

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}=-\lambda$$

特征值问题为：$\begin{cases}X''(x)+\lambda X=0, & 0<x<\pi\\ X'(0)=0, & X(\pi)=0\end{cases}$，解得

$$\lambda_n=\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \qquad X_n=\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \quad n\geq 0$$ （6 分）

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$$

$$\cos\frac{3x}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)X_n(x)\text{，}\quad f_1=1 \quad f_n=0 \quad (n\geq 0,n\neq 1)$$

代入原方程得$T_n(t)$的定解问题 $\begin{cases}T_n'(t)+\lambda_1 a^2T_n(t)=f_n\\ T(0)=0\end{cases}$ （9 分）

① 当$n=1$时，$\begin{cases}T_1'(t)+\lambda_1 a^2T_1(t)=1\\ T_1(0)=0\end{cases}$，齐次方程通解$\bar{T}_1(t)=C_1e^{-\lambda_1a^2t}$，令特解

$\tilde{T}_1(t)=d$,代入方程得$d=\dfrac{1}{\lambda_1a^2}$，则

$$T_1(t)=C_1e^{-\lambda_1a^2t}+\frac{1}{\lambda_1a^2}\text{。}$$

由$T(0)=0$得，$T_1(t)=\dfrac{1}{\lambda_1a^2}(1-e^{-\lambda_1a^2t})$

② 当$n\neq 1$时，$\begin{cases}T_n'(t)+\lambda_n a^2T_n(t)=0\\ T_n(0)=0\end{cases}$，

由 $$T_n(t)=C_1e^{-\lambda_n{}^2a^2t},T_n(0)=0 \quad \Rightarrow C_1=0,T_n(t)=0$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\lambda_1a^2}(1-e^{-\lambda_1a^2t})\cos\frac{3x}{2}$$ （15 分）

五．作变量代换$x=\sqrt{\lambda}\rho$ ，原方程变为：

$$x^2R''(x)+xR'(x)+(x^2-n^2)R(x)=0$$ （5 分）

为 n 阶贝塞尔方程，其通解为：$R(x)=C_1J_n(x)+C_2N_n(x)$。 （7 分）

则 $R(\rho)=C_1J_n(\sqrt{\lambda}\rho)+C_2N_n(\sqrt{\lambda}\rho)$

由于 $|R(0)|<+\infty$，则 C_2=0；由于 $R(2)=0$，则 $J_n(2\sqrt{\lambda})=0$

$$\lambda_m=(\frac{\mu_m^{(n)}}{2})^2, R_m(\rho)=J_n(\frac{\mu_m^{(n)}}{2}\rho)$$ （10 分）

六.（10 分）设 $\Omega=\{(x,y)|y>0\}$，$P_0(x_0,y_0)\in\Omega$, 则 $P_0(x_0,y_0)$ 关于 $y=0$ 的对称点为 $P_1(x_0,-y_0)$，于是可以构造格林函数为

$$\begin{aligned}G(P,P_0)&=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_0}-\ln\frac{1}{r_1}\right)\\&=\frac{1}{4\pi}\left(-\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)+\ln\left((x-x_0)^2+(y+y_0)^2\right)\right)\\&=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\end{aligned}$$

显然有 $G(P,P_0)$=0，$P\in\partial\Omega$. （8 分）

直接计算可得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=-\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0}&=-\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{2(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right)\Bigg|_{y=0}\\&=-\frac{y_0}{\pi}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^{\ 2}}\right),\end{aligned}$$

（9 分）

所以原定解问题的解为

$$\begin{aligned}u(x_0,y_0)&=-\int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial n}ds+\iint_{\Omega}Gfd\sigma\\&=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^2+y_0^{\ 2}}dx+\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\ln\frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}dx.\end{aligned}$$

（10 分）

七.（12 分）该问题特征方程为：

$$(\frac{dy}{dx})^2-2\frac{dy}{dx}-3=0\text{可得}\frac{dy}{dx}=3\text{和}\frac{dy}{dx}=-1$$

特征线为：

$$x-\frac{y}{3}=c_1\text{和}x+y=c_2$$

做变量代换：

$$\begin{cases}\xi=x-\dfrac{y}{3}\\ \eta=x+y\end{cases}$$

原方程化简为：

$$\frac{16}{3}u_{\xi\eta}=\eta$$

（7 分）

解之得：

$$\frac{16}{3}u_{\xi}=\frac{\eta^2}{2}+f_1(\xi)$$

$$u(\xi,\eta)=\frac{3}{32}\xi\eta^2+\int f_1(\xi)d\xi+g(\eta)=\frac{3}{32}\xi\eta^2+f(\xi)+g(\eta)$$

$$u(x,y)=\frac{3}{32}(x-\frac{y}{3})(x+y)^2+f(x-\frac{y}{3})+g(x+y)$$

由初始条件得：

$$\begin{cases}u(x,0)=\dfrac{3x^3}{32}+f(x)+g(x)=0\\ u_y(x,0)=\dfrac{5x^2}{32}-\dfrac{1}{3}f'(x)+g'(x)=0\Rightarrow-\dfrac{1}{3}f(x)+g(x)+\dfrac{5x^3}{96}=c\end{cases}$$

$$f(x)=-\frac{3}{4}c-\frac{1}{32}x^3,g(x)=\frac{3}{4}c-\frac{1}{16}x^3$$

$$u(x,y)=\frac{3}{32}(x-\frac{y}{3})(x+y)^2-\frac{1}{32}(x-\frac{y}{3})^3-\frac{1}{16}(x+y)^3$$

（10 分）

西安交通大学考试题

课　程 数学物理方程B卷

学　院 ____________

专业班号 ____________　考 试 日 期 2018 年 1 月 6 日

姓　名 ____________　学　号 ____________　期末 √

成绩	

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一(5 分/题×4 题=20 分)

1. 下列方程是线性非齐次偏微分方程的是().

