

离散数学

西安交通大学
计算机学院



离散数学

第四章 关系 (relation)

§ 1 . 集合的叉积 n 元组

§ 2 . 关系

§ 3 . 关系的表示 关系的性质

§ 4 . 关系的运算

§ 5 . 等价关系

§ 6 . 半序关系



离散数学

§ 1 . 集合的叉积 n元组

定义1. 叉积，笛卡尔积

(cross product , Cartesian product(1637))

n个集合 A_1, A_2, \dots, A_n 的 n 维叉积定义为

$$\begin{aligned} \bigtimes_{i=1}^n A_i &= A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \\ &= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i (1 \leq i \leq n)\} ; \end{aligned}$$

离散数学

- ◆ n 维叉积 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 的每个元素 (a_1, a_2, \dots, a_n) 都称为一个 n 元组 (n-tuple) ;

即, 叉积是元组的集合;

- ◆ 每个 n 元组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 的第 i 个位置上的元素 a_i 称为该 n 元组的第 i 个分量 (坐标或投影) ;
元组各分量的顺序不能改变;

离散数学

- ◆ n 称为该叉积及其元组的维数;
- ◆ 两个元组相等 \Leftrightarrow 它们的维数相同且对应的分量相等。

即 $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$

$$\Leftrightarrow n=m \wedge (\forall i \in N)(1 \leq i \leq n)(a_i = b_i);$$

注：笛卡尔(1596-1650)，法国数学家，1637年发表《方法论》之一《几何学》，首次提出坐标及变量概念。这里是其概念的推广。

离散数学

定义2.

- 二个集合A, B的(二维或二重)叉积定义为

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\};$$

- ◆ 其元素——二元组(a, b)通常称为序偶或偶对(ordered pair);
- ◆ 二元组(a, b)的第一分量上的元素a称为前者; 第二分量上的元素b称为后者;
- ◆ 二重叉积的 $A \times B$ 第一集合A称为前集; 第二集合B称为后集。

离散数学

例1. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$

$$A \times B = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$$

$$B \times A = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$$

例2. $A = \{\text{张三}, \text{李四}\}$, $B = \{\text{红花}, \text{黄花}\}$

$$A \times B = \{(\text{张三}, \text{红花}), (\text{张三}, \text{黄花}), (\text{李四}, \text{红花}), (\text{李四}, \text{黄花})\}$$

$$B \times A = \{(\text{红花}, \text{张三}), (\text{红花}, \text{李四}), (\text{黄花}, \text{张三}), (\text{黄花}, \text{李四})\}$$

离散数学

一般地说，关于叉积和元组我们有：

(1) $(a, b) \neq (b, a)$;

(2) $A \times B \neq B \times A$;

(3) 二元组不是集合，因为二元组中的分量计较顺序，而集合中的元素是不讲顺序的。

(4) 我们也可用二元组来递归的定义n元组如下：

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

... ..

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

离散数学

(5) 这样，我们也就可用二重叉积来递归的定义
 n 维叉积如下：

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

... ..

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n = (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$$

离散数学

(6) 利用(5)所给的定义，我们可以递归的定义集合的叉积幂如下：

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

...

$$A^n = A^{n-1} \times A$$

(7) 我们规定空集 \emptyset 与任何集合 A 的叉积是空集 \emptyset 。
即 $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$

由于若偶对的第一分量或第二分量不存在就没有偶对存在，故规定它们的叉积集合为空集是合理的。

离散数学

下列命题哪些是正确的

- A 如果 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$ ，则 $A \cup C \subseteq B \cup D$
- B 如果 $A \subset B$ 且 $C \subset D$ ，则 $A \cup C \subset B \cup D$
- C 如果 $A \times B \subseteq A \times C$ ，则 $B \subseteq C$
- D 如果 $B \subseteq C$ ，则 $A \times B \subseteq A \times C$

离散数学

下列命题哪些是正确的

- A 如果 $A \subseteq B$ 且 $C \subseteq D$ ，则 $A \cup C \subseteq B \cup D$ ✓
- B 如果 $A \subset B$ 且 $C \subset D$ ，则 $A \cup C \subset B \cup D$ ✗
如： $A=\{a\}$, $B=\{a,c\}$, $C=\{b,c\}$, $D=\{a,b,c\}$
- C 如果 $A \times B \subseteq A \times C$ ，则 $B \subseteq C$ ✗
如： $A = \emptyset$
- D 如果 $B \subseteq C$ ，则 $A \times B \subseteq A \times C$ ✓

离散数学

定理1. 设 A, B, C, D 是四个非空的集合。那么

$$A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D \quad .$$

[证].

\Leftarrow): (采用逻辑法) 对任何的元素 a, b

$$(a, b) \in A \times B$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in C \times D \quad (\text{条件: } A = C \wedge B = D)$$

所以 $A \times B = C \times D$ 。

离散数学

\Rightarrow): (采用逻辑法) 对任何的元素 a, b

$$a \in A \wedge b \in B$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in A \times B$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in C \times D \quad (\text{条件: } A \times B = C \times D)$$

$$\Leftrightarrow a \in C \wedge b \in D$$

所以 $A = C \wedge B = D$ 。

离散数学

定理2. 设 A, B, C 是三个非空集合。则

(1)左分配律: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(2)左分配律: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(3)右分配律: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(4)右分配律: $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

离散数学

[证]. 只证(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(采用逻辑法)

对任何的元素 a, b

$$(a, b) \in A \times (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C)$$

$$\Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C)$$

$$(\text{分配律: } p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in A \times B \vee (a, b) \in A \times C$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

所以 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ 。

离散数学

§ 2. 关系

一. 关系的基本概念

定义1. 二元关系(binary relation)

设 A, B 是两个非空的集合。

- ◆ 二重叉集 $A \times B$ 的任何一个子集 R 都称为是从集合 A 到集合 B 的一种二元关系。即 $R \subseteq A \times B$;
- ◆ 当 $(a,b) \in R$ 时, 称 a 与 b 有关系 R , 记为 aRb ;
- ◆ 当 $(a,b) \notin R$ 时, 称 a 与 b 没有关系 R , 记为 $a\bar{R}b$ 或 $a \not R b$;
- ◆ 当 $A=B$ 时, 即 $R \subseteq A \times A$, 则称 R 是 A 上的一个二元关系。

离散数学

例1. 设A是西安交通大学全体同学组成的集合。

$$R = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \text{ 与 } b \text{ 是同乡}\} \subseteq A \times A$$

于是，R是西安交通大学同学之间的同乡关系。

例2. 设N是自然数集合。

$$R = \{(a, b) \mid a \in N \wedge b \in N \wedge a \mid b\} \subseteq N \times N$$

则R就是自然数集合上的整除关系。

离散数学

例3. 设A是某一大家庭。

$$R_1 = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \text{ 是 } b \text{ 的父亲或母亲}\} \subseteq A \times A$$

$$R_2 = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \text{ 是 } b \text{ 的哥哥或姐姐}\} \subseteq A \times A$$

$$R_3 = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \text{ 是 } b \text{ 的丈夫或妻子}\} \subseteq A \times A$$

于是，

R_1 是父母与儿女之间的关系，即父母子女关系；

R_2 是兄弟姐妹之间的关系，即兄弟姊妹关系；

R_3 是夫妻之间的关系，即夫妻关系。

离散数学

例4 . 设 I 是整数集合。

$$R = \{ (a,b) \mid a \in I \wedge b \in I \wedge (\exists k \in I)(a-b = k \cdot m) \} \subseteq I \times I$$

则 R 就是整数集合上的(模 m)同余关系。

例5 . 设 A 是某一大型FORTRAN程序中诸程序块的集合。

$$R = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \text{调用}(\text{call})b \} \subseteq A \times A$$

则 R 就是程序块集合上的调用关系。

例6 . 设 $A = \{ \text{风}, \text{马}, \text{牛} \}$,

$$R = \{ (\text{风}, \text{马}), (\text{马}, \text{牛}) \} \subseteq A \times A$$

则 R 是 A 上的一个二元关系。

离散数学

关于关系概念，我们还有如下的几个定义和说明：

1° 全关系(full relation):

关系 $R=A \times B$ 称为全关系;

2° 空关系(empty relation):

关系 $R= \emptyset$ 称为空关系;

●空关系和全关系都是平凡关系;

离散数学

3° 幺关系或单位关系(identical relation):

关系 $R = \{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$ 称为 A 上的幺关系;

例7. 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 则

$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ 是幺关系;

$R_2 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$ 不是;

$R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2)\}$ 也不是;

离散数学

4° 关系的交，并，补运算：

- ◆ 叉积是一种（新型的）集合；关系是叉积的子集；因此，关系也是一种（新型的）集合；
- ◆ 从而，有关集合论的一切概念、论述、运算也都适合于关系；
- ◆ 尤其是集合的交，并，补，差运算也都适合于关系；因此，**关系也有交，并，补，差运算**；

离散数学

例8. 设 N 是自然数集合。

R =小于关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m < n\} \subseteq N \times N$

S =整除关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m \mid n\} \subseteq N \times N$

则

$$R' =$$

$$R \cup S =$$

$$R \cap S =$$

$$R \setminus S =$$

$$S \setminus R =$$

离散数学

例8. 设 N 是自然数集合。

R =小于关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m < n\} \subseteq N \times N$

S =整除关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m \mid n\} \subseteq N \times N$

则

$R' =$ 大于等于关系 (\geq) ;

$R \cup S =$

$R \cap S =$

$R \setminus S =$

$S \setminus R =$

离散数学

例8 . 设 N 是自然数集合。

R =小于关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m < n\} \subseteq N \times N$

S =整除关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m \mid n\} \subseteq N \times N$

则

$R' =$ 大于等于关系 (\geq) ;

$R \cup S =$ 小于等于关系 (\leq) ;

$R \cap S =$

$R \setminus S =$

$S \setminus R =$

离散数学

例8 . 设 N 是自然数集合。

R =小于关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m < n\} \subseteq N \times N$

S =整除关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m \mid n\} \subseteq N \times N$

则

$R' =$ 大于等于关系(\geq);

$R \cup S =$ 小于等于关系(\leq) ;

$R \cap S =$ 不相等的整除关系($\neq \wedge \mid$);

$R \setminus S =$

$S \setminus R =$

离散数学

例8 . 设 N 是自然数集合。

R =小于关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m < n\} \subseteq N \times N$

S =整除关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m \mid n\} \subseteq N \times N$

则

$R' =$ 大于等于关系(\geq);

$R \cup S =$ 小于等于关系(\leq) ;

$R \cap S =$ 不相等的整除关系($\neq \wedge \mid$);

$R \setminus S =$ 小于又不整除关系($< \wedge \nmid$);

$S \setminus R =$

离散数学

例8 . 设 N 是自然数集合。

R =小于关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m < n\} \subseteq N \times N$

S =整除关系 $=\{(m,n) \mid m \in N \wedge n \in N \wedge m \mid n\} \subseteq N \times N$

则

$R' =$ 大于等于关系 (\geq) ;

