称球问题的一个启发式规则

杨　云[20]

摘　要　本文给出了称球问题的一个启发式规则。并证明了利用此规则，一定能达到最终状态且称球的次数是最少的。

关键词　称球问题　启发式规则　算法分析

一、问题的引出及有关定义

设有 m 个水球，外形形状完全一样，但其中有一个是次品球，其质量比其它球轻或重。用一个无法码的天平，用尽可能少的称球次数找出这个球，并指出它比其它球轻或重。

用一个四元组 (n, u, w, L) 来描述对小球了解到的"信息"，称为小球的一个状态 S。其中：

n：m 个球中已确信的 n 个正常球；

u：若 $u \neq 0$，次品球含在这 u 个球中；

w：若 $w \neq 0$，在次品球为重球的情况下，次品球含在这 w 个球中；

L：若 $L \neq 0$，在次品球为轻球的情况下，次品球含在这 L 个球中。

显然，n、u、w、L 应满足：$u \neq 0$ 包含 $w = 0 \wedge L = 0$。小球的初始状态为 $(0, m, 0, 0)$，为了找出次品球，即要求出小球的目标 S_G，S_G 为 $(m-1, 0, 1, 0)$ 或 $(m-1, 0, 0, 1)$ 之一。

定义 1：设 $s_1 = (n_1, u_1, w_1, L_1)$，$s_K = (n_K, u_K, w_K, L_K)$ 且满足：$n_1 + n_K \leqslant n$，$u_1 + u_K \leqslant u$，$w_1 + w_K \leqslant w$，$L_1 + L_K \leqslant L$，$n_1 + u_1 + w_1 + L_1 = n_K + u_K + w_K + L_K$ 则称 (s_1, s_K) 为 S 的一个称法。

根据上述定义，从 n, u, w, L 中分别取 n_1, u_1, w_1, L_1 个球放到天平的左边，分别取 n_K, u_K, w_K, L_k 个球放到天平的右边，从天平的结果得到关于小球的更多"信息"，以求出小球的下一状态，称之为在称法 (S_1, s_K) 下的后继状态。

定义 2 设 (s_1, s_K) 为 $S = (n, u, w, L)$ 的一个称法，其中 $s_1 = (n_1, u_1, w_1, L_1)$，$s_K = (n_K, u_K, w_K, L_K)$，定义如下的函数：

$f_n^0(s, s_1, s_K) = n + u_K + u_1 + w_1 + w_k + L_1 + L_K$;

$f_n^0(s, s_1, s_K) = n - u_1 - u_K$

$f_w^0(s, s_1, s_K) = w - w_1 - w_K$;

$f_L^0(s, s_1, s_K) = L - L_1 - L_K$;

$f_n^1(s, s_1, s_K) = n + (w - w_K) + (L - L_1) + (u - u_1 - u_K)$;

$f_n^1(s, s_1, s_K) = 0$;

$f_w^1(s, s_1, s_K) = u_K + w_K$;

$f_L^1(s, s_1, s_K) = u_1 + L_1$;

$f_n^2(s, s_1, s_K) = n + (w - w_1) + (L - L_1) + (u - u_1 - u_K)$;

$f_n^2(s, s_1, s_K) = 0$;

$f_w^2(s, s_1, s_K) = u_1 + w_1$;

$f_L^2(s, s_1, s_K) = u_K + L_K$;

在不引起混淆的情况下，我们把 $f_n^i(s, s_1, s_K)$ 简记成 f_n^i，$i = 0, 1, 2$

因此，在小球的当前状态 S 下选择称法 (s_1, s_K)，根据天平可能得到的结果，可以知道小球的后继状态 S' 为：

(1) 若天平平衡，则 $S' = (f_n^0, f_u^0, f_w^0, f_L^0)$；

(2) 若天平左轻右重，则 $S' = (f_n^1, f_u^1, f_w^1, f_L^1)$；

(3) 若天平右轻左重，则 $S' = (f_n^2, f_n^2, f_w^2, f_L^2)$。

定义 3 设 $S = (n, u, w, L)$ 是小球的一个状态，(s_1, s_K) 是 S 的一个称法，定义：

(1) $K(S) = 2u + W + L$;

