

# 具体数学阅读笔记-chap2

weiyuan

2022-07-04

## 0.1 求和

### 0.1.1 求和符号

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{1 \leq k \leq n} a_k \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k < 100} k^2 &= 1^2 + 3^2 + \dots + 99^2 \\ &= 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2 - (2^2 + 4^2 + \dots + 100^2) \\ &= 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2 - 4 \times (1^2 + 2^2 + \dots + 50^2) \\ &= \frac{100 \times 101 \times 201}{6} - 4 \frac{50 \times 51 \times 101}{6} \\ &= \frac{100 \times 101}{6} (201 - 102) \\ &= \frac{99 \times 100 \times 101}{6} \\ &= 166650 \end{aligned}$$

一般形式比有确定界限形式更好处理

$$k \rightarrow k+1$$

一般形式,

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k = \sum_{1 \leq k+1 \leq n} a_{k+1} = \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_{k+1} \quad (2)$$

有确定界限形式

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \quad (3)$$

不要轻易省略 0 项计算有效性不等同于理解的有效性

$$\sum_{k=0}^n k(k-1)(n-k) \quad \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k)$$

保持求和界限简单大有裨益

$$\sum_{\substack{p \leq N \\ p \text{ 是素数}}} \frac{1}{p} = \sum_p [p \text{ 是素数}] [p \leq N] / p \quad (4)$$

$$[p(k)] \text{ 约定 } \rightarrow p(k) \text{ 为假 } \begin{cases} [p(k)] \text{ 必定是 } 0 \\ a_k[p(k)], a_k \text{ 无意义, } a_k[p(k)] \text{ 仍是 } 0 \end{cases}$$

由约定  $\frac{[0 \text{ 是素数}][0 \leq N]}{0} = 0$

**0.1.2 求和与递归式 Sums and recurrences**

和式

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (5)$$

等价于递归式

封闭形式解递归式的值  $\Rightarrow$  封闭形式解和式

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_n = S_{n-1} + a_n, \quad n > 0. \end{cases} \quad (6)$$

若  $a_n = \text{const.} + k \cdot n$ , 则有

$$\begin{cases} R_0 = \alpha \\ R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n, \quad n > 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$R_1 = R_0 + \beta + \gamma$$

$$R_2 = R_0 + 2\beta + 3\gamma$$

$$\vdots$$

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma$$

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \quad (8)$$

repertoire method 令  $R_n = 1$ , 则  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$ ,

$$A(n) = 1$$

令  $R_n = n$ , 则  $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$ ,

$$B(n) = n$$

令  $R_n = n^2$ , 则  $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 2$ ,

$$C(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

**例 1.**

$$\sum_{k=0}^n (a + bk)$$

**解 1.**

$$\begin{cases} R_0 = a \\ R_n = R_{n-1} + a + bn \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_0 = \alpha \\ R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n \end{cases}$$

$$\alpha = \beta = a, \gamma = b$$

$$\begin{aligned} A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma &= aA(n) + aB(n) + bC(n) \\ &= a + an + b\frac{n(n+1)}{2} \\ &= a(n+1) + \frac{bn(n+1)}{2} \end{aligned}$$

对上述递归情况进行推广

$$\begin{cases} R_0 = \alpha \\ R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2, \quad n > 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta \quad (10)$$

$\delta = 0$  时 (9) 与 (7) 一致, 说明  $A(n), B(n), C(n)$  不变

$$R_n = n^3$$

$$\begin{aligned} R_n - R_{n-1} &= n^3 - (n-1)^3 \\ &= 3n^2 - 3n + 1 \end{aligned}$$

解得  $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = -3, \delta = 3$

$$\begin{aligned} n^3 &= B(n) - 3C(n) + 3D(n) \\ &= n - 3\frac{n(n+1)}{2} + 3D(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3D(n) &= n^3 - n + 3\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1) \left[ (n-1) + \frac{3}{2} \right] \\ &= n(n+1) \left( n + \frac{1}{2} \right) \\ D(n) &= \frac{1}{3} \left( (n+1) \left( n + \frac{1}{2} \right) n \right) \end{aligned}$$

1. 和式用递归式求解

2. 递归式用和式求解

$$\begin{cases} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \quad n > 0 \\ fallings \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{T_0}{2^0} &= 0 \\ \frac{T_n}{2^n} &= \frac{T_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \quad n > 0 \end{cases}$$

$$\text{记 } S_n = \frac{T_n}{2^n}$$

求和因子  $s_n$

$$\begin{aligned}a_n T_n &= b_n T_{n-1} + c_n \\s_n a_n T_n &= s_n b_n T_{n-1} + s_n c_n\end{aligned}$$

选取求和因子使得  $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$  这样一来, 如果记  $S_n = S_{n-1} + s_n c_n$ , 我们就得到一个和式-递归式

$$\begin{aligned}S_n &= S_{n-1} + s_n c_n \\S_n &= s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^n s_k c_k = s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^n s_k c_k \\T_n &= \frac{1}{s_n a_n} \left( s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^n s_k c_k \right)\end{aligned}\tag{11}$$

例如, 当  $n = 1$  时得到  $T_1 = \frac{(s_1 b_1 T_0 + s_1 c_1)}{s_1 a_1} = \frac{(b_1 T_0 + c_1)}{a_1}$

但是, 我们怎样才能有足够的智慧求出正确的  $s_n$  呢? 没有问题: 关系式  $s_n = \frac{s_{n-1} a_{n-1}}{b_n}$  可以被展开, 从而我们发现, 分式

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1}{b_n b_{n-1} \cdots b_2}\tag{12}$$

或者这个值的任何适当的常数倍, 会是一个合适的求和因子. 例如, 河内塔递归式有  $a_n = 1$  和  $b_n = 2$ , 由刚刚推导出来的一般方法可知, 如果要把递归式转化为和式, 那么  $s_n = 2^{-n}$  就是一个用来相乘的好东西. 发现这个乘数并不需要闪光的思想灵感.