(A) $u_x u_y + 2u = 0$　(B) $u_{xxxx} + u_{yyyy} + \cos u = u_x^2 + xy$

(C) $\sin x u_{tt} - u_{xx} = x^3 t$　(D) $x u_t - 2u_{xx} + e^x u = u_x$

2. 特征值问题 $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < l \\ X(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$，特征值和特征函数为()

(A) $\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \cos\dfrac{n\pi}{l}x \end{cases}$ $n \geq 0$　(B) $\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x \end{cases}$ $n \geq 1$

(C) $\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 \\ X_n(x) = \sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x \end{cases}$ $n \geq 0$　(D) $\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 \\ X_n(x) = \cos\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}x \end{cases}$ $n \geq 0$

3. 设 u_1 和 u_2 是方程 $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ 的两个解，λ 为任意常数，β 是 x 和 y 的任意函数，则下列()种组合一定也是 $u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ 的解.

(A) $\lambda u_1 + \beta u_2$　(B) $\beta u_1 + \lambda u_2$

(C) $\beta(u_1 - u_2) + u_1$　(D) $\lambda(u_1 - u_2) + u_2$

4. 对于 Bessel 函数 $J_n(x)$ (n 为整数)，下列说法不正确的是()

(A) Bessel 函数是有界函数

(B) $J_n(x) = 0$ 的根全部为单重根

(C) $J_{n+1/2}(x)$ 与 $J_{-(n+1/2)}(x)$ 是线性无关的

(D) $J_n'(x)$ 有无穷多个零点

二.(每题 5 分, 共 10 分)

1 求 $\int_0^{\mu_m^{(0)}} x^3 J_0(x)dx$.　　2 求 $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

三.(10 分)考虑特征值问题 $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 & 0<x<l \\ X'(0)=0,\ \ X(l)=0 \end{cases}$ 。

证明 $\lambda \ge 0$，并求解特征值问题。

四. （每小题 15 分，共 30 分） 试用分离变量法求解下列各方程：

1. $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 & 0<x<l,\quad t>0 \\ u(0,t)=0, u_x(l,t)=0 & t\ge 0 \\ u(x,0)=\sin\dfrac{1}{2l}\pi x,\ \ u_t(x,0)=\sin\dfrac{3}{2l}\pi x & 0\le x\le l \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=\cos\dfrac{3x}{2} & 0<x<\pi\quad t>0 \\ u_x(0,t)=0, u(\pi,t)=0 & t\ge 0 \\ u(x,0)=0 & 0\le x\le \pi \end{cases}$

五. （10 分）已知 $\lambda>0, n$ 为正整数，试求贝塞尔方程特征值问题：

$$\begin{cases} \rho^2 R''(\rho)+\rho R'(\rho)+(\lambda\rho^2-n^2)R(\rho)=0, & 0<\rho<2 \\ R(2)=0,\ |R(0)|<+\infty \end{cases}$$

六.（10 分）. 利用格林函数法求解下列狄利克雷问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y),\quad -\infty<x<+\infty,\ \ y>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\quad -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$

七.（10 分）. 利用特征线法求解下列柯西问题

$$\begin{cases} u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=x+y, -\infty<x<+\infty, y>0 \\ u|_{y=0}=0, \quad u_y|_{y=0}=0, -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t-3u_{xx}=0, 0<x<\pi, t>0 \\ u(0,t)=0, u_x(\pi,t)=1, t\ge 0 \\ u(x,0)=\sin\dfrac{x}{2}+x, 0\le x\le \pi. \end{cases}$$

五、(10 分)将函数 $f(\rho)=\rho^n$ 在区间 $[0,1]$ 上展成 $J_n(\mu_m^{(n)}\rho)$ 的傅里叶-贝塞尔级数。

六、(6 分)证明 $z=xJ_n(x)$ 是方程 $x^2z''-xz'+(1+x^2-n^2)z=0$ 的解。

七、(10 分)利用格林函数法求解下列狄利克雷问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty, z>1$$

$$u(x,y,1)=f(x,y), \qquad -\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty$$

八、(10 分)利用特征线法求解柯西问题

$$\begin{cases} 3u_t+2u_x=0, -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=1-x, -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：数学物理方程(不卷)　课时：32　考试时间：2018 年 9 月日

一、（6 分/题×6 题=36 分）

1．方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}, 0\le x\le L$，边界条件：$u(0,t)=0, u(L,t)=0$。 2. n 为偶数时是偶函数，n 为奇数时是奇函数。 3. $u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f, f=f_0/c,$

4. 特征值 $\lambda_n=(\frac{2n+1}{2})^2, n\ge 0$，特征函数 $X_n(x)=\sin\frac{2n+1}{2}x, n\ge 0$ 5、$\frac{9!!}{2^5}\sqrt{\pi}$。

6、$C_1J_2(\sqrt{2}x)+C_2N_2(\sqrt{2}x)$

二、（**10 分**）解：根据达朗贝尔公式

$$u=\frac{1}{2}[(x+\sqrt{2}t)^2+1+(x-\sqrt{2}t)^2+1]+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{x-\sqrt{2}t}^{x+\sqrt{2}t}e^x dx$$

$$=x^2+2t^2+1+\frac{1}{2\sqrt{2}}[e^{x+\sqrt{2}t}-e^{x-\sqrt{2}t}]$$

（两式各 5 分）

三、（**10 分**）解：特征方程为 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}+t=0\\ x(0)=\tau\end{cases}$（4 分），特征线为 $x+t^2/2=\tau$，沿特征线，原问题转化为 $\begin{cases}\frac{du}{dt}=0\\ u(0)=u(x(0),0)=\varphi(\tau)\end{cases}$（4 分）

解得 $u(t)=\varphi(\tau)=\varphi(x+t^2/2)$（2 分）

四、（**10 分**）解：根据对称法：$P_0(\xi,\eta)\in\Omega, P_1(-\xi,\eta)$ 是其对称点，（2 分）

$$G(P,P_0)=\Gamma(P,P_0)-\Gamma(P,P_1)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_0}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{PP_1}}$$（4 分）

