1 递归问题

1.1 河内塔

使用递归方法解决河内塔问题。先从 n 为 1 的情况考虑该问题。为了递归式的完整？将 n 等于 0 也纳入考虑

$$T_0 = 0$$
$$T_1 = 1$$
$$T_2 = 3$$
$$T_3 = 7$$

从圆盘的移动规律可以看出，要将 n 个圆盘从 A 柱移动到 C 柱上，首先需要将 n-1 个圆盘移动到 B 柱上，再移动最大的圆盘到 C 柱上，最后将 n-1 个圆盘从 B 柱移动到 A 柱上。

书中使用

$$T_n \leqslant 2T_{n-1} + 1$$
$$T_n \geqslant 2T_{n-1} + 1$$

得到 $T_n = 2T_{n-1} + 1$ 。将 n 等于 0 的情况作为初始条件，得到完整的递归式 (recurrence)

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \quad n > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

计算得到

$$T_n = 2^n - 1, \quad n \geqslant 0 \tag{2}$$

数学归纳法 (mathematical induction)[1]

[1]数学归纳法的难点并不在于证明本身，而是如何得到关系式

1. 基础 basis, n 取最小值 n_0 证明该命题
2. 归纳 induction, 假设 $k = n - 1$ 时归纳结果成立，证明 $k = n$ 时该结果也成立

使用数学归纳法证明河内塔问题递归式

证明. 证明河内塔问题递归式 1. $k = 0$ 时，$T_0 = 2^0 - 1 = 0$
2. 假设 $k = n - 1$ 时 $T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ 成立。
3. $k = n$ 时，$T_n = 2 * T_{n-1} + 1 = 2 * (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$

评论 1. 研究小的情形
2. 求解递归式 (1)
3. 求解递归式 (2)

Q: 递归式 $T_n = 2^n - 1$ 是怎样得到的?

$$T_0 + 1 = 1$$
$$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2 = 2(T_{n-1} + 1)$$

令 $U_n = T_n + 1$

$$U_0 = 1$$
$$U_n = 2U_{n-1}, \quad n > 0.$$

容易推出 $U_n = 2^n, T_n = 2^n - 1$

1.2 平面上的直线

平面上 n 条直线所界定的区域最大个数 L_n 是多少?

$$
\begin{aligned}
&L_0 = 1 \\
&L_1 = 2 \\
&L_2 = 4 \\
&L_3 = 7 \\
&\ldots \\
&L_n \leqslant L_{n-1} + n, \quad n > 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_n &= L_{n-1} + n \\
&= L_{n-2} + (n-1) + n \\
&= \cdots \\
&= L_0 + 1 + 2 + \cdots + n \\
&= 1 + S_n
\end{aligned}
$$

其中 $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ 被称为**三角形数**。

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

由此得到平面分割数 $L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

使用数学归纳法证明该公式

证明. 1. $k = 0$, $L_0 = 1$.

2. 设 $k = n - 1$, $L_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + 1 = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ 成立.

3. $k = n$, $L_n = L_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$

评论 将直线的情况拓展到折线。

$$Z_1 = 2$$
$$Z_2 = 7$$

做法，将折线补齐成两条直线[2]

$$\begin{aligned} Z_n &= L_2n - 2n \qquad \text{锯齿点不在交点} \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 - 2n \\ &= 2n^2 - n + 1, \quad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

1.3 约瑟夫问题

n 个人围成一圈，从第一个人开始，每隔一个删除一个。

表 1: 约瑟夫问题最终剩余数字 J(n) 与全体数字 n 之间的关系

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
J(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3

人数总数为偶数 $J(2n) = 2J(n) - 1, n \geqslant 1$. 人数总数为奇数 $J(2n+1) = 2J(n) + 1, n \geqslant 1$.

递归式

$$\begin{aligned} J(1) &= 1 \\ J(2n) &= 2J(n) - 1, & n \geqslant 1 \\ J(2n+1) &= 2J(n) + 1, & n \geqslant 1 \end{aligned}$$

[2] $L_n \sim \frac{1}{2}n^2$
$Z_n \sim 2n^2$

计算得到 $n = 2^m + l$，封闭形式 $J(2^m + l) = 2l + 1, m \geqslant 0, 0 \leqslant l < 2^m$.

