两类‘称球问题’的统一非序列解*

肖 新 攀
(双新研究所,四川 攀枝花 学园路 617000)

[摘要] 讨论称球问题的两个版本,通过综合文中华[湘潭大学自然科学学报,2004,26(1):42 - 48]和 Born[Information Processing Letters,2003,86:137 - 141]的研究结果,给出一种可同时用于解决两个问题的通用算法. 算法生成的方案是非序列的,且对于这两个版本而言都是最优的.

关 键 词:称球问题;伪币问题;非序列方案;Dyson 集
中图分类号:TP301.6　　文献标识码:A　　文章编号:1000 - 5900(2006)02 - 0028 - 05

A Nonsequential Solution for Two Different Versions of the Weighing Problem

XIAO Xin - pan
(Double Novae Institute, Panzhihua Xueyuan Road, Sichuan 617000 China)

【Abstract】 By synthesizing results from Wen [Natural Science Journal of Xiangtan University,2004,26(1):42 – 48] and Born et. al. [Information Processing Letters,2003,86:137 – 141], this paper presents an algorithm that generates nonsequential schemes capable of solving two different versions (the original one and the "search – only" one) of the weighing problem simultaneously. Schemes generated by the algorithm are shown to be optimal for both versions.

Key words: The Weighing Problem; The Counterfeit Coin Problem; nonsequential schemes; Dyson sets

---

“称球问题”(The Weighing Problem)常称为‘伪币问题’(The Counterfeit Coin Problem). Dyson 于 1946 年提出了这个问题的一个‘标准版本’并给出了完整的解答[5]. Bellman 于 1961 年给出了这一问题的许多变种[1]. 此后,许多研究者对这一问题的不同版本和推广进行了研究. Halbeisen[6] 讨论了有多个天平和多个‘异类球’的情况,并将称量方案分为‘序列’和‘非序列’两类. De Bonis[3] 则讨论了多臂天平的称量问题.

在讨论之前,对术语作出约定. 将待查找的球中,重量与其它球皆不相同的一个称为‘异类球’,其它的小球称为‘标准球’. 若异类球较标准球轻,则称此异类球为‘轻球’,反之称为‘重球’. 指出异类球的过程称为‘查找’,把要求指出异类球轻重的查找过程称为‘鉴别’. 相应地,把 Born[2] 所讨论的鉴别问题称为‘标准称球问题’,把文中华[7] 讨论的查找问题称为‘不确定称球问题’. 将能确保通过 w 次称量从 n 个球中查找(鉴别)出异类球的方案称为 n 元 w 次称量查找(鉴别)方案. Dyson[5] 证明,当且仅当 $3 \leqslant n \leqslant (3^w - 3)/2$ 时,存在 n 元 w 次称量鉴别方案. 文中华[7] 则证明,当且仅当 $3 \leqslant n \leqslant (3^w - 1)/2$ 时,存在 n 元 w 次称量查找方案. 自然地,将能达到上述称量次数下界的鉴别(查找)方案称为‘最优方案’.

由 Dyson[5] 和文中华[7] 的结论可知,当 $n \geqslant 3$ 时,最小称量次数 $w \geqslant 2$. 为此约定,以下提到 n、w、k 时,均指 $n, w, k \in N$ 且 $n \geqslant 3, w \geqslant 2, k \geqslant 1$.

称量方案可分为两类:‘序列的(sequential)’(或称‘适应性的(adaptive)’)和‘非序列(non – sequential)的’(或称‘非适应性的(non – adaptive)’)[2,6]. 前者允许根据称量结果动态地调整称量方案,后者则要求事先确定整个方案.

显然,作为一类特殊的称量方案,一般称量方案的称量次数下界对非序列方案仍然有效. Born[2] 构造性地证明了,对于所有的 $n \geqslant 3$,都存在最优的非序列称量方案. 本文给出‘通用称球算法’,可以同时生成‘不确定称球问题’和‘标准称量问题’的非序列最优方案.