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{(x+\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right]$$（4 分）

五、（**10 分**）解：**设**

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_mJ_0(\mu_m^{(0)}x),$$（2 分）

$$A_m=\frac{1}{\left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2}\int_0^2 xJ_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{2}x)dx=\frac{4}{\left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2(\mu_m^{(0)})^2}\int_0^{\mu_m^{(1)}}xJ_0(x)dx$$

$$=\frac{4}{\left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2\mu_m^{(0)}}J_1(\mu_m^{(0)})$$

（6 分）

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{\left[J_0'(\mu_m^{(0)})\right]^2\mu_m^{(0)}}J_1(2\mu_m^{(0)})J_0(\mu_m^{(0)}x)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{J_1(\mu_m^{(0)})\mu_m^{(0)}}J_0(\mu_m^{(0)}x)\qquad(2\text{ 分})$$

六．(10 分) **解：设** $u(x,t)=X(x)T(t)$，代入方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 得

$$X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

代入齐次边界条件得 $X(0)=0$， $X'(l)=0$ 。该问题的特征值问题为

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<l\\ X'(0)=0, X(l)=0\end{cases}\qquad(5\text{ 分})$$

特征值为 $\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$，特征函数为 $X_n(\mathrm{x})=\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)$ 其中 $n\geq 0$

$$T''(t)+a^2\lambda T=0$$

$$T_n(t)=A\cos\sqrt{\lambda_n}t+B\sin\sqrt{\lambda_n}t\qquad(3\text{ 分})$$

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x)$$

$\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nX_n(x),0=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sqrt{\lambda_n}X_n(x)$， $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)X_n(x)dx$，Bn=0

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos\sqrt{\lambda_n}tX_n(x)\qquad(2\text{ 分})$$

七、(14 分)　**解：**易知对应的特征值问题为

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad 0<x<l\\ X(0)=0,\quad X'(l)=0\end{cases}$$

其解为 $\lambda_n=\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2, X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x, n\geq 0$.　(5 分)

将自由项和初始条件按照特征函数系展开成傅里叶级数

$$f(x,t)=\sin\frac{\pi x}{l}=\sum_{n=0}^{\infty}f_nX_n(x),\quad \varphi(x)=x=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_nX_n(x),$$

$$f_0=1, f_n=0\quad(n\neq 0),\ \varphi_n=2\int_0^1\varphi(x)X_n(x)dx=\frac{2}{\lambda_n}(-1)^n,\qquad(4\text{ 分})$$

令$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$并代入方程和初始条件得$T_n(t)$满足下面的定解问题

$$\begin{cases}T_n'(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=f_n, t>0\\ T_n(0)=\varphi_n,\end{cases}$$

解得$T_n(t)=Ce^{-\lambda_n a^2 t}+\dfrac{f_n}{\lambda_n a^2}$，$C=\varphi_n-\dfrac{f_n}{\lambda_n a^2}$ （4 分）

于是

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}[(\varphi_n-\frac{1}{\lambda_n a^2})e^{-\lambda_n a^2 t}+\frac{f_n}{\lambda_n a^2}]\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}x$$ （1 分）

西安交通大学考试题

课　程	数学物理方程卷 B	成绩	

学　院 ____________________

专业班号 ____________________　　考 试 日 期　2018 年 9 月　日

姓　名 ____________________　　学　号 ______________　期末 √

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. 填空(每题 6 分,共 36 分)

1. 长为 L 的柔软细弦做微小自由横振动，则弦振动方程为______________。又若弦的两端固定，则边界条件为____________________________________。

2. 说明贝塞尔函数 $J_n(x)$ 的奇偶性____，这里 n 为正整数。

3. 有一均匀材质球体，其内部热源为 $f(x,y,z)$，试写出其内部温度满足的方程________________________。

4. 考虑特征值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < 1 \\ X(0) = 0, X'(1) = 0 \end{cases}$$

其特征值为________________________,特征函数为______________

5、函数 $\Gamma(5+1/2) =$ ______________________________。

6、方程 $x^2 y'' + xy' + 2(x^2 - 2)y = 0$ 的通解 $y =$ ______________________

二.（10 分）求解下列问题

$$\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = x^2 + 1, u_t|_{t=0} = e^x, -\infty < x < \infty \end{cases}$$

三.（10 分）求解下列柯西问题

$$\begin{cases} u_t - tu_x = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty \end{cases}$$

四.（10 分）求解平面区域$\Omega = \{(x, y) \mid x < 0, y \in R\}$的格林函数。

五、（**10 分**）将函数 $f(x) = 2$ 在区间 $[0,2]$ 上按贝塞尔函数系 $J_0(\frac{\mu_m^{(0)}}{2}x)$（$m = 1, 2, \ldots,$）展成贝塞尔级数。

六、(10 分) 求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

七、(14 分) 求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \sin\frac{\pi}{2}x, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=1} = 0, & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = x, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称:数学物理方程(A) 课时：32 考试时间：2019 年 5 月 11 日

一、(5 分/题×11 题=55 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	C	C	A	D	D	B	D	C	D	A

二、(10 分) 解：$u(x,t)=X(x)T(t)$，特征值问题

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l \\ X(0)=0, X(l)=0 \end{cases},\quad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad X_n(\mathrm{x})=\sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right),\quad n>0,$$ (5 分)

$$\begin{cases} T_n''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=0 \\ T_n(0)=\varphi_n, T_n'(0)=0 \end{cases},\quad T_n(t)=\varphi_n\cos a\sqrt{\lambda_n}t,\quad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi X_n dx$$ (9 分)

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos a\sqrt{\lambda_n}t\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),$$ (10 分)

