

称球问题的分析及算法设计

雷小园 江西宜春学院数学与计算机科学学院

[摘 要]本文全面讨论了“称球问题”的各个方面的问题,并利用三进制来解决具体称球的问题。对球的编码、选码和具体称重过程,都进行了算法设计和C++编程实现。

[关键词]称球问题 算法 C++程序 三进制 回溯法

一、引言

称球问题指的是,有12个球,其中有一个坏球,重量有差别,但不知道是轻是重。试用天平称三次,找出坏球,并说出它是轻是重。这是个很经典的智力问题,可以用来做为检验一个人是否具有高智力的一个标准。更普遍一点的问题是,称 n 次,最多可以从多少个球中找出其中的一个坏球。

二、对半确定球的称球问题

我们先来看一个更简单的问题,如果已知这个坏球的重量更重(或更轻),称三次最多可以在多少个球中找出坏球来。大家都知道,答案是27个球,即33。

定义一:一个球,若知道它不可能偏重(或知道不可能偏轻),则我们称此球为半确定轻球(或半确定重球);半确定重球和半确定轻球统称为半确定球。定义二:一个球,若知道它是好球,则我们称此球为确定好球或标准球;若知道是坏球,称确定坏球。确定好球和确定坏球统称为确定球。定义三:一个球,既不是确定球,也不是半确定球若,则我们称此球为不确定球。问题一:若所有球都是半确定球,那么 n 次最多可以从多少个球中找出坏球来。我们用 $g(n)$ 来表示这个数。结论一: $g(n)=3n$ 。(证明略)

三、对不确定球的称球问题

问题二:如果提供一个额外的标准球,称 n 次,最多可以在多少个球中找出坏球来,并要求知道坏球的轻重。设这个数为 $f(n)$ 。结论二: $f(n)=(3n-1)/2$ 。(证明略)问题三:如果不提供额外的标准球,称 n 次最多可以在多少个球中找出坏球来,并要求知道坏球的轻重。设这个数为 $h(n)$ 。结论三: $h(n)=f(n)-1=(3n-3)/2$ 。问题四:如果提供一个额外的标准球,称 n 次,最多可以在多少个球中找出坏球来,不要求知道坏球的轻重。设这个数为 $t(n)$ 。结论四: $t(n)=f(n)+1=(3n+1)/2$ 。当 $n=3$ 时, $h(n)=12$,即称三次可以从12个球中找出坏球。如果提供一个标准球,则可从13个球中找出坏球。如果不要求知道是轻还是重,则最多可以称14个球。

四、使用三进制来进行称球

由于天平有三种状态,我们可用三进制数来给球进行编码。下面是0~26是三进制编码:001 002 010 011 012 020 021 022 100 101 102 110 111 112 120 121 122 200 201 202 210 211 212 220 221 222。这27个编码可以对应27个球,三位编码对应三次称球,每次称球时将0的9个球放到天平左面,为2的9个球放到天平右面。

如果知道坏球的轻重,对某次称重的结果我们就知道对应位上的编码。比如知道坏球更重,第一次称重天平左面重,就知道坏球的第一位的编码为0。这样称三次,根据三位编码就知道坏球是哪个。

如果不知道坏球的轻重,假设三次称重的结果为:左面重、左面重、右面重,则球的编码为002(若球重)或220(若球轻)。这两个互为补码,有13对互为补码的球,我们如果从每对补码球中只取一个,则可以根据三次称重的结果找出坏球。

我们现在利用三进制编码来解决我们最初的问题:在12个球中,用天平称三次找出其中的一个坏球,并判定其轻重。前面对问题一和问题二的称重过程中,每次称重都要依据前面的称重结果。我们下面利用三进制编码来设计一个方案,开始就定下三次称重的

球的方法,然后一次性地由三次称重的结果计算出坏球的编码。

因为要判定坏球的轻重,则要去掉编码111。由于不提供标准球,为了使得每次天平两端能放上相同数量的球,我们还得去掉编码000和222。在剩下的24个编码中,我们要挑选出12个球,条件是:(1)不能有互为补码的球;(2)每位编码中0、1、2的总数都要为4。

如何进行选码是个难题,下面我们用计算机编程来进行选码。

五、选码的算法设计

我们可以用回溯法来进行选码。下面用C++来进行编程。首先把这27个数都存在a[27][3]数组中。再设一个数组int sum[3][3],用来记录在前面已选的球中,每一位的0、1、2的总数,三行分别代表0、1、2的个数,每列代表每一位。如sum[1][2]=4则表示第三位中1的个数为4。再设一个数组int f[27],用来表示球的三种状态,0表示可选取,1表示已选取,-1表示不可选取我们从第一个(0,0,1)开始进行选取一个个往下考虑某个球,如果可以选则选取它,记录各位的012的总数,同时标志它的补码球为不可取,然后进行下一个球的选取。如果不可选则进行下一个球的选取。如果找到一组解则打印出来。如果下面没有合适的球可选,则进行回溯,去掉刚选取的球,还原各标志位和012的计数,继续考虑下面的球。如果依然失败,则继续回溯退到上一步。当我们找到一组解后,我们也同样进行回溯,再继续寻找,这样我们可以打印出全部的解,共76组。

六、称球的算法设计

在上面得到某一组解后,我们根据数组各元素的编码来放置各个球到天平上。在三次称球中,每次左面放上编码为0的四个球,右面放上编码为2的四个球。然后让用户输入三次称重的结果,用0代表左面重,2代表右面重,1代表平衡。根据这三个数字得到的编码去查这12个球的编码,如果在其中,则该球就是要找的球,且重量偏重。如果不在其中,则其补码就是我们要找的球,且此球偏轻。

称球的程序运行结果见下图:



七、结语

本文对“称球问题”进行了理论和实践上的各种探讨,这个问题不仅是一个智力游戏问题,也是个数学问题和计算机问题。称球问题还有很多变种,比如:“22个球中有两个重球,用天平称5次找出这两个球”、“15个球,其中一个稍轻或稍重,用电子秤称四次,找出这个球”,还有工业上的产品质量检测问题。可以对这类相关问题做进一步研究。

参考文献

- [1]王晓东.计算机算法设计与分析(第2版)[M]北京:电子工业出版社2005:134-140
- [2]文中华.“称球问题”的算法的研究[J]湘潭大学自然科学学报.2004,26(1):42-48