---

* 收稿日期:2005 - 08 - 26
作者简介:肖新攀(1973 –),男,湖北 武汉人. E – mail:xiaoxinpan@163.com
万方数据

1　不确定 Dyson 集

记 $V_w = \{-1,0,1\}^w$，$\mathbf{0}_w = \underbrace{(0,0,\cdots,0)}_{w个0}$．在不引起歧义的情况下，分别将 V_w 和 $\mathbf{0}_w$ 简记为 V 和 $\mathbf{0}$．

标准 Dyson 集[2]　对 $w \geqslant 2$，由 $\{-1,0,1\}$ 上的 n 个互不相同的 w 维向量构成的集合 $S \subseteq V_w$ 称为"n 元 w 维标准 Dyson 集"，当且仅当（D1）$\sum_{v \in S} v = \mathbf{0}_w$，并且（D2）$\forall v \in S(-v \notin S)$

不确定 Dyson 集　对 $w \geqslant 2$，由 $\{-1,0,1\}$ 上的 n 个互不相同的 w 维向量构成的集合 $S \subseteq V_w$ 称为"n 元 w 维不确定 Dyson 集"，当且仅当（D1）$\sum_{v \in S} v = \mathbf{0}_w$，并且（D2′）$\forall v \in S(v = \mathbf{0}_w \vee -v \notin S)$．

由标准 Dyson 集和不确定 Dyson 集的定义显然有以下的性质．

（1）若 S 是一个 n 元 w 维标准 Dyson 集，则 S 也是一个 n 元 w 维不确定 Dyson 集．

（2）对一个 n 元 w 维不确定 Dyson 集 S，若有 $\mathbf{0}_w \notin S$，则 S 也是一个 n 元 w 维标准 Dyson 集．

（3）若 $\mathbf{0} \in S$，则 $S' = S - \{0\}$ 是一个 $n-1$ 元 w 维标准 Dyson 集．

（4）若 S 是 n 元 w 维标准 Dyson 集，则 $S \cup \{\mathbf{0}_w\}$ 是 $n+1$ 元 w 维不确定 Dyson 集．

（5）若 $S = \{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 n 元 w 维不确定 Dyson 集，则可以在 S 中每一个向量的末尾添加一个新的分量，构成一个 n 元 $w+1$ 维标准 Dyson 集 S'．

证明　构造 n 元 $w+1$ 维标准 Dyson 集 S'．若存在 $v_k = \mathbf{0} \in S$，则令 $t = k$，否则，令 $t = 1$．若 $t = 1$，则令 $s = 2$，否则令 $s = t-1$．对每一个 $v_i = (v_i[1],\cdots,v_i[w]) \in S$，构造 $w+1$ 维向量 v'_i，

$$v'_i[j] = \begin{cases} v_i[j], & \text{当 } 1 \leqslant j \leqslant w; \\ 1, & \text{当 } j = w+1 \text{ 且 } i = t; \\ -1, & \text{当 } j = w+1 \text{ 且 } i = s; \\ 0, & \text{当 } j = w+1 \text{ 且 } 1 \leqslant i \leqslant n \wedge i \notin \{s,t\}. \end{cases}$$

易证，若 S 是 n 元 w 维不确定 Dyson 集，则 $S' = \{v'_1,v'_2,\cdots,v'_n\}$ 是 n 元 $w+1$ 维标准 Dyson 集．

（6）若 $S = \{v_1,\cdots,v_n\}$ 是不确定 Dyson 集，则 $\forall\ v_i,v_j \in S(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 有 $v_i \neq v_j$ 和 $v_i \neq -v_j$．

证明　对任意 $v_i,v_j \in S(1 \leqslant i < j \leqslant n)$，由不确定 Dyson 集中元素的互异性即有 $v_i \neq v_j$．

反设 $v_i = -v_j$，则有 $v_j \neq \mathbf{0}_w$（若不然，就有 $v_i = -v_j = -\mathbf{0} = 0 = v_j$，与互异性矛盾），由不确定 Dyson 集的条件（D 2′）和 $v_j \neq \mathbf{0}_w$ 可知，$-v_j \notin S$．这与 $-v_j = v_i \in S$ 矛盾．

