

目 录

第七章 函数序列与函数项级数	1
主要问题的讨论	1
一致收敛性	5
一致收敛性与连续性	7
一致收敛性与积分	10
一致收敛性与微分	11
等度连续的函数族	14
Stone-Weierstrass 定理	18
习题	25
第八章 一些特殊函数	32
幂级数	32
指数函数与对数函数	39
三角函数	43
复数域的代数完备性	47
Fourier 级数	48
函数	56
习题	60
第九章 多元函数	69
线性变换	69
微分法	77
凝缩原理	87
反函数定理	89
隐函数定理	92
秩定理	97
行列式	102
高阶导数	106
积分的微分法	107

习题	110
第十章 微分形式的积分	117
积分	117
本原映射	120
单位的分割	123
变量代换	124
微分形式	126
单形与链	142
Stokes 定理	149
闭形式与恰当形式	152
向量分析	159
习题	167
第十一章 LEBESGUE 理论	179
集函数	179
Lebesgue 测度的建立	181
测度空间	190
可测函数	191
简单函数	193
积分	194
与 Riemann 积分的比较	203
复函数的积分	206
\mathcal{L}^2 类的函数	207
习题	214
参考书目	217

第七章 函数序列与函数项级数

虽然下面的多数定理以及它们的证明不难推广到向量值函数, 甚至推广到映入一般度量空间之内的映射, 但在这一章里, 我们只限于讨论复值函数(自然, 它包括实值函数). 我们宁愿停止在这个简单范围之内, 为的是把注意力集中在最重要的方面——调换两个极限过程时出现的若干问题.

主要问题的讨论

7.1 定义 假设 $n=1, 2, 3, \dots, \{f_n\}$ 是一个定义在集 E 上的函数序列, 再假设数列 $\{f_n(x)\}$ 对于每个 $x \in E$ 收敛. 我们便可以由

$$(1) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in E).$$

确定一个函数 f .

这时候, 我们说 $\{f_n\}$ 在 E 上收敛, 并且 f 是 $\{f_n\}$ 的极限或极限函数. 有时也用一个带一点描述性的术语, 即: 如果(1)成立, 就说“在 E 上 $\{f_n\}$ 逐点收敛于 f ”. 类似地, 如果对于每个 $x \in E$, $\sum f_n(x)$ 收敛, 并且如果我们定义

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x \in E),$$

便说函数 f 是级数 $\sum f_n$ 的和.

出现的主要问题是: 在极限运算(1)与(2)之下, 判断函数的一些重要性质是否能够保留下来. 例如, 假如函数 f_n 都是连续的, 或可微的, 或可积的, 这些性质对于极限函数是不是也成立? f_n 与

f' 或 f_n 的积分与 f 的积分之间的关系是什么?

所谓 f 在 x 点连续, 即是说

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x).$$

因此, 问一个连续函数序列的极限是否连续, 就等同于问是否

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t),$$

换句话说, 执行这两个极限过程的次序是否无所谓. 在(3)式的左端, 我们先让 $n \rightarrow \infty$, 然后让 $t \rightarrow x$; 在右端, 先是 $t \rightarrow x$, 然后 $n \rightarrow \infty$.

现在, 我们用几个实例说明两个极限过程一般不能互相交换而不影响最后结果. 然后证明在某些条件下, 两个极限运算的次序是无所谓的.

第一个也是最简单的例子, 涉及一个“双重序列”.

7.2 例 $m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$, 置

$$s_{m,n} = \frac{m}{m+n},$$

• 那么对于每个固定的 n ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n} = 1.$$

于是

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} s_{m,n} = 1.$$

另一方面, 对于每个固定的 m ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n} = 0.$$

于是

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{m,n} = 0.$$

7.3 例 设 x 是实数, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

试看

$$(6) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

由于 $f_n(0) = 0$, 便应该 $f(0) = 0$. 当 $x \neq 0$ 时, (6) 式中最末的级数是收敛的几何级数, 以 $1+x^2$ 为和 (定理 3.26). 因此,

$$(7) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0), \\ 1+x^2 & (x \neq 0). \end{cases}$$

所以, 连续函数的收敛级数可以有不连续的和.

7.4 例 $m = 1, 2, 3, \dots$, 置

$$f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2n}.$$

当 $m!x$ 是整数时, $f_m(x) = 1$, 对于一切其他 x 值, $f_m(x) = 0$. 现在令

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x).$$

当 x 是无理数时, 对于每个 m 值, $f_m(x) = 0$, 因而 $f(x) = 0$; 当 x 是有理数时, 比如说 $x = \frac{p}{q}$, 这里 p 和 q 是整数; 这时如果 $m \geq q$, $m!x$ 便是整数, 于是 $f(x) = 1$. 因此

$$(8) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2n} = \begin{cases} 0 & (x \text{ 是无理数}), \\ 1 & (x \text{ 是有理数}). \end{cases}$$

因此就得到了一个处处间断的极限函数, 它不是 Riemann 可积的 (第六章, 习题 4).