(2) $A(s, s_1, s_K) = \{(f_n^0, f_u^0, f_w^0, f_L^0), (f_n^1, f_u^1, f_w^1, f_L^1), (f_n^2, f_u^2, f_w^2, f_L^2)\}$

性质 1：设 $S = (n, u, w, L)$ 是小球的一个状态，(s_1, s_K) 是 S 的一个称法，并设 $A(s, s_1, s_K) = \{(f_n^0, f_u^0, f_w^0, f_L^0), (f_n^1, f_u^1, f_w^1, f_L^1), (f_n^2, f_n^2, f_w^2, f_L^2)\}$，则有 $K(s) = K(s_0) + K(s_1) + K(s_2)$。

证明：$K(s_0) + K(s_1) + k(s_2)$

$= 2f_u^0 + f_w^0 + f_L^0 + 2f_u^1 + f_w^1 + f_L^1 + 2f_u^2 + f_w^2 + f_L^2$

$= 2(u - u_1 - u_K) + w - w_1 - w_K + L - L_1 - L_K + 2 \times 0 + u_1 + w_1 + w_k + u_K + 2 \times 0 + u_1 + w_1 + u_K + l_K$

$= 2u + W + L$

$= K(s)$. 证毕。

二、称球的启发式规则

m 个小球，设其初始状态为 $s_0 = (0, m, 0, 0)$，从 s_0 开始，选择一种算法，得到它的下一状态 s_1，这个过程继续下去，直到得到目标状态为止。目标状态 S_G 为 $(m-1, 0, 1, 0)$ 或 $(m-1, 0, 0, 1)$ 之一。

在某一状态下，不同称法的选择，得到的下一个状态是不一样的，这样它到达目标状态所需称球的次数也不一样。本节

[20] 杨　云　扬州大学水利与建筑工程学院　工程管理系　讲师　扬州　225009

给出在任一状态 S下,选择称法的一个启发式规则,利用这个规则,使得称球的次数最少且次数是状态 S的函数,记为 H(S)。现定义如下。

定义 4 S是小球的一个状态,定义

(1) $N(S)=\{A(s,s_1,s_K) \mid (s_1,s_K)$为 S的一个称法$\}$;

(2)

$$H(S)=\begin{cases} 0 & K(S)=0 \\ \min\limits_{A\in N(S)}\left\{\max\limits_{s\in A}\{H(s)\}\right\}+1 & K(s)\neq 0 \end{cases}$$

下面给出启发式规则。

小球在状态 $S=(n,u,w,L)$下(设 S为非目标状态),设 $A(s,s_1,s_K)=\{S_0,s_1,s_2\}$其最优的称法 (s_1,s_K)($n\geqslant 1$时)的选择的原则是使得 $K(s_0),K(s_1),K(s_2)$两两相差最多为 1。根据性质 1,得 $K(s_0),K(s_1),K(s_2)$为$\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil$或$\lfloor \frac{k(s)}{3}\rfloor$ (运算符$\lceil X\rceil$和$\lfloor X\rfloor$的含义分别表示为: X的整数部分加 1和 X的整数部分减 1)。

下面给出 $s_1=(n_1,u_1,w_1,L_1)$和 $s_K=(n_K,u_K,w_K,L_K)$的选择算法。先定义两个数组 $b_1[0,\ldots,2,0,\ldots,2]$和 $b_K[0,\ldots,2,0,\ldots,2]$为:

$b_1[0,0]=(0,0,0,0)$, $b_K[0,0]=(0,0,0,0)$;

$b_1[0,1]=(0,0,0,1)$, $b_K[0,1]=(1,0,0,0)$;

$b_1[0,2]=(0,0,0,1)$, $b_K[0,2]=(0,0,0,1)$;

$b_1[1,0]=(0,0,1,0)$, $b_K[1,0]=(1,0,0,0)$;

$b_1[1,1]=(0,0,0,1)$, $b_K[1,1]=(1,0,0,0)$;

$b_1[1,2]=(0,0,0,1)$, $b_K[1,2]=(0,0,0,1)$;