***sol* 函数**　定义一个从 V_w 的 n 元子集到 n 元 w 维称量方案的映射 sol．对任意 $S = \{v_1,\cdots,v_n\} \subseteq V_w$，定义 $sol(S)$

（i）若 $v_i[j] = -1$，则在第 j 次称量时，将第 i 个球放在天秤左侧．

（ii）若 $v_i[j] = 1$，则在第 j 次称量时，将第 i 个球放在天秤右侧．

（iii）若 $v_i[j] = 0$，则在第 j 次称量时，将第 i 个球不放在天秤上．

其中 $v_i[j]$ 表示向量 v_i 的第 j 个分量．对任意 $S \subseteq V_w$，sol(S) 是一个非序列的 n 元 w 次称量方案．

下面将文献[2]中的 Lemma 4 扩展为对 $n \geqslant 3$，若存在一个 n 元 w 维不确定 Dyson 集 S，则 $sol(S)$ 是一个非序列的 n 元 w 次称量查找方案．若 S 同时也是 n 元 w 维标准 Dyson 集，则 $sol(S)$ 也是一个非序列的 n 元 w 次称量鉴别方案．

证明　依照方案 $sol(S)$ 进行称量，并用向量 $z = (z[1],\cdots,z[w]) \in V_w$ 记录每次称量结果，其中

$$z[i] = \begin{cases} -1, & \text{若第 } i \text{ 次称量时天平向左倾斜；} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 次称量时天平平衡；} \\ 1, & \text{若第 } i \text{ 次称量时天平向右倾斜；} \end{cases} \quad (1 \leqslant i \leqslant w).$$

下面证明，第 i 个球为‘异类球’当且仅当 $z = v_i$ 或 $z = -v_i$．

这是因为若第 i 个球是‘重球’，则一切有第 i 个球参与的称量都将导致天秤向第 i 个球所在的一侧倾斜．而没有第 i 个球参与的称量都将是平衡的，此时就有 $z = v_i$．若第 i 个球是‘轻球’，则一切有第 i

万方数据

个球参与的称量都将导致天秤向第 i 个球所对的一侧倾斜,而没有第 i 个球参与的称量将是平衡的,此时有 $z=-v_i$.而(5)则保证了只存在唯一的 v_i . 也就是说,执行方案 $sol(S)$ 后,可以利用称量结果 z 唯一地确定出"异类球". 由于不确定 Dyson 集中允许有零向量,而 $\mathbf{0}=-\mathbf{0}$,故当 $z=\mathbf{0}$ 时,无法判断找出的小球是"轻球"还是"重球". 故,这时的 $sol(S)$ 不一定是 w 次称量鉴别方案.

若 S 是 n 元 w 维标准 Dyson 集,则由标准 Dyson 集定义的(D2)知,对所有 $v\in S$,有 $-v\notin S$. 因此,对任意 $v_i\in S$, $v_i=z$ 和 $-v_i=z$ 至多只有一个成立. 从而,不仅可以通过 z 找出异类球,还可以根据 v_i 的符号判定该球是"轻球"还是"重球". 这就证明,当 S 是 w 维标准 Dyson 集时, $sol(S)$ 是一个 w 次称量鉴别方案.

2 通用 Dyson 集

为构造出同时适用于两个问题的称量方案,引入一种能兼容两种 Dyson 集的"通用 Dyson 集":

定义 1 一个 n 元 w_{std} 维标准 Dyson 集 $S_{std}=\{v_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 称为" n 元通用 Dyson 集",当且仅当(U1) $w_{std}=\lceil\log_3(2n+3)\rceil$,并且(U2) S 中每个向量的前 $w_{un}=\lceil\log_3(2n+1)\rceil$ 个分量所构成的向量集 $S_{un}=\{(v_i[1],\cdots,v_i[w_{un}])\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 是一个 n 元 w_{un} 维不确定 Dyson 集.