三、(10 分) 设 $f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_2(\mu_m^{(2)}x)$ ， $A_m=\dfrac{2\int_0^1 x(x^2+1)J_2\left(\mu_m^{(2)}x\right)dx}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2}$ (4 分)

$$A_m=\frac{2}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2}\left[\frac{1}{\left(\mu_m^{(2)}\right)^4}\int_0^{\mu_m^{(2)}}t^3J_2(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\left(\mu_m^{(2)}\right)^2}\int_0^{\mu_m^{(2)}}t\ J_2(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{2}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2}\frac{1}{\left(\mu_m^{(2)}\right)^2}\left[\mu_m^{(2)}J_3(\mu_m^{(2)})-\int_0^{\mu_m^{(2)}}t^2(t^{-1}J_1(t))'\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{2}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2}\frac{1}{\left(\mu_m^{(2)}\right)^2}\left[\mu_m^{(2)}J_3(\mu_m^{(2)})-\mu_m^{(2)}J_1(\mu_m^{(2)})+2\int_0^{\mu_m^{(2)}}J_1(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{2}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2}\frac{1}{\left(\mu_m^{(2)}\right)^2}\left[\mu_m^{(2)}J_3(\mu_m^{(2)})-\mu_m^{(2)}J_1(\mu_m^{(2)})-2J_0(\mu_m^{(2)})+2\right]$$

$$J_3=-J_1+\frac{4}{x}J_2, J_3(\mu_m^{(2)})=-J_1(\mu_m^{(2)}), J_0=-J_2+\frac{2}{x}J_1, 2J_1(\mu_m^{(2)})=\mu_m^{(2)}J_0(\mu_m^{(2)})$$

$$A_m=\frac{2}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2}\frac{1}{\left(\mu_m^{(2)}\right)^2}\left[-\mu_m^{(2)}J_1(\mu_m^{(2)})-\mu_m^{(2)}J_1(\mu_m^{(2)})-2J_0(\mu_m^{(2)})+2\right]$$

$$=\frac{-4}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2}\frac{1}{\left(\mu_m^{(2)}\right)^2}\left[\mu_m^{(2)}J_1(\mu_m^{(2)})+J_0(\mu_m^{(2)})-1\right]$$

$$=\frac{-4}{[J_2'(\mu_m^{(2)})]^2}\frac{1}{(\mu_m^{(2)})^2}[(\mu_m^{(2)})^2 J_0(\mu_m^{(2)})/2+J_0(\mu_m^{(2)})-1]$$ (8 分)

$$f(x)=-4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{[J_2'(\mu_m^{(2)})]^2}\frac{1}{(\mu_m^{(2)})^2}[((\mu_m^{(2)})^2/2+1)J_0(\mu_m^{(2)})-1]J_2(\mu_m^{(2)}x)$$ (10 分)

四、(10 分) 取一点 $M_0(x_0,y_0),y_0>0,$ 其对称点为 $M_1(x_0,-y_0)$ (2 分)

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}}=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

(5 分)

$$\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\Big|_{y=0}=-\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial y}=-\frac{1}{4\pi}\frac{4y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

$$u(M_0)=-\int_{y=0}\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\varphi(M)ds+\int_{y>0}G(M,M_0)f(M)dxdy$$

(10 分)

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\varphi(x)dx$$

五、(15 分) 特征值和特征函数分别为 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$， $X_n(\mathrm{x})=\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$， $n\ge 0$, (5 分)

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x),，\ \varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)X_n(x),$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi X_n dx,\ n>0,\ \varphi_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi dx$$

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)X_n(x),\ f_n=\begin{cases}1,n=0\\0,n>0\end{cases}$$ (10 分)

$$\begin{cases}T_n'(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=f_n\\T_n(0)=\varphi_n\end{cases},\ T_0(t)=t+\varphi_0,\ T_n(t)=\varphi_n e^{-a^2\sqrt{\lambda_n}t},\ n>0$$

$$u=t+\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-a^2\sqrt{\lambda_n}t}X_n(x),$$ (15 分)

西安交通大学考试题 A

成绩	

课　程　数学物理方程

学　　院 ____________　　考 试 日 期　2019　年　5 月 11 日

专业班号 ____________

姓　　名 ____________　　学　号____________　　期末

一．选择题（每小题 5 分）。请将正确答案填在下表中

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

1、对贝塞尔函数 $J_4(x)$，正确的说法是

A、 偶函数；B、奇函数；C、没有奇偶性；D、无界函数。

2、对于方程 $xu_t + \cos u \cdot u_{xx} u_t = 1$，正确的说法

A、三阶非齐次方程；　　B、二阶线性非齐次方程；

C、二阶非线性非齐次方程；D、三阶非线性非齐次方程。

3、描述区域 $\Omega \subset R^3$ 内稳恒温度分布的（无热源）方程是

A、$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$**；B、**$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$**；**

C、$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$**；　D、**$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$**。**

4、3 维拉普拉斯方程的基本解是

A、$\Gamma(P_0, P) = \dfrac{1}{4\pi r_{P_0P}}$**；　B、**$\Gamma(P_0, P) = \ln \dfrac{1}{r_{P_0P}}$**；**

C、$\Gamma(P_0, P) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r_{P_0P}}$**；D、**$\Gamma(P_0, P) = \dfrac{1}{r_{P_0P}}$

5、特征值问题 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, 0 < x < l \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$ **的解为**

A、$\lambda_n = (\dfrac{n\pi}{l})^2, X_n = \cos \dfrac{n\pi}{l} x$，$n \ge 0$**；**

B、$\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2, X_n=\sin\frac{n\pi}{l}x$， $n\ge 0$；

C、$\lambda_n=(\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2, X_n=\cos\sqrt{\lambda_n}x$， $n\ge 0$；

D、$\lambda_n=(\frac{(2n+1)\pi}{2l})^2, X_n=\sin\sqrt{\lambda_n}x$， $n\ge 0$

6、那个下列变换可将边界条件：$u(0,t)=1, u_x(l,t)=\sin t$齐次化

A、$v=u-1$；　　**B**、$v=u-\sin t$；

C、$v=u-1-(x-l)\sin t$，**D**、$v=u-1-\frac{x^2}{2l}\sin t$

7、柯西问题$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx,} -\infty<x<\infty, t>0 \\ u\big|_{t=0}=0, u_t\big|_{t=0}=2\sin x \end{cases}$ 的解为