$b_1[2,0]=(0,0,1,0)$, $b_K[2,0]=(0,0,1,0)$;

$b_1[2,1]=(0,0,1,0)$, $b_K[2,1]=(0,0,1,0)$;

$b_1[2,2]=(0,0,1,1)$, $b_K[2,2]=(1,0,0,1)$;

那么,$u\neq 0$时,$u_1:=\lceil \frac{u}{3}\rceil$;$u_K:=\lfloor \frac{u}{3}\rfloor$;$n_K:=u_K-u_1$;$n_1:=0$;

$u=0$时:

$(n_1,u_1,w_1,L_1):=(0,0,\lceil \frac{u}{3}\rceil,\lceil \frac{u}{3}\rceil)+b_1[w \bmod 3, l \bmod 3]$;

$(n_k,u_k,w_k,L_k):=(0,0,\lfloor \frac{w}{3}\rfloor,\lfloor \frac{w}{3}\rfloor)+b_k[w \bmod 3, l \bmod 3]$; (注: $(n_1,u_1,w_1,L_1)+(n_2,u_2,w_2,L_2)$定义为 $(n_1+n_2,u_1+u_2,w_1+w_2,L_1+L_2)$)。

性质 2 利用上面算法所得到的称法 (s_1,s_K)满足前面讨论的关于 (s_1,s_k)的选择原则。即:若设 $A(s,s_1,s_K)=\{s_0,s_1,S_2\}$,那么 (s_1,s_K)应使得 $K(s_0),K(s_1),K(s_2)$为$\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil$或$\lfloor \frac{k(s)}{3}\rfloor$,因此有:

$\max\{K(s_0),K(s_1),K(s_2)\}=\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil$。

证明:设 S为小球的任意一个非目标状态,并设 (s_1,s_K)是 S的一个称法,令 $A(s,s_1s_K)=\{s_0,s_1,s_2\}$,则有 $K(S)=K(s_0)+K(s_1)+K(s_2)$。所以,$\max\{K(s_0),K(s_1),K(s_2)\}\geqslant\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil$。

因此 $\min\limits_{A\in N(S)}\left\{\max\limits_{s\in A}\{K(s')\}\right\}\geqslant\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil$。另一方面,若 S的称法 (s_1,s_K)根据上面的算法而得,则有: $Msx\{K(s_0),K(s_1),K(s_2)\}=\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil$。即存在 $A\in N(S)$,使得 $\max\limits_{s\in A}\{K(s')\}=\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil$.所以:

$$\min_{A\in N(S)}\left\{\max_{s\in A}\{K(s')\}\right\}=\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil.$$

三、规则的算法分析

1. 算法的最优性

性质 3 设 s_1,s_2是小球的两个状态,则有 $K(s_1)=K(s_2)$包含 $H(s_1)=H(s_2)$。

证明:设小球状态 $S=(n,u,w,L)$,对 $K(S)=2u+w+L$进行归纳。

当 $K(S)=1$时,显然 $K(s_1)=K(s_2)=K(S)=1$, $H(s_1)=H(s_2)=H(S)=1$。原式成立。

假设对任意的小球状态 S,若 $K(S)<k$时结论成立,设 $K(s_1)=K(s_2)=K$,则有:

$\lceil \frac{K(s_1)}{3}\rceil=\lceil \frac{K(s_2)}{3}\rceil=\lceil \frac{k}{3}\rceil<k$,所以

$$\min_{A\in N(s_2)}\left\{\max_{s'_2\in A}\{k(s'_2)\}\right\}=\min_{A\in N(s_1)}\left\{\max_{s'_1\in A}\{k(s'_1)\}\right\}<K$$

由归纳假设有:

$$\min_{A\in N(s_2)}\left\{\max_{s'_2\in A}\{H(s'_2)\}\right\}=\min_{A\in N(s_1)}\left\{\max_{s'_1\in A}\{H(s'_1)\}\right\}$$

根据定义 4,则有 $H(s_1)=H(s_2)$,得证。

性质 4 对小球的任意状态 S,若从 S开始对小球实施的所有称法满足 2.1给出的规则,则称球 $H(S)$次数后,一定得到目标状态 s_G.

