Chapter 1

2020 年笔记

1.1 20.07.27

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= [\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{2}} + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{\arcsin\frac{r}{2}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{2}}] f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.2 20.08.03

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{1+2})(1-\frac{1}{1+2})(1-\frac{1}{1+2+3})\dots(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}) =? \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} &= 1-\frac{2}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} \\ &= \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1\times 4}{2\times 3}\frac{2\times 5}{3\times 4}\dots\frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n}\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\frac{4}{2}\frac{2}{4}\frac{5}{3}\frac{3}{5}\frac{6}{4}\dots\frac{n+2}{n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\frac{n+2}{n} \\ &= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{1.4}$$

卡塔兰数 C_n

从 0 开始 $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0$$

该公式的证明可以通过

$$\Bigg(\bigg(\Big((\big)\Big)\bigg)\Bigg)$$

如图所示的括号匹配，C_n 可以看成上面四组括号的合理排列形式，（合理排列意味着每一对括号都是左右对应的，像)(这样的形式是非法的）

在 n 对括号的排列中，假设最后一个括号和第 i 个左括号匹配。则在第 i 个左括号之前，一定已经匹配上了 $(i-1)$ 对左括号。如下图，因此，此种情况的数量为 $f(i-1)*f(n-i-1)$。$(1 \le i \le n)$ 最后一个右括号可以 $1 \sim n$ 个左括号匹配共 n 种情况。

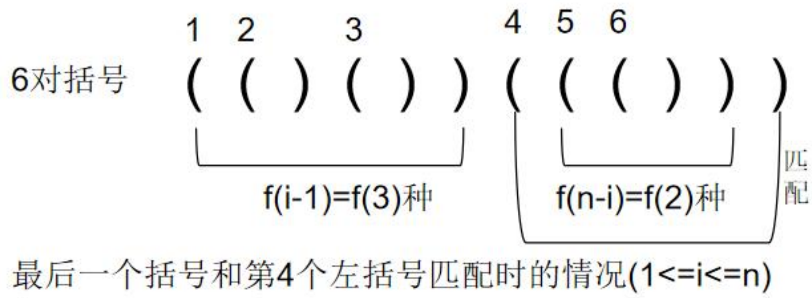

图 1.1: catalan number - proof

第 $n+1$ 项

$$C(n) = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$$

$$C(n) = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$$

通项公式

$$C_1 = 1, C_n = C_{n-1}\frac{4n-2}{n+1}$$

Python 实现

```
# 打印前 n 个卡特兰数
ans, n = 1, 20
print("1:" + str(ans))
for i in range(2, n + 1):
ans = ans * (4 * i - 2) // (i + 1)
print(str(i) + ":" + str(ans))
```

扩展

最后留一道比较有意思的卡特兰数问题，欢迎读者留言，提出自己的看法。

8 个高矮不同的人需要排成两队，每队 4 个人。其中，每排都是从低到高排列，且第二排的第 i 个人比第一排中第 i 个人高，则有多少种排队方式。

1.3 20.08.07

Theorem 1.3.1. *A-G 不等式*
任意 n 个非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \tag{1.5}$$

其中等号成立 $\iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

证明. 数学归纳法

$n=1$ 时结论平凡

$n=2$ $\quad \frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$

$$(a_1-a_2)^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0$$

$$a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 4a_1a_2$$

$$(a_1+a_2)^2 \geq 4a_1a_2$$

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$$

$n=k$ 时，假设 $\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1\ldots a_k}$ 成立

$n=k+1$

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_1+\cdots+a_k}{k} \\
=&\frac{k(a_1+\cdots+a_{k+1})-(k+1)(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)} \\
=&\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}
\end{aligned} \tag{1.6}$$

we found

$$\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} = \frac{a_1+\cdots+a_k}{k} + \frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}$$

note

$$A := \frac{a_1+\cdots+a_k}{k}, \qquad B := \frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}$$

$$(\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1})^{k+1} = (A+B)^{k+1} \geq A^{k+1} + (k+1)A^kB \tag{1.7}$$