A、**0**；**B**、$2\sin x\sin t$；**C**、$2\sin x\cos t$；**D**、$2\sin t\cos x$

8、方程$x^2y''+xy'+(4x^2-9)y=0$的通解为

A、$y=J_3(2x)$；　　**B**、$y=N_3(2x)$；

C、$y=CJ_3(2x)+DJ_{-3}(2x)$；**D**、$y=CJ_3(2x)+DN_3(2x)$

9、$\Gamma(-3/2)$的值为

A、$-\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$；**B**、$\frac{2}{3}\sqrt{\pi}$；**C**、$\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$；**D**、$-4\sqrt{\pi}$

10、柯西问题$\begin{cases} u_t+2u_x=x+t, \quad -\infty<x<+\infty, \quad t>0 \\ u(x,0)=x \end{cases}$ 的偏微分方程的特征方程是

A、$\frac{dx}{dt}+2=0$；　**B**、$\frac{dx}{dt}+2=x+t$；

C、$\frac{dx}{dt}-2x=0$；**D**、$\frac{dx}{dt}-2=0$.

11、上题一、**10** 的柯西问题解为

A、$u=-\frac{1}{2}t^2+(t+1)x-2t$；**B**、$u=x-2t$；

C、$u=x+2t$；　　**D**、$u=\frac{1}{2}t^2+(t+1)x-2t$

二（**10** 分）**求解下列定解问题。**

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0 \\ u\big|_{x=0}=0, u\big|_{x=l}=0,\ t\geq 0 \\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t\big|_{t=0}=0,\ 0\leq x\leq l \end{cases}$$

三（**10 分**）将函数 $f(x)=x^2+1, x\in[0,1]$按函数系$\{J_2(\mu_m^{(2)}x)\}$展成贝塞尔级数。

四（**10 分**）用格林函数法求解下列定解问题。

$$\begin{cases}-\Delta u=0, \quad y>0, -\infty<x<\infty \\ u(x,0)=\varphi(x)\end{cases}$$

五（**15** 分）求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 1, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u_x \big|_{x=0} = 0, \ u_x \big|_{x=\pi} = 0, \ t \geq 0 \\ u \big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称:数学物理方程(B) 课时：32 考试时间：2019 年 5 月 11 日

一．判断题（每小题 5 分）。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	B	A	A	B	B	B	A	B	A	A

二、（10 分）解：$u(x,t)=X(x)T(t)$，特征值问题

$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l \\ X(0)=0, X'(l)=0 \end{cases}$，$\lambda_n=\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$，$X_n(\mathrm{x})=\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$，$n\geq 0$，

（5 分）

$$\begin{cases} T_n'(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=0 \\ T_n(0)=\varphi_n \end{cases},$$

$$T_n(t)=\varphi_n e^{-a^2\lambda_n t}\ ,\ \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi X_n dx=\begin{cases}1, n=1\\0, n\neq 0\end{cases}$$ （9 分）

$$u=e^{-a^2\lambda_1 t}\sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)$$ （10 分）

三、（10 分）设$u=R(\rho)T(t)$

$$\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0, T'+\lambda T=0$$
$$R(1)=0, |R(0)|<+\infty$$ （5 分）

$$\lambda_m=\left(u_m^{(0)}\right)^2, R_m=J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right), T_m=A_m e^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2 t}$$
（10 分）
$$u=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2 t} * J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$\varphi(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$A_m=\frac{2}{\left[J_0'\left(u_m^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^1\rho\phi(\rho)J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)d\rho.$$

四、（10 分）解：特征方程：$\frac{dx}{dt}+1=0,x(0)=\tau,x+t=\tau$ 5 分

$$\frac{du}{dt}+u=0,u\,|_{t=0}=\tau^3$$

$$u=\tau^3e^{-t}=(x+t)^3e^{-t}$$ 5 分

五、（10 分）解：任取 $M_0(x_0,y_0),y_0>0,$ 其对称点为 $M_1(x_0,-y_0)$. （2 分）

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}$$ （5 分）

$$\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\Big|_{y=0}=-\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial y}=-\frac{1}{4\pi}\frac{4y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

$$u(M_0)=-\int\limits_{y=0}\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\varphi(M)ds+\int\limits_{y>0}G(M,M_0)f(M)dxdy$$

（10 分）

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}\varphi(x)dx+\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}f(x,y)dy$$

西安交通大学考试题（B）

成绩	

课　程 数学物理方程

学　院 ________　　考 试 日 期　2019 年 5 月 11 日

专业班号 ________

姓　名 ________　学　号________　期末

一．判断题（每小题 5 分）。请将正确答案填在下表中

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

1、贝塞尔函数 $J_4(x)$ **有无穷多正零点，** $x=0$ **也是零点。**

A、正确；B、错误。

2、方程 $xu_{tt}+xtu_{xxx}=1$ **是 3 阶线性齐次方程。**

A、正确；B、错误。

3、方程 $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})+f(x)$，$(x,y,z)\in\Omega\subset R^3, t>0$ **不能描述声波，因为** $f(x)$ **与** t **无关。**

A、正确；B、错误。

4、2 维拉普拉斯方程的基本解是 $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{P_0P}}$.