$R \cup S =$ 小于等于关系 (\leq) ;

$R \cap S =$ 不相等的整除关系 $(\neq \wedge \mid)$;

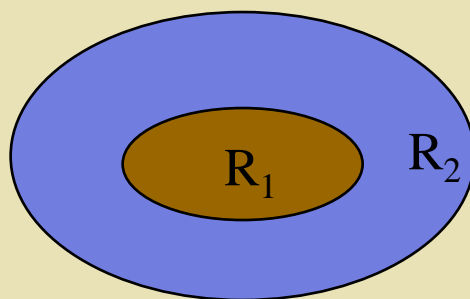
$R \setminus S =$ 小于又不整除关系 $(< \wedge \nmid)$;

$S \setminus R =$ 相等关系

离散数学

5° 关系的扩充(expansion):

若 $R_1 \subseteq R_2$ ，则称关系 R_2 是关系 R_1 的一个扩充；



6° n元关系:

n元关系 R 是 n 维叉积的一个子集；即

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

离散数学

定义3. 前域(domain) 后域(codomain)

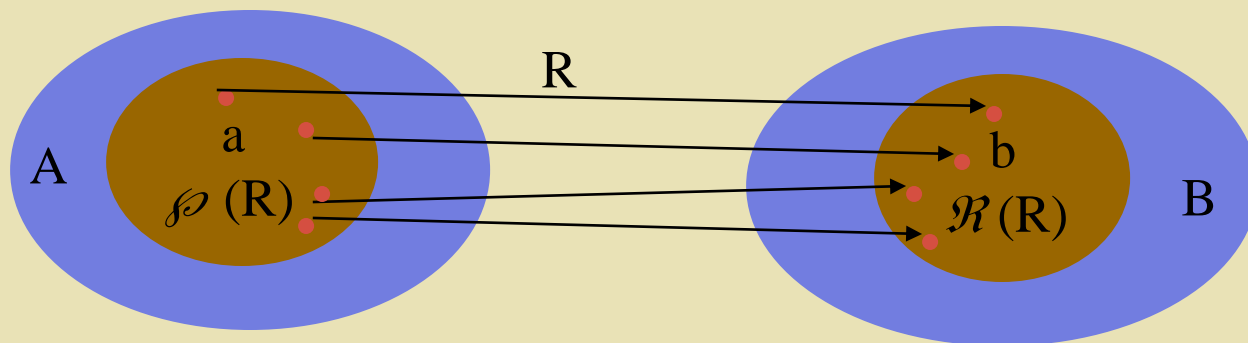
设 A, B 是两个非空集合, $R \subseteq A \times B$ 是一关系。
则关系 R 的

◆ 前域: $D(R)$

$$\mathcal{D}(R) = \{ a \mid a \in A \wedge (\exists b \in B)(aRb) \} \subseteq A ;$$

◆ 后域: $\mathcal{R}(R)$

$$\mathcal{R}(R) = \{ b \mid b \in B \wedge (\exists a \in A)(aRb) \} \subseteq B .$$



离散数学

例9 . 设 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8,10\}$ 。
 $R=\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$ 。

则 $\mathcal{D}(R) = \{1,2,3\} \subseteq A$,
 $\mathcal{R}(R) = \{2,4,6\} \subseteq B$ 。

离散数学

二. 关系的一些关联性质

定理1. 设 $R_1, R_2 \subseteq A \times B$ 是两个关系。若 $R_1 \subseteq R_2$,
则 (1)保序性: $\wp(R_1) \subseteq \wp(R_2)$;

(2)保序性: $\mathcal{R}(R_1) \subseteq \mathcal{R}(R_2)$;

[证]. 只证(1) (采用逻辑法) 对任何元素 $a \in A$,

$$a \in \wp(R_1)$$

$$\Leftrightarrow a \in A \wedge (\exists b \in B)((a, b) \in R_1) \quad (\text{前域的定义})$$

$$\Rightarrow a \in A \wedge (\exists b \in B)((a, b) \in R_2) \quad (\text{条件: } R_1 \subseteq R_2)$$

$$\Leftrightarrow a \in A \wedge (\exists b \in B)(a R_2 b)$$

$$\Leftrightarrow a \in \wp(R_2)$$

所以 $\wp(R_1) \subseteq \wp(R_2)$ 。

离散数学

定理2. 设 R_1, R_2 是 $A \times B$ 上的两个二元关系。则

$$(1) \quad \wp(R_1 \cup R_2) = \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$$

$$(2) \quad \mathcal{R}(R_1 \cup R_2) = \mathcal{R}(R_1) \cup \mathcal{R}(R_2)$$

$$(3) \quad \wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$$

$$(4) \quad \mathcal{R}(R_1 \cap R_2) \subseteq \mathcal{R}(R_1) \cap \mathcal{R}(R_2)$$

离散数学

[证]. 只证(1), (3)

$$(1) \wp(R_1 \cup R_2) = \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$$

先证: $\wp(R_1) \cup \wp(R_2) \subseteq \wp(R_1 \cup R_2)$
(采用包含法)

由于 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$,
依定理1, 有 $\wp(R_1) \subseteq \wp(R_1 \cup R_2)$,

$$\wp(R_2) \subseteq \wp(R_1 \cup R_2)$$

故根据第一章 §2定理2的(3'), 就可得

$$\wp(R_1) \cup \wp(R_2) \subseteq \wp(R_1 \cup R_2)。$$

离散数学

次证: $\wp(R_1 \cup R_2) \subseteq \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$

(采用元素法)

对任何元素 $a \in A$, 若 $a \in \wp(R_1 \cup R_2)$,
则存在 $b \in B$, 使得

$$(a,b) \in R_1 \cup R_2 ,$$

从而有 $(a,b) \in R_1$ 或者 $(a,b) \in R_2$

于是 $a \in \wp(R_1)$ 或者 $a \in \wp(R_2)$

故此 $a \in \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$

所以 $\wp(R_1 \cup R_2) \subseteq \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$ 。

离散数学

$$(3) \wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$$

先证: $\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$
(采用包含法)

由于 $R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$, $R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$,
依定理1, 有

$$\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1), \quad \wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_2)$$

故 根据第一章 § 2 定理2的(3''), 就可得

$$\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)。$$

其次, 反方向的包含不成立。且看下面的反例。

离散数学

例9. 设 $R_1 = \{(1,1), (2,2)\}$, $R_2 = \{(1,2), (2,1)\}$ 。

由于 $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, 故 $\wp(R_1 \cap R_2) = \emptyset$

但是, 由于 $\wp(R_1) = \{1, 2\}$, $\wp(R_2) = \{1, 2\}$

故 $\wp(R_1) \cap \wp(R_2) = \{1, 2\}$

所以 $\wp(R_1) \cap \wp(R_2) \not\subseteq \wp(R_1 \cap R_2)$ 。

离散数学

§ 3 .关系的表示 关系的性质

一. 关系表示法

1° 关系的矩阵表示法

设关系 $R \subseteq A \times B$ ，这里 A, B 是两个非空的有限集合， $A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_m \}$ ，

$$B = \{ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \}。$$

则我们可用一个 $m \times n$ 阶0-1矩阵 M_R 来表示关系 R ，我们称此矩阵 M_R 为关系 R 的关系矩阵 (relation matrix)。

离散数学

$M_R = (x_{ij})_{m \times n}$ ，其中

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } (a_i, b_j) \in R \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } (a_i, b_j) \notin R \text{ 时} \end{cases}$$

($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$)

离散数学

例1. 设关系 $R \subseteq A \times B$,

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \} , \quad B = \{ b_1, b_2, b_3 \}$$

$$R = \{ (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_3), (a_3, b_1), (a_4, b_2) \} .$$

于是, 我们得到 R 的关系矩阵 M_R 为

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} ;$$

离散数学

例2. 设关系 $S \subseteq A \times A$, $A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$,
 $S = \{ (a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_1, a_3), (a_3, a_1),$
 $(a_2, a_3), (a_3, a_2) \}$

于是, 我们得到S的关系矩阵 M_S 为

$$M_S = \begin{matrix} & \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

离散数学

2° 关系的图形表示法

设关系 $R \subseteq A \times B$ ，这里 A, B 是两个非空的有限集合， $A = \{ a_1, a_2, a_3, \dots, a_m \}$,

$$B = \{ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n \}。$$

则我们可用一个有向图 $G_R = (V_R, E_R)$ 来表示关系 R ，我们称此有向图 G_R 为关系 R 的关系图 (relation digraph)。

离散数学

- ◆ $V_R = A \cup B$, $E_R = R$;
- ◆ V_R 中的元素称为结点, 用小圆点表示; 表示A中元素的结点放在左边一块; 表示B中元素的结点放在右边一块;
- ◆ E_R 中的元素称为边, 用有向弧表示; 若 aRb (即 $(a,b) \in R$), 则在表示a的结点和表示b的结点之间连一条有向弧。有向弧的始端与结点a相连, 有向弧的终端与结点b相连;

离散数学

- ◆ 有时我们会用两个圆圈分别表示两个集合A和B中元素的结点圈起来。
- ◆ 所有有向弧的始端结点构成 $\mathcal{S}(R)$ ；所有有向弧的终端结点构成 $\mathcal{T}(R)$ 。
- ◆ 若 $A=B$ ，这时令 $V_R = A$ ，并规定只画表示一个集合元素的结点；表示元素间关系的有向弧也只在此一个集合的结点间画出。

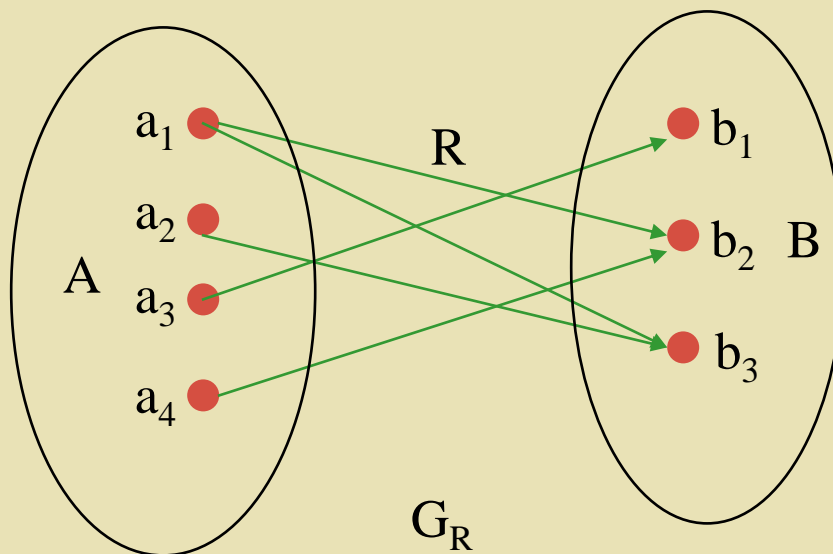
离散数学

例3. 设关系 $R \subseteq A \times B$,

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}, \quad B = \{ b_1, b_2, b_3 \}$$

$$R = \{ (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_3), (a_3, b_1), (a_4, b_2) \}$$

