具体数学阅读笔记-chap1 exercise

weiyuan

更新：2022-06-27

1 Exercises

1.1 Warmups

练习 1 1 All horses are the same color; we can prove this by induction on the number of horses in a given set. Here's how: "If there's just one horse then it's the same color as itself, so the basis is trivial. For the induction step, assume that there are n horses numbered 1 to n. By the induc- tion hypothesis, horses 1 through n 1 are the same color, and similarly horses 2 through n are the same color. But the middle horses, 2 through n 1, can't change color when they're in different groups; these are horses, not chameleons. So horses 1 and n must be the same color as well, by transitivity. Thus all n horses are the same color; QED." What, if anything, is wrong with this reasoning?

题目解答 1 n=1 情况下马有相同颜色

但 n=2 时该假设不一定成立

练习 2 2

题目解答 2 不允许在 A B 之间直接移动, 求最短的移动序列

$$
\begin{array}{lllll}
k=1 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & 2 & sum=2 \\
k=2 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B, & 2 & \\
 & 2 & A \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 2 & C \rightarrowtail B & 1 & \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & 2 & sum=8 \\
k=3 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B, & 2 & \\
 & 2 & A \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 2 & C \rightarrowtail B & 1 & \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & 2 & sum=8 \\
 & 3 & A \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 2 & B \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B, & 2 & \\
 & 2 & C \rightarrowtail A & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 3 & C \rightarrowtail B & 1 & sum=18 \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B, & 2 & \\
 & 2 & A \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 2 & C \rightarrowtail B & 1 & \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & 2 & sum=26 \\
\quad\vdots & & & & \\
k=n & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & &
\end{array}
$$

从前面的移动可以看出 $f(n)=3*f(n-1)+2$, 设 $g(n)=f(n)+1, g(1)=f(1)+1=3, g(n)=3g(n-1)$. $g(n)=3^n$, $f(n)=3^n-1$.

练习 3 3

题目解答 3 是的，以 n 个圆盘为例正确的叠放方法有 3^n 种将 ABC 视为 3 个序列，将所有圆盘从大到小依次放置在 3 个序列中，每个圆盘放置时有 3 种选择，所共有 3^n 种正确的叠放方法。第二题移动 $3^n - 1$ 次，再加上移动前所有圆盘都在 A 柱上的情况，共有 3^n 种情况，所以所有正确的叠放方法均会出现。

我的思考，n 个圆盘在 3 根柱子上任意放的方法有多少种？

练习 4 4

题目解答 4 Are there any starting and ending configurations of n disks on three pegs that are more than $2^n 1$ moves apart, under Lucas's original rules?

是否存在 $m > 2^n - 1$

不存在。根据卢卡斯的规则，将可能出现的移动情况分为两种:
1. 最大的圆盘不需要移动，根据归纳法，最多需要移动 $2^{n-1} - 1$ 次。
2. 最大的圆盘需要移动，根据归纳法，最多需要移动 $2^{n-1} - 1 + 1 + 2^{n-1} - 1$ 即 $2^n - 1$ 次

练习 5 5

题目解答 5 3 个给定集合，共有 8 个可能子集。使用 Venn 图表示

[1] $A, B, C,$ 三个集合的所有子集为 $\{\varnothing, A, B, C, A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C,\}$ $, \{A \setminus B, A \setminus C, B \setminus A, B \setminus C, C \setminus A, C \setminus B\}, \{A \setminus (B \cup C), B \setminus (C \cup A), C \setminus (A \cup B)\},$ $\{A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cup B \cup C\}. \ldots$

我认为这里所将的八个子集应当是 $\{\varnothing\}, \{A \setminus (B \cup C), B \setminus (C \cup A), C \setminus (A \cup B)\},$ $\{(A \cap B) \setminus C, (C \cap A) \setminus B, (B \cap C) \setminus A\}, \{A \cap B \cap C\}$. 空集和 7 个互不相交的真子集。

