第 26 卷 第 1 期　　湘 潭 大 学 自 然 科 学 学 报　　Vol. 26 No. 1
2004 年 3 月　　Natural Science Journal of Xiangtan University　　Mar. 2004

“称球问题”的算法的研究*

文 中 华
(湘潭大学信息工程学院,湖南　湘潭,411105)

[摘　要]　采用分层递归的方法,研究了“在 n 个外形相同的球中找出唯一与其它球重量不相同的球”的算法,给出了对任何 $n(n>2)$ 的统一称法. 并证明了所设计的称法是求解该类问题所使用天平称的次数最少的方法之一.

关　键　词:“称球问题”;分层递归;分组;算法
中图分类号:TP301　　文献标识码:A　　文章编号:1000 5900(2004)01 0042 07

Study for Algorithm of Weighting Ball Problem

WEN Zhong - hua
(College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105 China)

【Abstract】　In this paper, an algorithm is studied that a ball is found from n balls by using hierarchical recursive method. A uniform weighting method is given for any n balls. It is proved that this weighting ball method is one of the best ways.

Key words: weighting ball problem; hierarchical recursive; group; algorithm

1　问题的提出

假设有 $n(n>2)$ 个外形完全相同的小球,其中有一个小球的重量与其它小球的重量不同(称该小球为“异类球”,其它 $n-1$ 个小球的重量相同). 现有一架无砝码的天平,用该天平称最少的次数将“异类球”找出来,求最少次数和称法[1]. 我们把这个问题称为“称球问题”[2].

目前,对该问题的研究还停留在确定的 n 上(如 $n=12$),还没有对变量 n 的一个通用的称法.

“称球问题”有着广泛的应用前景,有很多问题,将其转化,抽象化后都归为“称球问题”. 例如,对于一个复杂的网络而言,要尽快找到出现问题的客户端(例如,黑客),我们可以将该问题部分的归为“称球问题”.

2　称第一次的情况

对于“称球问题”,首先把 n 个小球分成(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)三组,设三组分别含小球个数为 x_1, x_2, x_3(其中 $x_1, x_2, x_3 \geq 0, x_1 = x_2, x_1 + x_2 + x_3 = n$). 将(Ⅰ)、(Ⅱ)组球分别放在天平两边称第一次. 称第一次,只有该类方法.

例如,$n=25$,将其分三组,三组含球的个数分别为:6,6,13

称了第一次后,将会出现下列两种情况中的一种情况.

(1) 天平两边不平衡,则“异类球”在天平的左盘或右盘里. 即在(Ⅰ)或(Ⅱ)组中,且左右盘已有轻重. 则(Ⅲ)组中的球成为标准球,共有 x_3 个.

(2) 天平两边平衡,则“异类球”在第(Ⅲ)组中. 则(Ⅰ)、(Ⅱ)组中的球成为标准球,共有 $x_1 + x_2$ 个.

3　称了第一次以后的情况的处理

为了解决“称球问题”,需要用到下列的引理:

引理:假设有 n 个外形完全相同的小球(另外还有足够多的标准球),其中有一个小球的重量比其它小球的重量轻(或重)(称该小球为“异类球”,其它 $n-1$ 个小球的重量相同). 现有一架无砝码的天

* 收稿日期:2003 - 06 - 16
基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(02JJ Y2091)
作者简介:文中华,(1966 -),男,湖南安乡,博士生. E - mail: Zhonghua @xtu. edu. cn.

平,用该天平称 k 次,将“异类球”找出来,则 n 的最大值为 3^{k}[3].

3.1　称了第一次以后的第(1)种情况的解决方法

3.1.1　称了第一次以后的第(1)种情况下的问题转化　为了解决“称球问题”称了第一次以后的第(1)种情况,引入下面的问题①

①设有 $2m(m \geq 2)$ 个外形完全相同的小球(另外还有足够多的标准球),其中有一个小球的重量与其它小球的重量不同(称该小球为“异类球”,其它 $2m-1$ 个小球的重量相同).且 $2m$ 个小球已被分成了个数相等的(Ⅰ),(Ⅱ)两组,已知(Ⅰ)比(Ⅱ)轻,现有一架无砝码的天平,用该天平称 k 次,将“异类球”找出来,求 $2m$ 的最大值 $P(k)$.