7.5 例 设 x 是实数, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$(9) \quad f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}},$$

于是

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

那么 $f'(x)=0$, 另外

$$f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$$

所以, $\{f'_n\}$ 不收敛于 f' . 例如, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$f'_n(0) = \sqrt{n} \rightarrow +\infty.$$

而 $f'(0)=0$.

7.6 例 设 $0 \leq x \leq 1, n=1, 2, 3, \dots$. 令

$$(10) \quad f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$$

对于 $0 < x \leq 1$, 根据定理 3.20(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

又因为 $f_n(0)=0$, 所以

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

略加计算就能证明

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2n+2},$$

因此, 虽然有(11)式, 但是当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n^2}{2n+2} \rightarrow +\infty$$

如果在(10)式中用 n 代替 n^2 , (11)式仍然成立. 但是现在得到的是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

而

$$\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx = 0$$

所以, 积分的极限和极限的积分, 即使两者都是有限的, 也未必相等.

这些例题说明, 如果粗心地对调了两个极限过程会错误到什么样子. 鉴于这一点, 我们定义一个新的收敛方式, 它比定义 7.1 中规定的逐点收敛性要强些. 这种新的收敛方式能使我们达到正

面的结果.

一致收敛性

7.7 定义 如果对每一个 $\varepsilon > 0$, 有一个整数 N , 使得 $n \geq N$ 时, 对于一切 $x \in E$, 成立

$$(12) \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

我们就说, 函数序列 $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 在 E 上一致收敛于函数 f .

显然, 每个一致收敛序列一定逐点收敛. 很明显, 这两个概念之间的差异在于: 如果 $\{f_n\}$ 在 E 上逐点收敛, 那便存在着这样的函数 f , 它对于每个 $\varepsilon > 0$, 又对于每个 $x \in E$, 有一个整数 N . 如果 $n \geq N$, (12) 式就成立, 这里的 N 既依赖于 ε , 又依赖于 x . 如果 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛, 便对于每个 $\varepsilon > 0$, 能够对于一切 $x \in E$, 找出一个整数 N , 当 $n \geq N$ 时, (12) 式成立.

级数 $\sum f_n(x)$ 的部分和, 规定为

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = s_n(x)$$

如果部分和序列 $\{s_n\}$ 在 E 上一致收敛, 我们就说级数 $\sum f_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

下面是关于一致收敛性的 Cauchy 准则:

7.8 定理 定义在 E 上的函数序列 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛, 当且仅当: 对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在着一个整数 N , 使得 $m \geq N$, $n \geq N$ 和 $x \in E$ 时, 成立

$$(13) \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

证 假设 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛, 并且令 f 是极限函数. 那么, 有一个整数 N , 使得 $n \geq N$ 和 $x \in E$ 时成立

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是 $n \geq N, m \geq N, x \in E$ 时

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

反之, 假设 Cauchy 条件成立. 根据定理 3.11, 序列 $\{f_n\}$ 对于每个 x 收敛于一个极限, 我们可称它为 $f(x)$. 于是, 序列 $\{f_n\}$ 在 E 上收敛于 f . 我们必须证明这个收敛是一致的.

假设给定了 $\varepsilon > 0$, 再选定使 (13) 式成立的 N . 在 (13) 里把 n 固定了, 而让 $m \rightarrow \infty$. 由于当 $m \rightarrow \infty$ 时, $f_m(x) \rightarrow f(x)$, 这就得到了对于个个 $n \geq N$ 和个个 $x \in E$ 都能适用的

$$(14) \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

这就完成了证明.

下面的判别准则往往有用:

7.9 定理 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in E).$$

令

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

那么, 在 E 上 $f_n \rightarrow f$ 是一致的, 当且仅当: $n \rightarrow \infty$ 时, $M_n \rightarrow 0$.

这是定义 7.7 的直接结果. 证明从略.

对于级数, 有一个判别一致收敛性十分方便的方法, 它归功于 Weierstrass.

7.10 定理 假设 $\{f_n\}$ 是定义在 E 上的函数序列. 并且, 假设

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \dots).$$

如果 $\sum M_n$ 收敛, 那么, $\sum f_n$ 便在 E 上一致收敛.

注意, 并没有说它的逆命题怎样 (而实际上是不真的).

证 如果 $\sum M_n$ 收敛, 那么, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 只要 m 和 n 都充分地大, 便能够

$$\left| \sum_{i=n}^m f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n}^m M_i \leq \varepsilon \quad (x \in E).$$

根据定理 7.8, 就得出一致收敛性.