[1] Venn 图之后会补上

对于 4 个集合，Venn 图不能给出可能的 16 个子集，因为不同的圆至多交于两点。参考答案中说的卵形 (ovals) 是什么意思？

练习 6 6

题目解答 6 无界区域个数 $2n$
所有区域个数 $\frac{n(n+1)}{2}+1$
二者相减得到有界区域个数 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

练习 7 7

题目解答 7 设 $H(n)=J(n+1)-J(n)$.
$H(2n)=2$, 对 $n\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned} H(2n+1) &= J(2n+2)-J(2n+1) \\ &= (2J(n+1)-1)-(2J(n)+1) \\ &= 2H(n)-2 \end{aligned}$$

但在 $n=0$ 时，由此推出

$$H(1)=J(2)-J(1)=1-1=0\neq 2$$

1.2 作业题

练习 8

$$\begin{aligned} Q_0 &= \alpha \\ Q_1 &= \beta \\ Q_n &= \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}}, \quad n>1 \end{aligned}$$

(hint: $Q_4=\frac{1+\alpha}{\beta}$)

题目解答 8

$$
\begin{aligned}
Q_0 &= \alpha & & & &= \alpha \\
Q_1 &= \beta & & & &= \beta \\
Q_2 &= \frac{1+Q_1}{Q_0} & & & &= \frac{1+\beta}{\alpha} \\
Q_3 &= \frac{1+Q_2}{Q_1} &&= \frac{1+\dfrac{1+\beta}{\alpha}}{\beta} & &= \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta} \\
Q_4 &= \frac{1+Q_3}{Q_2} &&= \frac{1+\dfrac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}}{\dfrac{1+\beta}{\alpha}} &= \frac{\alpha\beta+1+\alpha+\beta}{\beta(1+\beta)} &= \frac{1+\alpha}{\beta} \\
Q_5 &= \frac{1+Q_4}{Q_3} &&= \frac{1+\dfrac{1+\alpha}{\beta}}{\dfrac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}} &= \frac{\alpha\beta+\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha+beta} &= \alpha \\
Q_6 &= \frac{1+Q_5}{Q_4} &&= \frac{1+\alpha}{\dfrac{1+\alpha}{\beta}} & &= \beta
\end{aligned}
$$

因此解得

$$
\begin{aligned}
Q_i &= \{ \quad \alpha, \quad \beta, \quad \frac{1+\beta}{\alpha}, \quad \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}, \quad \frac{1+\alpha}{\beta} \quad \} \\
(i\%n) &= \{ \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \}
\end{aligned}
$$

练习 9 反向归纳法，从 n 到 $n-1$ 证明命题

$$
P(n):\ x_1 \dots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n, \quad x_i \geqslant 0, i=1,\dots,n
$$

$n=2$ 时为真

$$
(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1-x_2)^2 \geqslant 0
$$

a) $x_n=\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$, 证明只要 $n>1$ 时 $P(n)$ 蕴含 $P(n-1)$.

b) 证明 $P(n)$ 和 $P(2)$ 蕴含 $P(2n)$

c) 由 a), b) 说明这就蕴含了 $P(n)$ 对所有 n 为真

题目解答 9 a) $P(n)$ 成立，$\forall n>1$

给定 $x_n=\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$，则有

$$
\begin{aligned}
x_1\dots x_{n-1}\cdot\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} &\leqslant \left(\frac{x_1+x_{n-1}+\dfrac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)^n\\
x_1\dots x_{n-1}\cdot\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} &\leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n\\
x_1\dots x_{n-1} &\leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$P(n)$ 成立

b) 由 $P(n)$ 可得

$$
x_1\dots x_n\cdot x_{n+1}\dots x_{2n}\leqslant\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n\cdots\left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)^n
$$

记 $A=\left(\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$, $B=\left(\dfrac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)$

由 $P(2)$ 可得

$$
\begin{aligned}
AB &\leqslant \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \\
A^nB^n = (AB)^n &\leqslant \left(\frac{A+B}{2}\right)^{2n} \\
x_1 \dots x_{2n} &\leqslant \left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2n}}{2n}\right)^{2n}
\end{aligned}
$$

由此推知 $P(2n)$ 成立。

c) Cauchy 向前-向后方法。

1. $P(2) \to P(4) \to \cdots P(2^n)$.
2. $P(n) \to P(n-1)$.