显然,对任意 $n\geqslant 3$,如果找到了 n 元通用 Dyson 集 S_n ,就找到了一个同时适用于"标准称球问题"和"不确定称球问题"的最优称量方案(当 $\lceil\log_3(2n+3)\rceil=\lceil\log_3(2n+1)\rceil$ 时, $sol(S_n)$ 既是最优查找方案,又是最优鉴别方案. 当 $\lceil\log_3(2n+3)\rceil=\lceil\log_3(2n+1)\rceil+1$ 时, $sol(S_n)$ 是最优鉴别方案,且去除 $sol(S_n)$ 的最后一次称量后,所得的称量方案就是最优查找方案).

引理 1 对任意整数 $n\geqslant 3$,存在 n 元通用 Dyson 集.

证明 分两种情况讨论.

情况 1 $(3^{k-1}-1)/2<n<(3^k-1)/2(k\in N)$. 这时有 $w_{std}=\lceil\log_3(2n+3)\rceil=\lceil\log_3(2n+1)\rceil=w_{un}=k$. 对这种情形,文献[2]的 Lemma 5 证明,存在 n 元 w_{std} 维标准 Dyson 集 S ,而 S 本身也是一个 n 元 w_{un} 维不确定 Dyson 集. 从而 S 即为所求.

情况 2 $n=(3^k-1)/2(k\in N)$. 这时有 $w_{std}=\lceil\log_3(2n+3)\rceil=k+1$, $w_{un}=\lceil\log_3(2n+1)\rceil=k$. 由文献[2]的 Lemma 5 可知,存在 $n-1$ 元 k 维标准 Dyson 集 S . 由(3)知, $S\cup\{\mathbf{0}_w\}$ 是一个 n 元 k 维不确定 Dyson 集. 再由(4)知, $S\cup\{\mathbf{0}_w\}$ 可扩展成一个 n 元 $k+1$ 维标准 Dyson 集 S' . 注意到, $k+1=w_{std}=\lceil\log_3(2n+3)\rceil$,因此, S' 满足定义 1 的条件(U1). 又因为 S' 是由一个 n 元 $k(=w_{un})$ 维不确定 Dyson 集加入一个分量扩展而得,故 S' 满足定义 1 的条件(U2). 从而, S' 即为所求.

3 通用称球算法

要构造出适用于两种称球问题的统一称量方案,只需构造通用 Dyson 集. 引理 1 的证明中需要首先构造标准 Dyson 集. 文献[2]的标准 Dyson 集构造方法需要将向量集 V_w 划分成若干个等价类,并从每个等价类中选取一个代表元素. 因此,若要使用上述方法构造出 n 元通用 Dyson 集,就需要找到一个高效的代表元枚举方法. 本节在复述文献[2]的标准 Dyson 集构造方法后,给出一个高效的代表元枚举方法及"通用称球算法"的描述和复杂度分析.

3.1 标准 Dyson 集的构造

定义 $\{-1,0,1\}$ 上的 3-轮换 $\sigma=(-1\ 0\ 1)$ 和函数 $f:V\to V$,对所有 $(v[1],\cdots,v[w])\in V$,有 $f((v[1],\cdots,v[w]))=(\sigma(v[1]),\cdots,\sigma(v[w]))$. 考虑如下 6 个置换.

$$g_1(x)=x,\qquad g_2(x)=f(x),\qquad g_3(x)=f(f(x)),$$
$$g_4(x)=-x,\qquad g_5(x)=-f(x),\qquad g_6(x)=-f(f(x)).$$

显然, $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_6\}$ 是一个置换群,且 G 同构于 3 元对称群 S_3 .

当 $v\in V_w$ 的各分量取值不全相同时, v 在 G 作用下的轨道 $G(v)$ 必有 6 个(互不相同)的元素. $\{(-$

万方数据

$1,\cdots,-1),(0,\cdots,0),(1,\cdots,1)\}$ 单独构成一个轨道,称这个轨道和其中的向量是‘平凡’的.因此,G 将 V 划分成 1 个 3 阶平凡轨道和 $(3^w-3)/6$ 个 6 阶非平凡轨道.

性质 1[2]　对任意 $v \in V$,有:(1) $-v \in G(v)$;(2) $v+f(v)+f(f(v))=0$;(3) 若 v 不是平凡向量,则有 $-v \notin \{v, f(v), f(f(v))\}$.

