PO 的中点，过 AM 作与棱 BC 平行的平面，将三棱锥截为上、下两部分，试求此两部分体积之比.

解 设过 AM 平行于 BC 的平面与 PB、PC 分别交于 E、F，则 $EF /\!/ BC$.

取 BC 中点 D. 连结 PD 交 EF 于 G，易知 M 在 AG 上，则有

$$\frac{V_{P-AEF}}{V_{P-ABC}}=\frac{V_{A-PEF}}{V_{A-PBC}}=\frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle PBC}}=\left(\frac{PG}{PD}\right)^2.$$

在 $\triangle PDA$ 中，过 O 作 $ON /\!/ PD$ 交 AG 于 N，则 $PG=ON$.

$\because O$ 是正 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore \frac{PG}{GD}=\frac{ON}{GD}=\frac{AO}{AD}=\frac{2}{3}$，$\frac{PG}{PD}=\frac{2}{5}$. 于是

$\frac{V_{P-AEF}}{V_{P-ABC}}=\frac{4}{25}$，即 $V_{P-AEF}=\frac{4}{25}V_{P-ABC}$，

从而 $V_{下部分}=V_{P-ABC}-V_{P-AEF}$

$=\frac{21}{25}V_{P-ABC}$.

$\therefore \frac{V_{P-AEF}}{V_{下部分}}=\frac{4}{21}$，此即上、下两部分体积之比.

例 5 （第 29 届 IMO 备选题）

在四面体 $ABCD$ 中，棱 AB、CD 的中点分别为 K、L，证明任一过 KL 的平面将这四面体分为体积相等的两部分.

证 如图 3，过 KL 的平面 KEL 交 BC 于 E，交 AD 于 F，交 BD 的延长线于 G.

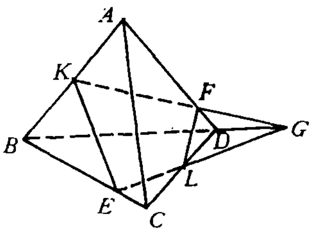

图 3

$\because L$ 是 CD 的中点.

$\therefore C$、D 到平面 KEL 的距离相等，则

$V_{C-KELF}=V_{D-KELF}$ ①

设四面体 $ABCD$ 的体积为 V，则

$V_{C-AKF}=\frac{AK\cdot AF}{AB\cdot AD}V=\frac{1}{2}\frac{AF}{AD}V$.

$V_{D-BKE}=\frac{1}{2}\frac{BE}{BC}V$.

对于 $\triangle ABD$ 和截线 GFK、$\triangle BDC$ 和截线 GLE，由梅氏定理，得

$\frac{DG}{GB}\cdot\frac{BK}{KA}\cdot\frac{AF}{FD}=1=\frac{DG}{GB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CL}{LD}$.

$\therefore \frac{AF}{FD}=\frac{BE}{EC}$，从而 $\frac{AF}{AD}=\frac{BE}{BC}$.

$\therefore V_{C-AKF}=V_{D-BKE}$ ②

① + ②，得平面 KEL 平分四面体 $ABCD$ 的体积.

当 E 为 BC 的中点时，有 $KE /\!/ AC$，$EL /\!/ BD$，则平面 $KEL /\!/ AC$，$KF /\!/ BD$（这时 G 在“无穷远处”）. 从而 $FL /\!/ AC$，因此 F 为 AD 的中点，此时结论显然成立，故命题正确.

称球问题及其一般性解法

江苏省苏州中学高二国际班 **倪兆中** 指导老师 **夏 炎**(215005)

称球问题是一个有趣的问题. 本文将研究其中一种情形：

有 $N(N>2)$ 个球，其中有一个坏球，好球与坏球从外表上看没有区别，其唯一可以比较的差别是它们的重量不一样（坏球是重是轻并不知道）. 现有一架天平，要求通过称量，用最少的次数找出坏球.

