成　果　集　锦

双圆四边形中一个关联四圆的不等式

甘肃省金昌市一中　张　赟　张　云

定理　设 $ABCD$ 为双圆四边形，R、r 分别为外接、内切圆半径，r_1、r_2 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle ADC$ 的内切圆半径，则有

$$R\geqslant\frac{4r\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)}}{r_1+r_2}. \quad ①$$

证明：记 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，$\triangle ABC$、$\triangle ADC$ 的面积分别为 Δ_1、Δ_2，四边形 $ABCD$ 的面积为 Δ，半周长为 p，则 $\Delta_1=\frac{1}{2}r_1(a+b+AC)$，$\Delta_2=\frac{1}{2}r_2(c+d+AC)$.

由 $\Delta=\Delta_1+\Delta_2$，得

$$2\Delta=r_1(a+b)+r_2(c+d)+AC(r_1+r_2).$$

由文[1]知 $\Delta=\sqrt{abcd}$，

$$R=\frac{1}{4}\left(\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\therefore AC=\left(\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{4R\Delta}{ab+cd}\leqslant\frac{4R\Delta}{2\Delta}=2R,$$

$$\therefore 2\Delta\leqslant r_1(a+b)+r_2(c+d)+2R(r_1+r_2),$$

$$\Delta=\frac{1}{2}r(a+b+c+d).$$

$$\begin{aligned}\therefore 2R(r_1+r_2)&\geqslant(a+b)(r-r_1)+(c+d)(r-r_2)\\&\geqslant2\sqrt{(a+b)(c+d)(r-r_1)(r-r_2)}\\&\geqslant2\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot2\sqrt{cd}(r-r_1)(r-r_2)}\\&=4\sqrt{pr(r-r_1)(r-r_2)}.\end{aligned}$$

但 $p^2r^2=\Delta^2=abcd\leqslant\left(\frac{1}{4}(a+b+c+d)\right)^4=\left(\frac{p}{2}\right)^4$，$p\geqslant4r$，

$$\therefore 2R(r_1+r_2)\geqslant8r\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)}.$$

整理即得①.

参考文献

1　杨之. 初等数学研究的问题与课题. 长沙：湖南教育出版社，1993

天平称球问题的一般结论

四川省成都市金牛区教研培训中心　谢　祥

问题与结论　t 个球中有一个次品(它较轻)，若 $t\in[3^n+1, 3^{n+1}]$，则用天平称出次品最多要 $(n+1)$ 次(若它较重，也一样)

证明：用归纳法：(1) $n=0$ 时，$t\in[2,3]$，显然1次即可.

(2) $n=1$ 时，$t\in[4,9]$. 由于 $4=2+2$，$5=2+2+1$，$6=3+3$，$7=3+3+1$，$8=3+3+2$，$9=3+3+3$，因此，称1次最多"剩"3个(不平，在轻的一组中；平了，在未称的一组中)，化归为(1)的情形.

(3) 设 $n=k-1(k\geqslant2)$ 时，结论成立，即 $t\in[3^{k-1}+1, 3^k]$ 时，称出次品最多要 k 次. 考虑 $t\in[3^k+1, 3^{k+1}]$ 的情形. 现在分段考虑：

对 $t\in[3^k+1, 3^k+2\times3^{k-1}]$，$t$ 可如下分拆：

$3^k+1=3^{k-1}+3^{k-1}+(3^{k-1}+1)$，…，$3^k+3^{k-1}=3^{k-1}+3^{k-1}+(3^{k-1}+3^{k-1})$，…$3^k+2\circ3^{k-1}=3^{k-1}+3^{k-1}+(3^{k-1}+2\times3^{k-1})$

对 $t\in[3^k+2\times3^{k-1}+1, 3^k+3^k]$，$t$ 可分拆为

$3^k+2\times3^{k-1}+1=2\times3^{k-1}+2\times3^{k-1}+(3^{k-1}+1)$，…，

$3^k+3^k=2\times3^{k-1}+2\times3^{k-1}+(3^{k-1}+3^{k-1})$.

对 $t\in[2\times3^k+1, 3^{k+1}]$，可将 t 分拆为：

$2\times3^k+1=3^k+3^k+1$，$2\times3^k+2=3^k+3^k+2$，…，$3^{k+1}=3^k+3^k+3^k$.

可见，无论哪种情形，称1次，剩下的含次品球的组，其球数在 $[3^{k-1}+1, 3^k]$ 范围内，按归纳假设，k 次可称出，加上开始的1次，共用 $k+1$ 次.

由于在论证过程中，总假定"最坏情况"，因而是"最多"的次数，在侥幸情况($2\times3^k+1=3^k+3^k+1$ 时，把 3^k、3^k 放在盘中恰好平衡，则剩下的1个即为次品，1次即称出)，可用较少次数. 证毕.

(注：本栏发表的短文，是由中国初等数学研究工作协调组杨世明老师摘编的初等数学研究未发表的新成果，摘录较少的，当不影响原文全文的发表，杨老师地址：天津宝坻华苑1—2—102，邮码：301800，电话：022—82686221)