我们必须小心谨慎, 永远不用 0 做除数. 只要所有的  $a$  和所有的  $b$  都不为零, 那么求和因子方法就能奏效.

我们来把这些想法应用到“快速排序”研究中所出现的递归式, 快速排序是计算机内部数据排序的一种最重要的方法. 当把它应用到有  $n$  个随机排列的项目时, 用典型的快速排序方法所做的比较步骤的平均次数满足递归式

$$C_0 = C_1 = 0; C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad n > 1.\tag{13}$$

$$C_2 = 3, C_3 = 6, C_4 = \frac{19}{2}$$

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad n > 1.$$

消去分母中的  $n$

$$nC_n = n(n + 1) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad n > 1.\tag{14}$$

<sup>1</sup>  $s_1$  的值消去了, 所以它可以是除零以外的任何数.)

$n \rightarrow (n-1)$

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)n + 2 \sum_{k=0}^{n-2} C_k, \quad n-1 > 1. \quad (15)$$

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1}, \quad n > 2.$$

递归式化为

$$C_0 = C_1 = 0; C_2 = 3nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n, \quad n > 2. \quad (16)$$

使用求和因子方法处理  $a_n = n, b_n = n+1$  且

$$c_n = 2n - 2[n=1] + 2[n=2].$$

故而我们现在能用求和因子方法. 前面描述的一般方法告诉我们, 要用

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1}{b_nb_{n-1}\dots b_2} = \frac{(n-1) \times (n-2) \dots \times 1}{(n+1) \times n \times \dots \times 3} = \frac{2}{(n+1)n}$$

的某个倍数来遍乘该递归式

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{s_n a_n} \left( s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^n s_k c_k \right) \\ T_n &= \frac{n+1}{2} \left( 0 + \sum_{k=1}^n s_k c_k \right) \\ &= \frac{n+1}{2} \left( \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} 2k \right) \\ &= 2(n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= 2(n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{2}{3}(n+1), \quad n > 1 \end{aligned}$$

mynote(! 这里的推导有问题,  $s_0 = 0$  不能直接代入)

调和数 (harmonic number)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (17)$$

之所以这样命名, 是因为小提琴弦所产生的第  $k$  个泛音 (harmonic) 是弦长  $\frac{1}{k}$  处所产生的基音.

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq k \leq n} \frac{1}{k+1} &= \sum_{1 \leq k-1 \leq n} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{2 \leq k \leq n+1} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} - \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1} \\ &= H_n - \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

$$C_n = 2(n+1)H_n - \frac{8}{3}n - \frac{2}{3}, \quad n > 1. \quad (18)$$

### 0.1.3 求和式处理

分配律 distributive law

结合律 associative law

交换律 commutative law

等差级数 arithmetic progression

扰动法 perturbation method 把单独一次从和式中分出去

几何级数 geometric progression

### 0.1.4 多重求和

#### Exercise 1

$$A = \begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & a_2 a_2 & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & a_n a_2 & \cdots & a_n a_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\text{求 } S_{\triangleleft} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} a_j a_k^2$$

解 2.  $\because a_j a_k = a_k a_j$ ,  $\therefore$  矩阵 A 沿主对角线对称,  $S_{\triangleleft} = S_{\triangleright}$ .

$$[1 \leq j \leq k \leq n] + [1 \leq k \leq j \leq n] = [1 \leq j, k \leq n] + [1 \leq j = k \leq n]$$

$$\begin{aligned} 2S_{\triangleleft} &= S_{\triangleleft} + S_{\triangleright} = S_A + S_{\text{diag}(A)} \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} a_j a_k + \sum_{1 \leq j=k \leq n} a_j a_k \\ &= \left( \sum_{j=1}^n a_j \right) \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) + \sum_{k=1}^n a_k^2 \\ &= \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2 \end{aligned}$$

$$\therefore S_{\triangleleft} = \frac{1}{2} [(\sum_{k=1}^n a_k)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2]$$

---

<sup>2</sup>下三角形矩阵的符号是一个右上部分的直角三角形, 目前我还会输入

## Exercise 2

$$S = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \quad (20)$$

解 3. 交换  $j, k$  仍有对称性.

$$S = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_j - a_k)(b_j - b_k)$$

$$[1 \leq j < k \leq n] + [1 \leq k < j \leq n] = [1 \leq j, k \leq n] - [1 \leq j = k \leq n]$$

$$\begin{aligned} 2S &= 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) + \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\ &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) - \sum_{1 \leq j = k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\ &\quad (a_j - a_k = 0, b_j - b_k = 0, [j = k]) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} (a_k b_k - a_j b_k - a_k b_j + a_j b_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_k - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_k b_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_j \\ &= n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_k - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_k b_j + n \sum_{j=1}^n a_j b_j \\ &= 2n \sum_{k=1}^n a_k b_k - 2 \sum_{j=1}^n a_j \sum_{k=1}^n b_k \\ S &= n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) \end{aligned}$$

对上式结果重新排序得

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) = n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

定理 1. 切比雪夫单调不等式 (Chebyshev's monotonic inequality)