于是, 我们得到 R 的关系图 G_R 为下图。

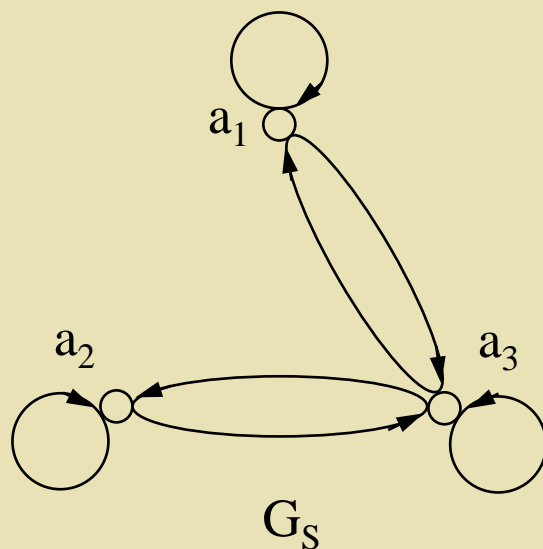


离散数学

例4. 设关系 $S \subseteq A \times A$, $A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$,

$$S = \{ (a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_1, a_3), \\ (a_3, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_2) \}$$

于是, 我们得到S的关系图 G_S 为下图。



注: •图中各结点所带的小圆圈称为自反圈; 一对结点间的来回边称为双向弧; 否则, 一对结点间只有一条边, 则此边称为单向弧。

•关系的表示法有三种:集合表示法,矩阵表示法,图形表示法。

离散数学

二. 关系的性质

设二元关系 $R \subseteq X \times X$ (或者说 $R \subseteq X^2$), 这里 $X \neq \emptyset$ 是一集合。则 R 称为是 X 上的

1° **自反关系** (reflexive relation):

当且仅当 R 满足自反性: $(\forall x \in X)(xRx)$;

显然, 对于自反关系 R , $\mathcal{D}(R) = \mathcal{R}(R) = X$ 。

◆ **反自反关系** (irreflexive relation):

当且仅当 R 满足反自反性:

$(\forall x \in X)(x \not R x)$ 或 $(\forall x \in X) \neg(xRx)$;

离散数学

◆ 常见的自反关系有相等关系($=$), 小于等于关系(\leq), 包含关系(\subseteq)等;

而不相等关系(\neq), 小于关系($<$), 真包含关系(\subset)等都不是自反关系, 它们都是反自反关系。

注:

- 自反性和反自反性是关系的两个极端性质; 因此, 自反关系和反自反关系是两种极端关系;
- 从关系矩阵来看: 自反关系关系矩阵的对角线上元素全是1; 反自反关系关系矩阵的对角线上元素全是0;
- 从关系图来看: 自反关系关系图的各结点上全都有自反圈; 反自反关系关系图的各结点上全都没有自反圈。

离散数学

例5. 设 $X=\{a,b,c,d\}$ 。

则关系 $R_1=\{(a,b),(a,a),(b,b),(c,d),(c,c),(d,d)\}$

是 X 上的自反关系, 但不是 X 上的么关系, 因
 $(a,b), (c,d) \in R_1$;

而关系 $R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$

是 X 上的自反关系, 同时也是 X 上的么关系;

$R_3=\{(a,b),(a,c),(a,d),(c,d)\}$

是 X 上的反自反关系。

注: 由此例可知么关系一定是自反关系, 但自反关系不一定是么关系。

离散数学

设二元关系 $R \subseteq X \times X$ (或者说 $R \subseteq X^2$)，这里 $X \neq \emptyset$ 是一集合。则 R 称为是 X 上的

2° **对称关系** (symmetric relation):

当且仅当 R 满足对称性:

$$(\forall x \in X) (\forall y \in X) (xRy \Rightarrow yRx) ;$$

3° **反对称关系** (antisymmetric relation):

当且仅当 R 满足反对称性:

$$(\forall x \in X) (\forall y \in X) (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y) ;$$

离散数学

◆ 常见的对称关系有相等关系(=)，不相等关系(\neq)，同余关系，朋友关系，同学关系，同乡关系等；

而小于等于关系(\leq)，包含关系(\subseteq)等都不是对称关系，它们都是反对称关系。

注：

- 对称性和反对称性是关系的两个极端性质；因此，对称关系和反对称关系是两种极端关系；
- 从关系矩阵来看：对称关系的关系矩阵是对称矩阵。即 $x_{ij} = x_{ji} (1 \leq i, j \leq n)$ ；反对称关系的关系矩阵满足如下性质 $x_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_{ji} = 0 (1 \leq i, j \leq n)$ ；
- 从关系图来看：对称关系关系图的结点间若有弧则都是双向弧；反对称关系关系图的结点间若有弧则都是单向弧。

离散数学

例6. 设 $X=\{a,b,c\}$ 。则关系

$$R_1=\{(a,b),(b,a)\}, \quad R_2=\{(a,a),(b,b)\}$$

都是 X 上的对称关系；而关系

$$R_3=\{(a,b),(b,a),(b,c)\}$$

不是 X 上的对称关系；因 $(b,c) \in R_3$ ，但 $(c,b) \notin R_3$ 。

例7. 设 $X=\{a,b,c\}$ 。则关系

$$R_1=\{(a,a),(a,b),(a,c),(c,b),(c,c)\}$$

是 X 上的反对称关系；而关系

$$R_2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(c,b)\}$$

不是 X 上的反对称关系；因 $(a,b) \in R_2$ 且 $(b,a) \in R_2$ ，但 $a \neq b$ 。

离散数学

设二元关系 $R \subseteq X \times X$ (或者说 $R \subseteq X^2$), 这里 $X \neq \emptyset$ 是一集合。则 R 称为是 X 上的

4° **传递关系** (transitive relation):

当且仅当 R 满足传递性:

$$(\forall x \in X) (\forall y \in X) (\forall z \in X) (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz);$$

◆ **反传递关系** (antisymmetric relation):

当且仅当 R 满足反传递性:

$$(\forall x \in X) (\forall y \in X) (\forall z \in X) (xRy \wedge yRz \Rightarrow x \not R z);$$

离散数学

- ◆ 常见的传递关系有相等关系($=$), 小于等于关系(\leq), 包含关系(\subseteq), 整除关系, 同余关系等; 而不相等关系(\neq), 父子关系, 朋友关系, 同学关系等都不是传递关系。

注:

- 传递性和反传递性是关系的两个极端性质; 因此, 传递关系和反传递关系是两种极端关系;
- 概念反传递性和反传递关系一般不甚用, 所以不加讨论。

离散数学

例8. 设 $X=\{a,b,c,d\}$ 。则关系

$$R_1=\{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d),(b,d)\}$$

是 X 上的传递关系；而关系

$$R_2=\{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d)\}$$

不是 X 上的传递关系；因 $(b,c) \in R_2$ 且 $(c,d) \in R_2$ ，
但 $(b,d) \notin R_2$ 。

离散数学

例9. 设 X 是平面上直线的集合。平行关系

$$R = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in X \wedge x \parallel y\}$$

由平面几何的知识知：

若 $x \parallel y$ 且 $y \parallel z$ ，则 $x \parallel z$ 。

由传递关系的定义知 R 是 X 上的传递关系。

例10. 设 X 是平面上三角形的集合。相似关系

$$R = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in X \wedge x \sim y\}$$

由平面几何的知识知：

若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$ ，则 $x \sim z$ 。

由传递关系的定义知 R 是 X 上的传递关系。

离散数学

- ◆ 相等关系是自反的、对称的、反对称的、传递关系。
- ◆ 全关系 X^2 是自反的、对称的、传递的。
- ◆ 幺关系 I 是自反的、对称的、反对称的、传递的。
- ◆ 空关系 \emptyset 是反自反的、对称的、反对称的、传递的。

离散数学

§ 4. 关系的运算

1° 关系的逆运算

定义1. 逆运算(converse operation)

设A, B是两个非空的集合。对任何二元关系 $R \subseteq A \times B$, 使得

$$\widetilde{R} = \{(b, a) \mid b \in B \wedge a \in A \wedge aRb\} \subseteq B \times A$$

为关系的逆运算; 称 \widetilde{R} 是R的逆关系(converse of relation)。

显然, 对任何 $(b, a) \in B \times A$, $b \widetilde{R} a \Leftrightarrow aRb$;

并且 $M_{\widetilde{R}} = M_R^T$ 。

离散数学

例1. 设 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2\}$ 。则关系
 $R=\{(a,1),(a,2),(b,2),(c,1)\}$ 的逆关系
 $\widetilde{R}=\{(1,a),(2,a),(2,b),(1,c)\}$ 。


离散数学

定理1. 逆运算基本定理

设两个关系 $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq A \times B$, 这里 A, B 是两个非空的集合。则有

- (1) 反身律: $\widetilde{\widetilde{R}} = R$;
- (2) 保序性: $R \subseteq S \Rightarrow \widetilde{R} \subseteq \widetilde{S}$;
 $R = S \Rightarrow \widetilde{R} = \widetilde{S}$;
- (3) 分配律: $\widetilde{R \cup S} = \widetilde{R} \cap \widetilde{S}$;
- (4) 分配律: $\widetilde{R \cap S} = \widetilde{R} \cup \widetilde{S}$;

离散数学



(5) $\widetilde{X \times Y} = Y \times X$;

(6) $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$;

(7) 交换律: $\widetilde{(R')} = (\widetilde{R})'$;

(8) 分配律: $\widetilde{R \setminus S} = \widetilde{R} \setminus \widetilde{S}$;

离散数学

[证]. 只证(1), (4), (7) (采用逻辑法)

(1) 反身律: $\widetilde{\widetilde{R}} = R$;

对任何 $(a,b) \in A \times B$, 有

$$(a,b) \in \widetilde{\widetilde{R}}$$

$$\Leftrightarrow (b,a) \in \widetilde{R}$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in R$$

所以 $\widetilde{\widetilde{R}} = R$ 。

离散数学

(4) 分配律: $\widetilde{R \cap S} = \widetilde{R} \cap \widetilde{S}$;

对任何 $(a,b) \in B \times A$, 有

$$(a,b) \in \widetilde{R \cap S}$$

$$\Leftrightarrow (b,a) \in R \cap S$$

$$\Leftrightarrow (b,a) \in R \wedge (b,a) \in S$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in \widetilde{R} \wedge (a,b) \in \widetilde{S}$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in \widetilde{R} \cap \widetilde{S}$$

所以 $\widetilde{R \cap S} = \widetilde{R} \cap \widetilde{S}$ 。

离散数学

(7) 对任何 $(a,b) \in B \times A$, 有

$$(a,b) \in (R')^{\sim}$$

$$\Leftrightarrow (b,a) \in R'$$

$$\Leftrightarrow (b,a) \notin R$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \notin \widetilde{R}$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in (\widetilde{R})'$$

所以 $(\widetilde{R}') = (\widetilde{R})'$ 。

离散数学

2° 关系的合成运算

定义2. 合成运算(composition operation)