证明:设 (s_1,s_K)是根据 2.1节的算法而得到的 S的一个算法。则有:

$$\min_{A\in N(s)}\left\{\max_{s\in A}\{k(s')\}\right\}=\max_{s\in A(S,s_1,s_k)}\{k(s')\}=\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil$$

由引理 1可知

$$\min_{A\in N(s)}\left\{\max_{s\in A}\{k(s')\}\right\}=\max_{s\in A(S,s_1,s_k)}\{k(s')\}=\lceil \frac{k(s)}{3}\rceil$$

所以，$H(S)=\max\limits_{s\in A(S,s_1,s_k)}\{H(s')\}+1$

上式表明，若在当前状态 S下选择满足规则的称法 (s_1,s_K)，即使从天平得到最下利的称的结果，称的次数为 H(S)后得到目标状态。(当然从 S以后的状态选择的称法也应满足规则，这是归纳假设所要求的。)证毕。

2. 算法的最坏情况

定理：设 W(m)是按照上述算法在最坏情况下从 m个球中判别出一个次品球(轻或重)所需要称的次数，则：

$W(m)=3+\lceil \log_3\frac{m-1}{4}\rceil$ 其中 $m\in[4*3^{k-1}+1,4*3^k]$，k为正整数

为证明上述定理，先证明三个引理。

引理 1：当 $m\in[4*3^{k-1}+1,4*3^k]$时，若已知 $2\lceil\frac{m}{3}\rceil$ (或 $2\lceil\frac{m}{3}\rceil$)个球为好球，则从余下的 $\lceil\frac{m}{3}\rceil$ (或 $\lceil\frac{m}{3}\rceil$)个球中找出一个次品球(轻或重)最多需 k+1次。

证明：对 k用数学归纳法。

(1)当 k=1时，$m\in[5,12]$

m=5时，可能的分组为(2,2,1);

m=6时，可能的分组为(2,2,2);

m=7时，可能的分组为(2,2,3);

m=8时，可能的分组为(3,3,2);

m=9时，可能的分组为(3,3,3)

m=10时，可能的分组为(3,3,4);

m=11时，可能的分组为(4,4,3);

m=12时，可能的分组为(4,4,4);

依上述分组，在最坏情况下根据算法可以计算出所需要称的次数最多为 2，成立。

(2)假设 $1\le k\le p$时正确，则当 k=p+1时，此时球数 $r\in[4*3^p+1,4*3^{p+1}]$，显然 $\frac{r}{s}\in[4*3^{p-1}+1. 4*3^p]$，因已知 $\frac{r}{3}$个球中的 $2\lceil\frac{r/3}{3}\rceil$ (或 $2\lceil\frac{r/3}{3}\rceil$)个球为好球，依归纳假定，从余下的 $\lceil\frac{r/3}{3}\rceil$ (或 $\lceil\frac{r/3}{3}\rceil$)个球中找出次品球(轻或重)，最坏情况下按算法需 p+1次，故从 $r\in[4*3^p+1. 4*3^{p+1}]$个球中找出次品球(轻或重)，若已知 $2\lceil\frac{r/3}{3}\rceil$ (或 $2\lceil\frac{r/3}{3}\rceil$)个球为好球，最坏情况下按算法需(p+1)+1次。成立。

依数学归纳法可知引理 1正确。证毕。

引理 2 当 $m\in[4*3^{k-1}+1,4*3^k]$时，若已知 $\lceil\frac{m}{3}\rceil_L>\lceil\frac{m}{3}\rceil_R$，其中 $\lceil\frac{m}{3}\rceil_L$表示放在天平左端的球数，$\lceil\frac{m}{3}\rceil_R$表示放在右端的球数，"〉"表示左重右轻，$\lceil\frac{m}{3}\rceil$个球是正品球($\lceil\frac{m}{3}\rceil+\lceil\frac{m}{3}\rceil+\lceil\frac{m}{3}\rceil=m$)。则当分辨出某个球为好、轻、重球时，称的次数在最坏情况下为 k+1次。(k为正整数)