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) &\leq n \sum_{k=1}^n a_k b_k & a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, \text{ and } b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \\ \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) &\geq n \sum_{k=1}^n a_k b_k & a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, \text{ and } b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \\ \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k \right) &\geq n \sum_{k=1}^n a_k b_k & a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, \text{ and } b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \\ & & a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n, \text{ and } b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \end{aligned}$$



一般来说, 如果  $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$  且  $p$  是  $\{1, \dots, n\}$  的一个排列。那么不难证明:

当  $b_{p(1)} \leq \cdots \leq b_{p(n)}$  时  $\sum_{k=1}^n a_k b_{p(k)}$  最大。

当  $b_{p(1)} \geq \cdots \geq b_{p(n)}$  时  $\sum_{k=1}^n a_k b_{p(k)}$  最小。

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{P(k) \in K} a_{P(k)}$$

$P(k)$  为这些整数的任意一个排列。

$$f: J \Rightarrow K, \quad j \in J \quad f(j) \in K$$

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{k \in K} a_k \quad \#f^-(k)$$

式中  $\#f^-(k)$  表示集合  $f^-(k) = \{j | f(j) = k\}$  中元素的个数

$$\sum_{j \in J} [f(j) = k] = \#f^-(k)$$

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_k [f(j) = k] = \sum_{k \in K} a_k \sum_{j \in J} [f(j) = k]$$

若有  $\#f^-(k) = 1$  (一一对应)<sup>3</sup>

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{f(j) \in K} a_{f(j)} = \sum_{k \in K} a_k$$

### Exercise 3

$$S_n = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k-j}$$

首先写出前几项, 尝试寻找规律:

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$S_3 = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-2} = \frac{5}{2}$$

$$S_4 = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{4-1} + \frac{1}{3-2} + \frac{1}{4-2} + \frac{1}{4-3} = \frac{13}{3}$$

---

<sup>3</sup>这里还不太理解

解 4. 1. 先对  $j$  求和

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j < k} \frac{1}{k-j} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq (k-j) < k} \frac{1}{k-(k-j)} \quad j \Rightarrow (k-j) \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{0 < j \leq k-1} \frac{1}{j} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} H_{k-1} \quad (H_k \text{ 为调和级数}) \\
 &= \sum_{1 \leq k+1 \leq n} H_k \quad k \Rightarrow k+1 \\
 &= \sum_{0 \leq k < n} H_k
 \end{aligned}$$

2. 先对  $k$  求和

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{j < k \leq n} \frac{1}{k-j} \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{j < (k+j) \leq n} \frac{1}{(k+j)-j} \quad k \Rightarrow (k+j) \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{0 < k \leq n-j} \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq n} H_{n-j} \quad (H_k \text{ 为调和级数}) \\
 &= \sum_{1 \leq n-j \leq n} H_k \quad j \Rightarrow n-j \\
 &= \sum_{0 \leq j < n} H_j
 \end{aligned}$$

以上两种常用的求和顺序都无法得到这个多重求和的结果，我们需要转换思路。

3. 先用  $k+j$  替换  $k$  (先换元，再求和)

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{1 \leq j < (k+j) \leq n} \frac{1}{(k+j)-j} \quad k \Rightarrow k+j \\
 &= \sum_{1 \leq j < (k+j) \leq n} \frac{1}{k} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n-k} \frac{1}{k} \quad \text{首先对 } j \text{ 求和} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{n-k}{k} \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left( \frac{n}{k} - 1 \right) = nH_n - n
 \end{aligned}$$

综上可得  $\sum_{1 \leq k \leq n} H_k = nH_n - n$

代数:  $k + f(j)$ ,  $f$  为任意函数.

用  $k - f(j)$  替换  $k$ , 并对  $j$  先求和较好.

几何:  $S_n$  ( $n = 4$ )

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$j = 1$		$\frac{1}{1}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$
$j = 2$			$+\frac{1}{1}$	$+\frac{1}{2}$
$j = 3$				$+\frac{1}{1}$
$j = 4$				

先对  $j$  求和 (按列)  $H_1 + H_2 + H_3$  先对  $k$  求和 (按行)  $H_3 + H_2 + H_1$   $k \Rightarrow k + j$  按对角线求和

$$\sum_{k=1}^n \frac{n-k}{k} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n 1$$

$$nH_n - n, n = 4$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{1} + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} &= \sum_{k=1}^4 \frac{4-k}{k} \\ &= 4 \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^4 1 \\ &= 4H_4 - 4 \end{aligned}$$

$$4 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - 4 = \frac{4}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4}$$

	$k - j = 0$	$k - j = 1$	$k - j = 2$	$k - j = 3$
$j = 1$		$\frac{1}{1}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$
$j = 2$		$\frac{1}{1}$	$+\frac{1}{2}$	
$j = 3$		$\frac{1}{1}$		
$j = 4$				

### 0.1.5 General methods

#### Exercise 4

求  $\square_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k^2$ ,  $n \geq 0$  的封闭形式

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 &= \sum_{k=0}^n [(k+1)^2 - 2k - 1] \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - 2 \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0^2 - (n+1)^2 &= -2 \sum_{k=0}^n k - (n+1) \\
 2 \sum_{k=0}^n k &= (n+1)^2 - (n+1) \\
 \sum_{k=0}^n k &= \frac{(n+1)n}{2}
 \end{aligned}$$

上述运算没有告诉我们  $\square_n$  的值, 但却能推导出  $\sum_{k=0}^n k$  的值。我们可以利用这种思路求解  $\square_n$ 。