一致收敛性与连续性

7.11 定理 假设在度量空间内的集 E 上 f_n 一致收敛于 f . 设 x 是 E 的极限点. 再假设

$$(15) \quad \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = A_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

那么 $\{A_n\}$ 收敛, 并且

$$(16) \quad \lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

换句话说, 这结论就是

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t).$$

证 假设给定了 $\varepsilon > 0$. 按 $\{f_n\}$ 的一致收敛性, 存在着 N , 使得 $n \geq N, m \geq N$ 和 $t \in E$ 时成立

$$(18) \quad |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon$$

在(18)式中, 让 $t \rightarrow x$. 得到的是, 当 $n \geq N, m \geq N$ 时

$$|A_n - A_m| \leq \varepsilon.$$

于是 $\{A_n\}$ 是Cauchy 序列, 因而收敛, 比如说收敛于 A .

其次

$$(19) \quad |f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|.$$

先选取 n , 要求对于一切 $t \in E$ 使得

$$(20) \quad |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

(根据一致收敛性, 这是能做到的), 并且使得

$$(21) \quad |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

然后对于这个 n , 选取 x 的一个邻域 V , 使得 $t \in V \cap E, t \neq x$ 能保证

$$(22) \quad |f_n(t) - A_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

将(20)到(22)的三个不等式代入(19)式, 结果就是: 只需 $t \in V \cap E, t \neq x$ 便有

$$|f(t) - A| \leq \varepsilon.$$

这和(16)式等价.

7.12 定理 如果 $\{f_n\}$ 是 E 上的连续函数的序列, 并且在 E 上, f_n 一致收敛于 f . 那么, f 在 E 上连续.

这个非常重要的结果是定理 7.11 的直接推论.

它的逆命题不真. 也就是说, 虽然收敛不是一致的, 但是, 一个连续函数的序列也可以收敛于一个连续函数. 例题 7.6 就属于这一类(为看清这一点, 需要应用定理 7.9). 但是, 有一种情形, 我们可以断定逆命题是正确的:

7.13 定理 假定 K 是紧集. 并且

(a) $\{f_n\}$ 是 K 上的连续函数序列,

(b) $\{f_n\}$ 在 K 上逐点收敛于连续函数 f ,

(c) 对于一切 $x \in K$ 和 $n = 1, 2, 3, \dots, f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$.

那么在 K 上 $f_n \rightarrow f$ 是一致的.

证 令 $g_n = f_n - f$, 于是 g_n 是连续的, 在每点上 $g_n \rightarrow 0$ 并且 $g_n \geq g_{n+1}$. 现在要证明 g_n 在 K 上一致收敛于 0.

假设给定了 $\varepsilon > 0$, 假设 K_n 是使 $g_n(x) \geq \varepsilon$ 的一切 $x \in E$ 的集. 由于 g_n 连续, 那么 K_n 是闭的(定理 4.8), 所以是紧的(定理 2.35). 由于 $g_n \geq g_{n+1}$, 我们得到 $K_n \supset K_{n+1}$. 固定了 $x \in K$. 由于 $g_n(x) \rightarrow 0$, 我们知道只需 n 充分大, 便能使 $x \notin K_n$. 所以 $x \notin \bigcap K_n$. 换句话说, $\bigcap K_n$ 是空的, 从而对应于某个 N 的 K_N 是空的(定理 2.36). 必然对于一切 $x \in K$ 和一切 $n \geq N$, 有 $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$. 这就证明了这定理.

注意紧性是必不可少的. 例如:

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, \quad (0 < x < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots)$$

在 $(0, 1)$ 里 $f_n(x)$ 单调地趋于零, 然而不是一致收敛.

7.14 定义 如果 X 是度量空间, $\mathcal{C}(X)$ 就表示以 X 为定义域的复值连续有界函数的集.

[注意, 如果 X 是紧集, 有界性就是多余的(定理 4.15). 所以如果 X 是紧集, $\mathcal{C}(X)$ 就由 X 上的一切复值连续函数组成.]

我们给每个 $f \in \mathcal{C}(X)$ 配置上它的上确范数

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

因为假定了 f 是有界的, 那么 $\|f\| < \infty$. 显然只有当 $f(x) = 0$ (对于每个 $x \in X$) 时, 才有 $\|f\| = 0$. 如果 $h = f + g$, 那么对于一切 $x \in X$,

$$|h(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

所以

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

如果定义 $f \in \mathcal{C}(X)$ 与 $g \in \mathcal{C}(X)$ 之间的距离是 $\|f - g\|$, 那么它就满足关于度量的公理 2.15.

于是我们使 $\mathcal{C}(X)$ 变成了度量空间.

定理 7.9 可以重述为

对于 $\mathcal{C}(X)$ 的度量来说, 序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f , 当且仅当 f_n 在 X 上一致收敛于 f .

因此 $\mathcal{C}(X)$ 的闭子集有时叫做一致闭的, 集 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X)$ 的闭包叫做它的一致闭包, 等等.

7.15 定理 上边说的度量使得 $\mathcal{C}(X)$ 变成了完备度量空间.