$\therefore \forall n \geqslant 1, P(n)$ 成立

练习 10 圆盘只能在 ABC 三根柱子上按照顺时针方向移动。记:

Q_n 为 n 个盘从 A 到 B 最少移动的次数。

R_n 为 n 个盘从 B 到 A 最少移动的次数。

题目解答 10 先列出两种移动方式各自的迭代式:

$$
Q_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2R_{n-1} + 1, & n > 0 \end{cases} \qquad R_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ Q_n + Q_{n-1} + 1, & n > 0 \end{cases}
$$

这两个公式是如何得到的？

$$
\begin{array}{lll}
k=0 & Q_0=0 & R_0=0 \\
k=1 & A\to B & B\to C\to A \\
 & Q_1=1 & R_1=2 \\
k=2 & 1:A\to B\to C & 1:B\to C\to A \\
 & 2:A\to B & 2:B\to C \\
 & 1:C\to A\to B & 1:A\to B \\
 & & 2C\to A \\
 & & 1:B\to C\to A \\
 & Q_2=5 & R_2=7 \\
k=n & A\to B\ Q_n & B\to A\ R_n \\
 & (n-1)A\to C\ R_{n-1} & (n-1)B\to A\ R_{n-1} \\
 & n:A\to B\ 1 & n:B\to C\ 1 \\
 & (n-1)C\to B\ R_{n-1} & (n-1)A\to B\ Q_{n-1} \\
 & & n:C\to A\ 1 \\
 & & (n-1)B\to A\ R_{n-1} \\
 & Q_n=2R_{n-1}+1 & R_n=Q_{n-1}+2R_{n-1}+2=Q_n+Q_{n-1}+1
\end{array}
$$

练习 11 双重河内塔 2n 个圆盘，第 $2k-1$ 个与第 $2k$ 个大小相同。

题目解答 11 a) 不区分相同尺寸

$$
\begin{array}{ll}
n=0S_0=0 & \\
n=1S_1=2 & A\to B, A\to B \\
n=2S_2=6 & A\to C, A\to C \\
\multicolumn{2}{c}{A\to B, A\to B} \\
\multicolumn{2}{c}{C\to B, C\to B}
\end{array}
$$

解得 $S_n=2T_n=2(2^n-1)=2^{n+1}-2$

b) 在最后排列中将圆盘恢复次序需要移动几次？

$$
\begin{array}{llll}
k=0 & R_0=0 & & \\
k=1 & R_1=3 & 1.1: \ A \to C & \\
 & & 1.2: \ A \to B & \\
 & & 1.1: \ C \to B & \\
k=2 & R_2=11 & 1.1: \ A \to B & \\
 & & 1.2: \ A \to B & \\
 & & 2.1: \ A \to C & \\
 & & 1.2: \ B \to C & \\
 & & 1.1: \ B \to C & \\
 & & 2.2: \ A \to B & \\
 & & 1.1: \ C \to A & \\
 & & 1.2: \ C \to A & \\
 & & 2.1: \ C \to B & \\
 & & 1.2: \ A \to B & \\
 & & 1.1: \ A \to B & \\
k=n & R_n & n-1 \ A \to B & S_{n-1} \\
 & & n.1: \ A \to C & 1 \\
 & & n-1 \ B \to C & S_{n-1} \\
 & & n.2: \ A \to B & 1 \\
 & & n-1 \ C \to A & S_{n-1} \\
 & & n.1: \ C \to B & 1 \\
 & & n-1 \ A \to B & S_{n-1}
\end{array}
$$

$$R_n = 4S_{n-1} + 3 = 2^{n+2} - 5 \quad (n \geqslant 1)$$

练习 12 12 11 推广，m_k 个尺寸为 k 的圆盘，不区分相同尺寸的圆盘移动一个塔最少次数 $A(m_1, \ldots, m_n)$

题目解答 12

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 0 \\
F(1) &= m_1 \\
F(2) &= 2F(1) + m_2 = 2m_1 + m_2 \\
&\vdots \\
F(n) &= 2F(n-1) + m_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A(m_1, \ldots, m_n) &= F(n) = 2F(n-1) + m_n \\
&= 2^{n-1}m_1 + 2^{n-2}m_2 + \cdots + m_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} m_k
\end{aligned}
$$