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n [(k+1)^3 - k^3] &= \sum_{k=0}^n [3k^2 + 3k + 1] \\
 (n+1)^3 - 0^3 &= 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\
 (n+1)^3 &= 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \sum_{k=0}^n k^2 &= (n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
 \sum_{k=0}^n k^2 &= \frac{1}{3}(n+1) \left( (n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1 \right) \\
 \sum_{k=0}^n k^2 &= \frac{1}{3}(n+1) \left( n + \frac{1}{2} \right) n
 \end{aligned}$$

reference book list:

1. (CRC Tables) CRC Standard Mathematical Tables
2. Handbook of Mathematical Functions
3. Sloane. Handbook of Integer Sequences

software:

Axiom MACSYMA Maple Mathematica

my: Octave maxima 熟悉标准的信息源

方法 3: 建立成套方法

参考第二节的内容

方法 4: 用积分替换和式  $\sum \Rightarrow \int$

$$\square_n = 1 \times 1 + 1 \times 4 + 1 \times 9 + \cdots + 1 \times n^2$$

该式近似等于 0 到  $n$  之间曲线  $f(x) = x^2$  下的面积

$$\begin{aligned} S &= \int_0^n x^2 dx \\ &= \frac{n^3}{3} \end{aligned}$$

$\square_n$  近似等于  $\frac{n^3}{3}$ 。近似的误差  $E_n = \square_n - \frac{n^3}{3}$

### 1. 近似误差项递归式

$$\begin{aligned} \square_n &= \square_{n-1} + n^2 \\ E_n &= \square_n - \frac{n^3}{3} = \square_{n-1} + n^2 - \frac{n^3}{3} \\ E_{n-1} &= \square_{n-1} - \frac{(n-1)^3}{3} \\ E_n &= E_{n-1} + \frac{(n-1)^3}{3} + n^2 - \frac{n^3}{3} \\ &= E_{n-1} + \frac{-3n^2 + 3n - 1}{3} + n^2 \\ &= E_{n-1} + n - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

### 2. 对楔形误差项面积求和

$$\begin{aligned} \square_n - \int_0^n x^2 dx &= \sum_{k=1}^n \left( k^2 - \int_{k-1}^k x^2 dx \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( k^2 - \frac{k^3 - (k-1)^3}{3} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( k - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$E_n = \sum_{k=1}^n \left( k - \frac{1}{3} \right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n(3n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \square_n &= \frac{n^3}{3} + E_n \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n(3n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2n^2 + 3n - 1)}{6} \\ &= \frac{n(n + \frac{1}{2})(n+1)}{3} \end{aligned}$$

方法 5: 展开和收缩

$$\begin{aligned}
 \square_n &= \sum_{1 \leq k \leq n} k^2 = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} k \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq n} \sum_{j \leq k \leq n} k \\
 &= \sum_{1 \leq j \leq n} \left( \frac{(j+n)(n-j+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq n} (n(n+1) + j - j^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ n^2(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \square_n \right] \\
 &= \frac{1}{2} n(n + \frac{1}{2})(n+1) - \frac{1}{2} \square_n \\
 \frac{3}{2} \square_n &= \frac{1}{2} n(n + \frac{1}{2})(n+1) \\
 \square_n &= \frac{1}{3} n(n + \frac{1}{2})(n+1)
 \end{aligned}$$

方法 6: 使用有限微积分

方法 7: 用生成函数

### 0.1.6 有限微积分和无限微积分 Finite and infinite calculus

表 1: 有限微积分和无限微积分中的运算对比

无限微积分	有限微积分
微分算子 D	差分算子 $\Delta$

$$\begin{aligned}
 Df(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} & \Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) \\
 D(x^m) &= mx^{m-1} & \Delta(x^3) &= 3x^2 + 3x + 1
 \end{aligned}$$

为使差分运算在形式上与微分运算类似, 引入下降阶乘幂和上升阶乘幂。

下降阶乘幂 (falling factorial power),  $x^{\underline{m}}$ , 读作  $x$  直降  $m$  次。

$$x^{\underline{m}} = \underbrace{x(x-1) \dots (x-m+1)}_{m \text{ 个因子}}, \quad (m \leq 0, m \in \mathbb{N})$$

上升阶乘幂 (rising factorial power),  $x^{\overline{m}}$ , 读作  $x$  直升  $m$  次。

$$x^{\overline{m}} = \underbrace{x(x+1) \dots (x+m-1)}_{m \text{ 个因子}}, \quad (m \leq 0, m \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned}
\Delta(x^m) &= (x+1)^m - x^m \\
&= (x+1)x \dots (x+1-m+1) - x(x-1) \dots (x-m+1) \\
&= (x+1 - (x-m+1))x(x-1) \dots (x-m+2) \\
&= mx(x-1) \dots (x-m+2) \\
&= mx^{\overline{m-1}}
\end{aligned}$$