利用计算机递归算法可较好地解决称球

问题,其结论为:

记 M_n 为 N 个球的称球问题在最坏情况下的最优解,则

$$M_n=[\log_3(2\times N)]+1.$$

这里的最坏情况是指在用某种算法解称球问题时,每一次称量结果均为相对于这一算法最不理想的情况;最优解是指在最坏情况下最优算法所能保证的解.

先将称球问题扩展为广义称球问题.

记 B(big)、E(equal)、S(small)为具有质量大于或等于、恰等于、小于或等于好球的属性的球的集合.称 B、S 中球为有属性的球,称 E 中的球为标准球,均不属于以上集合的球称为属性未定的球,放在集合 U(unknow)中.B_k、E_k、S_k、U_k 分别表示集合 B、E、S、U 中的第 k 个球.

广义称球问题就是:给定 B、E、S、U 集合(E 不为空,B、S 均不为空或 U 不为空),要求通过称量,用最少的次数找出其中的坏球.

对于初始状态的称球问题,显然第一次称是取出若干个球,在天平左右托盘上各放一半.对于结果,若天平平衡,则坏球一定在剩下的球中,否则坏球在这些球中.

第一次称后,原问题或者变成若干个有属性的球以及一些标准球的广义称球问题,或者变成若干个属性未定的球以及一些标准球的广义称球问题.而前者再称下去,其性质仍是若干个有属性的球以及一些标准球的广义称球问题;后者再称下去,其或者变成若干个有属性的球以及一些标准球的广义称球问题,或者仍是若干个属性未定的球以及一些标准球的广义称球问题.也就是说,称球问题的最终解决,一定是以上两种情况之一.

称前一种问题为第一种广义称球问题,后一种问题为第二种广义称球问题.

容易看出,第一种广义称球问题中,U 为空集;第二种广义称球问题中,S、B 为空集;两种广义称球问题中,E 均不为空集.

称球问题同第二种广义称球问题的差异在于,称球问题中无标准球,这一点后面还将提到.

第一种广义称球问题的递归算法如下:

记 $X=|B|+|S|$.(这儿 $|B|$ 表示 B 中球的个数,余类同)

对于 $X=1$,这个球就是坏球.

对于 $X=2$,任取一个与 E 中的标准球称一下,若天平平衡,则坏球是另一个球、否则,坏球就是这个球.

对于 $X=3$,任取两个属性相同的球称一下,若天平不平衡,则属性与实际相符的球为坏球,否则,第三个球是坏球.

对于 $X\geqslant 4$,将 B 和 S 均匀地分为 3 个子集合,且使其中两个子集合中每种属性的球数均相等,将这两个子集合中的球称一下,若天平平衡,则将这两个子集合中的球移入 E 中,否则,将这两个子集合中属性与实际不符的球以及第三个子集合中的球移入 E 中.问题降为规模为 $[X/3]$ 的第一种广义称球问题.

第二种广义称球问题的递归算法如下:

记 $Y=|U|$.

对于 $Y=1$,它自然就是坏球.

对于 $Y=2$,任取一个与标准球称一下,若天平平衡,则剩余的那个球为坏球,否则,这个球就是坏球.

对于 $Y\geqslant 3$,将 U 均分成三个子集合,取最大的两个子集合称一下(若球数不等,则从 E 中取一个来"凑数"),若天平平衡,则将这两个子集合中的球移入 E 中,问题降为规模为 $[Y/3]$ 的第二种广义称球问题,否则,将较重的子集合中的球移入 B 中,将较轻的子集合中的球移入 S 中,将第三个子集合中的球移入 E 中,问题降为规模为 $[Y\times 2/3]$ 第一种广义称球问题.

下表说明了两种广义称球问题最多可称球数及其之间的关系

最多可称球数

称的次数	第一种广义称	第二种广义称球问题

球问题

1　$3=3^1$　$2=(3^1-1)/2+1$

2　$9=3^2$　$5=3+2=(3^2-1)/2+1$

3　$27=3^3$　$14=9+5=(3^3-1)/2+1$

4　$81=3^4$　$41=27+14=(3^4-1)/2+1$

…………………………

k　3^k　$(3^k-1)/2+1$

记 W_k 为最多称 k 次可以解决的称球问题的最大球数.