证明：对 k用数学归纳法。

(1)当 k=1时，$[4*3^{k-1}+1,4*3^k]=[5,12]$，显然在已知条件下，至多还需 1+1=2次。结论成立。

(2)假设 $1\le k\le p$时成立，即当 $m\in[4*3^{p-1}+1,4*3^p]$时，若已知 $\lceil\frac{m}{3}\rceil_L>\lceil\frac{m}{3}\rceil_R$且 $\lceil\frac{m}{3}\rceil$个球为好球，则从 $2\lceil\frac{m}{3}\rceil$个球中找出次品球(轻或重)至多需 k+1次。则当 k=p+1时，此时球数 $r\in[4*3^p+1,4*3^{p+1}]$，因为已知 $\lceil\frac{r}{3}\rceil_L>\lceil\frac{r}{3}\rceil_R$且 $\lceil\frac{r}{3}\rceil$个球为好球，按算法将左端 $\lceil\frac{r}{3}\rceil$个非轻的球分为三组，不妨分为：L_{1L}、L_{2L}、L_{3L}，按算法将右端 $\lceil\frac{r}{3}\rceil$个非重的球分为三组：R_{1R}、R_{2R}、R_{3R}，其中：$L_{1L}+L_{2L}+L_{3L}=\lceil\frac{r}{3}\rceil_L$，$L_{2L}=\lceil\frac{\lceil\frac{r}{3}\rceil_L}{3}\rceil$，$L_{1L}=L_{3L}$；$R_{1R}+R_{2R}+R_{3R}=\lceil\frac{r}{3}\rceil_R$，$R_{3R}=\lceil\frac{\lceil\frac{r}{3}\rceil_R}{3}\rceil$，$R_{1R}=R_{2R}$；由算法可知，当 $\lceil\frac{r}{3}\rceil_L+\lceil\frac{r}{3}\rceil_R$不是 3的倍数时，在右端至少加一个好球，使得在新的分组中，天平左、右端的球数相等。按算法，左端 $=L_{1L}*R_{3R}$，右端 $=L_{2L}*R_{2R}$。

如果左端>右端，由此可以确定 R_{3R}、L_{2L}组的球为好球，此时 $L_{1L}>R_{2R}$。因为 $r\in[4*3^p+1,4*3^{p+1}]$，所以 $\frac{r}{3}\in[4*3^{p-1}+1,4*3^p]$(球数不能为小数，故将 $\frac{1}{3}$取为 1)由归纳假定依此往下称 p+1次可以分辨出轻或重球；

如果左端<右端，同理可得只须 p+1次可以找出轻或重球；

如果左端=右端，根据引理 1成立。

故当 k=p+1时，引理 2成立。由数学归纳法可得到引理 2正确。证毕。

引理 3 按本文提出的算法，当球数 $m\in[4*3^{k-1}+1,4*3^k]$时，其中 k为正整数。从中找出次品球(轻或重)，在最坏情况下的称球次数为：

$$w(m)=\begin{cases}2 & m=3\\ 3 & m=4\\ 2+k & m>4\end{cases}$$

证明：对 k用数学归纳法。

(1)当 k=1时，按算法计算可得：w(5)=3; w(6)=3; w(7)=3; w(8)=3; w(9)=3; w(10)=3; w(11)=3; w(12)=3 而此时 $m\in[4*3^{k-1}+1,4*3^k]=[5,12]$，所以：w(m)=2+k=3成立。

(2)假设当 $1\le k\le p$时成立，即当 $m\in[4*3^{p-1}+1,4*3^p]$时，w(m)=2+p，则当 k=p+1时，此时设球数 $r\in[4*3^p$

$+1, 4*3^{p+1}$],将 r个球根据算法分为三组,其中至少有两组所含球数相同,比较这两组(一般记为 LEFT和 RIGHT)如果 LEFT> RIGHT,依引理 1,从余下的 $2\lceil\frac{r}{3}\rceil$ (或 $2\lceil\frac{r}{3}\rceil$)个球中找出次品球(轻或重),称的次数至多为 $(p+1)+1$次,故共需 $((p+1)+1=(P+1)+2$,同理若 LEFT> RIGHT,依引理 2共需 $(p+1)+2$次;如果 LEFT= RIGHT,此时 $\frac{r}{3}\in[4*3^{p-1}+1, 4*3^{p}]$,依归纳假设,称的次数至多 $(p+1)+1$次,故共需 $(p+1)+1+1=(p+1)+2$次。所以当 $k=p+1$时,结论成立。