A、正确；B、错误。

5、当 $f(x)$ **与** $g(x)$ **有 2 阶连续导数时，函数** $u(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$ **是方程** $u_{tt}=a^2u_{xx,}\,0<x<l, t>0$ **的解。**

A、正确；B、错误。

6、特征值问题 $\begin{cases} X''+\lambda X=0, 0<x<l \\ X'(0)=X'(L)=0 \end{cases}$ **的特征函数为** $X_n(\mathrm{x})=\sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)$

A 正确；B、错误。

7、细杆热传导方程边界条件$u(0,t)=0$表示左端无热量流入。

A、正确；**B**、错误。

8、第 **2** 类n阶贝塞尔函数也是n阶贝塞尔方程特征值问题的解。

A、正确；**B**、错误。

9、一阶线性偏微分方程是拟线性一阶偏微分方程的特例。

A、正确；**B**、错误。

10、$\Gamma(-1/2)$的值为$2\sqrt{\pi}$。

A、正确；**B**、错误。

11、方程$3u_t+u_x=x+t,\ -\infty<x<+\infty,\ t>0$的特征方程是$3\dfrac{dx}{dt}-1=0$.

A、正确；**B**、错误。

12、$y=cJ_2(x)+dJ_{-2}(x)$不是方程$x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$的通解，这里c,d是任意常数。

A、正确；**B**、错误。

二（**10** 分）求解下列定解问题。

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0 \\ u\big|_{x=0}=0, u_x\big|_{x=l}=0 \\ u\big|_{t=0}=\sin\dfrac{3\pi}{2l}x \end{cases}$$

三、（**10** 分）求解单位圆盘上热传导方程的定解问题

$$\begin{cases} u_t = u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho} u_\rho, \ 0 \le \rho < 1, \ t > 0 \\ u\big|_{\rho=1} = 0, \ t \ge 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(\rho) \end{cases}$$

四（10 分）求解下列柯西问题。

$$\begin{cases} u_t - u_x + u = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^3 \end{cases}$$

五、（10 分）用格林函数法求解下列定解问题。

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y), \quad y>0, -\infty<x<\infty \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$$

西安交通大学考试题

成绩	

课　　程　数学物理方程(A 卷)

学　　院 ____________________

专业班号 ____________________　　考 试 日 期　2020 年 1 月 7 日

姓　　名 ____________ 座位号____ 学　号____________ 期末 √

题号	一	二	三	四	五	六	七	八
得分								

一. 判断题(每题 3 分,正确答案填在下表中)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. 方程 $u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)$ 表示弦在外力作用下做微小横振动时的振动方程（答案 **A.**对，**B.**错）

2. 贝塞尔函数 $J_{-2}(x)$ 是偶函数（答案 **A.**对，**B.**错）

3. 边界条件 $u_x|_{x=l}=0$ 表示弦右端没有受到外力作用（答案 **A.**对，**B.**错）

4. 特征值问题 $\begin{cases} X''+\lambda X=0, & 0<x<1 \\ X(0)=0, X'(1)=0 \end{cases}$ 的特征值与特征函数分别为 $\lambda_n=\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2$，$X_n=\cos\sqrt{\lambda_n}x$，$n=0,1,2,\ldots$（答案 **A.**对，**B.**错）

5、$u=e^{x+t}\cos^{10}(x+t)+(x-t)^2\sin(x-t)$ 是方程 $u_{tt}-u_{xx}=0$ 的解（答案 **A.**对，**B.**错）。

6、若要将弦的边界条件 $u|_{x=0}=t, u_x|_{x=l}=\sin t$ 齐次化，则变换 $u=v+w$ 中的辅助函数可选择为 $w=\dfrac{x^2}{2l}\sin t+t$

7、方程 $\cos x\cdot u_{xxx}+u_xu_y+3u=1$ 是 **3** 阶线性非齐次方程（答案 **A.**对，**B.**错）

8、$x=0$ 是 $J_{-1}(x)$ 的零点（答案 **A.**对，**B.**错）

9、贝塞尔函数的导函数 $J_2'(x)$ 有无穷多个正零点（答案 **A.**对，**B.**错）

10、在用来描述具体物体在稳恒状态下温度分布时，方程$\Delta u = f(x,y,z)$的解与初始温度分布有关（答案 **A.**对，**B.**错）

二**.**（每题 **5** 分**,**共 **10** 分）求解下列各题

1、写出方程$x^2y''+xy'+(2x^2-1)y=0$的通解

2、求解下列柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & -\infty<x<\infty,\quad t>0 \\ u|_{t=0}=x^2, & u_t|_{t=0}=\sin x \end{cases}$$

三（每题 **5** 分**,**共 **10** 分）求解下列各题

1、计算积分$I=\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$

2、将函数$f(x)=x, x\in[0\quad 1]$按贝塞尔函数系$J_1(\mu_m^{(1)}x)$（$m=1,2,\ldots,$）展成贝塞尔级数。

四．(10 分) **用格林函数法求解下列定解问题**

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & -\infty<x<+\infty, \quad y>0 \\ u|_{y=0}=\varphi(x), & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

五、(10 分) **求解下列定解问题**

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<1 \quad t>0 \\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=1}=0, & t\ge 0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \quad , & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

六、(10 分) **求解下列定解问题**

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos 2\pi x, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x \mid_{x=0} = 0, \quad u_x \mid_{x=1} = 0, & t \geq 0 \\ u \mid_{t=0} = 0 \quad u_t \mid_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

七. （10 分）**求解圆形区域上的定解问题**

$$\begin{cases} u_t = u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho} u_\rho + \dfrac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta}, & 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 < \rho < 1, t > 0 \\ u|_{\rho=1} = 0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, t > 0 \\ u|_{t=0} = 1, \end{cases}$$

八、（10 分）**求解下列定解问题**

$$\begin{cases} u_t + xu_x = xt, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = x^2 + 1, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称:数学物理方程(A) 课时：32 考试时间：2020 年 1 月 7 日

一、(3 分/题×10 题=30 分)

A, A， A, B, A, A, B, A, A, B

二、(5 分/题×2 题=10 分)

1、$y = CJ_1(\sqrt{2}x) + DN_1(\sqrt{2}x)$ （5 分)

2、$y = \dfrac{1}{2}[(x-t)^2 + (x+t)^2] + \dfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin x dx = x^2 + t^2 + \sin x \sin t$