表 2: 有限微积分和无限微积分中的运算对比

无限微积分	有限微积分
D 逆运算 $\int$ (积分算子, 逆微分算子)	$\Delta$ 逆运算 $\sum$ (求和算子, 逆差分算子)
微积分基本定理	
$g(x) = Df(x) \iff \int g(x)dx = f(x) + C$	$g(x) = \Delta f(x) \iff \sum g(x)\delta(x) = f(x) + C$
定积分	和式
若 $g(x) = Df(x)$ 那么	若 $g(x) = \Delta f(x)$ 那么
$\int_a^b g(x)dx = f(x) _a^b = f(b) - f(a)$	$\sum_a^b g(x)\delta x = f(x) _a^b = f(b) - f(a)$
$\int_b^a g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx$	$\sum_b^a g(x)\delta x = -\sum_a^b g(x)\delta x$
$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$	$\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$
$\int_0^n x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big _0^n = \frac{n^{m+1}}{m+1}, m \neq -1$	$\sum_0^n k^{\overline{m}} = \frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1} \Big _0^n = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, m \neq -1$
	$\sum_0^n k^{\overline{m}} = \frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1} \Big _0^n = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, m \neq -1$
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	$(x+y)^{\underline{2}} = x^{\underline{2}} + 2x^{\underline{2}}y^{\underline{1}} + y^{\underline{2}}$
	$(x+y)^{\overline{2}} = x^{\overline{2}} + 2x^{\overline{1}}y^{\overline{1}} + y^{\overline{2}}$
$m = -1, \int_a^b x^{-1} = \ln x \Big _a^b$	$m = -1, \sum_a^b k^{-1} = H_k \Big _a^b$
$\int_a^b x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big _a^b, m \neq -1$	$\sum_a^b k^{\overline{m}} = \frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1} \Big _a^b, m \neq -1$
$\ln n \Big _a^b, m = -1$	$H_k \Big _a^b, m = -1$
	$\sum_a^b k^{\overline{m}} = \frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1} \Big _a^b, m \neq -1$
	$H_{(k+1)} \Big _a^b, m \neq -1$
连续性问题的解中会出现自然对数	快速排序这样的问题中会出现调和数的原因
$e^x$ , 性质 $De^x = e^x$	$\Delta f(x) = f(x), f(x) = 2^x$ 离散指数函数

$$g(x) = Df(x), \iff \underbrace{\int g(x)dx}_{\text{不定积分}} = f(x) + \underbrace{C}_{\text{任意常数}} \quad (21)$$

$$g(x) = \Delta f(x), \iff \underbrace{\sum g(x)\delta(x)}_{\text{不定和式}} = f(x) + \underbrace{C}_{\text{满足 } p(x+1)=p(x) \text{ 的任意函数}} \quad (22)$$

$$\sum_a^b g(x)\delta x = f(x)|_a^b = f(b) - f(a) \quad (23)$$

设  $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

如果  $b = a$ , 我们就有

$$\sum_a^a g(x)\delta x = f(a) - f(a) = 0 \quad (24)$$

如果  $b = a + 1$ , 我们就有

$$\sum_a^{a+1} g(x)\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sum_a^{b+1} g(x)\delta x - \sum_a^b g(x)\delta x &= [f(b+1) - f(a)] - [f(b) - f(a)] \\ &= f(b+1) - f(b) = g(b) \end{aligned}$$

由数学归纳法  $a, b \in \mathbb{N}$  且  $b \leq a$  时,  $\sum_a^b g(x)\delta x$  的确切含义是

$$\sum_a^b g(x)\delta x = \sum_{k=1}^{b-1} g(k) = \sum_{a \leq k < b} g(k), \quad (b \geq a, a, b \in \mathbb{N}) \quad (26)$$

若有  $g(x) = f(x+1) - f(x)$

$$\sum_{a \leq k < b} g(l) = \sum_{a \leq k < b} (f(k+1) - f(k)) = f(b) - f(a)$$

$$\begin{aligned} \sum_a^b g(x)\delta x &= f(b) - f(a) \quad (b < a) \\ &= -(f(a) - f(b)) = -\sum_a^b g(x)\delta x \end{aligned}$$

$$\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$$

应用：计算下降幂和式的简单方法

$$\sum_{0 \leq k < n} k^{\overline{m}} = \frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1} \Big|_0^n = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, \quad (m, n \geq 0 \quad m, n \in \mathbb{N}^+) \quad (27)$$



$m = 1$  时,  $k^1 = k$

$$\sum_{0 \leq k < n} k = \frac{n^2}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$k^2 = k(k-1) + k = k^2 + k^1$$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k < n} k^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{3}n(n-\frac{1}{2})(n-1) \end{aligned}$$

$$k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k = k^3 + 3k^2 + k^1$$

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k < n} k^3 &= \frac{n^4}{4} + 3\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} + 3\frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)^2 = \left(\sum_{0 \leq k < n} k\right)^2 \end{aligned}$$

负指数下降幂

$$x^3 = x(x-1)(x-2)$$

$$x^2 = x(x-1)$$

$$x^1 = x$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\vdots$$

$$x^{-m} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}$$

$$x^3 \cdot \frac{1}{x-3+1} = x^2 \Rightarrow x^0 \cdot \frac{1}{x-0+1} = x^{-1}$$

为什么选用  $x^{-1} = \frac{1}{x+1}$  而不是  $x^{-1} = \frac{1}{x-1}$  作为下降阶乘幂的拓展定义?<sup>4</sup>

通常幂法则  $x^{m+n} = x^m x^n$ , 推广:

$$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x-m)^{\overline{n}}, (m, n \in \mathbb{N}^+)$$

$$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}, (m, n \in \mathbb{N}^+)$$

<sup>4</sup> 当一个原有的记号被拓展包含更多种情形时, 以一种使得一般性法则继续成立的方式来表述它的定义, 这永远是最佳选择

my 推广至正指数下降幂

$$\begin{aligned}
 x^{\bar{3}} &= x(x+1)(x+2) \\
 x^{\bar{2}} &= x(x+1) \\
 x^{\bar{1}} &= x \\
 x^{\bar{0}} &= 1 \\
 x^{\bar{-1}} &= \frac{1}{x-1} \\
 x^{\bar{-2}} &= \frac{1}{(x-1)(x-2)} \\
 &\vdots \\
 x^{\bar{-m}} &= \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-m)}
 \end{aligned}$$

$$x^{\bar{3}} \cdot \frac{1}{x+3} = x^{\bar{2}} \Rightarrow x^{\bar{0}} \cdot \frac{1}{x+0-1} = x^{\bar{-1}}$$