证明. 1. l is even.

$$\begin{aligned} J(2^m + l) &= 2J(2^m + \frac{l}{2}) - 1 \\ &= 2(2 * \frac{l}{2} + 1) - 1 \\ &= 2l + 1 \end{aligned}$$

2. l is odd.

$$\begin{aligned} J(2^m + l) &= 2J(2^m + \frac{l-1}{2}) - 1 \\ &= 2(2 * \frac{l-1}{2} + 1) - 1 \\ &= 2l + 1 \end{aligned}$$

$$J(2n + 1) - J(2n) = 2 \tag{4}$$

评论 将 n 和 J(n) 以 2 为基数表示 (表示为二进制). 假设:

$$\begin{aligned} n &= (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 \\ &= b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2^1 + b_0 2^0 \end{aligned}$$

其中 $b_m = 1, b_i = 0$ 或$1 \quad (0 \leqslant i < m, i \in \mathbb{N}^+)$

$$
\begin{aligned}
n &= 2^m + l \\
n &= (1b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2 \\
l &= (0b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2 \\
2l &= (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_00)_2 \\
2l+1 &= (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_01)_2 \\
J(n) &= (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_01)_2
\end{aligned}
$$

因此我们得到 $J((1b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2) = (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_01)_2$.
n 向左循环移动一位得到 J(n)!

案例 1 $J((1011)_2) = (0111)_2 = (111)_2$, 该式即 $J(11) = 7$

注意：0 移动至首位会消失，而不需要保留空位。

$2^{\nu(n)} - 1$, 其中 $\nu(n)$ 为 n 转换成的二进制数中 1 的个数

案例 2 n=13, $(13)_{10} = (1101)_2$, $\mu(13) = 3$.
$J(J(\ldots(J(13))\ldots)) = 2^3 - 1 = 7$

案例 3 n=23403, $\mu(23403) = 10$, therefore $J(J(\ldots(J(23403))\ldots)) = 2^{10} - 1 = 1023$

回到第一个猜测 $J(n) = \frac{n}{2}$ n 为偶数。这个猜想在什么情况下成立?

目前已知 $n = 2^m + l$,

$$
\begin{aligned}
J(n) &= \frac{n}{2} \\
2l+1 &= (2^m+l)/2 \\
\frac{3}{2}l &= 2^{m-1}-1 \\
l &= \frac{1}{3}(2^{m-1}-2)
\end{aligned}
$$

m 为奇数，2^m-2 是 3 的倍数

m 为偶数，2^m-2 不是 3 的倍数

$J(n)=\frac{n}{2}$ 有无穷多组解

表 2: J(n) 关系式之间的关系

m	l	$n=2^m+l$	$J(n)=2l+1=\frac{n}{2}$	$(n)_2$
1	0	2	1	10
3	2	10	5	1010
5	10	42	21	101010
7	42	170	85	10101010

评论 再推广，引入常数 α,β,γ.

$$
\begin{cases}
f(1)=\alpha \\
f(2n)=2f(n)+\beta, \quad n\geqslant 1 \\
f(2n+1)=2f(n)+\gamma, \quad n\geqslant 1
\end{cases} \tag{5}
$$

假设 $f(n)$ 具有如下迭代形式

$$
f(n)=A(n)\alpha+B(n)\beta+C(n)\gamma \tag{6}
$$

表 3: f(n) 常数的变化规律

n	f(n)	α	β	γ
1	α	1	0	0
2	$2\alpha + \beta$	2	1	0
3	$2\alpha + \gamma$	2	0	1
4	$4\alpha + 3\beta$	4	3	0
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$	4	2	1
6	$4\alpha + \beta + 2\gamma$	4	1	2
7	$4\alpha + 3\gamma$	4	0	3
8	$8\alpha + 7\beta$	8	7	0
9	$8\alpha + 6\beta + \gamma$	8	6	1

看起来似乎有

$$\begin{cases} A(n) = 2^m & n = 2^m + l, \\ B(n) = 2^m - 1 - l & 0 \leqslant l \leqslant 2^m \\ C(n) = l & (n \geqslant 1) \end{cases} \tag{7}$$

使用归纳法证明过程较为繁琐，可选用特殊值组合

1. $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$, 此时 $f(n) = A(n)$, 式5 变为

$$\begin{cases} A(1) = 1 \\ A(2n) = 2A(n), \quad n \geqslant 1 \\ A(2n+1) = 2A(n), \quad n \geqslant 1 \end{cases}$$

此时由归纳法可得 $A(2^m + l) = 2^m$

表 4: f(n) 在 $\alpha=1,\beta=\gamma=0$ 时的变化情况

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(n)	1	2	2	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8	16	16	16

2. $f(n)=1$

$$\begin{cases}1=\alpha\\1=2\times1+\beta\\1=2\times1+\gamma\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-1\\\gamma=-1\end{cases}$$

$$A(n)-B(n)-C(n)=f(n)=1$$

3. $f(n)=n$

$$\begin{cases}1=\alpha\\2n=2\times n+\beta\\2n+1=2\times n+\gamma\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=0\\\gamma=1\end{cases}$$

$$A(n)+C(n)=f(n)=n$$

当 $n=2^m+l,0\leqslant l<2^m$ 时，由上述三种情况可以得到

$$\begin{cases}A(n)&&=2^m\\A(n)-B(n)&-C(n)&=1\\A(n)&+C(n)&=n=2^m+l\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A(n)=2^m\\B(n)=2^m-1-1\\C(n)=l\end{cases}$$

以上为求解递归式的**成套方法** (repertorire method)

评论 约瑟夫递归式二进制解的推广

已知约瑟夫递归式的解为

$$J((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 b_m)_2, \qquad b_m = 1$$

推广的约瑟夫递归式有无这种形式的解?