如前所述,称球问题可转化为第一种或第二种广义称球问题,但有一点要注意,第一次称时无标准球,故转化成的第一种广义称球问题的 N 只能是偶数,故有

$W_k=(3^k-1)/2$

因而有 $N\leqslant W_k=(3^k-1)/2$,

所以有 $M_n=[\log_3(2\times N)]+1$.

利用类似算法,还可以得到以下一些推论(证明略):

(1)在称球问题中,若已知坏球与好球的轻重关系,

则有 $M_n=[\log_3(N-1)]+1$;

(2)在称球问题中,若还要求得到坏球与好球的轻重关系,

则有 $M_n=[\log_3(2\times N+2)]+1$;

(3)在称球问题中,若允许使用一个额外的标准球,

则有 $M_n=[\log_3(2\times N-2)]+1$;

(4)在称球问题中,若允许使用一个额外的标准球,并要求得到坏球与好球的轻重关系,则有 $M_n=[\log_3(2\times N)]+1$.

(上接第 46 页)

(1991 年全国初中数学联赛试题)

设$\triangle ASG$ 的外接圆与$\triangle ABC$ 的外接圆分别为$\odot O'$, $\odot O$, $\triangle ABC$ 的内心为 I, AI、BI、CI 的延长线与$\odot O$ 分别交于点 D、E、F,则 O' 必在 AD 上! 连 FN 交$\odot O'$于 R,连 NE 并延长交$\odot O'$于 Q,连 RQ、AR、AQ、RB,连 DN 并延长到 H,过 R 作 $RP\parallel AC$ 交 DH 于 P,连 BP、$O'R$、$O'Q$.

设$\angle BAC=2\alpha$, $\angle ABC=2\beta$, $\angle BCA=2\gamma$, $\angle O'RQ=\angle O'QR=\alpha'$, $\angle RAB=\beta'$, $\angle QAC=\gamma'$,则$\angle ARQ=\beta$, $\angle AQR=\gamma$,于是可得

$$\begin{cases}\alpha'+\beta=\alpha+\beta',\\ \alpha'+\gamma=\alpha+\gamma',\\ \beta'+\gamma'=\beta+\gamma.\end{cases}$$

故 $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$,而有 $RQ=AG=BC$,于是$\triangle RAQ\cong\triangle BIC$,从而可推出 $RA\parallel\!\!=BI$, $AQ\parallel\!\!=IC$,进而 R 是 I 关于 AB 中点的对称点,Q 是 I 关于 AC 中点的对称点,$RB\parallel\!\!=AI$,故$\angle BRP=\angle IAC=\angle BAD=\angle BNH=\alpha$,而有 P、R、B、N 四点共圆,进而有$\angle BPR=\angle BNR=\angle FCA=\gamma$,于是有$\triangle RBP\cong\triangle AIC$,从而 $BP\parallel\!\!=IC$,即有 P 是 I 关于 BC 中点 M 的对称点.

由上讨论,即可构作.

命题 3　设 I 为$\odot O$ 的内接$\triangle ABC$ 的内心($AB>BC>CA$), AI、BI、CI 的延长线与$\odot O$ 分别交于点 D、E、F、I 关于边 BC、CA、AB 中点的对称点分别为 P、Q、R,则直线 DP、EQ、FR 交于$\odot O$ 上的一点.(新拟题)

命题 4　$\triangle ABC$ 的$\angle A$ 的平分线与$\triangle ABC$ 的外接圆相交于 D, I 是$\triangle ABC$ 的内心,M 是边 BC 的中点,P 是 I 关于 M 的对称点(设点 P 在圆内),延长 DP 与外接圆相交于点 N.试证:在 AN、BN、CN 三条线段中,必有一条线段是另两条线段之和.

(第 34 届 IMO 中国国家队选拔赛试题 6)

从上述对波兰赛题改造与创新的过程中,可以窥见我国两道赛题的背景.