例如

$$\begin{aligned}
 x^{2+3} &= x^2(x-2)^3 = x^3(x-3)^2 \\
 x^{2-3} &= x^2(x-2)^{-3} \\
 &= x(x-1) \frac{1}{(x-2+1)(x-2+2)(x-2+3)} \\
 &= x(x-1) \frac{1}{(x-1)x(x+1)} \\
 &= \frac{1}{x+1}
 \end{aligned}$$

$m < 0$  时,  $\Delta x^m = mx^{m-1}$  是否仍成立?

$$\begin{aligned}
 \Delta x^{-2} &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\
 &= \frac{(x+1) - (x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\
 &= -2x^{-3}
 \end{aligned}$$

通常幂法则对负指数下降阶乘幂仍然成立。

离散指数函数  $2^x$

$$\begin{aligned}
 \Delta(c^x) &= c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x \\
 c \neq 1 \frac{c^x}{c-1} &\xrightarrow{\Delta} c^x \\
 \sum_{a \leq k < b} c^k &= \sum_a^b c^x \delta x = \frac{c^x}{c-1} \Big|_a^b = \frac{c^b - c^a}{c-1}, \quad c \neq 1
 \end{aligned}$$

表 3: Table 55(1994), What's difference

$f = \sum g$	$\Delta f = g$
$x^0 = 1$	0
$x^1 = x$	1
$x^2 = x(x-1)$	$2x$
$x^m$	$mx^{m-1}$
$x^{m+1}$	$(m+1)x^m$
$H_x$	$x^{-1} = \frac{1}{x+1}$
$2^x$	$2^x$
$c^x$	$(c-1)c^x$
$\frac{c^x}{c-1}$	$c^x$
$cu(x), c \text{ is constant}$	$c\Delta u(x)$
$u+v$	$\Delta u + \Delta v$
$uv$	$u\Delta v + Ev\Delta u, Ev = v(x+1)$

$$D(uv) = uDv + vDu \quad (28)$$

$$\int uDv = uv - \int vDu \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\Delta(u(x)v(x)) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x) \\
&= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1) + u(x)v(x+1) - u(x)v(x) \\
&= \Delta u(x)v(x+1) + u(x)\Delta v(x) \\
&= u\Delta v + Ev\Delta u
\end{aligned} \quad (30)$$

其中  $E$  被称为移位算子.

在无限微积分中, 令  $x+1 \rightarrow x$  无限细分, 避开了  $E$

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u \quad (31)$$

**例 2.**  $\int xe^x dx \xrightarrow{\text{离散模拟}} \sum x2^x \delta x \quad (\sum_{k=0}^n k2^k)$

**解 5.** 令  $u(x) = x, \delta v(x) = 2^x$ ,

可得  $\delta u(x) = 1, v(x) = 2^x, Ev = 2^{x+1}$

$$\begin{aligned}
\sum x2^x \delta x &= x \cdot 2^x - \sum 2^{x+1} \cdot 1 \delta x \\
&= x \cdot 2^x - 2^{x+1} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_0^n k2^k &= \sum_0^{n+1} x2x \delta x \\
&= x \cdot 2^x - 2^{x+1} \Big|_0^{n+1}
\end{aligned}$$

关于第二组等式的推导, 我一开始没有完全掌握, 主要是对求和符号  $\sum$  的上下标范围存在误解.

记  $\sum_{0 \leq k \leq n} k2^k = S_n$

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq k \leq n} k2^k + (n+1)2^{n+1} &= \sum_{0 \leq k \leq n+1} k2^k \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq n+1} (k-1)2^k + \sum_{1 \leq k \leq n+1} 2^k \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq n} k2^{k+1} + \sum_{1 \leq k \leq n+1} 2^k \\
 &= 2S_n + \sum_{1 \leq k \leq n+1} 2^k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n + (n+1)2^{n+1} &= 2S_n + \frac{2^{n+1} - 2^1}{2-1} \\
 S_n &= (n+1)2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) \\
 &= (n-1)2^{n+1} + 2
 \end{aligned}$$

$$\sum_{0 \leq k < n} H_k = nH_n - n \quad (32)$$

求解看起来更困难的和式  $\sum_{0 \leq k < n} kH_k$

类比  $\int x \ln x dx$

$$\begin{aligned}
 I &= \int x \ln x dx \\
 &= x^2 \ln x - \int x(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) dx \\
 &= x^2 \ln x - I - \int x dx \\
 I &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + C
 \end{aligned}$$

对  $\sum_{0 \leq k < n} kH_k$ , 取  $u(x) = H_x \Delta, v(x) = x = x^1$

$\Delta u(x) = x^{-1}, v(x) = \frac{1}{2} x^2, Ev(x) = v(x+1) = \frac{1}{2} (x+1)^2$

$$\begin{aligned}
 \sum x H_x \delta x &= \frac{1}{2} x^2 H_x - \sum \frac{1}{2} (x+1)^2 x^{-1} \delta x \\
 &= \frac{x^2}{2} H_x - \sum \frac{(x+1)x}{2} \frac{1}{x+1} \delta x \\
 &= \frac{x^2}{2} H_x - \sum \frac{x^1}{2} \delta x \\
 &= \frac{x^2}{2} H_x - \frac{1}{4} x^2 + C
 \end{aligned}$$

$$\sum_{0 \leq k < n} k H_k = \sum_{x=0}^{n-1} x H_x \delta x = \frac{(n-1)^2}{2} (H_{n-1} - \frac{1}{2})$$