证 设 $\{f_n\}$ 是 $\mathcal{C}(X)$ 里的 Cauchy 序列. 这就是说, 对应于每个 $\varepsilon > 0$ 有一个 N 使得 $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ 在 $n \geq N$ 及 $m \geq N$ 时成立.

于是根据定理 7.8 有一个函数 f , 它以 X 为定义域, 而 $\{f_n\}$ 一致收敛于它. 根据定理 7.12, f 是连续的. 不仅如此, 由于总有一个 n , 使得 $|f(x) - f_n(x)| < 1$ 对于一切 $x \in X$ 成立, 而 f_n 又有界, 那么 f 是有界的.

所以 $f \in \mathcal{C}(X)$, 而且由于 f_n 在 X 上一致收敛于 f , 那么当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\|f - f_n\| \rightarrow 0$.

一致收敛性与积分

7.16 定理 设 α 在 $[a, b]$ 上单调递增. 假定在 $[a, b]$ 上 $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 再假定在 $[a, b]$ 上 $f_n \rightarrow f$ 是一致的, 那么在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, 而且

$$(23) \quad \int_a^b f d\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n d\alpha.$$

(极限的存在性是本结论的一部分.)

证 只对于实函数证明这定理就够了. 令

$$(24) \quad e_n = \sup |f_n(x) - f(x)|,$$

这上确界是在 $a \leq x \leq b$ 上取的. 这时

$$f_n - e_n \leq f \leq f_n + e_n,$$

所以 f 的上下积分(参阅定义 6.2)满足

$$(25) \quad \int_a^b (f_n - e_n) d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b f d\alpha \leq \int_a^b (f_n + e_n) d\alpha.$$

从而

$$0 \leq \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \leq 2e_n[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

由于 $n \rightarrow \infty$ 时, $e_n \rightarrow 0$ (定理 7.9), 可见 f 的上下积分相等.

所以 $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. 现在再一次运用(25), 就得到

$$(26) \quad \left| \int_a^b f d\alpha - \int_a^b f_n d\alpha \right| \leq e_n[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

因此(23)成立.

推论 假若在 $[a, b]$ 上 $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$, 而且

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

这级数在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则

$$\int_a^b f d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n d\alpha.$$

换句话说; 这级数可以逐项积分.

一致收敛性与微分

从例题 7.5 已经知道, 由 $\{f_n\}$ 的一致收敛不能推出序列 $\{f'_n\}$ 的什么性质. 当 $f_n \rightarrow f$ 时, 为了断定 $f'_n \rightarrow f'$ 需要有较强的假设.

7.17 定理 假设 $\{f_n\}$ 是 $[a, b]$ 上的可微函数序列, 并且 $[a, b]$ 上有某点 x_0 使 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛. 如果 $\{f'_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 那么 $\{f_n\}$ 便在 $[a, b]$ 上一致收敛于某函数 f ; 并且

$$(27) \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (a \leq x \leq b).$$

证 假设给定了 $\varepsilon > 0$, 选取一个 N 要它使得当 $n \geq N$ 与 $m \geq N$ 时有

$$(28) \quad |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$(29) \quad |f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (a \leq t \leq b).$$

假如把中值定理 5.19 用于函数 $f_n - f_m$, 那么由(29)式可以说
明, 当 $n \geq N, m \geq N$ 时, 对于 $[a, b]$ 上任意的 x 与 t , 有

$$(30) \quad |f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leq \frac{|x-t|\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

根据(28)与(30)知道不等式

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f_m(x)| \\ + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

意味着

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (a \leq x \leq b, n \geq N, m \geq N),$$

于是 $\{f_n\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 令

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

现在在 $[a, b]$ 上固定一点 x , 并且对于 $a \leq t \leq b, t \neq x$ 定义

$$(31) \quad \phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x},$$

那么,

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow x} \phi_n(t) = f'_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

(30)里的头一个不等式表明

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (n \geq N, m \geq N),$$

于是 $\{\phi_n\}$ 对于 $a \leq t \leq b, t \neq x$ 一致收敛. 又因为 $\{f_n\}$ 收敛于 f , 那么由(31)可以断言, 对于 $a \leq t \leq b, t \neq x$ 一定

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$$

一致地成立.

如果现在把定理 7.11 用于 $\{\phi_n\}$, (32)与(33)式表明

$$\lim_{t \rightarrow x} \phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x),$$

根据 $\phi(t)$ 的定义, 这就是(27)式.

评注 如果在前面的假设条件之外, 再添上 f'_n 的连续性, 就可以根据定理 7.16 和微积分基本定理, 给(27)式做一个短得多的证明.

7.18 定理 实轴上确有处处不可微的实连续函数.