使用二项式展开需要对 a_i 从小到大重排，而使用 Bernoulli 不等式则只需要 $A \geq 0, (A+B) \geq 0$ 即可

$$A^{k+1} + (k+1)A^kB = A^k(A+(k+1)B) \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
A^k = (\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1})^{k+1} \geq a_1\ldots a_k \quad \text{assume at}(n=k) \\
A+(k+1)B = \frac{a_1+\cdots+a_k}{k} + \frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k} = a_{k+1} \\
\because (A+B)^{k+1} \geq A^k(A+(k+1)B) \geq a_1\ldots a_ka_{k+1} \\
\therefore \frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1\ldots a_ka_{k+1}}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

使用二项式展开定理的条件：

在归纳法第二步对 $a_1\ldots a_{k+1}$ 重编号，使 a_{k+1} 为其中最大的数（之一）

这使得分解式右边第二项 $\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}$ 一定是非负数 □

证明. Forward and backward (Cauchy, 1897)

Forward Part:

$n=2$

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2} \tag{1.10}$$

$n=4$

$$\begin{aligned}
\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} &\geq \sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\frac{a_3+a_4}{2}} \\
&\geq \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} \\
&\geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$n=2^k$ 假设不等式 $\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1 \ldots a_{2^k}}$ 成立
$n=2^{k+1}$

$$\begin{aligned}\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &\geq \sqrt{\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{a_1 \ldots a_{2^k}}\sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \ldots a_{2^{k+1}}}} \\ &\geq \sqrt[2^{k+1}]{a_1 \ldots a_{2^{k+1}}}\end{aligned} \tag{1.12}$$

Backward Part: A-G 不等式对某个 $n \geq 2$ 成立，则它对 $n-1$ 也成立

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i &= \frac{1}{n}(\frac{n}{n-1})\sum_{i=1}^{n-1} a_i \\ &= \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n-1} a_i + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i)\end{aligned} \tag{1.13}$$

将 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i$ 看作 a_n

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq \sqrt[n]{(\prod_{i=1}^{n-1} a_i)(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i)} \tag{1.14}$$

$$(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^n \geq \prod_{i=1}^{n-1} a_i(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i) \tag{1.15}$$

$$(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^{n-1} \geq \prod_{i=1}^{n-1} a_i \tag{1.16}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq \sqrt[n]{(\prod_{i=1}^{n-1} a_i)(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i)} \tag{1.18}$$

$$(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^n \geq \prod_{i=1}^{n-1} a_i(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i) \tag{1.19}$$

$$(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^{n-1} \geq \prod_{i=1}^{n-1} a_i \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} a_i} \tag{1.21}$$

□

Theorem 1.3.2. 柯西，施瓦茨不等式
对 $a_1, \ldots, a_n$ 和 $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$，成立

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{1.22}$$

证明.

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \lambda^2\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq 0$$

由韦达定理（视 λ 为未知数），原方程无解或只有唯一解

$$
\begin{aligned}
\Delta = b^2 - 4ac \le 0 \\
(-2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le 0 \\
(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}
\end{aligned} \tag{1.23}
$$

□

1.4 20.08.11

Theorem 1.4.1. 定积分第一中值定理
设函数 $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. 且在 $[a,b]$ 上不变号，则存在 $\zeta \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x) = f(\zeta)\int_a^b g(x)dx$

证明. suppose that $g(x) \ge 0$. $f(x)$ continuous on close set,so we can get the maximum and minimum value of f. We note that m is the minimum value of $f(x), x \in [a,b]$,and M is the maximum value of $f(x)$, then we have:

$$
mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \tag{1.24}
$$

$$
m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \tag{1.25}
$$

note that we don't know$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ne 0$
When $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, then $g(x) \equiv 0$, So $\forall \zeta \in [a,b]$, the theorem works.
When $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, then $m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \le M$
From the Intermediate Value Theorem, $f(x) \in \mathbb{C}[a,b] \quad m \le f(x) \le M$

$$
\exists \zeta \in [a,b] \quad f(\zeta) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} \tag{1.26}
$$

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\zeta)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \tag{1.27}
$$

□

设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可积，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续单调递增，且 $f'(x) \ge 0$，并对 $\forall x \in [a,b]$ 有 $f(x) \ge 0$。则存在 $\zeta \in [a,b]$，使得

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_\zeta^b g(x)\mathrm{d}x \tag{1.28}
$$