教材上是

$$\sum_{0 \leq k < n} k H_k = \sum_{x=0}^n x H_x \delta x = \frac{n^2}{2} (H_n - \frac{1}{2})$$

借助有限微积分的原理, 我们很容易地记住

$$\sum_{0 \leq k < n} k = \frac{n^2}{2} = n(n-1)/2 \quad (33)$$

<sup>5</sup> myex  $\sum_{0 \leq k < n} H_k$

$$\begin{aligned} u(x) &= H_x & \Delta v(x) &= x^0 = 1 \\ \Delta u(x) &= x^{-1} & v(x) &= x^1 \\ & & Ev(x) &= v(x+1) = (x+1)^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum H_x \cdot 1 \delta x &= x^1 H_x - \sum x^{-1} (x+1)^1 \delta x \\ &= x^1 H_x - \sum x^0 \delta x \\ &= x^1 H_x - x^1 + C \end{aligned}$$

$$\sum_{0 \leq k < n} H_k = \sum_0^n H_x \delta x = n H_n - n - (0 - 0) = n H_n - n$$

### 0.1.7 无限和式 Infinite sums

$a_k$  非负,  $\sum_{k \in K} a_k$

**定义 1.** 如果有  $A = \text{const}$  . s.t.  $\forall$  有限子集  $F \subset K$ , 均有

$$\sum_{k \in F} a_k \leq A$$

那么我们定义  $\sum_{k \in K} a_k$  是最小的这样的 A (所有这样的 A 总包含一个最小元素)。若没有这样的常数 A, 我们就说  $\sum_{k \in K} a_k = \infty$  即  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists$  有限多项  $a_k$  组成的一个集合, 它的和超过 A

该定义与指标集 K 中可能存在的任何次序无关

特殊情形: K 为非负整数集合  $a_k \leq 0$  意味着

$$\sum_{k \geq 0} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

---

<sup>5</sup> 数学的终极目标是不需要聪明的想法

理由：实数任意非减序列均有极限

$$F \subset \mathbb{N}, \forall i \in F, i \leq n, \exists \sum_{k \in F} a_k \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq A. \quad \therefore \begin{cases} A = \infty \\ A \text{ 为有界常数} \end{cases}$$

又  $\forall A' < A. \exists n. \text{ s.t } \sum_{k=0}^n a_k > A', F = \{0, 1, \dots, n\}$ . 证明  $A'$  不是有界常数。

练习 1.  $a_k = x^k$  有

$$\sum_{k \geq 0} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 \leq x < 1 \\ \infty, & x \geq 1 \end{cases}$$

练习 2.

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \\ \frac{1}{2}S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = S - 1, \quad S = 2 \\ T &= 1 + 2 + 4 + 8 + \dots \\ 2T &= 2 + 4 + 8 + \dots = T - 1, \quad T = -1 (\times) \\ T &= \infty. \quad (\text{另一个解}) \end{aligned}$$

练习 3.

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k \geq 0} k^{-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} k^{-2} \delta k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{k^{-1}}{-1} \right|_0^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{0+1} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

非负和式  $\rightarrow$  和式中有非负项与负项 1.

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (-1)^k &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 \\ \sum_{k \geq 0} x^k &= \frac{1}{1-x}, \quad x \in [0, 1) \end{aligned}$$

$x = -1$  代入上式,  $I = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$

2. 双向无限  $\sum_k a_k$

$$\begin{aligned} k \geq 0 \quad a_k &= \frac{1}{k+1} \\ k < 0 \quad a_k &= \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdots + (-\frac{1}{4}) + (-\frac{1}{3}) + (-\frac{1}{2}) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \\
& \cdots + \left( (-\frac{1}{4}) + \left( (-\frac{1}{3}) + \left( (-\frac{1}{2}) + (1) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{4} \right) + \cdots = 1 \\
& \cdots + \left( (-\frac{1}{4}) + \left( (-\frac{1}{3}) + \left( (-\frac{1}{2}) + 1 \right) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \right) = 1 \\
& \quad \quad \quad ( ) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
& \cdots + \left( (-\frac{1}{4}) + \left( (-\frac{1}{3}) + \left( (-\frac{1}{2}) + 1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots \right) \cdots = 1 + \ln 2
\end{aligned}$$

从内往外第  $n$  对括号包含数

$$-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \cdots - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = 1 + H_{2n} - H_{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_{2n} - H_{n+1}) = \ln 2$$

按照不同方式对其项相加而得出不同值的和式，有某些不同寻常之处。关于分析学的高等教材中有五花八门的定义，它们对这样自相矛盾的和式赋予了有意义的值，但是，如果我们采用那些定义，就不能像一直在做的那样自由地对记号  $\sum$  进行操作。就本书的目的而言，不需要“条件收敛”这种精巧的改进，因此我们会坚持使用无限和的一种定义，以保证在这一章里所做的所有运算都是正确的。

事实上，我们关于无限和式的定义相当简单。设  $K$  是任意一个集合，而  $a_k$  是对每一个  $k \in K$  定义的实值项（这里“ $k$ ”实际上可以代表若干个指标  $k_1, k_2, \dots$ ，因而  $K$  可以是多维的）。任何实数  $x$  都可以写成其正的部分减去负的部分

$$x = x^+ - x^-, \quad x^+ := x \times [x > 0], \quad x^- := -x \times [x < 0]$$

对  $\{a_k\}$  中的每一项这样操作，得到无限和式  $\sum_{k \in K} a_k^+$  和  $\sum_{k \in K} a_k^-$  (mynote: 将任意和式拆成两个非负和式)