令 $\beta_0 = \beta, \beta_1 = \gamma$

$$\begin{cases} f(1) = \alpha \\ f(2n+j) = 2f(n) + \beta_j, \quad j = 0, 1, \quad n \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f((b_m b_{m-1} \dots b_3 b_2 b_1 b_0)_2) &= 2f((b_m b_{m-1} \dots b_3 b_2 b_1)_2) + \beta_{b_0} \\ &= 2f((b_m b_{m-1} \dots b_3 b_2)_2) + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= \qquad \vdots \\ &= 2^m f((b_m)_2) + 2^{m-1} f((b_{m-1})_2) + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= 2^m \alpha + 2^{m-1} \beta_{b_{m-1}} + \cdots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \end{aligned}$$

$$f((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (\alpha b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$$

使用成套方法再次求解约瑟夫问题

$n = 100 = (1100100)_2, (\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, 1)$

$$\begin{array}{rlccccccccl} n & = (& 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 &)_2 & = 100 \\ f(n) & = (& 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 &)_2 & \\ & = & +64 & +32 & -16 & -8 & +4 & -2 & -1 & & = 73 \end{array}$$

表 5: 成套方法各项系数

n	f(n)	J(n)
1	α	1
2	$2\alpha+\beta$	1
3	$2\alpha+\gamma$	3
4	$4\alpha+2\beta+\beta$	1
5	$4\alpha+2\beta+\gamma$	3
6	$4\alpha+\ \beta+2\gamma$	5
7	$4\alpha\qquad+3\gamma$	7
8	$8\alpha7\beta$	1
7	$4\alpha6\beta+\ \gamma$	3

总结:

$$\begin{aligned}
n &= (&& 1 && 1 && 0 && 0 && 1 && 0 && 0 &&)_2 && = 100\\
f(n) &= (&& \alpha && \gamma && \beta && \beta && \gamma && \beta && \beta &&)_2 &&\\
&= (&& 1 && 1 && -1 && -1 && 1 && -1 && -1 &&)_2 &&\\
&= && +2^6 && +2^5 && -2^4 && -2^3 && +2^2 && -2^1 && -2^0 && && = 73
\end{aligned}$$

由于在 n 的二进制表示中每一块二进制数字 $(1000\ldots00)_2$ 都被变换成

$$(1{-}1{-}1{-}1\ldots{-}1{-}1)_2 = (000\ldots01)_2 \tag{8}$$

因而推出循环移位性质

$$\begin{aligned}
f(j) &= \alpha_j && 1 \leqslant j < d.\\
f(dn+j) &= cf(n)+\beta_j && 0 \leqslant j < d, \quad n \leqslant 1
\end{aligned}$$

有变动基数的解

$$f((b_m b_{m-1}\ldots b_1 b_0)_d) = (\alpha_{b_m}\beta_{b_{m-1}}\ldots\beta_{b_1}\beta_{b_0})_c \tag{9}$$

前一式基数为 d，后一式基数为 c [3]

example:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 34 \\
f(2) &= 5 \\
f(3n) &= 10f(n) + 76, && n \geqslant 1 \\
f(3n+1) &= 10f(n) - 2, && n \geqslant 1 \\
f(3n+2) &= 10f(n) + 8, && n \geqslant 1
\end{aligned}
$$

计算 $f(19)$.

Solve: 通过基数方法可知 $d = 3, c = 10$.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 34 \\
\alpha_2 &= 5 \\
\beta_1 &= 76 \\
\beta_2 &= -2 \\
\beta_3 &= 8
\end{aligned}
$$

$$(19)_{10} = 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = (201)_3$$

$$
\begin{aligned}
f((19)_{10}) &= f((201)_3) \\
&= (5 \quad 76 \quad\ -2)_{10} \\
&= 5 \times 10^2 + 76 \times 10^1 + (-2) \times 10^0 \\
&= 500 + 760 - 2 \\
&= 1258
\end{aligned}
$$

[3]之后会用 tikz 绘图标注