如果问题①已解,则原“称球问题”称第一次后的第(1)种情况可以解决(假设标准球足够,x_3 个标准球是否能为“称球问题”称了第一次以后的第(1)种情况后面的称法提供足够多的标准球,这是一个具体的分组问题,后面分析).即如果 $P(k_1) < x_1 + x_2 \leq P(k_2)$,则“称球问题”称了第 1 次以后的第(1)种情况还最少需称 k_2 次才能将“异类球”找出来,也能通过称 k_2 次将“异类球”找出来.

3.1.2　问题①的求解　根据已知条件,有三类球:标准球,比标准球不重的球(即(Ⅰ)组中的球,简称“不重的球”,比标准球不轻的球(即(Ⅱ)组中的球,简称“不轻的球”)

对问题①,下面对三类球放在天平两边称第 1 次的所有情况进行分析.

天平两边不需要同时放标准球,考虑将标准球只放在右边的情况(放在左边与右边是对等的).即天平左边放的球是“不重的球”,“不轻的球”的组合,共三类情况,即左边单独放“不重的球”,单独放“不轻的球”,既有“不重的球”又有“不轻的球”. 其中左边单独放“不重的球”和单独放“不轻的球”是对等的,所以左边放球只需考虑两种情况,即左边单独放“不重的球”,左边放既有“不重的球”又有“不轻的球”. 天平右边放的球是标准球,“不重的球”,“不轻的球”的组合,共七种情况(即右边单独放标准球;单独放“不重的球”;单独放“不轻的球”;既有标准球又有“不重的球”;既有标准球又有“不轻的球”;既有“不重的球”又有“不轻的球”;既有“不重的球”又有“不轻的球”,还有标准球)。这样,天平两边放球称第 1 次的情况共有 $2*7=14$ 类,下面对每类进行分析,得出最佳方案.

(1) 在“不重的球”堆中取 x 个球放在天平的左盘上,在标准球中取 x 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $P_1(k)$. 称第一次,取完所有的“不重的球”(即 $x=m$)放在左盘上称的方法,称后的结果的最坏情况是确定“异类球”在 m 个“不重(或轻)的球”中,而对 $x<m$,称后的结果的最坏情况是确定“异类球”在 m 个“不轻的球”和 $m-x$ 个“不重的球”中,所以,前者好于后者. 利用引理可得 $P_1(k)=2*3^{k-1}$.

(2) 在“不重的球”堆中取 $2x$ 个球放在天平上称(左右盘各 x 个),设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $P_2(k)$. 称后的结果的最好的最坏情况是确定“异类球”在 m 个“不重(或轻)的球”中,而对 $2x<m$,称后的结果的情况是确定“异类球”在 m 个“不轻的球”和 $m-2x$ 个“不重的球”中. 显然 $P_2(k) \leq P_1(k)$.

(3) 在“不重的球”堆中取 x 个球放在天平左盘上,在“不轻的球”堆中取 x 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $P_3(k)$,则 $P_3(k)=2*P_3(k-1)$,$P_3(1)=2$,解得 $P_3(k)=2^{k}$.

(4) 在“不重的球”堆中取 $x+y$ 个球放在天平左盘上;在“不重的球”堆中取 x 个球,“不轻的球”堆中取 y 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $P_4(k)$.

x(不重的球) + y(不重的球) ——x(不重的球) + y(不轻的球)

称第一次以后,有三种情况如下:

(Ⅰ) 天平左边比右边轻,则“异类球”在左边 $x+y$ 个“不重的球”中或右边 y 个“不轻的球”中. 即在: x(不重的球) + y(不重的球) ——y(不轻的球)中.

(Ⅱ) 天平左边比右边重,则“异类球”在天平右边的 x 个“不重的球”中.

(Ⅲ) 天平两边平衡,则“异类球”在余下的 $m-(2x+y)$ 个“不重的球”中或在余下的 $m-y$ 个“不轻的球”中. 如果 $m=2x+y$,则“异类球”在余下的 $m-y=2x$ 个“不轻的球”中.

由以上分析,如果 $m=2x+y$,则 $P_4(k)\le P_4(k-1)+(3/2)*3^{k-1}(P_4(1)=2)$

如果 $m\ne 2x+y$,则 $P_4(k)\le 2P_4(k-1)+3^{k-1}(P_4(1)=2)$

(5) 在"不重的球"堆中取 $x+y$ 个球放在天平左盘上;在"不重的球"堆中取 x 个球,标准球堆中取 y 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 K 次的最大值是 $P_5(k)$,则 $P_5(k)\le P_1(k)$.