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{k \in K} a_k^+ - \sum_{k \in K} a_k^- \quad (34)$$

除非右边的两个和式都等于  $\infty$ 。在后面这种情形，我们不定义  $\sum_{k \in K} a_k$

设  $A^+ = \sum_{k \in K} a_k^+$ ,  $A^- = \sum_{k \in K} a_k^-$ 。如果  $A^+$  和  $A^-$  都是有限的，就说和式  $\sum_{k \in K} a_k$  绝对收敛 (converge absolutely) 于值  $A = A^+ - A^-$ 。如果  $A^+ = \infty$  而  $A^-$  是有限的，就说和式  $\sum_{k \in K} a_k$  发散 (diverge) 于  $+\infty$ 。类似地，如果  $A^+$  是有限的而  $A^- = \infty$ ，就说和式  $\sum_{k \in K} a_k$  发散 (diverge) 于  $-\infty$ 。如果  $A^+ = A^- = \infty$ ，结果还很难说。<sup>6</sup>

mynote:

$\forall$  集合  $K$  (可以是多维的),  $a_k \in \mathbb{R} (k \in K)$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, x = x^+ - x^-$

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{k \in K} \overbrace{a_k^+}^{a_k^+, a_k^- \text{ 均非负}} - \sum_{k \in K} a_k^-$$

<sup>6</sup>换句话说，绝对收敛就意味着绝对值的和式收敛。

$\sum_{k \in K} a_k^+, \sum_{k \in K} a_k^-$  不同时为 0

$$\begin{array}{lll} A = A^+ & -A^- & A = \sum_{k \in K} a_k \\ A^+ \text{有限} & A^- \text{有限} & \sum_{k \in K} a_k \text{绝对收敛 (converge absolutely)} \\ A^+ = \infty & A^- \text{有限} & \sum_{k \in K} a_k \text{发散 (diverge) 于 } \infty \\ A^+ \text{有限} & A^- = \infty & \sum_{k \in K} a_k \text{发散 (diverge) 于 } -\infty \end{array}$$

$a_k \in \mathbb{R} \Rightarrow a_k \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{k \in K} \overbrace{\Re(a_k) + i \Im(a_k)}^{\text{两式均有定义时, } \sum_{k \in K} a_k \text{有定义}}$$

分配律

结合律  $\Rightarrow$  多个指标集绝对收敛的和式, 永远可以对指标中的任何一个首先求和。(结

交换律

果与求和顺序无关)

$\forall$  指标集  $J$  且  $\{K_j | j \in J\}$  的元素是任意的指标集. s.t.

$$\sum_{\substack{j \in J \\ k \in K_j}} a_{j,k} \text{绝对收敛于 } A$$

那么对每一个  $j \in J, \exists A_j \in \mathbb{C}$  .s.t.

$$\sum_{k \in K_j} a_{j,k} \text{绝对收敛于 } A_j. \text{ 且 } \sum_{j \in J} A_j \text{绝对收敛于 } A$$

对所有项非负证明这一结论即可.

每项分解成实部与虚部, 正的和负的部分, 证明一般情形.

设对所有指标  $(j, k) \in M$  都有  $a_{j,k} \geq 0$ .

其中  $M$  是主指标集  $\{(j, k) | j \in J, k \in K_j\}$

给定  $\sum_{(j,k) \in M} a_{j,k}$  是有限的即对所有有限子集  $F \subset M$  有

$$\sum_{(j,k) \in F} a_{j,k} \leq A$$

而  $A$  是这样的最小上界.

$\forall j \in J$  形如  $\sum_{k \in F_j} a_{j,k}$  的每一个和都以  $A$  为上界. 其中  $F_j$  是  $K_j$  的一个有限子集, 从而这些和式有一个最小上界  $A_j \geq 0$ . 且根据定义有  $\sum_{k \in K_j} a_{j,k} = A_j$ .

需证明对所有有限子集  $G \subset J$ .  $A$  是  $\sum_{j \in G} A_j$  的最小上界.

假设  $G$  是  $J$  满足  $\sum_{j \in G} A_j = A' > A$  的有限子集.

我们可以求出一个有限子集  $F_j \subseteq K_j$ .

使得对每个满足  $A_j > 0$  的  $j \in G$  均有  $\sum_{k \in F_j} a_{j,k} > \left(\frac{A}{A'}\right) A_j$ .



至少存在一个这样的  $j$ .

但此时有  $\sum_{j \in G, k \in F_j} a_{j,k} > \left(\frac{A}{A'}\right) \sum_{j \in G} A_j = A$ .

这与如下事实矛盾. 对有限子集  $F \subseteq M$  有  $\sum_{(j,k) \in F} a_{j,k} \leq A$ .

从而对所有有限子集  $G \subset J$  都有  $\sum_{j \in G} A_j \leq A$ .

最后, 设  $A'$  是小于  $A$  的任何一个实数如果我们能找到一个有限集合  $G \subseteq J$  s.t.  $\sum_{j \in G} A_j > A'$ . 证明就完成了.

已知存在有限集合  $F \subseteq M$  s.t.  $\sum_{(j,k) \in F} a_{j,k} > A'$ .

设  $G$  是  $F$  中  $j$  组成的集合, 又设  $F_j = \{k | (j,k) \in F\}$  那么有

$$\sum_{j \in G} A_j \geq \sum_{j \in G} \sum_{k \in F_j} a_{j,k} = \sum_{(j,k) \in F} a_{j,k} > A'$$

证完.