证 定义

$$(34) \quad \varphi(x) = |x| \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

再要求

$$(35) \quad \varphi(x+2) = \varphi(x),$$

以将 $\varphi(x)$ 的定义扩展到所有实数 x , 那么对于一切 s 与 t ,

$$(36) \quad |\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s - t|.$$

特别地 φ 在 R^1 上连续. 定义

$$(37) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

由于 $0 \leq \varphi \leq 1$, 定理 7.10 表明, 级数 (37) 在 R^1 上一致收敛. 根据定理 7.12, f 在 R^1 上连续.

现在固定一个实数 x 和一个正数 m , 令

$$(38) \quad \delta_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$$

其中的符号要选得让 $4^m x$ 与 $4^m(x + \delta_m)$ 之间没有整数. 这一定能做到, 原因是 $4^m |\delta_m| = \frac{1}{2}$. 定义

$$(39) \quad \gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}.$$

当 $n > m$ 时, $4^n \delta_m$ 是偶数, 所以 $\gamma_n = 0$. 当 $0 \leq n \leq m$ 时, (36) 意味着 $|\gamma_n| \leq 4^n$.

由于 $|\gamma_m| = 4^m$, 我们可以断定

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| &= \left| \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n \right| \\ &\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{1}{2}(3^m + 1). \end{aligned}$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\delta_m \rightarrow 0$, 所以 f 在 x 点不可微.

等度连续的函数族

从定理 3.6 已经知道, 每个有界的复数序列必有收敛的子序列, 于是发生一个问题: 关于函数序列, 类似的结论是否仍然正确. 为了把问题说得更确切, 我们定义两种有界性.

7.19 定义 令 $\{f_n\}$ 是定义在集 E 上的函数序列.

我们说 $\{f_n\}$ 在 E 上逐点有界, 如果对于每个 $x \in E$, 序列 $\{f_n(x)\}$ 是有界的. 也就是说: 如果存在着一个定义在 E 上的有限值函数 ϕ , 使得

$$|f_n(x)| < \phi(x) \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \dots).$$

我们说 $\{f_n\}$ 在 E 上一致有界, 如果存在着一个数 M , 使得

$$|f_n(x)| < M \quad (x \in E, n = 1, 2, 3, \dots).$$

如果 $\{f_n\}$ 在 E 上逐点有界, 并且 E_1 是 E 的一个可数的子集, 便总能找到一个子序列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $\{f_{n_k}(x)\}$ 对于每个 $x \in E_1$ 收敛. 根据定理 7.23 的证明中所用的对角线手法, 这点总可以做到.

然而, 即使 $\{f_n\}$ 是某个紧集 E 上一致有界的连续函数序列, 也未必有在 E 上逐点收敛的子序列. 在下面所设的例题里, 如果我们现有的知识来证明这个事实将是十分麻烦的, 但是如借助于第十一章的一个定理, 证明就十分简单.

7.20 例 令

$$f_n(x) = \sin nx \quad (0 \leq x \leq 2\pi, n = 1, 2, 3, \dots).$$

假设有一个数列 $\{n_k\}$, 使得 $\{\sin n_k x\}$ 对于每个 $x \in [0, 2\pi]$ 收敛. 这时候, 必然

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi);$$

由此

$$(40) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 = 0 \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

根据关于有界收敛序列积分的 Lebesgue 定理(定理 11.23), (40) 意味着

$$(41) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 0.$$

但是由简单计算得到

$$\int_0^{2\pi} (\sin n_k x - \sin n_{k+1} x)^2 dx = 2\pi.$$

这与(41)式矛盾.

另一个问题是: 每个收敛序列是否含有一致收敛的子序列. 下一个例题说明, 这不是必然的; 即使序列在一个紧集上一致有界, 也是这样. (例题 7.6 表明, 有界函数序列可以收敛而不一致有界, 但是有界函数序列的一致收敛性包含着一致有界性, 却是显而易见的.)

7.21 例 设 $0 \leq x \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots$

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}.$$

那么 $|f_n(x)| \leq 1$, 于是 $\{f_n\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致有界. 还有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

可是

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

因此, 没有子序列能在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

关于这情形所需要的概念是等度连续. 下面就是它的定义.

7.22 定义 f 是定义在度量空间 X 内集 E 上的函数, \mathcal{F} 是 f 的族. 说 \mathcal{F} 在 E 上 等度连续, 就是说对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在着一个 $\delta > 0$, 只要 $d(x, y) < \delta, x \in E, y \in E$ 及 $f \in \mathcal{F}$ 就能使得

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

这里 d 表示 X 的度量.

显然, 等度连续族的每个函数是一致连续的.

例 7.21 中的函数序列不是等度连续的.

一方面是等度连续性, 另一方面是连续函数的一致收敛性, 双方之间有十分密切的关系. 定理 7.24 与 7.25 将要说明这一点, 但是需要先说一下与连续性无关的选择法.

7.23 定理 假若 $\{f_n\}$ 是在可数集 E 上逐点有界的复值函数序列, 那么 $\{f_n\}$ 便有子序列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $\{f_{n_k}(x)\}$ 对于每个 $x \in E$ 收敛.