(6) 在"不重的球"堆中取 $x+y$ 个球放在天平左盘上;在"不轻的球"堆中取 x 个球,标准球堆中取 y 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $P_6(k)$.

x(不重的球) + y(不重的球) ——x(不轻的球) + y(标准球)

称第一次以后,有两种情况如下:

(Ⅰ) 天平左边比右边轻,则"异类球"在左边 $x+y$ 个"不重的球"中或右边 x 个"不轻的球"中,即在:x(不重的球) + y(不重的球) ——x(不轻的球)中.

(Ⅱ) 天平两边平衡,则"异类球"在余下的 $m-(x+y)$ 个"不重的球"中或在余下 $m-x$"不轻的球"中. 如果 $m=x+y$,则"异类球"在余下的 $m-y=x$ 个"不轻的球"中.

由以上分析,如果 $m=x+y$,则 $P_6(k)\le P_6(k-1)+3^{k-1}(P_6(1)=2)$

如果 $m\ne x+y$,则 $P_6(k)\le 2P_6(k-1)(P_6(1)=2)$

(7) 在"不重的球"堆中取 $x+y+z$ 个球放在天平左盘上;在"不重的球"堆中取 x 个球,"不轻的球"堆中取 y 个球,在标准球堆中取 z 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $P_7(k)$.

x(不重的球) + y(不重的球) + z(不重的球) ——x(不重的球) + y(不轻的球) + z(标准球)

称第一次以后,有三种情况如下:

(Ⅰ) 天平左边比右边轻,则"异类球"在左边 $x+y+z$ 个"不重的球"中或右边 y 个"不轻的球"中.

即在 x(不重的球) + y(不重的球) + z(不重的球) ——y(不轻的球)中.

(Ⅱ) 天平左边比右边重,则"异类球"在天平右边的 x 个"不重的球"中.

(Ⅲ) 天平两边平衡,则"异类球"在余下的 $m-(2x+y+z)$ 个"不重的球"中或在余下的 $m-y$ 个"不轻的球"中. 如果 $m=2x+y+z$,则"异类球"在余下的 $m-y=2x+z$ 个"不轻的球"中.

由以上分析,如果 $m=2x+y+z$,则 $p_7(k)\le p_7(k-1)+(3/2)*3^{k-1}(p_7(1)=2)$

如果 $m\ne 2x+y+z$,则 $p_7(k)\le 2p_7(k-1)+3^{k-1}(p_7(1)=2)$

(8) 在"不重的球"堆中取 x 个球,"不轻的球"堆中取 y 个球放在天平左盘上;在"不重的球"堆中取 $x+y$ 个球放在天平的右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $p_8(k)$,则 $p_8(k)=p_4(k)$ (与④比,只是调换了左右盘).

(9) 在"不重的球"堆中取 x 个球,"不轻的球"堆中取 y 个球放在天平左盘上;在"不轻的球"堆中取 $x+y$ 个球放在天平的右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $p_9(k)$,则 $p_9(k)=p_8(k)$ (与⑧比,是等同的. 即只是"不轻的球"与"不重的球"互换了位置)。

⑩在"不重的球"堆中取 x 个球,"不轻的球"中取 y 个球放在天平左盘上,在标准球堆中取 $x+y$ 个球放在天平的右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $p_{10}(k)$.

x(不重的球) + y(不轻的球) ——x(标准球) + y(标准球)

称第一次以后,有三种情况如下:

(Ⅰ) 天平左边比右边轻,则"异类球"在左边 x 个"不重的球"中.

(Ⅱ) 天平左边比右边重,则"异类球"在天平左边的 y 个"不轻的球"中.

(Ⅲ) 天平两边平衡,则"异类球"在余下的 $m-x$ 个"不重的球"中或在余下的 $m-y$ 个"不轻的球"中.

由以上分析,则 $P_{10}(k)=P_{10}(k-1)+2*3^{k-1}(P_{10}(1)=2)$. 解得 $P_{10(k)}=3^k-1$.