设 A, B, C 是三个非空的集合。对任何两个二元关系 $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, 使得 $R \circ S = \{(a,c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge (\exists b \in B)(aRb \wedge bSc)\} \subseteq A \times C$ 为关系的合成运算; 称 $R \circ S$ 是 R 与 S 的合成关系。

显然, 对任何 $(a,c) \in A \times C$,

$$a R \circ S c \Leftrightarrow (\exists b \in B)(aRb \wedge bSc)。$$

离散数学

例2. 设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, 关系 $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$

$$R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1)\}$$

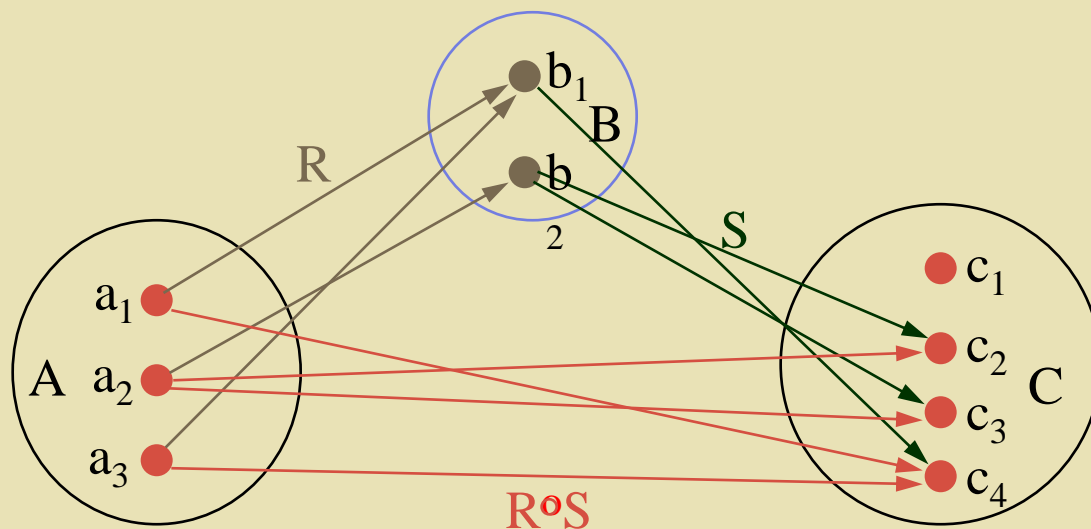
$$S = \{(b_1, c_4), (b_2, c_2), (b_2, c_3)\}$$

于是, 我们得到R与S的合成关系为

$$R \circ S = \{(a_1, c_4), (a_2, c_2), (a_2, c_3), (a_3, c_4)\}$$

其合成关系的关系图为

离散数学



例3. 设 A 是老年男子的集合， B 是中年男子的集合， C 是青少年男子的集合。

R 是由 A 到 B 的父子关系， $R \subseteq A \times B$

S 是由 B 到 C 的父子关系， $S \subseteq B \times C$

则复合关系 $R \circ S$ 是 A 到 C 的祖孙关系。

离散数学

定理2. 合成运算基本定理

设 $R, R_1, R_2 \subseteq A \times B$, $S, S_1, S_2 \subseteq B \times C$,
 $T \subseteq C \times D$, 这里 A, B, C, D 是四个非空的集合。则

(1) $R \circ \emptyset = \emptyset \circ S = \emptyset$;

(2) $\wp(R \circ S) \subseteq \wp(R)$; $\wp(R \circ S) \subseteq \wp(S)$;

(3) 保序性: $R_1 \subseteq R_2 \wedge S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow R_1 \circ S_1 \subseteq R_2 \circ S_2$;

(4) 结合律: $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$;

离散数学

(5) 左分配律: $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$;

右分配律: $(S_1 \cup S_2) \circ T = (S_1 \circ T) \cup (S_2 \circ T)$;

(6) 左分配不等式:

$$R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2);$$

右分配不等式:

$$(S_1 \cap S_2) \circ T \subseteq (S_1 \circ T) \cap (S_2 \circ T);$$

(7) $\widetilde{(R \circ S)} = \widetilde{S} \circ \widetilde{R}$ 。

离散数学

[证]. 书上P112页



离散数学

- ◆ 但是合成运算不满足交换律。即，一般

$$R \circ S \neq S \circ R$$

例4. 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 。则关系

$$R=\{(a,b),(c,d),(b,b)\},$$

$$S=\{(b,e),(c,a),(a,c),(d,b)\} \text{ 的合成关系为}$$

$$R \circ S = \{(a,e),(b,e),(c,b)\},$$

$$S \circ R = \{(a,d),(c,b),(d,b)\}$$

所以 $R \circ S \neq S \circ R$ 。

离散数学

3° 关系矩阵的合成运算

设 $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ 是两个二元关系,
其合成关系为 $R \circ S$ 。这里 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$,
 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 。

并设它们的关系矩阵分别为

$$M_R = (x_{ij})_{m \times l}, \quad M_S = (y_{ij})_{l \times n}, \quad M_{R \circ S} = (u_{ij})_{m \times n}$$

则我们有: $\bullet M_{R \circ S} = M_R \circ M_S$

其中: 我们令 $M_R \circ M_S = (t_{ij})_{m \times n}$

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1}^l (x_{ik} \wedge y_{kj}) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

注: 这里关系矩阵的合成运算与《线性代数》中的一般矩阵的乘法运算颇为相似。所不同的是: 乘法现在换成布尔乘(\wedge); 加法现在换成布尔加(\vee)。值得注意的是: 这里的布尔加 $1 \vee 1 = 1$ (不进位), 而非 $1 \vee 1 = 0$ (进位)。

离散数学

例5. 设 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 。 则关系

$$R=\{(a,b),(c,d),(b,b)\}, \quad S=\{(b,e),(c,a),(a,c),(d,b)\}$$

的合成关系

$$R \circ S = \{(a,e),(b,e),(c,b)\}$$

其关系矩阵分别为

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R \circ S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

离散数学

现在我们计算

$$M_R \circ M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中：

$$t_{25} = \bigvee_{k=1}^5 (x_{2k} \wedge y_{k5})$$

$$\begin{aligned} &= (x_{21} \wedge y_{15}) \vee (x_{22} \wedge y_{25}) \vee (x_{23} \wedge y_{35}) \vee (x_{24} \wedge y_{45}) \vee (x_{25} \wedge y_{55}) \\ &= (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \\ &= 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

这说明 $M_{R \circ S} = M_R \circ M_S$ 。

离散数学

4° 关系的复合幂与闭包

定义3. 关系的复合幂

设 A 是非空集合。 $R \subseteq A \times A$ ， k 为一正整数，规定

$$(1) \quad R^0 = I_A$$

$$(2) \quad R^1 = R$$

$$(3) \quad R^{m+1} = R^m \circ R$$

称为关系 R 的复合幂。

离散数学

定理3. 设 A 是非空集合, $R \subseteq A \times A$, m 与 n 为非负整数, 则

(1) 交换律: $R^m \circ R^n = R^{m+n} = R^n \circ R^m$

特别地: $I \circ R = R \circ I = R$

(幺关系是合成运算的幺元);

(2) 交换律: $(R^m)^n = R^{mn} = (R^n)^m$

离散数学

[证]. (1) 固定 m , 对 n 用数学归纳法

当 $n = 1$ 时, $R^m \circ R^1 = R^{m+1}$ (定义)

假设当 $n = k$ 时, $R^m \circ R^k = R^{m+k}$

那么当 $n = k+1$ 时,

$$\begin{aligned} R^m \circ R^{k+1} &= R^m \circ R^k \circ R^1 \\ &= R^{m+k} \circ R^1 \\ &= R^{m+k+1} \\ &= R^{m+(k+1)} \end{aligned}$$

由归纳法知, 对任意 m 、 n 均有

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

离散数学

[证]. (2) 固定 m , 对 n 用数学归纳法

当 $n = 1$ 时, $(R^m)^1 = R^m = R^{m*1}$

假设当 $n = k$ 时, 有 $(R^m)^k = R^{mk}$

那么当 $n = k+1$ 时,

$$\begin{aligned}(R^m)^{k+1} &= (R^m)^k \circ R^m \\ &= R^{mk} \circ R^m \\ &= R^{mk+m} \\ &= R^{m(k+1)}\end{aligned}$$

由归纳法知, 对任意 m 、 n 均有

$$(R^m)^n = R^{mn}$$

离散数学

复合幂的注意要点:

$$(1) \quad R^0 = I_A = I$$

$$R^1 \circ R^0 = R^0 \circ R^1 = R^1 = R$$

$$(2) \quad R^2 = R \circ R$$

当 $(a,b) \in R^2$ 时, 有一个媒介元素 t , $t \in A$, 使得 $(a,t) \in R$ 且 $(t,b) \in R$, 即 a,b 有间接 R 关系。

当 $(a,b) \in R^3$ 时, 有两个媒介元素 t_1 、 t_2 , 使得 $(a,t_1) \in R$, $(t_1,t_2) \in R$, $(t_2,b) \in R$, 即 a,b 有二阶间接 R 关系。

当 $(a,b) \in R^n$ 时, 有 $n-1$ 个媒介元素, a,b 有 $n-1$ 阶间接 R 关系。

离散数学

(3)复合幂的并

$(a,b) \in R \cup R^2$ 直接、间接关系

$(a,b) \in R \cup R^2 \cup R^3$

直接、间接、二阶间接关系

$(a,b) \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$

a,b之间有不超n-1阶间接关系

例6. 设二元关系 $R \subseteq A \times A$, 这里
 $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, b), (c, b)\}$ 。从而有

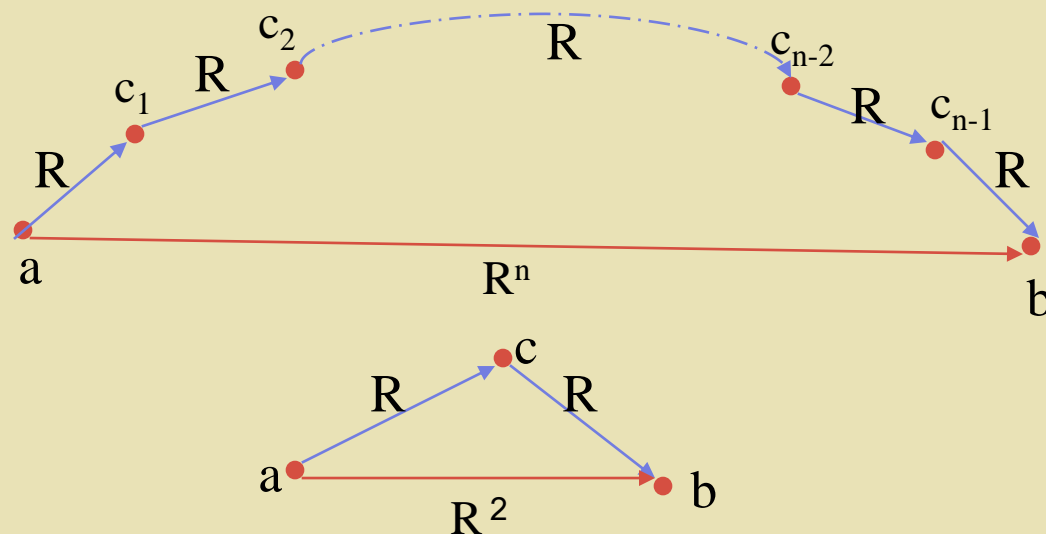
$$I = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}, \quad \tilde{R} = \{(b, a), (b, c)\}$$