证 设 $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, 是由 E 的点排成的序列. 既然 $\{f_n(x_1)\}$ 有界, 便存在着一个子序列 $\{f_{1,k}\}$ 使得 $\{f_{1,k}(x_1)\}$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时收敛.

现在, 我们筹画一个可以用阵列写出来的序列 S_1, S_2, S_3, \dots ,

$$\begin{array}{lllll} S_1: & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} & \cdots \\ S_2: & f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} & \cdots \\ S_3: & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} & \cdots \\ & \vdots & & & & \end{array}$$

要求它们有下面这些性质:

(a) 对于 $n = 2, 3, 4, \dots$, S_n 是 S_{n-1} 的子序列;

(b) 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\{f_{n,k}(x_n)\}$ 收敛 ($\{f_n(x_n)\}$ 的有界性保证能按这方法选取 S_n);

(c) 在每个序列里函数出现的先后是一样的. 即是说, 如果某函数在 S_1 中位于另一个函数之前, 那么, 它们便在每个 S_n 中保持同样的位置关系, 一直到其中有一个函数被去掉为止. 因此, 从上述阵列的某行过渡到下一行时, 函数可以向左移动, 而决不能向右移动.

现在取阵列的对角线上的这列函数, 即是考虑序列

$$S: f_{1,1} \quad f_{2,2} \quad f_{3,3} \quad f_{4,4} \quad \cdots$$

根据(c), 序列 S (可能要去掉它的前 $n-1$ 项) 是 S_n 的子序列, $n=1, 2, 3, \dots$, 因此, 由(b)得出 $n \rightarrow \infty$ 时 $\{f_{n,n}(x_i)\}$ 对于每个 $x_i \in E$ 收敛.

7.24 定理 如果 K 是紧度量空间, $f_n \in \mathcal{C}(K)$, $n=1, 2, 3, \dots$, 而且 $\{f_n\}$ 在 K 上一致收敛, 那么 $\{f_n\}$ 便在 K 上等度连续.

证 假设给定了 $\varepsilon > 0$, 既然 $\{f_n\}$ 一致收敛, 便有正整数 N 使得

$$(42) \quad \|f_n - f_N\| < \varepsilon \quad (n > N).$$

(参阅定义 7.14). 由于紧集上的连续函数一定一致连续, 所以有一个 $\delta > 0$, 使得

$$(43) \quad |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$$

只要 $1 \leq i \leq N$, 而且 $d(x, y) < \delta$.

若是 $n > N$ 而且 $d(x, y) < \delta$, 就应该

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| \\ &\quad + |f_N(y) - f_n(y)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

这和(43)联合起来就把定理证明了.

7.25 定理 假若 K 是紧集, $f_n \in \mathcal{C}(K)$, $n=1, 2, 3, \dots$, 而且 $\{f_n\}$ 在 K 上逐点有界又等度连续, 那么

- (a) $\{f_n\}$ 在 K 上一致有界,
- (b) $\{f_n\}$ 含有一致收敛的子序列.

证

(a) 假设给定了 $\varepsilon > 0$, 又按照定义 7.22 选了 $\delta > 0$, 可以对于一切 n , 由 $d(x, y) < \delta$ 保证

$$(44) \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

既然 K 是紧集, 便有 K 里的有限多个点 p_1, \dots, p_r , 使得每个 $x \in K$ 至少对于一个 p_i 符合于 $d(x, p_i) < \delta$. 既然 $\{f_n\}$ 逐点有界, 便有 $M_i < \infty$ 对于一切 n 有 $|f_n(p_i)| < M_i$. 如果 $M = \max(M_1, \dots, M_r)$, 那么对于每个 $x \in K$ 总要 $|f(x)| < M + \varepsilon$, 这就把(a)证明了.

(b) 设 E 是 K 的可数稠密子集 (关于这样集 E 的存在, 参阅第二章习题 25). 定理 7.23 说明 $\{f_n\}$ 有一个子序列 $\{f_{n_i}\}$ 使得 $\{f_{n_i}(x)\}$ 对于每个 $x \in E$ 收敛.

为了简化记号, 令 $f_{n_i} = g_i$. 现在证明 $\{g_i\}$ 在 K 上一致收敛.

设 $\varepsilon > 0$, 再照本证明一开始那样取 $\delta > 0$. 设 $V(x, \delta)$ 是一切 $y \in K$ 之合于 $d(x, y) < \delta$ 的集. 由于 E 在 K 中稠密, 而 K 是紧的, 便有 E 的有限个点 x_1, \dots, x_m , 使得

$$(45) \quad K \subset V(x_1, \delta) \cup \dots \cup V(x_m, \delta).$$

因为 $\{g_i(x)\}$ 对于每个 $x \in E$ 收敛, 所以有一个正整数 N 使得

$$(46) \quad |g_i(x_s) - g_j(x_s)| < \varepsilon$$

其中 $i \geq N, j \geq N, 1 \leq s \leq m$.