(11) 在"不重的球"堆中取 x 个球,"不轻的球"堆中取 y 个球放在天平左盘上;在"不重的球"堆中取 $z(z\le x+y)$ 个球,"不轻的球"堆中取 $x+y-z$ 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $p^{11}(k)$.

x(不重的球) + y(不轻的球) ——z(不重的球) + $x+y-z$(不轻的球)称第一次以后,有三种情况如下:

(Ⅰ)天平左边比右边轻,则“异类球”在左边 x 个“不重的球”中或右边 $x+y-z$ 个“不轻的球”中.即在:x(不重的球) ——$x+y-z$(不轻的球)中.

(Ⅱ)天平左边比右边重,则“异类球”在天平左边的 y 个“不轻的球”或在天平右边 z 个“不重的球”中.即在:y(不轻的球) ——z(不重的球)中.

(Ⅲ)天平两边平衡,则“异类球”在余下的 $m-(x+z)$ 个“不重的球”中或在余下的 $m-y-(x+y-z)$ 个“不轻的球”中.如果 $m=x+z$,则“异类球”在余下的 $m-x-2y+z=2z-2y$ 个“不轻的球”中.如果 $m=x+2y-z$,则“异类球”在余下的 $m-x-z=2y-2z$ 个“不重的球”中.

由以上分析,如果 $m=x+z$ 或 $m=x+2y-z$,则 $p_{11}(k)\le 2p_{11}(k-1)+3^{k-1}(p_{11}(1)=2)$,否则,则 $p_{11}(k)\le 3p_{11}(k-1)\ (p_{11}(1)=2)$

(12)在“不重的球”堆中取 x 个球,“不轻的球”堆中取 y 个球放在天平左盘上,在“不重的球”堆中取 $z(z\le x+y)$ 个球,标准球堆中取 $x+y-z$ 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $p_{12}(k)$.

x(不重的球) + y(不轻的球) ——z(不重的球) + $x+y-z$(标准球)

称第一次以后,有三种情况如下:

(Ⅰ) 天平左边比右边轻,则“异类球”在左边 x 个“不重的球”中.

(Ⅱ) 天平左边比右边重,则“异类球”在天平左边的 y 个“不轻的球”或在天平右边 z 个“不重的球”中.即在:y(不轻的球) ——z(不重的球)中.

(Ⅲ)天平两边平衡,则“异类球”在余下的 $m-(x+z)$ 个“不重的球”中或在余下的 $m-y$ 个“不轻的球”中.如果 $m=x+z$,则“异类球”在余下的 $m-y$ 个“不轻的球”中.如果 $m=y$,则“异类球”在余下的 $m-x-z$ 个“不重的球”中.

由以上分析,如果 $m=x+z$,则 $p_{12}(k)=p_{12}(k-1)+2*3^{k-1}(p_{12}(1)=2)$

否则,则 $p_{12}(k)\le 2p_{12}(k-1)+3^{k-1}(p_{12}(1)=2)$.

比较两种情况可得,当 $m=x+z$ 时 $p_{12}(k)$ 取得最大,$p_{12}(k)=3^k-1$.

(13)在“不重的球”堆中取 x 个球,“不轻的球”堆中取 y 个球放在天平左盘上,在“不轻的球”堆中取 $z(z\le x+y)$ 个球,标准球堆中取 $x+y-z$ 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $p_{13}(k)$,则 $p_{13}(k)=p_{12}(k)$(与(12)比,是对等的.即只是“不轻的球”与“不重的球”互换了位置.)

(14)在“不重的球”堆中取 x 个球,“不轻的球”堆中取 y 个球放在天平左盘上,在“不重的球”堆中取 z 个球,“不轻的球”堆中取 $q(z+q<x+y)$ 个球,在标准球堆中取 $x+y-z-q$ 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $p_{14}(k)$.

x(不重的球) + y(不轻的球)

——z(不重的球) + q(不轻的球) + $(x+y-z-q)$(标准球)

称第一次以后,有三种情况如下:

(Ⅰ)天平左边比右边轻,则“异类球”在左边 x 个“不重的球”中或右边 q 个“不轻的球”中.即在:x(不重的球) ——q(不轻的球)中.

(Ⅱ)天平左边比右边重,则“异类球”在天平左边的 y 个“不轻的球”或在天平右边 z 个“不重的球”中.即在:y(不轻的球) ——z(不重的球)中.