引理 2[2]　对任意 $w \geqslant 2$ 和 $3 \leqslant n \leqslant (3^w-3)/2$,存在 n 元 w 向量标准 Dyson 集.

3.2　代表元的枚举

上面的证明已经给出了构造标准 Dyson 集的基本方法.但要确切地给出一个具体的 Dyson 集,还需要有可以依次从每一个轨道中选出一个向量的方法.

定义 2　对于 V 在 G 作用下的每一个非平凡轨道 X,称 $v=\mathrm{rep}(X) \in X$ 为 X 的代表元当且仅当 v 满足:$v[1]=1$ 且 $v[\min\{i \mid v[i] \neq 1\}]=0$.也就是说,$\mathrm{rep}(X)$ 是 X 中以 1 开头且第一个非 1 分量是 0 的向量.

引理 3　V 在 G 作用下的每一个非平凡轨道都存在唯一的代表元.

证明　考虑任意非平凡轨道 X 和其中的一个向量 $v \in X$.由定义,$f(v)=(\sigma(v[1]),\cdots,\sigma(v[w]))$,而 σ 是 $\{-1,0,1\}$ 上的一个 3-轮换.

故 $\{g_1(v),g_2(v),g_3(v)\}=\{v,f(v),f(f(v))\}$ 中必然有唯一一个首分量为 1 的向量 $g_i(v)$.同理,$\{g_4(v),g_5(v),g_6(v)\}=\{-v,-f(v),-f(f(v))\}$ 中也有唯一一个首分量为 1 的向量 $g_j(v)$.

由于 X 是一个非平凡的轨道,故 $g_i(v)$ 和 $g_j(v)$ 中都存在取值不为 1 的分量.又由于 g_i 和 g_j 都是 3 元置换在 V 上的扩展,故 $g_i(v)$ 和 $g_j(v)$ 中第一个不为 1 的分量必在同一位置,且取值不同.由于这一分量的值不能是 1,$g_i(v)$ 和 $g_j(v)$ 的相应分量必然有一个是 0,另一个是 -1.其中对应分量取值为 0 的向量就是 X 的代表元.

引理 4　V 中的每一个非平凡的向量 $v \in V$,若 $v[1]=1$ 且 $v[\min\{i \mid v[i] \neq 1\}]=0$,则 v 是 V 在 G 作用下的某个轨道的代表元.

证明　由于 v 是一个非平凡的元素,故 v 所在的轨道 $X=G(v)$ 是一个非平凡的轨道.由引理 3 知,$G(v)$ 存在代表元 $\mathrm{rep}(G(v))$,又由代表元的唯一性知,$v=\mathrm{rep}(G(v))$.

由上述引理可知,要列出所有非平凡轨道的代表元,只需列出所有形如 $(1,\cdots,1,0,\cdots)$ 的向量.

引理 5　存在一个算法,它接受输入 $k(1 \leqslant k \leqslant (3^w-3)/6)$,并按一定的顺序无重复地列举出 V_w 中 k 个不同轨道的代表元,且这一算法的时间和空间复杂度分别是 $O(kw)$ 和 $O(w)$.

证明　考虑如下算法

```
(1) s = 1; t = w;
(2) for (i = 1; i < t; i++)
(3)         v[i] = 1;
(4) v[w] = 0;
(5) 输出 v;
(6) while (s < k)    {
(7)         for (i = w; i > t; i--)
(8)                 if (v[i] < 1) {
(9)                     v[i]++;
(10)                    break; }
(11)        if (i < w) {        // 此时,v[t+1] 至 v[w] 已全部为 1
(12)                    t--;
(13)                    v[t] = 0;
(14)                    i = t; }
(15)        for (j = i + 1; j <= w; j++)
```

万方数据

(16) $v[j]=-1$；

(17) 输出 v；

(18) $s++$； }

这一算法从 $(1,\cdots,1,0)$ 开始，按第一个 0 分量出现位置(在上述代码中用 t 表示)的递减顺序，不重复地列举了 V_w 中所有的代表元.上述算法除几个辅助变量外，只使用了一个 w 维向量 v 作为临时工作区. 因此，其空间复杂度为 $O(w)$.且除少量控制开销外，每生成一个代表元，至多只需做 w 次比较(第 6 步)和 w 次写入(第 12 步). 因此，生成 n 个代表元所需的时间是 $O(kw)$ 的.