证明. set$G(x) = \int_x^b g(t)\mathrm{d}t, g(x)$在$[a,b]$ 上可积
则 $G(x), x \in [a,b]$ 存在最值，设最小值和最大值分别为 m, M

$$
G(x) = -\int_b^x g(t)\mathrm{d}t, \quad G'(x) = -g(x) \tag{1.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}G(x) \\
= -(f(b)G(b) - f(a)G(a)) - \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x \\
= f(a)G(a) + \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{1.30}
$$

□

1.5 20.08.12

1.3.2 练习题

1. 关于 Bernoulli 不等式的推广：

(1) 证明：当 $-2 \geq h \geq -1$ 时 Bernoulli 不等式 $(1+h)^n \geq 1+nh$ 仍成立；

(2) 证明：当 $h \geq 0$ 时成立不等式

$$(1+h)^n \geq \frac{n(n-1)h^2}{2} \tag{1.31}$$

(3) 证明：若 $a_i > -1 \quad (i=1,2,\ldots,n)$ 且同号，则成立不等式

solve:

(1)

$$-2 \leq h \leq -1$$

$$-1 \leq 1+h \leq 0$$

$$-1 \leq (1+h)^n \leq 0$$

$$-2n \leq nh \leq -n$$

$$1-2n \leq 1+nh \leq 1-n$$

$n=0 \qquad (1+h)^0 = 1 = 1+0*h$ 结果是平凡的

$n=1 \qquad 1+h = 1+h$ 结果是平凡的

$n \geq 2 \qquad$ 此时 $1-n \leq -2$

$$0 \geq (1+h)^n \geq -1 \geq -2 \geq 1-n \geq 1-nh \geq 1-2n$$

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

(2)

$$h \geq 0 \qquad (1+h)^n \geq \frac{n(n-1)h^2}{2}$$

$$(1+h)^n = 1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

推广:

$$(1+h)^n \geq C_n^3h^3, C_n^4h^4, \ldots, C_n^kh^k, \qquad 0 \leq k \leq n$$

(3)

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

(a)$a_i \geq 0$, 且同号。

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) = 1+\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j+\sum_{i=1,i\neq j,k}^{n}\sum_{j=1,j\neq k}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_ia_ja_k+\ldots$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)}{1+a_k} \qquad \forall k \in 1,2,\ldots,n, \quad 1+a_k \geq 1$$

(b) $0 > a_i > -1$此时$1 > 1+a_i > 0$

别人的方法：$n=1$ 时不等式变成等式，显然成立

设 $n=k$ 时不等式也成立

$$\prod_{i=1}^{k}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{k}a_i$$

则 $n=k+1$ 时，有

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i)=\prod_{i=1}^{k}a_i(1+a_{k+1})\geq(1+\sum_{i=1}^{k}a_i)(1+a_{k+1})$$

$$(1+\sum_{i=1}^{k}a_i)(1+a_{k+1})=1+\sum_{i=1}^{k}a_i+a_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot a_{k+1}\geq 1+\sum_{i=1}^{k+1}a_i$$

$$\therefore\prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i)\geq 1+\sum_{i=1}^{k+1}a_i$$

2. 利用 A-G 不等式求解下列有关阶乘 $n!$ 的不等式

(1) 证明：当 $n>1$ 时成立

$$n!<(\frac{n+1}{2})^n \tag{1.32}$$

(2) 利用 $(n!)^2=(n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\dots(1\cdot n)$ 证明：当 $n>1$ 时成立

$$n!<(\frac{n+2}{\sqrt{6}})^n \tag{1.33}$$

(3) 比较 (1)(2) 两个不等式的优劣，并说明原因；

(4) 证明：对任意实数 r 成立

$$(\sum_{k=1}^{n}k^r)^n\geq n^n(n!)^r \tag{1.34}$$

solve:

(1) when $n>1$

$$n!=1\times 2\times\cdots\times n<(\frac{1+2+\cdots+n}{n})^n$$

$$(\frac{1+2+\cdots+n}{n})^n=(\frac{n(n+1)}{2n})^n=(\frac{n+1}{2})^n$$

(2) when $n>1$

$$(n!)^2=(n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\dots(1\cdot n)<(\frac{n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\cdots+1\cdot n}{n})^n$$

$$n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\cdots+1\cdot n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k&=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=(n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)}{6}(3(n+1)-(2n+1))\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}(n!)^2&=(n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\dots(1\cdot n)\\&<(\frac{n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\cdots+1\cdot n}{n})^n\\&=(\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(n+2)}{6})^n\\&=(\frac{(n+1)(n+2)}{6})^n\\&<(\frac{n+2}{6})^{2n}\end{aligned} \tag{1.36}$$

$$\therefore \qquad n! < (\frac{n+2}{\sqrt{6}})^n \tag{1.37}$$

(3)

$$\frac{n+1}{2} = \frac{n+2}{\sqrt{6}} \tag{1.38}$$

解得 $n = 1+\sqrt{6} > 3$, $n > 3$ 时 (2) 式更精确，结果比 (1) 式更好。

(4) $\forall r \in \mathbb{R} \quad (n!)^r \leq \frac{1}{n^n}(\sum_{k=1}^n k^r)^n$ 由 A-G 不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k^r \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n k^r} \tag{1.39}$$

$$(n!)^r = \prod_{k=1}^n k^r \leq (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k^r)^n = \frac{1}{n^n}(\sum_{k=1}^n k^r)^n \tag{1.40}$$

1.6 20.08.13

2.(4)

$$\begin{aligned} &\forall r \in \mathbb{R} \qquad (\sum_{i=1}^n k^r)^n \geq n^n (n!)^r \\ (n!)^r = \prod_{k=1}^n k^r \leq (\frac{1^r+2^r+\cdots+n^r}{n})^n = \frac{1}{n^n}(\sum_{k=1}^n k^r)^n &\quad \text{A-G inequality} \\ &\therefore (\sum_{k=1}^n k^r)^n \geq n^n (n!)^r \end{aligned} \tag{1.41}$$

3. $a_k > 0, \quad k = 1,2,\ldots,n$ 证明几何-调和平均值不等式

$$(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \tag{1.42}$$

证明. from A-G inequality

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}{n} &\geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}} \\ \therefore a_k > 0, \qquad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} &\geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \end{aligned} \tag{1.43}$$

□

4. $a, b, c \geq 0$, proof that

$$\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3} \tag{1.44}$$

并推广到 n 个非负数的情况

证明. left:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{abc} &= \sqrt{\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}} \\ &\leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \end{aligned} \tag{1.45}$$

right:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} &\le \sqrt{\frac{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{b+c}{2})^2+(\frac{c+a}{2})^2}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}{12}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{6}}\end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\because a,b,c \ge 0 \qquad \frac{ab+bc+ca}{3} \le \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{6} \tag{1.47}$$

需要证明 $\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \frac{a+b+c}{3}$
对该式两边平方

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \le \frac{(a+b+c)^2}{9} = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{9} \tag{1.48}$$

$$\begin{aligned}\frac{ab+bc+ca}{3} &\le \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{ab+bc+ca}{6} \\ &\le \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{ab+bc+ca}{3} \\ &= (\frac{a+b+c}{3})^2 \\ \therefore \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} &\le \frac{a+b+c}{3}\end{aligned} \tag{1.49}$$

□

证明. 推广至 n 个

$$\begin{aligned} &n=2 \qquad \sqrt{ab} && \le \frac{a+b}{2} \\ &n=3 \qquad \sqrt[3]{abc} && \le \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} && \le \frac{a+b+c}{3} \\ &n=k \qquad \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} a_i} && \le \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}-1 a_i a_{i+1} + a_k a_1}{k}} && \le \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{k}\end{aligned} \tag{1.50}$$

$$1 \qquad \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1^2 a_2^2 \dots a_k^2}} \le \sqrt{\frac{a_1a_2+a_2a_3+\dots a_ka_1}{k}} \tag{1.51}$$

$$2 \qquad \sqrt{\frac{a_1a_2+a_2a_3+\dots a_ka_1}{k}} \le \frac{a_1+\dots+a_k}{k} \tag{1.52}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_1a_2+a_2a_3+\dots a_ka_1}{k} &\le \frac{a_1^2+\dots a_k^2}{2k} \\ 2\frac{a_1a_2+a_2a_3+\dots a_ka_1}{k} &\le \frac{(a_1+\dots a_k)^2}{2k} \\ \sqrt{\frac{a_1\dots a_k}{k}} &\le \frac{a_1+\dots+a_k}{\sqrt{4k}} \quad \text{wrong!}\end{aligned} \tag{1.53}$$

□