(Ⅲ)天平两边平衡,则“异类球”在余下的 $m-(x+z)$ 个“不重的球”中或在余下的 $m-y-q$ 个“不轻的球”中.如果 $m=x+z$,则“异类球”在余下的 $m-y-q$ 个“不轻的球”中.如果 $m=y+q$,则“异类球”在余下的 $m-x-z$ 个“不重的球”中.

由以上分析,如果 $m=x+z$ 或 $m=y+q$,则 $p_{14}(k)\le 2p_{14}(k-1)+3^{k-1}(p_{14}(1)=2)$.否则,则 $p_{14}(k)\le 3p_{14}(k-1)\quad(p_{14}(1)=2)$.

由此可见, $p_{10}(k)=p_{12}(k)=p_{13}(k)=3^k-1$ 为最大,以 $p_{13}(k)$ 取得最大为例,具体称法如下:

在第(Ⅰ)组中取 $m-x$ 个球,再在第(Ⅱ)组中取 x 个球共 m 个球放在天平左盘中,在标准球堆中取 x 个球,再将第(Ⅱ)组中剩余的 $m-x$ 个球共 m 个球放入天平右盘中,称第 1 次. 称了第 1 次后,将会出现下列三种情况中的一种情况.

①天平左边比右边轻,则"异类球"在天平的左盘的从第(Ⅰ)组取出的 $m-x$ 个球或在天平的右盘的从第(Ⅱ)组取出的 $m-x$ 个球中. 这是问题①的递归子问题,最大为 $p(k-1)$.

②天平左边比右边重,则"异类球"在天平左盘的从第(Ⅱ)组取出的 x 个球中. 并且是这 x 个中重的一个. 由引理知,该情况下 x 的最大值为 3^{k-1}.

③天平两边平衡,则"异类球"在第(Ⅰ)组没有放入天平的 x 个球中. 并且是这 x 个球中轻的一个. 由引理知,该情况下 x 的最大值为 3^{k-1}.

根据上述分析,可列出如下方程:

$$p(k)=p(k-1)+2*3^{k-1},$$

其中 $p(1)=2$,解得 $p(k)=3^k-1$.

3.2 称了第一次以后的第(2)种情况的解决方法

3.2.1 称了第一次以后的第(2)种情况下的问题转化 为了解决"称球问题"称了第一次以后的第(2)种情况,引入下面的问题②

②假设有 y 个外形完全相同的小球(另外还有足够多的标准球),其中有一个小球的重量与其它小球的重量不同(称该小球为"异类球",其它 $y-1$ 个小球的重量相同). 现有一架无砝码的天平,用该天平称 t 次,将"异类球"找出来,求 y 的最大值 $f(t)$.

如果问题②已解决,则称第一次后的第(2)种情况可以解决(假设标准球足够, x_1+x_2 个标准球是否能为"称球问题"称了第 1 次以后的第(2)种情况后面的称法提供足够多的标准球,这是一个具体的分组问题,后面分析). 即如果 $f(t_1)<x_3\leq f(t_2)$,则"称球问题"称了第一次以后的第(2)种情况还最少需称 t_2 次才能将"异类球"找出来,也能通过称 t_2 次将"异类球"找出来.

3.2.2 问题②的求解 根据已知条件,有两堆球:(a)标准球准,(b)含有"异类球"的球堆.

对问题②,下面对两类球放在天平两边称的所有情况进行分析.

天平两边不需要同时放标准球,考虑将标准球只放在右边的情况(放在左边与右边是对等的). 即天平左边只放含有"异类球"的球堆中的球,仅有一类;天平右边放的球是标准球,含有"异类球"的球堆中的球的组合,共三种情况(即右边单独放(a)堆中的球;单独放(b)堆中的球;既有(a)堆中的球又有(b)堆中的球). 这样,天平两边放球称的情况共有 $1*3=3$ 类,下面对每类进行分析,得出最佳方案.

(1)在(b)堆中取 x 个球放在天平的左盘上,在标准球中取 x 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 t 次的最大值是 $f_1(t)$,则 $f_1(t)=(3^t+1)/2$.

(2)在(b)堆中取 $2x$ 个球放在天平(左右盘各 x 个)上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $f_2(t)$,则 $f_2(t)=f_2(t-1)+p(t-1)$,即 $f_2(t)=(3^t-2*t+3)/2$.