计算 $\tilde{R} \circ R$, $R \circ \tilde{R}$ 。

注: • 由定理2的(1)有: $\emptyset \circ R = R \circ \emptyset = \emptyset$, 这说明空集是合成运算的零元。

• 一般地 $a R^n b \Leftrightarrow (\exists c_1)(\exists c_2) \dots (\exists c_{n-1})(a R c_1 \wedge c_1 R c_2 \wedge \dots \wedge c_{n-1} R b)$;

特别地 $a R^2 b \Leftrightarrow (\exists c)(a R c \wedge c R b)$ 。



离散数学

定义4. 关系的闭包

设 A 是非空集合。 $R \subseteq A \times A$,

$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$,称 R^+ 为关系 R 的传递闭包。

$(a,b) \in R^+ , \exists k (k \geq 1 \wedge (a,b) \in R^k)$

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^{\infty}$$

$R^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$,称 R^* 为关系 R 的自反传递闭包。

$(a,b) \in R^* , \exists k (k \geq 0 \wedge (a,b) \in R^k)$

$$R^* = I \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^{\infty}$$

离散数学

定理4.传递闭包基本定理

设 A 是非空集合, $R \subseteq A \times A$, $S \subseteq A \times A$, 则

(1) 对于每个自然数 $m \geq 1$, 有 $R^m \subseteq R^+$

(2) R^+ 是传递关系

(3) 若 $R \subseteq S$ 且 S 是传递关系, 则 $R^+ \subseteq S$

(4) 若 $|A|=n$, 则 $R^+ = \bigcup_{k=1}^n R^k$

(5) 若 R 是传递关系, 则 $R^+ = R$ 。

离散数学

定理5.自反传递闭包基本定理

设 A 是非空集合, $R \subseteq A \times A$, $S \subseteq A \times A$, 则

- (1) 对于每个自然数 $m \geq 0$, 有 $R^m \subseteq R^*$
- (2) R^* 是自反传递关系
- (3) 若 $R \subseteq S$ 且 S 是自反传递关系, 则 $R^* \subseteq S$
- (4) 若 $|A|=n$, 则 $R^* = \bigcup_{k=0}^n R^k$
- (5) 若 R 是自反传递关系, 则 $R^* = R$ 。

练习

1 设 R_1 、 R_2 是非空集合 A 上的二元关系，请判断：

(1) R_1 和 R_2 自反， $R_1 \circ R_2$ 自反。

✓

(2) R_1 和 R_2 反对称， $R_1 \cap R_2$ 反对称

✓

(3) R_1 和 R_2 对称， $R_1 \circ R_2$ 对称

✗

(4) R_1 和 R_2 对称， $R_1 \cup R_2$ 对称

✓

(5) R_1 和 R_2 传递， $R_1 \circ R_2$ 传递。

✗

(6) R_1 和 R_2 传递， $R_1 \cup R_2$ 传递。

✓

2 设 $A=\{a,b,c,d\}$ ， $R \subseteq A \times A$ ，

$R=\{(a,a), (b,b), (a,b), (c,d)\}$ ， 求 R^+ ， R^* 。

离散数学

§ 5. 等价关系

1° 等价关系和等价类

定义1. 等价关系(equivalence relation)

设二元关系 $R \subseteq A \times A$ 。这里 A 是非空的集合。

R 是 A 上的等价关系 $\Leftrightarrow R$ 是自反的、对称的、传递的。

• 显然 $\wp(R) = \mathfrak{R}(R) = A$ (因为等价关系是自反的);



离散数学

例1.同乡关系是等价关系。

例2.平面几何中的三角形间的相似关系是等价关系。

例3.平面几何中的三角形间的全等关系是等价关系。

例4.平面几何中的直线间的平行关系是等价关系。

离散数学

例5. 设 N 是自然数集, m 是一正整数,

$$R = \{(a, b) \mid a \in N \wedge b \in N \wedge a \equiv b \pmod{m}\}$$

由等价关系的定义知 R 是 N 上等价关系; 我们称 R 是 N 上的模 m 同余关系。

例6. 非空集合 A 上的幺关系、全关系都是等价关系。

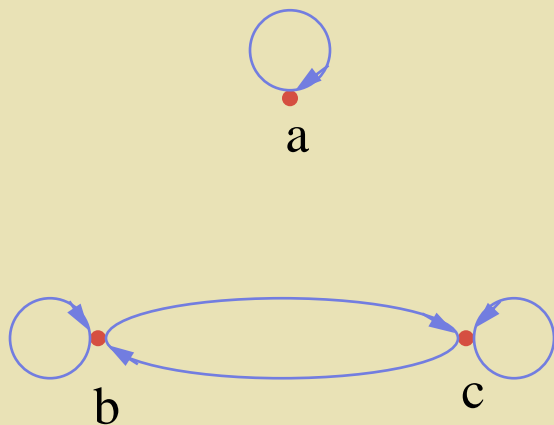
例7. 非空集合 A 上的空关系不是等价关系(因为空关系不自反)。

离散数学

例8. 设二元关系 $R \subseteq A \times A$, 这里

$$A = \{a, b, c\}, R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$$

则 R 是 A 上的等价关系。其关系图如下



- 等价关系的实质是将集合 A 中的元素进行分类。

离散数学

定义2. 等价类(块) (equivalence classes (block))

设 R 是非空集合 A 上的等价关系。对任何元素 $a \in A$ ，由 a 生成的(或者说是由 a 诱导出的)关于 R 的等价类定义为

$$\{b \mid b \in A \wedge bRa\}$$

记为 $[a]_R$. (显然有 $[a]_R \subseteq A$)。同时称 a 为等价类 $[a]_R$ 的代表元。

离散数学

定义3. 设 R 是非空集合 A 上的等价关系。我们定义集合

$$\Pi_R = \{[a]_R : a \in A\}$$

(注意：应去掉重复的类！)

为集合 A 关于等价关系 R 的商集。记为 A/R 。称 A/R 中元素的个数为 R 的秩。

离散数学

例9. 设 N 是自然数集, m 是一个正整数。 R 是 N 上的模 m 同余关系, 即

$$R = \{(a, b) \mid a \in N \wedge b \in N \wedge a \equiv b \pmod{m}\} \quad .$$

对于任何自然数 $a, b \in N$,

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (\exists k \in I)(a - b = km) ;$$

由等价关系的定义知 R 是 N 上的等价关系;

对于任何自然数 $a \in N$, 以 a 为代表元的等价类

$$[a]_R = [a]_m = \{b \mid b \in N \wedge b \equiv a \pmod{m}\};$$

离散数学

自然数集 N 关于等价关系 R 的商集

$$N/R = \Pi_R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R, \dots, [m-1]_R\};$$

或者记作

$$N_m = N/\equiv = \Pi_{\equiv} = \{[0]_m, [1]_m, [2]_m, [3]_m, \dots, [m-1]_m\};$$

商集 N/R 共有 m 个等价类，故 R 的秩为 m ；

特别地，取 $m=5$ ，则有

$$N_5 = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\};$$

又如 $[3]_5 = \{3, 8, 13, \dots, 5k+3, \dots\}$ (这里：
 $k \in N$)。

离散数学

例10. 设二元关系 $R \subseteq A \times A$, 这里

$$A = \{a, b, c\}, R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$$

则 R 是 A 上的等价关系。等价关系 R 的等价类为

$$[a]_R = \{a\}, \quad [b]_R = [c]_R = \{b, c\};$$

其商集为

$$A/R = \Pi_R = \{[a]_R, [b]_R\} = \{\{a\}, \{b, c\}\};$$

故其秩为2。

离散数学

定理1. 设 R 是非空集合 A 上的等价关系。对任意的 $a, b \in A$, 有

$$(1) a \in [a]_R \quad (\text{故 } [a]_R \neq \emptyset) \quad ;$$

$$(2) aRb \text{ (即 } (a, b) \in R) \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R \quad ;$$

$$(3)(3.1) \quad [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \Rightarrow [a]_R = [b]_R \\ (\Rightarrow aRb, \text{ 即 } (a, b) \in R) ;$$

$$(3.2) \quad (a, b) \notin R \Rightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset ;$$

(4) 两个等价类 $[a]_R$ 和 $[b]_R$, 要么完全重合(即 $[a]_R = [b]_R$), 要么不交(即 $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$); 二者必居其一, 也只居其一。

离散数学

[证]. (采用逻辑法)

(1) $a \in [a]_R$ (故 $[a]_R \neq \emptyset$)

对任何元素 a , 有

$$a \in A$$

$\Rightarrow aRa$ (R 是等价关系, 故 R 自反)

$$\Rightarrow a \in [a]_R$$

$$\Rightarrow [a]_R \neq \emptyset ;$$

离散数学

(2) aRb (即 $(a,b) \in R$) $\Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$

先证: $aRb \Rightarrow [a]_R = [b]_R$

为证 $[a]_R = [b]_R$, 须证

(a) $[a]_R \subseteq [b]_R$

对任何元素 $x \in A$, 有

$$x \in [a]_R$$

$$\Rightarrow xRa$$

$$\Rightarrow xRa \wedge aRb \quad (\text{已知条件: } aRb)$$

$$\Rightarrow xRb \quad (R \text{ 是等价关系, 故 } R \text{ 传递})$$

$$\Rightarrow x \in [b]_R$$

所以 $[a]_R \subseteq [b]_R$

离散数学

$$(b) [b]_R \subseteq [a]_R$$

对任何元素 $x \in A$, 有

$$x \in [b]_R$$

$$\Rightarrow xRb$$

$$\Rightarrow xRb \wedge aRb \quad (\text{已知条件: } aRb)$$

$$\Rightarrow xRb \wedge bRa \quad (R \text{ 是等价关系, 故 } R \text{ 对称})$$

$$\Rightarrow xRa \quad (R \text{ 是等价关系, 故 } R \text{ 传递})$$

$$\Rightarrow x \in [a]_R$$

所以 $[b]_R \subseteq [a]_R$

综合(a)和 (b), 即得 $[b]_R = [a]_R$;

离散数学

次证: $[a]_R = [b]_R \Rightarrow aRb$

$[a]_R \neq \emptyset$ (本定理的(1))

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R \wedge x_0 \in [b]_R)$

(已知条件: $[a]_R = [b]_R$)

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 R a \wedge x_0 R b)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(a R x_0 \wedge x_0 R b)$

(R是等价关系, 故R对称)