如果 $x \in K$, (45) 就表示对于某个 $s, x \in V(x_s, \delta)$, 所以对于每个 i

$$|g_i(x) - g_i(x_s)| < \varepsilon.$$

如果 $i \geq N, j \geq N$, 从 (46) 就应该有:

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_i(x_s)| + |g_i(x_s) - g_j(x_s)| \\ &\quad + |g_j(x_s) - g_j(x)| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

证毕.

Stone-Weierstrass 定理

7.26 定理 如果 f 是 $[a, b]$ 上的一个连续复函数, 那么便有多项式 P_n 的序列, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

在 $[a, b]$ 上一致地成立. 如果 f 是实函数, P_n 可以是实多项式.

这就是 Weierstrass 最初发现的定理的形式.

证 我们可以假定 $[a, b] = [0, 1]$ 而不失却普遍性, 还可以假设 $f(0) = f(1) = 0$. 因为, 如果对于这种情形证明了这定理, 然后

考虑

$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)] \quad (0 \leq x \leq 1).$$

这里 $g(0) = g(1) = 0$, 于是一旦 g 能作为一致收敛的多项式序列的极限, 那么, 显然 f 也是这样. 这因为 $f - g$ 是多项式.

此外, 在 $[0, 1]$ 以外的点 x 上定义 $f(x)$ 为 0. 那么, f 在整个实轴上一致连续.

置

$$(47) \quad Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

这里的 c_n 是按照

$$(48) \quad \int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

选取的. 我们需要一点点关于 c_n 的数量阶的知识. 由于

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n dx \\ &\geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2) dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

从(48)知道

$$(49) \quad c_n < \sqrt{n}.$$

上式中用到的不等式 $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$ 是容易证明的, 这因为

$$(1-x^2)^n - 1 + nx^2,$$

在 $x=0$ 时等于 0, 并且它的导数在 $(0, 1)$ 内是正的.

对于任意的 $\delta > 0$, 由(49)式得

$$(50) \quad Q_n(x) \leq \sqrt{n} (1-\delta^2)^n \quad (\delta \leq |x| \leq 1),$$

于是在 $\delta \leq |x| \leq 1$ 中, $Q_n \rightarrow 0$ 一致地成立.

现在令

$$(51) \quad P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) Q_n(t) dt \quad (0 \leq x \leq 1).$$

利用关于 f 的假定 $[t < -x$ 及 $t > 1-x$ 时, $f(x+t) = 0]$, 再经过

简单的变量代换,可以得到

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) Q_n(t-x) dt, \end{aligned}$$

并且上边最后一个积分显然是关于 x 的多项式. 于是, $\{P_n\}$ 是多项式序列. 如果 f 是实的, 那么它也是实的.

给定了 $\varepsilon > 0$, 然后取 $\delta > 0$, 使得 $|y-x| < \delta$ 时有

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 $M = \sup |f(x)|$. 用 (48), (50) 和 $Q_n(x) \geq 0$ 的事实, 我们看到, 对于 $0 \leq x \leq 1$ 以及所有足够大的 n ,

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 [f(x+t) - f(x)] Q_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) dt \\ &\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) dt + 2M \int_{\delta}^1 Q_n(t) dt \\ &\leq 4M \sqrt{n} (1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

这就证明了本定理.

对几个 n 的值画出 Q_n 的图象是有益的. 还要注意, 为了推导 $\{P_n\}$ 的一致收敛性, 我们需要 f 的一致连续性.

证明定理 7.32 时, 并不需要定理 7.26 的全部结果, 而只需要下边这个特殊情形, 现在把它作为推论说一下.

7.27 推论 在每个闭区间 $[-a, a]$ 上, 必有实多项式 P_n 的序列, 合于 $P_n(0) = 0$, 而且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = |x|$$

在 $[-a, a]$ 上一致地成立.

证 根据定理 7.26, 存在着实多项式序列 $\{P_n^*\}$, 它在 $[-a, a]$ 上一致收敛于 $|x|$. 特别地, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $P_n^*(0) \rightarrow 0$. 多项式

$$P_n(x) = P_n^*(x) - P_n^*(0) \quad (n=1, 2, 3)$$

便有我们所希望的性质.

现在我们把多项式的一些能使 Weierstrass 定理成立的性质摘出来.

7.28 定义 我们称定义在集 E 上的复函数族 \mathcal{A} 为代数, 如果对于一切 $f \in \mathcal{A}, g \in \mathcal{A}$ 来说, (i) $f+g \in \mathcal{A}$, (ii) $fg \in \mathcal{A}$, (iii) 对于一切复常数 $c, cf \in \mathcal{A}$. 也就是说, \mathcal{A} 对于加法、乘法以及数乘是封闭的. 我们还必须研究实函数的代数. 这时, (iii) 自然只要求对于一切实数 c 成立.