(3)在(b)堆中取 $x+z$ 个球放在天平左盘上,在(b)堆中取 x 个球,在(a)堆中取 z 个球放在天平右盘上称,设按这种方法称第一次共称 k 次的最大值是 $f_3(t)$.

$$f_3(t)\leq p(t-1)+f_3(t-1)=3^{t-1}-1+f_3(t-1)\leq 3^{t-1}+f_3(t-1)=f_1(t)$$

由此可见, $f_1(t)=(3^t+1)/2$ 为最大,以 $f_1(t)$ 取得最大为例,具体称法如下:

在 y 个球中取出 x 个球放在天平的左盘中,在标准球中取出 x 个球放在天平的右盘中称第一次,称了第一次后,将会出现下列两种情况中的一种情况.

(Ⅰ)天平两边不平衡,则"异类球"在天平左边的 x 个球中. 根据称的结果(左边比右边轻或重),由引理知,该情况下 x 的最大值为 3^{t-1}.

(Ⅱ)天平两边平衡,则"异类球"在 y 个球取走 x 个后剩下的 $y-x$ 个球中. 这是问题②的递归子问题,最大为 $f(t-1)$.

根据上述分析,可列出如下方程:

$f(t)=f(t-1)+3^{t-1}$，其中 $f(1)=2$. 解得 $f(t)=(3^t+1)/2$.

3.3　球的个数为 n 的“称球问题”所需称的最少次数

将①，②问题复合，假设①，②问题都还需用天平称 k 次，设 $g(k+1)=p(k)+f(k)$

则：
$$\begin{aligned} g(k+1) &= 3^k-1+(3^k+1)/2 \\ &= (3^{k+1}-1)/2 \\ &= (3^k-1)/2+(3^k-1)/2+(3^k+1)/2 \end{aligned}$$

对“称球问题”中的任何 $n(n>2)$，如果 $g(k)<n\leq g(k+1)$，则“称球问题”的最少次数为 $k+1$.

4　“称球问题”的一个统一的称法

4.1　称第一次的分组方法

对任意的 $n(n>2)$，设 $g(k)<n\leq g(k+1)$.

称第 1 次时，根据 n 的三种情况分组.

(1) 当 $n=3x$ 时，分成如下的三组：

$x_1=x_2=x_3=x$

(2) 当 $n=3x+1$ 时，分成如下的三组：

$x_1=x_2=x$　$x_3=x+1$

(3) 当 $n=3x+2$ 时，分成如下的三组：

$x_1=x_2=x+1$　$x_3=x$

这样分组，能保证称第一次以后，为后面要用标准球的称法提供足够的标准球.

这样分组，有 $x_1=x_2$，且 x_1（或 x_2）与 x_3 最多相差 1. 由于 $g(k)<n\leq g(k+1)$，且 $n=x_1+x_2+x_3$，可得 x_1,x_2,x_3 与 k 的有如下关系：$(3^{k-1}-1)/2<x_1=x_2\leq(3^k-1)/2$，$(3^{k-1}+1)/2\leq x_3\leq(3^k+1)/2$.

4.2　称第二次的称法

(1) 如果原 $n=3$（或 4），则 $x_1=x_2=1$，$x_3=1$（或 2）. 称第一次以后

(Ⅰ) 如果天平两边不平衡（x_3 中的球为标准球）

则“异类球”在 x_1,x_2 中. 在 x_1,x_3 中各取 1 个球放在天平两边称，即可确定“异类球”.

(Ⅱ) 如果天平两边平衡（x_1,x_2 中的球为标准球）

则“异类球”在 x_3 中. 在 x_1,x_3 中各取 1 个球放在天平两边称，即可确定“异类球”.