$\Rightarrow a R b$

(R是等价关系, 故R传递)

离散数学

$$(3)(3.1) \quad [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \Rightarrow [a]_R = [b]_R \\ (\Rightarrow aRb, \text{ 即 } (a,b) \in R)$$

$$\begin{aligned} & [a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset \\ \Rightarrow & (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R \cap [b]_R) \\ \Rightarrow & (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R \wedge x_0 \in [b]_R) \\ \Rightarrow & (\exists x_0 \in A)(x_0 R a \wedge x_0 R b) \\ \Rightarrow & (\exists x_0 \in A)(a R x_0 \wedge x_0 R b) \\ & \quad (R \text{ 是等价关系, 故 } R \text{ 对称}) \\ \Rightarrow & a R b \quad (\text{即 } (a,b) \in R) \\ & \quad (R \text{ 是等价关系, 故 } R \text{ 传递}) \\ \Rightarrow & [a]_R = [b]_R \\ & \quad (\text{本定理的(2)}) \quad ; \end{aligned}$$

离散数学

$$(3.2) \quad (a,b) \notin R \Rightarrow [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$$

(整体采用反证法)

若 $(a,b) \notin R$, 则 $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$ 。 否则若

$$[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow [a]_R = [b]_R$$

(本定理的(3.1))

$$\Rightarrow aRb$$

(本定理的(2))

$$\Rightarrow (a,b) \in R$$

这就与已知条件: $(a,b) \notin R$ 矛盾;

离散数学

(4)两个等价类 $[a]_R$ 和 $[b]_R$ ，要么完全重合(即 $[a]_R = [b]_R$)，要么不交(即 $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$)；二者必居其一，也只居其一。

对任何序偶 (a,b)

$$(a,b) \in A \times A$$

$$\Rightarrow (a,b) \in R \vee (a,b) \notin R \quad (\text{二分法, 互斥})$$

$$\Rightarrow ([a]_R = [b]_R) \vee ([a]_R \cap [b]_R = \emptyset)$$

(本定理的(3.1)和(3.2), 互斥)。

离散数学

定义4. 设 R 和 S 是非空集合 A 上的两个等价关系。
若 $R \subseteq S$ ，则我们称 R 细于 S ，或 S 粗于 R 。

例11. 设 A 是一非空集。则

(1) A 上最细的等价关系是幺关系；即

$$R_{\text{细}} = I_A, \quad A/R_{\text{细}} = \{\{a\} \mid a \in A\} ;$$

(2) A 上最粗的等价关系是全关系；即，

$$R_{\text{粗}} = A \times A, \quad A/R_{\text{粗}} = \{A\} .$$

离散数学

定理2. 设R和S是非空集合A上的两个等价关系。
则

$$R \subseteq S \Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S)。$$

[证]. (采用逻辑法)

先证: $R \subseteq S \Rightarrow (\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S)$

对任何元素 $a \in A$, 有

$$x \in [a]_R$$

$$\Rightarrow xRa$$

$$\Rightarrow xSa \quad (\text{已知条件: } R \subseteq S)$$

$$\Rightarrow x \in [a]_S$$

所以 $[a]_R \subseteq [a]_S$

所以 $(\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S)$;

离散数学

次证: $(\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S) \Rightarrow R \subseteq S$

对任何序偶 $(a, b) \in A \times A$

$(a, b) \in R$

$\Rightarrow aRb$

$\Rightarrow bRa$

(R 是等价关系, 故 R 对称)

$\Rightarrow b \in [a]_R$

$\Rightarrow b \in [a]_S$

(已知条件: $(\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S)$)

$\Rightarrow bSa$

$\Rightarrow aSb$

(S 是等价关系, 故 S 对称)

$\Rightarrow (a, b) \in S$

所以 $R \subseteq S$ 。

离散数学

定理3. 设 R 和 S 是非空集合 A 上的两个等价关系。
则 $R=S \Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R = [a]_S)$ 。

[证].(采用逻辑法)

$$R=S$$

$$\Leftrightarrow R \subseteq S \wedge S \subseteq R$$

$$\Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S) \wedge (\forall a \in A)([a]_S \subseteq [a]_R) \quad (\text{定理2})$$

$$\Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S \wedge [a]_S \subseteq [a]_R)$$

$$\Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R = [a]_S) \quad \circ$$

离散数学

注：

- 由定理3知，若两个等价关系相等，则每个元素所对应的等价类也相同；若两个等价关系的等价类集合相等，则两个等价关系相同。
- 由定理2、3知，等价关系与等价类集合一一对应。即相同的等价关系对应着相同的等价类集合，不同的等价关系对应着不同的等价类集合。

离散数学

2° 划分与等价关系

定义5. 覆盖 划分 (covering partition)

设 A 是一非空集合。则 A 的

(1) 覆盖是一集合之集 $\Pi = \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \wedge A_\gamma \neq \emptyset\}$,

满足条件: $A \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$;

(2) 划分是一集合之集 $\Pi = \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \wedge A_\gamma \neq \emptyset\}$,

满足条件: (a) $A = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$;

(b) $\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow A_{\gamma_1} \cap A_{\gamma_2} = \emptyset$;

其中 A_γ 称为划分 Π 的划分块(block of partition)。

注: • 由划分和覆盖的定义可知, A 上的划分一定是 A 上的覆盖; 反之则未必。

离散数学

定理4。 设 R 是非空集合 A 上的等价关系。则 R 的等价类之集

$$\Pi_R = \{ [a]_R \mid a \in A \}$$

是 A 上的一个划分；等价类就是划分块。

[证].定理1的(1)不但直接给出等价类的非空性，而且由它可得等价类满足划分的条件(a)；定理1的(4)直接给出等价类满足划分的条件(b) (详细叙述留给学者)。

注：•定理4表明:由集合 A 上的等价关系 R 所产生的等价类之集构成集合 A 上的一个划分。

离散数学

定理5. 设 $\Pi = \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma \wedge A_\gamma \neq \emptyset\}$ 是非空集合 A 上的一个划分。我们借助 Π 来定义 A 上的二元关系 $R_\Pi \subseteq A \times A$ ，使得

$$R_\Pi = \{(a, b) \mid (\exists \gamma \in \Gamma)(a \in A_\gamma \wedge b \in A_\gamma)\}$$

则 R_Π 是 A 上的等价关系。我们称为是由划分 Π 产生的(或者说是诱导出的) A 上的等价关系。

离散数学

[证].(采用逻辑法)

(1)自反性:

对任何元素 a , 有

$$a \in A$$

$$\Rightarrow a \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \quad (\text{划分的条件(a); } A = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(a \in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(a \in A_{\gamma} \wedge a \in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow (a, a) \in R_{\Pi}$$

$$\Rightarrow a R_{\Pi} a$$

所以 R_{Π} 是自反的;

离散数学

(2)对称性:

对任何元素 $a, b \in A$, 有

$$aR_{\Pi} b$$

$$\Rightarrow (a, b) \in R_{\Pi}$$

$$\Rightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(a \in A_{\gamma} \wedge b \in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(b \in A_{\gamma} \wedge a \in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow (b, a) \in R_{\Pi}$$

$$\Rightarrow bR_{\Pi} a$$

所以 R_{Π} 是对称的;

离散数学

(3)传递性:

对任何元素 $a, b, c \in A$, 有

$$aR_{\Pi} b \wedge bR_{\Pi} c$$

$$\Rightarrow (a, b) \in R_{\Pi} \wedge (b, c) \in R_{\Pi}$$

$$\Rightarrow (\exists \gamma_1 \in \Gamma)(a \in A_{\gamma_1} \wedge b \in A_{\gamma_1}) \wedge (\exists \gamma_2 \in \Gamma)(b \in A_{\gamma_2} \wedge c \in A_{\gamma_2})$$

$$\Rightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(a \in A_{\gamma} \wedge b \in A_{\gamma} \wedge b \in A_{\gamma} \wedge c \in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(a \in A_{\gamma} \wedge b \in A_{\gamma} \wedge c \in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(a \in A_{\gamma} \wedge c \in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow (a, c) \in R_{\Pi}$$

$$\Rightarrow aR_{\Pi} c$$

所以 R_{Π} 是传递的; 所以 R_{Π} 是等价的。

注: •定理5表明:由集合 A 上的划分 Π 可产生 A 上的一个等价关系; 划分块就是等价类。

离散数学

定理6。 设 R 是非空集合 A 上的等价关系， Π 是 A 上的一个划分。那么

$$R = R_{\Pi} \Leftrightarrow \Pi_R = \Pi \quad .$$

注：• R_{Π} 是由划分 Π 所产生的 A 上的一个等价关系；
• Π_R 是由等价关系 R 所产生 A 上的一个的划分；

离散数学

[证]. (采用逻辑法)

•先证: $R = R_{\Pi} \Rightarrow \Pi_R = \Pi$

对任何元素 $a \in A$, 有

对任何元素 $x \in A$, 有

$$x \in [a]_R$$

$$\Leftrightarrow xRa$$

$$\Leftrightarrow xR_{\Pi}a \quad (\text{已知条件: } R = R_{\Pi})$$

$$\Leftrightarrow x \in [a]_{R_{\Pi}}$$

所以 $[a]_R = [a]_{R_{\Pi}}$

所以 $(\forall a \in A)([a]_R = [a]_{R_{\Pi}})$

所以 $\Pi_R = \{[a]_R \mid a \in A\} = \{[a]_{R_{\Pi}} \mid a \in A\} = \Pi ;$

离散数学

•次证: $\Pi_R = \Pi \Rightarrow R = R_\Pi$

对任何序偶 $(a,b) \in A \times A$

$$(a,b) \in R$$

$$\Leftrightarrow aRb$$

$$\Leftrightarrow bRa$$

(R 是等价关系, 故 R 对称)

$$\Leftrightarrow b \in [a]_R$$

$$\Leftrightarrow b \in [a]_{R_\Pi}$$

(已知条件: $\Pi_R = \Pi \Rightarrow (\forall a \in A)([a]_R = [a]_{R_\Pi})$)

$$\Leftrightarrow b R_\Pi a$$

$$\Leftrightarrow a R_\Pi b$$

(R_Π 是等价关系, 故 R_Π 对称)

$$\Leftrightarrow (a,b) \in R_\Pi$$

所以 $R = R_\Pi$ 。

离散数学

注：•由定理4,5,6可知：由等价关系可以产生一个划分，由划分可以产生一个等价关系；

•划分与等价关系是一一对应的。即每个划分对应一个等价关系，且每个等价关系对应一个划分。

离散数学

§ 6. 半序关系

定义1. 半序关系(partial order relation)

设二元关系 $R \subseteq A \times A$ 。这里 A 是非空的集合。

R 是 A 上的半序关系 $\Leftrightarrow R$ 是自反的、反对称的、传递的。

- 显然 $\wp(R) = \mathfrak{R}(R) = A$ (因为半序关系是自反的);
- 通常, 半序关系 R 记为 \leq , 称系统 (A, \leq) 为半序集(poset)。