（公式 3 分，结果 2 分)

三、(5 分/题×2 题=10 分) 1、$I = \dfrac{1}{2}\Gamma(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{1}{4}\sqrt{\pi}$ （5 分)

2、设 $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m J_1(\mu_m^{(1)} x)$ （2 分)

$$A_m = \frac{2\int_0^1 \rho^2 J_1\left(\mu_m^{(1)}\rho\right) d\rho}{[J_1'\left(\mu_m^{(1)}\right)]^2} = \frac{2J_2(\mu_m^{(1)})}{[J_1'\left(\mu_m^{(1)}\right)]^2 \mu_m^{(1)}} = \frac{2}{J_2(\mu_m^{(1)})\mu_m^{(1)}}$$ (不化简也可以)

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} = \frac{2J_2(\mu_m^{(1)})}{[J_1'\left(\mu_m^{(1)}\right)]^2 \mu_m^{(1)}} J_1(\mu_m^{(1)} x)$$ (5 分)

四、(10 分)取一点 $M_0(\xi,\eta) \in \Omega$, 其对称点为 $M_1(\xi,-\eta)$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}}$$ （5 分)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\pi}\frac{\eta}{(x-\xi)^2 + \eta^2}$$ （8 分)

$$u(M_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{(x-\xi)^2 + \eta^2}\varphi(x) dx$$ （10 分)

五、(10 分)特征值为 $\lambda_n = (n\pi)^2$，特征函数为 $X_n(\mathrm{x}) = \sin(n\pi x)$, $n \ge 1.$ （5 分)

$T_n(t) = c_n e^{-a^2\lambda_n t}$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2\lambda_n t} \sin n\pi x$$ （9 分)

$$c_n = 2\int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x dx, n \ge 1$$ （10 分)

六、特征值为$\lambda_n=(n\pi)^2$，特征函数为$X_n(\mathrm{x})=\cos(n\pi x)$，$n\geq 0$.（3 分）

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} T_n\cos n\pi x，\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\cos n\pi x+\frac{\psi_0}{2}$$

$$\psi_n=2\int_0^1\psi\cos n\pi x dx，n\geq 0$$

$$\begin{cases}T_n''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=f_n\\ T_n(0)=0,T_n'(0)=\psi_n\end{cases}$$

其中 $f_n=\begin{cases}1 & n=2\\ 0 & n\neq 2\end{cases}$ （6 分）

$T_n(t)$通解为

$$T_n(t)=c_n\cos a\sqrt{\lambda_n}t+d_n\sin a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{f_n}{a^2\lambda_n}$$

即 $$T_n(t)=\begin{cases}-\frac{1}{a^2\lambda_2}\cos a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{\psi_2}{a\sqrt{\lambda_2}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{1}{a^2\lambda_2}, & n=2\\ \frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t, & n\neq 2\end{cases}$$ （9 分）

所以

$$u=\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 2}}^{\infty}\frac{\psi_n}{a\sqrt{\lambda_n}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t\cos n\pi x\cos n\pi x+$$

$$+[-\frac{1}{a^2\lambda_2}\cos a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{\psi_2}{a\sqrt{\lambda_2}}\sin a\sqrt{\lambda_n}t+\frac{1}{a^2\lambda_2}]\cos n\pi x$$

（10 分）

七、解：设$\boldsymbol{u=R(\rho)T(t)}$

$$T'+\lambda T=0$$

$$\rho^2R''+\rho R'+\lambda\rho^2R=0$$

$$R(1)=0,|R(0)|<+\infty$$

$$\lambda_m=\left(u_m^{(0)}\right)^2,R_m=J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right),T_m=A_m e^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2t}$$ 5分

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}A_m e^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2t}J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$\varphi(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$A_m=\frac{2}{\left[J_0'\left(u_m^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^1\rho\phi(\rho)J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)d\rho.=\frac{2}{J_1\left(u_m^{(0)}\right)u_m^{(0)}}$$ (9分)

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{J_1\left(u_m^{(0)}\right)u_m^{(0)}}e^{-\left(u_m^{(0)}\right)^2 t}J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$ （10 分）

八、（10 分）特征方程为 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-x=0,t>0\\ x(0)=\tau\end{cases}$ （2 分）

特征线为 $x=\tau e^t$ （4 分）

沿特征线, 原问题转化为 $\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=\tau te^t\\ u(0)=\tau^2+1\end{cases}$ （6 分）

$$\begin{aligned}u(t)&=\tau e^t(t-1)+\tau^2+\tau+1\\&=xt-x+x^2e^{-2t}+xe^{-t}+1\end{aligned}$$ （10 分）

西安交通大学考试题

课　　程 数学物理方程(B 卷)

成绩	

学　　院 ____________________

专业班号 ____________________　　　考 试 日 期　2020 年 1 月 7 日

姓　　名 ____________ 座位号____ 学　号_____________ 期末 √

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							

一. 判断题(每题 3 分,共 15 分)

1. 方程$u_t - u_{xx} = f(x)$可表示细杆在稳恒状态下的温度分布（答案 **A.**对，**B.**错）

2. 函数$J_0'(x)$是偶函数（答案 **A.**对，**B.**错）

3、$u = f(x+at)$是方程$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$的解,其中 $f(t)$具有二阶连续导数（答案 **A.**对，**B.**错）。

4、方程$x^2 \cos x \cdot u_{xx} + 3u = \sin x$是非线性方程（答案 **A.**对，**B.**错）

5、贝塞尔函数$J_{-2}(x)$是无界函数（答案 **A.**对，**B.**错）

二.（每题 5 分,共 25 分）求解下列各题

1、写出方程$x^2 y'' + xy' + (3x^2 - 9)y = 0$的通解

2、求解下列特征值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < l \\ X(0) = 0, & X'(l) = 0 \end{cases}$$