3.3 通用算法及其复杂度

定理 1(通用称球算法) 存在一个时间复杂度为 $\Theta(n\log n)$，空间复杂度为 $\Theta(\log n)$ 的算法，它接受输入"球数"$n\geqslant 3$，输出最少称量查找次数 w_{un}、最少称量鉴别次数 $w(w_{un}\leqslant w)$ 和一个 w 次的非序列称量方案 B_{opt}，满足

(1) B_{opt} 是一个最优鉴别方案.

(2) B_{opt} 所确定的前 w_{un} 次称量构成一个最优查找方案.

证明 考虑以下算法

步骤 1 令 $w=\lceil\log_3(2n+3)\rceil$，$w_{un}=\lceil\log_3(2n+1)\rceil$.

步骤 2 按照引理 1 和引理 2 中所述的构造方法，逐行构造并输出 n 元通用 Dyson 集 S.

由引理 1 知，对任意 $n\geqslant 3$，这个算法都将正常结束. 按通用 Dyson 集的定义，$sol(S)$ 就是所求的非序列称量方案 B_{opt}. 因此，这个算法是正确的.

此算法第一步的时间和空间复杂度显然满足定理所述条件.

对于第二步，由于标准 Dyson 集构造方法不必回溯，每个向量一旦生成，就不必再做修改. 因此，可以逐行生成并输出，每次只需保存当前正在处理的向量. 所以，这一步骤的空间复杂度为 $\Theta(w)$.构造标准 Dyson 集的方法需要使用约 $1/3n\in\Theta(n)$ 个代表元，而这一部分的时间和空间复杂度分别是 $O(1/3nw)=O(nw)$ 和 $O(w)$.

所有步骤中，最为耗时的是 $f(v)$ 的计算. 每一次这样的计算耗时为 $\Theta(w)$. 由于需要做约 $2/3n\in\Theta(n)$ 次这样的计算，这一步总计耗时 $\Theta(nw)$.注意到，$w\in\Theta(\log n)$.因此，上述算法的时间和空间复杂度分别是 $\Theta(n\log n)$ 和 $\Theta(\log n)$.

4 结 论

通过进一步扩充'Dyson 集'的概念，解决并统一了"称球问题"的两个最为常见的版本，证明了对于这两个版本的'称球问题"，非序列方案和序列方案一样好.给出了一个与适应性算法有相同最坏情况复杂度的非适应性算法.相信进一步研究各类以'求和比较'为基本操作的算法问题以及各类问题的非序列解，将会对算法设计技术和计算复杂度理论的研究产生积极的作用.

参 考 文 献

[1] Bellman R，Glass B. On Various Versions of Defective Coin Problem[J]. Inform & Control，1961，4：118－151.

[2] Born A，Hurkens C A J，Woeginger G J. How to Detect a Counterfeit Coin：Adaptive versus non－adaptive solutions[J]. Information Processing Letters，2003，86：137－141.

[3] De Bonis Annalisa，Gargano Luisa，Vaccaro Ugo. Optimal Detection of a Counterfeit Coin with Multi－Arms Balances[J]，DAMATH：Discrete Applied Mathematics and Combinatorial Operations Research and Computer Science，1995，61：121－131.

[4] Grebinski Vladimir. On the Power of Additive Combinatorial Search Model[C]//Hsu Wen－Lian，Ming－Yang Kao，Eds，Computing and Combinatorics，4th Annual International Conference，COCOON '98. Taipei，Taiwan：Springer，1998：194－203.

[5] Dyson F J. The Problem of the Pennies[J]. The Mathematical Gazette，1946，30：231－234.

[6] Halbeisen Lorenz，Hungerbühler Norbert. The General Counterfeit Coin Problem [J]. Discrete Mathematics，1995，147：139－150.

[7] Wen Zhonghua. Study for Algorithm of Weighting Ball Problem[J]. Natural Science Journal of Xiangtan University，2004，26(1)：42－48.

万方数据