离散数学

例1. 自然数集 N 、整数集 I 、有理数集 Q 、实数集 R 上的小于等于关系 ' \leq ' 都分别是这些数集上的半序关系;

因为, 对任何数 a, b, c

$$a \leq a ;$$

$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a=b ;$$

$$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c ;$$

所以 (N, \leq) , (I, \leq) , (Q, \leq) , (R, \leq) 都是半序集。

离散数学

例2.集合 X 的幂集 2^X 上的包含关系‘ \subseteq ’是其上的半序关系；

因为对任何子集 A, B, C

$$A \subseteq A ;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A=B ;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C ;$$

故 $(2^X, \subseteq)$ 是半序集。

例3.自然数集 N 、整数集 I 、有理数集 Q 、实数集 R 上的小于关系‘ $<$ ’都不是这些数集上的半序关系；

因为， $<$ 不是自反关系，即对任何数 $a, a \nless a$ ；
故 $<$ 是反自反关系。

离散数学

注：一般我们定义：拟序(quasi order)

- 二元关系 $R \subseteq A \times A (A \neq \emptyset)$ 是 A 上的拟序关系 $\Leftrightarrow R$ 是反自反的、传递的。拟序一般记作 $<$ ，称系统 $(A, <)$ 为拟序集；

- 拟序与半序的关系是：对任何元素 $a, b \in A$
 $a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b$ ；

因此，小于关系 $<$ 是拟序； $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{I}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$, $(\mathbb{R}, <)$ 都是拟序集。

例4. 集合 X 的幂集 2^X 上的真包含关系 ' \subset ' 不是其上的半序关系；因为， \subset 不是自反关系，即对任何子集 $A, A \not\subset A$ ；故 \subset 是反自反关系

注：因此，真包含关系 \subset 是拟序； $(2^X, \subset)$ 是拟序集。

离散数学

定义2.可比较性(comparability)

设 (A, \leq) 是一半序集， a 与 b 是 A 中的一对元素。
我们称

a 与 b 是可比较的 $\Leftrightarrow a \leq b \vee b \leq a$ 。

注：• 否则，若 $a \not\leq b \wedge b \not\leq a$ ，则称 a 与 b 是不可比较的；

• 半序关系 \leq 实际上是在集合 A 上建立了一种比较关系；



离散数学

例5. 对于小于等于关系 ‘ \leq ’，任何二数 a, b 都是可比较的；即总有 $a \leq b \vee b \leq a$ 。

例6. 对于包含关系 ‘ \subseteq ’，任何二集合 A, B 不都是可比较的；即不总是有 $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ 。

离散数学

定义3.全序关系 线性序链(total order, linear order , chain)

设 (A, \leq) 是一半序集。

\leq 是 A 上的全序关系 $\Leftrightarrow \leq$ 满足全可比较性:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \leq b \vee b \leq a) \quad .$$

这时，我们简称 \leq 是全序或线性序；称 (A, \leq) 是一全序集。

注：•否则，我们则称 \leq 是非线性序(nonlinear order)；
•非线性序在实际中有很重要的作用；也是本课程的一个重要研究对象。

离散数学

●字典序(lexicographic)

设 (Σ, \leq) 是一全序集。其中： Σ 是一有限集，称为字母表(alphabet)，任一元素 $a \in \Sigma$ 称为字母(alpha)， \leq 是字母表中字母的自然顺序，显然 \leq 是一个全序。故此，则 (Σ^*, \leq^*) 是一全序集，称其为字典序。

其中： $\Sigma^* = \{\Lambda\} \cup \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \dots \cup \Sigma^n \cup \dots$
(Λ 称为空字)，其任何元素 $w \in \Sigma^*$ 称为一个字(word)；必有 $k \in \mathbb{N}$ ，使得 $w \in \Sigma^k$ ，从而

$w = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ik}) = a_{i1}a_{i2}a_{i3} \dots a_{ik}$
这里 $a_{ij} \in \Sigma$ ($1 \leq j \leq k$)。

离散数学

定义二元关系 $\leq^* \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, 使得;

对于任何二字 $w_1 = a_{i1}a_{i2}a_{i3}\dots a_{im}$ 和
 $w_2 = b_{i1}b_{i2}b_{i3}\dots b_{in}$

$w_1 \leq^* w_2$ 当且仅当 下列四条之一成立:

(1) $a_{i1}a_{i2}a_{i3}\dots a_{im} = b_{i1}b_{i2}b_{i3}\dots b_{in}$;

(这时: $m=n, a_{ij}=b_{ij}$)

(2) $a_{i1} \neq b_{i1}$ 且 $a_{i1} \leq b_{i1}$;

(3) 存在着某个 $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq \min(m,n)$, 使得

$a_{i1}a_{i2}a_{i3}\dots a_{ik-1} = b_{i1}b_{i2}b_{i3}\dots b_{ik-1}$

且 $a_{ik} \neq b_{ik}$ 且 $a_{ik} \leq b_{ik}$;

(4) w_1 是 w_2 的前缀。

离散数学

例7. 小于等于关系 ' \leq ' 是全序关系;
包含关系 ' \subseteq ' 一般不是全序关系。

例8. (I, \leq) , (R, \leq) 都是全序集。但是在 (I, \leq) 中每个整数, 下一个比它大的或比它小的 (即紧挨着它的) 那个数都可确定; 而在 (R, \leq) 中却不可能。

离散数学

定义3.直接后继

后继(direct successor, successor)

设 (A, \leq) 是一半序集， a 与 b 是 A 中的一对元素。
我们称

b 是 a 的直接后继

$$\Leftrightarrow a \neq b \wedge a \leq b \wedge (\forall t \in A)(a \leq t \wedge t \leq b \Rightarrow t = a \vee t = b)$$

直接后继简称后继； a 的后继记作 a^+ ，即 $b = a^+$ ，
这时称 a 是 b 的前驱或前趋(predecessor)。

离散数学

例9. (N_m, \leq) , (N, \leq) , (I, \leq) , (R, \leq) 都是全序集。
这里 \leq 都是数的小于等于关系；而
 $N_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ 。于是

(N_m, \leq) 除尾元素 $m-1$ 外，每个元素都有后继；
除首元素0外，每个元素都有前驱；

(N, \leq) 的每个元素都有后继；除首元素0外，
每个元素都有前驱；

(I, \leq) 的每个元素都有后继；每个元素都有前驱；

(R, \leq) 的每个元素都没有后继；每个元素都没有前驱。

离散数学

•半序集的代表法——哈斯图(Hasse)

通常用Hasse图表示半序关系。半序集 (A, \leq) 的Hasse图是一个图 $G_{\leq} = (V_{\leq}, E_{\leq})$

其中: $V_{\leq} = A$ 是结点集;

$E_{\leq} = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \leq b \wedge b = a^+\}$ 是边集。

在画法上, 我们规定:

- (1) 结点 a^+ 必须画在结点 a 的紧(斜)上方;
- (2) 不画边的方向。

注: 与关系图相比, Hasse图

- 省略了自反性的边(圈);
- 省略了(反对称性)方向;
- 省略了传递性的边;

离散数学

例10. 设 $A = \{a, b, c\}$,

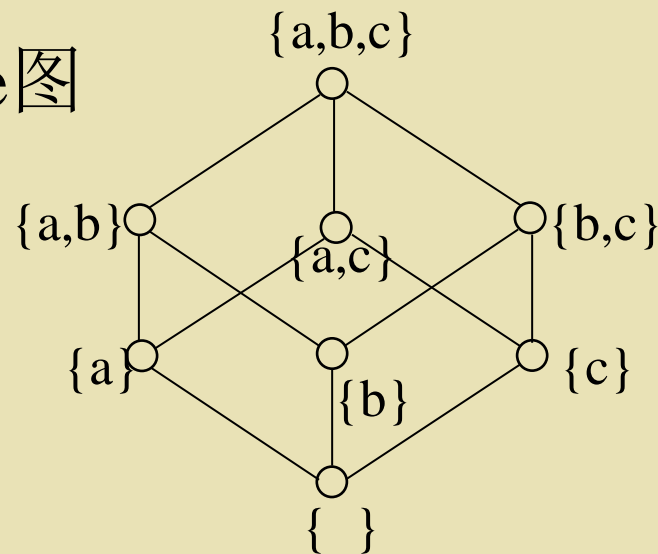
$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

由于 2^A 上的包含关系 \subseteq 是自反的、反对称的、传递的，故包含关系 \subseteq 是 2^A 上的半序关系，

$(2^A, \subseteq)$ 是半序集。

2^A 上的包含关系 \subseteq 的 Hasse 图

如右图所示。



例10

离散数学

注：从上例可以看出：

- 在非线性半序集中，直接后继一般不唯一；
- 其Hasse图呈现网格状；其实正是这点导致一门现代数学的重要学科——格论的出现；而此例正好给人们形象、直观的展现出布尔代数(用其三大特例之一——集合代数来表现)的内部数学结构。

离散数学

例11. 设

$$A = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 36, 60\},$$

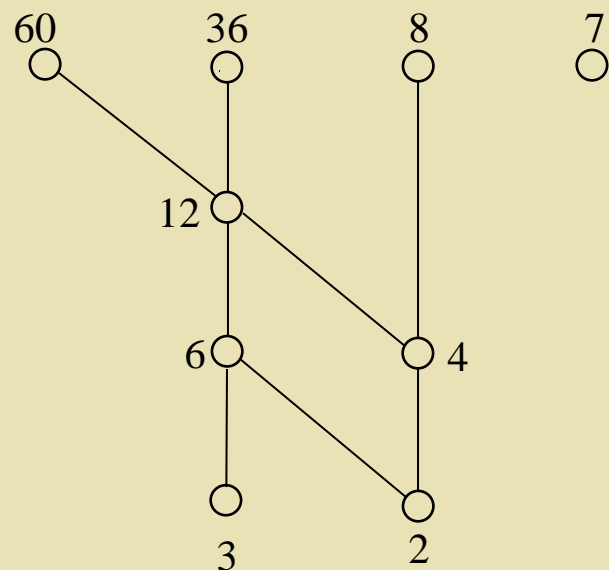
$$R = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \mid b\},$$

即， R 是 A 上的整除关系。

由整除的性质知 R 是自反的、反对称的、传递的。

由半序关系的定义知 R 是 A 上的半序关系。

R 的Hasse图如右图：



例11

离散数学

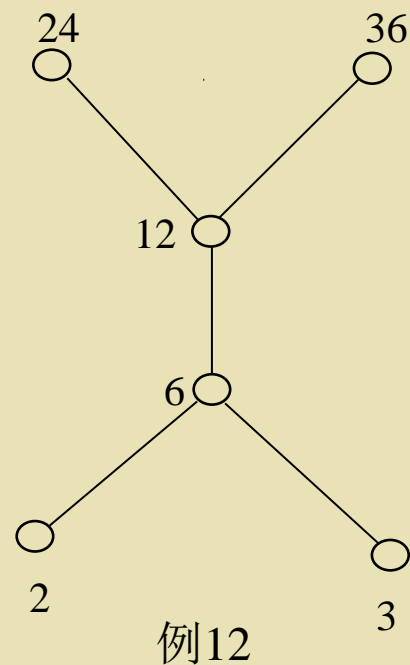
例12. 设 $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$,

$$R = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \mid b\}$$

R 是 A 上的整除关系。

由整除的性质知 R 是自反的、反对称的、传递的。由半序关系的定义知 R 是 A 上的半序关系。

R 的 Hasse 图如右图：



离散数学

注：从以上两例可以看出：

- 虽然同为整除关系，但由于集合不同，其Hasse图就呈现出明显的不同；这说明两例中的半序集是不同的；所以，在论及半序关系时，重要的是一定要指明其是那个集合上的半序关系；**半序集是一个整体，不能分而论之。**