3、计算积分$\int x^3 J_{-2}(2x)dx$，其中$J_{-2}(x)$是-2 阶贝塞尔函数。

4、计算积分$\int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x} dx$

5、将函数$f(x)=x^2, x\in[0\quad 1]$按贝塞尔函数系$J_2(\mu_m^{(2)}x)$（$m=1,2,...,$）展成贝塞尔级数。

三．(10 分) **用格林函数法求解下列定解问题**

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=f(x,y), & -\infty<x<+\infty,\quad y<0 \\ u|_{y=0}=0, & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

四、(10 分) **求解下列定解问题**

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\quad t>0 \\ u_x|_{x=0}=1,\quad u|_{x=l}=0, & t\ge 0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=0, & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

五、(15 分) **求解下列定解问题**

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x), & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = 0 \quad , & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

六. （15 分）**求解圆形区域上的定解问题**

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho} u_{\rho}, & 0 \le \theta < 2\pi,\quad 0 < \rho < 1, t > 0 \\ u|_{\rho=1} = 0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, t > 0 \\ u|_{t=0} = 1, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

七、（10 分）**求解下列定解问题**

$$\begin{cases} 3u_t + tu_x + u = 1, & -\infty < x < +\infty,\quad t > 0 \\ u\big|_{t=0} = x^2, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称:数学物理方程(B) 课时：32 考试时间：2020 年 1 月 7 日

一、(3 分/题×5 题=15 分)

B, B, A, B, B

二、(5 分/题×2 题=25 分)

1、$y = CJ_3(\sqrt{3}x) + DN_3(3x)$ （5 分)

2、$\lambda_n = (\frac{2n+1}{2l}\pi)^2$，$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x$ （特征值 3 分，函数 2 分)

3、$\frac{1}{2}x^3 J_3(2x) + C$ （5 分)

4、$I = \Gamma(11) = 10!$ （5 分)

5、设 $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_2(\mu_m^{(2)}x)$ （2 分)

$$A_m = \frac{2\int_0^1 \rho^3 J_2\left(\mu_m^{(2)}\rho\right)d\rho}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2} = \frac{2J_3(\mu_m^{(2)})}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2 \mu_m^{(2)}}$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_3(\mu_m^{(2)})}{[J_2'\left(\mu_m^{(2)}\right)]^2 \mu_m^{(2)}} J_2(\mu_m^{(2)}x)$$ (5 分)

三、(10 分) 取一点 $M_0(\xi,\eta) \in \Omega$, 其关于 x 轴对称点为 $M_1(\xi,-\eta)$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_1}}$$ (5 分)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\pi}\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}$$ (8 分, 不计算方向导数不扣分，此处得分算到下一步)

$$u(M_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} G(x,y,\xi,\eta) f(x,y)dxdy$$ (10 分)

四、(10 分) $u = v + x - l$

特征值为 $\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2$，特征函数为 $X_n(\mathrm{x}) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$, $n \geq 0$. (5 分)

$$T_n(t) = c_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + d_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t$$ (8 分)

$$u = x - l + \sum_{n=0}^{\infty}(c_n \cos a\sqrt{\lambda_n}t + d_n \sin a\sqrt{\lambda_n}t)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$$

$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l (\varphi(x) - x + l)\cos\sqrt{\lambda_n}xdx \qquad d_n = 0$ （10 分）

五、（15 分）特征值为$\lambda_n = (n\pi)^2$，特征函数为$X_n(\mathrm{x}) = \sin(n\pi x)$，$n \geq 1.$ （5 分）

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin n\pi x，\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin n\pi x$$

$$f_n = 2\int_0^1 f \cos n\pi x dx，\quad n \geq 0$$

$$\begin{cases} T_n'(t) + a^2\lambda_n T_n(t) = f_n \\ T_n(0) = 0 \end{cases}$$ （10 分）

$T_n(t)$通解为

$$T_n(t) = -\frac{f_n}{a^2\lambda_n}e^{-a^2\lambda_n t} + \frac{f_n}{a^2\lambda_n}$$

所以 $$u = \sum_{n=1}^{\infty} [-\frac{f_n}{a^2\lambda_n}e^{-a^2\lambda_n t} + \frac{f_n}{a^2\lambda_n}]\sin n\pi x$$ （15 分）

六、（15 分）解：设$\boldsymbol{u = R(\rho)T(t)}$

$$T'' + \lambda T = 0$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \lambda\rho^2 R = 0, T' + \lambda T = 0$$

$$R(1) = 0, |R(0)| < +\infty$$

$$\lambda_m = \left(u_m^{(0)}\right)^2, R_m = J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$ (5分)

$$T_m = A_m \cos\sqrt{\lambda_m}\mathrm{t} + B_m \sin\sqrt{\lambda_m}\mathrm{t}$$ (8分)

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}(A_m \cos\sqrt{\lambda_m}\mathrm{t} + B_m \sin\sqrt{\lambda_m}\mathrm{t})J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right), 0 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m\sqrt{\lambda_m}J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$

$$B_m = 0$$

$$A_m = \frac{2}{\left[J_0'\left(u_m^{(0)}\right)\right]^2}\int_0^1 \rho J_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)d\rho. = \frac{2}{J_1\left(u_m^{(0)}\right)u_m^{(0)}}$$ (14分)

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{J_1\left(u_m^{(0)}\right)u_m^{(0)}}\cos\sqrt{\lambda_m}tJ_0\left(u_m^{(0)}\rho\right)$$ （15 分）

七、（10 分）特征方程为$\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt} - t = 0, t > 0 \\ x(0) = \tau \end{cases}$ （2 分）

特征线为$x = \tau + \dfrac{1}{6}t^2$ （4 分）

沿特征线, 原问题转化为$\begin{cases} 3\dfrac{du}{dt} + u = 1 \\ u(0) = \tau^2 \end{cases}$ （6 分）

$$u(t) = 1 + (\tau^2 - 1)e^{-1/3t}$$
$$= 1 + ((x - t^2/6)^2 - 1)e^{-1/3t}$$ （10 分）