(2) 如果原 $n>4$，称第一次以后

(Ⅰ) 如果天平两边不平衡（x_3 中的球为标准球）

a. 因为 $n>4$ 时，则 $k\geq2$，所以 $3^{k-1}+1\leq(3^k-1)/2$. 如果 $3^{k-1}+1\leq x_1=x_2\leq(3^k-1)/2$，根据 3.1.2 中问题①的求解方法，则在 x_1 中取 3^{k-1} 个球，在 x_2 中取 x_1-3^{k-1} 个球放在天平的左盘中；在 x_1 中取 x_1-3^{k-1} 个球，在 x_3 中取 3^{k-1} 个球（标准球）放在天平的右盘中称第二次. 因为标准球的个数 $x_3\geq x_1-1=3^{k-1}$，所以标准球的个数够用.

b. 如果 $(3^{k-1}-1)/2<x_1=x_2\leq3^{k-1}$，则在 x_1 中取 x_1-1 个球，在 x_2 中取 1 个球放在天平的左盘中，在 x_1 中取 1 个球，在 x_3 中取 x_1-1（由于采用了上面的分组方法，$x_3\geq x_1-1$）个球（标准球）放在天平的右盘中称第二次.

(Ⅱ) 如果天平两边平衡（x_1,x_2 中的球为标准球）

a. 如果 $3^{k-1}+1\leq x_3\leq(3^k+1)/2$，则在 x_1 中取 3^{k-1} 个球（由于采用了上面的分组方法，$x_1\geq x_3-1=3^{k-1}$）放在天平的左盘中，在 x_3 中取 3^{k-1} 个球放在天平的右盘中称第二次.

b. 如果 $(3^{k-1}+1)/2\leq x_3\leq3^{k-1}$，则在 x_1 和 x_2 中取 x_3 个球放在天平的左盘中，在 x_3 中取 x_3 个球放在天平的右盘称第二次（由于采用了上面的分组方法，$x_1+x_2\geq x_3$）.

4.3　称完第一次和第二次以后的称法

称完第二次后，有了足够多的标准球，如果：

(Ⅰ)问题归为3.1.2中问题①的子问题,将可能含有"异类球"的两堆球中加入标准球,使每堆球的球数都为$(3^{k-1}-1)/2$,然后按$p(k-1)$取得最大值的方法放球到天平两边称即可.

(Ⅱ)问题归为3.2.2中问题②的子问题,将可能含有"异类球"的一堆球中加入标准球,使该堆球的球数为$(3^{k-1}+1)/2$,然后按$f(k-1)$取得最大值的方法放球到天平两边称即可.

(Ⅲ)已得出"异类球"球是轻(或重)球,将可能含有"异类球"的一堆球中加入标准球,使该堆球的球数为3^{k-1},然后按本文引理取得最大值的方法放球到天平两边称即可.

5 结 论

本文首先对"称球问题"进行分解,将'称球问题'分解成两个子问题,然后对分解后的子问题进行转换,将求最优解问题转换为求极大值问题,再对转换后的子问题求出其极大值,从而得出"称球问题"的解.并根据求极大值过程中提供的思想方法,构造了"称球问题"(对任何$n>2$)的统一算法.

参 考 文 献

[1] 王晓东.计算机算法设计与分析[M].北京:电子工业出版社,2001.

[2] 谢柏青.算法与数据结构[M].北京:高等教育出版社,2001.

[3] Sra Baase. Computer Algorithms Introduction to Design and Analysis[M].北京:高等教育出版社,2001.

(上接第41面)

5 结束语

多目标遗传算法是解决多目标优化问题的一种非常有效的方法,特别是对于高度复杂的非线性问题.多目标遗传算法的收敛过程是其非支配集不断逼近Pareto最优解集的过程,因此研究如何构造非支配集具有重要意义.本文提出了用排除法来构造非支配集,在一定程度上提高了构造非支配集的效率,在此基础上提出了一类多目标遗传算法.实验结果表明,本文所讨论的算法具有较快的运行效率,同时其解集具有较好的分布性.

参 考 文 献

[1] Kuhn H W,Tucker A W. Nonlinear programming[C]. In J Neyman editor Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, California:University of California Press,1951:481 - 192.

[2] Schaffer J D. Some experiments in machine learning using vector evaluated genetic algorithms[C]. Unpublished doctoral dissertation, Vanderbilt University,1984.

[3] Zilzler E,Thiele L. Multi - objective optimization using evolutionary algorithms - A comparative case study[C]. Parallel Problem Solving from Nature,Springer,Berlin:1984:292 - 301.

[4] Deb K, Agrawal S, Pratap A,et al. A Fast Elitist Non - Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi - Objective Optimization: NSGA - Ⅱ. Technical Report No. 2000001. Kanpur:Indian Institute of Technology Kanpur,2000.