离散数学

定义4 最大元 最小元

(greatest element, least element)

设 (A, \leq) 是半序集, $B \subseteq A$, $x_0 \in B$ 。则我们称

(1) x_0 是B的最大元 $\Leftrightarrow (\forall x \in B)(x \leq x_0)$;

(2) x_0 是B的最小元 $\Leftrightarrow (\forall x \in B)(x_0 \leq x)$ 。

注: •最大(小)元一般未必一定存在; 即使B(甚或A)是有限集合也未必;

• B的最大(小)元若存在, 则一定在B中;

离散数学

定理1. 设 (A, \leq) 是半序集, $B \subseteq A$ 。若 B 有最大(小)元, 则必是唯一的。

[证]. (采用逻辑法) 只证最大元的唯一性

x_{01} 是 B 的最大元 \wedge x_{02} 是 B 的最大元

$\Rightarrow (\forall x \in B)(x \leq x_{01}) \wedge (\forall x \in B)(x \leq x_{02}),$

$\Rightarrow x_{02} \leq x_{01} \wedge x_{01} \leq x_{02}$

$\Rightarrow x_{01} = x_{02}$ (\leq 是半序关系, 故有反对称性)

所以, B 的最大元是唯一的。

离散数学

定义5. 极大元 极小元

(maximum element, minimal element)

设 (A, \leq) 是半序集, $B \subseteq A$, $x_0 \in B$ 。则我们称

(1) x_0 是 B 的一个极大元

$$\Leftrightarrow \neg(\exists x \in B)(x_0 \leq x \wedge x \neq x_0) \Leftrightarrow \neg(\exists x \in B)(x_0 < x);$$

(2) x_0 是 B 的一个极小元

$$\Leftrightarrow \neg(\exists x \in B)(x \leq x_0 \wedge x \neq x_0) \Leftrightarrow \neg(\exists x \in B)(x < x_0)。$$

注：•极大(小)元一般不一定存在；但在 B (或 A)是有限集合时一定存在；

•极大(小)元即使存在，一般也是不唯一的；

• B 的极大(小)元若存在，则一定在 B 中。

离散数学

定义6.上界 下界 (upper bound, lower bound)

设 (A, \leq) 是半序集, $B \subseteq A$, $z_0 \in A$ 。则我们称

(1) z_0 是 B 的一个上界 $\Leftrightarrow (\forall x \in B)(x \leq z_0)$;

(2) z_0 是 B 的一个下界 $\Leftrightarrow (\forall x \in B)(z_0 \leq x)$;

(3) 若 B 有一个上界, 则称 B 上方有界;

若 B 有一个下界, 则称 B 下方有界;

若 B 上、下方都有界, 则称 B 有界。

注: • 上界、下界、界一般不一定存在;

• B (或 A)有限不一定有上界、下界、界; 有上界、下界、界 B (或 A)也不一定有限;

• 上界、下界、界即使存在, 一般也是不唯一的;

• B 的上界、下界、界若存在, 可以在 B 中, 也可以不在 B 中。

离散数学

例13. (\mathbb{R}, \leq) 是全序集。

取 $B=(0,1)=\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}$ 。

于是， B 有无穷个上界，无穷个下界；从而 B 是有界集。

但是 B 却不是有限集，而是一个无限集。

离散数学

定义7. 上确界 下确界

(least upper bound, greatest lower bound)

设 (A, \leq) 是半序集, $B \subseteq A$, $z_0 \in A$ 。则我们称

(1) z_0 是 B 的上确界

$$\Leftrightarrow (\forall x \in B)(x \leq z_0) \wedge (\forall z \in A)((\forall x \in B)(x \leq z) \Rightarrow z_0 \leq z) ;$$

(2) z_0 是 B 的下确界

$$\Leftrightarrow (\forall x \in B)(z_0 \leq x) \wedge (\forall z \in A)((\forall x \in B)(z \leq x) \Rightarrow z \leq z_0) ;$$

(3) 上确界即是最小上界, 记为 $\text{LUB}(B)$;

下确界即是最大下界, 记为 $\text{GLB}(B)$ 。

离散数学

注：•上(下)确界一般不一定存在；即使B(甚或A)是有限集合也未必；

• B的上(下)确界若存在，可以在B中，也可以不在B中；

例14. 令： $A = \{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1 \}$

$$B = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1 \}$$

$$X = A \cup B$$

则B中每个元素都是集合A的上界，但A无上确界，即LUB(A) 不存在；

A中每个元素都是集合B的下界，但B无下确界，即GLB(B) 不存在。

离散数学

定理2. 设 (A, \leq) 是半序集, $B \subseteq A$ 。若 B 有上(下)确界, 则必是唯一的。

[证]. 仿定理1可证。留给学者。

注:

- 最大(小)元一定是极大(小)元;
极大(小)元不一定是最大(小)元;
极大(小)元存在不一定有最大(小)元;
- 最大(小)元一定是上(下)确界;
上(下)确界不一定是最大(小)元;
上(下)确界存在不一定有最大(小)元;
- 上(下)确界一定是上(下)界;
上(下)界不一定是上(下)确界;
上(下)界存在不一定有上(下)确界;
- 讨论 B 的上(下)确界的前提是 B 的上(下)界存在;

离散数学

例15. 设 $A=\{2,3,4,6,7,8,12,36,60\}$,

$R=\{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \mid b\}$, R 是 A 上的整除关系。根据前面例11可知, R 是 A 上的半序关系。

取 $B_1=\{8,12\}$, $B_2=\{2,3\}$, $B_3=\{7,8\}$, $B_4=\{2,4,12\}$
则:

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
$B_1=\{8,12\}$	无	无	8,12	8,12	无	2,4	无	4
$B_2=\{2,3\}$	无	无	2,3	2,3	6,12,36,60	无	6	无
$B_3=\{7,8\}$	无	无	7,8	7,8	无	无	无	无
$B_4=\{2,4,12\}$	12	2	12	2	12,36,60	2	12	2

离散数学

定义8. 良序集(well ordered set)

设 (A, \leq) 是半序集。则我们称 (A, \leq) 是良序集

$\Leftrightarrow A$ 的每个非空子集都有最小元

$\Leftrightarrow (\forall B \subseteq A)(\exists x_0 \in B)(\forall x \in B)(x_0 \leq x)$ 。

这时我们称半序(关系) \leq 是良序(关系)。

离散数学

例16. (\mathbb{N}, \leq) 是良序集；而自然数集 \mathbb{N} 上的小于等于关系 \leq 是良序关系。

(\mathbb{I}, \leq) 虽是全序集，但却不是良序集；从而整数集 \mathbb{I} 上的小于等于关系 \leq 不是良序关系。

注：从上例我们可以得到

- 全序集未必一定是良序集；

离散数学

定理3. 设 (A, \leq) 是良序集。那么

(1) (A, \leq) 是全序集；(即，良序集一定是全序集)

(2) 对于任何元素 $a \in A$ ，若 a 不是 A 的最大元，则 a 的直接后继 a^+ 一定存在；即

$$(\forall a \in A)(\neg(\forall x \in A)(x \leq a) \Rightarrow (\exists b \in A)(b = a^+))。$$

离散数学

[证]. (采用构造法)

(1) 对于任二元素 $a, b \in A$, 构造一子集 $B = \{a, b\} \subseteq A$, 显然 B 是非空的, 由 (A, \leq) 是良序集, 知 B 有最小元。

若 a 是 B 的最小元, 那么有 $a \leq b$;

若 b 是 B 的最小元, 那么有 $b \leq a$;

因此, 总有 $a \leq b \vee b \leq a$ 。即

$(\forall a \in A)(\forall b \in A)(a \leq b \vee b \leq a)$, 全可比较性成立, 所以, \leq 是全序, (A, \leq) 是全序集。

离散数学

(2)对于任何元素 $a \in A$,且 a 不是 A 的最大元,构造一子集 $B = \{x \mid x \neq a \wedge a \leq x\} \subseteq A$,显然 B 是非空的
因为 a 不是 A 的最大元 (已知条件)

$$\Leftrightarrow \neg(\forall x \in A)(x \leq a)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A) \neg(x \leq a)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in A)(a \neq x \wedge a \leq x) \quad (\text{因} \leq \text{是全序})$$

$$\Leftrightarrow B \neq \emptyset$$

因此,由 (A, \leq) 是良序集, 知 B 有最小元。

离散数学

设 B 的最小元为 b ，则我们可证 a 的直接后继 $a^+ = b$ ，总是存在。

①由于 $b \in B$ ，故此 $b \neq a$ ，且 $a \leq b$ ；

②对于任何元素 $t \in A$ ，若 $a \leq t$ 且 $t \leq b$ ，那么(二分法) 或者 $t = a$ ；

或者 $t \neq a$ ，则加上 $a \leq t$ ，可知 $t \in B$ ，因此，由 b 是 B 的最小元，得到 $b \leq t$ ，再加上假设 $t \leq b$ ，由 \leq 的反对称性，我们得到 $t = b$ ；

因此，总有 $t = a$ 或者 $t = b$ 。

所以， b 是 a 的直接后继，即 $a^+ = b$ 。

离散数学

重点要求

- ◆掌握序偶和笛卡尔积的概念。
- ◆掌握二元关系的形式定义及其各种表示方法：序偶，矩阵，关系图等；能正确使用集合表达式，关系矩阵，关系图等表示给定的关系，并要求能够从一种形式写出另一种形式。
- ◆掌握关系的运算，包括集合运算以及关系的复合和关系的逆运算。
- ◆掌握二元关系的各种特殊性质：自反，反自反，对称，反对称，传递等，并理解这些性质如何反映在关系图上，关系矩阵上等。
- ◆掌握集合中二元关系的闭包的意义和其基本性质，能求出有限集上的二元关系的闭包。



离散数学

- ◆掌握等价关系的概念，并掌握覆盖、划分、等价类、商集的定义和基本性质，弄清楚等价关系与划分之间的关系。牢记等价关系的**分类**作用。
- ◆掌握半序、半序集、全序、良序等概念，以及半序集的可比较性、极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最大下界、最小上界、直接后继等概念。牢记半序关系的**非线性**特性。
- ◆能画出有限半序集的哈斯图,并根据图讨论半序集的某些性质。

离散数学

◆第四章 关系 到此已经结束！