依归纳法,引理 3得证。

证明定理:由 $m\in[4*3^{k-1}+1, 4*3^{k}]$,解得: $k\leqslant\log_3\frac{m-1}{4}+1$,而 k为正整数,所以 $k\leqslant\lceil\log_3\frac{m-1}{4}+1\rceil=\lceil\log_3\frac{m-1}{4}\rceil+1$,根据引理 3, $w(m)=2+k\leqslant 2+1+\lceil\log_3\frac{m-1}{4}\rceil=3+\lceil\log_3\frac{m-1}{4}\rceil$。即在最坏情况下,按照算法,从 m个球中找出一个次品球(轻或重)至多需 $3+\lceil\log_3\frac{m-1}{4}\rceil$次。定理证毕。

$w(m)=2+k\leqslant 2+1+\lceil\log_3\frac{m-1}{4}\rceil=3+\lceil\log_3\frac{m-1}{4}\rceil$。即在最坏情况下,按照算法,从 m个球中找出一个次品球(轻或重)至多需 $3+\lceil\log_3\frac{m-1}{4}\rceil$次。定理证毕。

四、应用

利用启发式规则,可以将称球问题推广到一般情形。根据该算法可以解决许多实用问题,诸如辨伪币、挑选乒乓球,特别是工业上的产品质量检验,它可以帮助质检部门用最少的开支完成产品检验。本算法已编程实现,算法的复杂度是 $O(\log_3 m)$。

参考文献

[1]萨拉·巴斯(美),《计算机算法:设计和分析引论》,复旦大学出版社, 1995

[2]潘金贵等,《TURBO C程序设计技术》,南京大学出版社, 1990

Abstract This paper gives an heuristic rule to solve the problem of ball weighing. And it shows that it is sure to reach the goal state with the least times of ball-weighing.

Key words ball weighed problem heuristic rule computational

(收稿日期: 99年 4月 9日)

(上接第 18页)

组)会通过事件驱动方式执行各自的过程程序得出实时的财务信息处理结果。这样,传统的财务部门的设置就可大为简化。例如,福特汽车公司北美财务部经过网络化和 BPR后,成效显著,原来有员工 500人,现为 120人:业务也大为简化,减少了对帐,取消了发票,甚至取消了到货验收等环节,可以说,如果没有信息技术和与之相对应的先进的会计观念,这一切简直是不可想象的。

四、小结

企业的一切活动都与财务信息系统有着直接或间接的联系,因此财务信息系统在企业管理信息系统中占有举足轻重的地位。而 Intranet技术的广泛应用则为企业财务信息系统的发展带来了更为广阔的空间,为我国目前实现会计软件由核算型向管理型转变提供了一个很好的契机。抓住这一机遇,就可以使我国的计算机在企业的应用走上一个新的台阶,从而从根本上满足企业对信息的高质量的需求,这必将导致全新概念的网络化企业的出现。

参考文献

[1]金光华主编《会计信息系统设计与会计电算化》武汉工业大学出版社 1997/4

[2]吴旺盛《论电算化会计信息系统的模式》《上海会计》98/7

[3]袁树民《BPR技术与会计信息系统》《上海会计》98/4-5

[4]陈维新《Intranet带领企业进入全新的网络时代》计算机世界 1997/10

[5]孙保文等《管理信息系统的新思路—基于 Intranet的 MIS》《管理信息系统》1998/10

[6](美) David Kosiur《电子贸易》清华大学出版社 1997/6

Business accounting software is one of the successful applications in present China. It has developed from checking application to managerial and decision making application. There is still much limitation in the process of development. However, Internet/Intranet offers a bright prospect for Accounting Information System (AIS).

Key words Accounting information system Business process Network

(收稿日期: 99年 6月 25日)