练习 13 13

题目解答 13

$$
\begin{aligned}
k &= 1 \quad ZZ_1 = 2 + 0 = 2 \\
k &= 2 \quad ZZ_2 = 4 + 8 = 12 \\
k &= 3 \quad ZZ_3 = 6 + 25 = 31
\end{aligned}
$$

对于定义了 L_n 个区域的 n 条直线，可以用极狭窄的 Z 形线来代替。

例如，每一对 Z 形线间有 9 个交点

$$
\begin{aligned}
ZZ_n &= ZZ_{n-1} + 9n - 8, \quad (n > 0) \\
ZZ_n &= 9S_n - 8n + 1 \\
&= 9\frac{n(n+1)}{2} - 8n + 1 \\
&= \tfrac{9}{2}n^2 - \tfrac{7}{2}n + 1
\end{aligned} \tag{1}
$$

练习 14 14

题目解答 14

$$\begin{aligned}
&n=0 \quad P_0=1\\
&n=1 \quad P_1=2\\
&n=2 \quad P_2=4\\
&n=3 \quad P_3=8\\
&n=4 \quad P_4=8+6=14
\end{aligned}$$

$$P_n=P_{n-1}+L_{n-1}$$

其中

$$L_n=1+S_n, \quad S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$\therefore P_n=P_{n-1}+1+\frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1 \\
P_1 &= P_0+L_0 &&= 1+1+\tfrac{0\cdot 1}{2} &&= 2\\
P_2 &= P_1+L_1 &&= 2+1+\tfrac{1\cdot 2}{2} &&= 4\\
P_3 &= P_2+L_2 &&= 4+1+\tfrac{2\cdot 3}{2} &&= 8\\
P_4 &= P_3+L_3 &&= 8+1+\tfrac{3\cdot 4}{2} &&= 15\\
P_5 &= P_4+L_4 &&= 15+1+\tfrac{4\cdot 5}{2} &&= 26
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n &= P_{n-1}+L_{n-1}\\
&= 0+\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k(k+1)}{2}\right)\\
&= n+\frac{(n-1)n(n+1)}{6}\\
&= \frac{n(n^2+5)}{6}
\end{aligned}$$

练习 15 15 约瑟夫问题，倒数第二个 $I(n)$

表 1: 约瑟夫问题 J(n) 与 I(n)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
J(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5
I(n)	~	2	1	3	5	1	3	5	7	9	11	1	3	5	7	9	11	13

题目解答 15 $n>1$ 时，$J(n), I(n)$ 有相同递归式

$$\begin{aligned}
&I(2)=2, I(1)=1\\
&n=2^m+2^{m-1}+k, \quad 0\leqslant k\leqslant 2^m+2^{m-1}\\
&I(n)=2k+1
\end{aligned}$$

$$n=2^m+l, \quad I(n)=\begin{cases} J(n)+2^{m-1}, & 0\leqslant l<2^{m-1}\\ J(n)-2^m, & 2^{m-1}\leqslant l<2^m\end{cases}$$

练习 16

$$\begin{cases} g(1) &= \alpha\\ g(2n+j) &= 3g(n)+\gamma n+\beta_j, \quad j=0,1, n\leqslant 1\end{cases}$$

(提示，用 $g(n)=n$)

题目解答 16 Suppose $g(n)=n$

$$\begin{gathered}
g(1)=1=\alpha,\\
g(2n+j)=2n+j=3n+\gamma n+\beta_j.
\end{gathered}$$

解得 $\alpha=1, \gamma=-1, \beta_j=\begin{cases}0, & j=0\\ 1, & j=1\end{cases}$