如果(代数) \mathcal{A} 有一种性质是: 只要 $f_n \in \mathcal{A} (n=1, 2, 3, \dots)$, 并且在 E 上 $f_n \rightarrow f$ 一致成立, 便有 $f \in \mathcal{A}$. 就说 \mathcal{A} 是一致闭的.

设 \mathcal{B} 是由 \mathcal{A} 内所有一致收敛函数序列的极限函数组成的集, 便称 \mathcal{B} 是 \mathcal{A} 的一致闭包.

例如, 所有多项式的集是一个代数. 因而 Weierstrass 定理可以叙述为: $[a, b]$ 上的连续函数的集是 $[a, b]$ 上的多项式集的一致闭包.

7.29 定理 设 \mathcal{B} 是有界函数的代数 \mathcal{A} 的一致闭包. 那么 \mathcal{B} 是一致闭的代数.

证 如果 $f \in \mathcal{B}$ 与 $g \in \mathcal{B}$, 便有一致收敛的序列 $\{f_n\}, \{g_n\}$ 合于 $f_n \rightarrow f, g_n \rightarrow g$, 并且 $f_n \in \mathcal{A}, g_n \in \mathcal{A}$. 因为我们是在讨论有界函数, 那么不难证明

$$f_n + g_n \rightarrow f + g, \quad f_n g_n \rightarrow fg, \quad cf_n \rightarrow cf.$$

这里 c 是任意常数. 每种情形里的收敛都是一致的.

因此 $f+g \in \mathcal{B}, fg \in \mathcal{B}$, 且 $cf \in \mathcal{B}$. 于是 \mathcal{B} 是代数.

根据定理 2.27, \mathcal{B} 是(一致)闭的.

7.30 定义 设 \mathcal{A} 是集 E 上的函数族. 说 \mathcal{A} 能分离 E 的点, 就是说对应于每对不同的点 $x_1, x_2 \in E$, 总有一个函数 $f \in \mathcal{A}$, 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

如对应于每个 $x \in E$, 有一个函数 $g \in \mathcal{A}$, 使得 $g(x) \neq 0$, 我们就说, \mathcal{A} 不在 E 的点消失.

所有一元多项式的代数显然在 R^1 上有这些性质. 关于不能分离点的代数, 有一个例子是所有偶多项式的集 (比如说定义在 $[-1, 1]$ 上), 因为对于每个偶函数 f , 都有 $f(-x) = f(x)$.

下面的定理更能说明这些概念.

7.31 定理 设 \mathcal{A} 是定义在集 E 上的函数的代数, \mathcal{A} 能分离 E 的点, \mathcal{A} 又不在 E 的点消失. 假设 x_1, x_2 是 E 的不同的两点, c_1, c_2 是常数 (如果 \mathcal{A} 是实代数它们就是实数). 那么 \mathcal{A} 便含有一个函数 f , 使得

$$f(x_1) = c_1, \quad f(x_2) = c_2.$$

证 这些假设说明 \mathcal{A} 里有函数 g, h 和 k 合于

$$g(x_1) \neq g(x_2), \quad h(x_1) \neq 0, \quad k(x_2) \neq 0.$$

置

$$u = gk - g(x_1)k, \quad v = gh - g(x_2)h.$$

于是 $u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{A}, u(x_1) = v(x_2) = 0, u(x_2) \neq 0, v(x_1) \neq 0$, 所以

$$f = \frac{c_1 v}{v(x_1)} + \frac{c_2 u}{u(x_2)}$$

就有所希望的性质.

现在我们已经具备了 Stone 推广 Weierstrass 定理时所需要的一切资料.

7.32 定理 设 \mathcal{A} 是紧集 K 上的实连续函数的代数. 假如 \mathcal{A} 能分离 K 的点. 如果 \mathcal{A} 又不在 K 的点消失, 那么 \mathcal{A} 的一致闭包由 K 上的所有实连续函数组成.

我们将证明分为四步.

第一步. 如果 $f \in \mathscr{B}$, 那么 $|f| \in \mathscr{B}$.

证 设

$$(52) \quad a = \sup \{ |f(x)| \mid (x \in K),$$

再给定 $\varepsilon > 0$. 根据推论 7.27, 存在着实数 c_1, \dots, c_n , 使得

$$(53) \quad \left| \sum_{i=1}^n c_i y^i - |y| \right| < \varepsilon \quad (-a \leq y \leq a).$$

因为 \mathscr{B} 是代数, 所以函数

$$g = \sum_{i=1}^n c_i f^i$$

是 \mathscr{B} 的成员. 由 (52) 和 (53) 得到

$$|g(x) - |f(x)|| < \varepsilon \quad (x \in K).$$

因为 \mathscr{B} 是一致闭的, 这就表示 $|f| \in \mathscr{B}$.

第二步. 如果 $f \in \mathscr{B}$, $g \in \mathscr{B}$, 那么 $\max(f, g) \in \mathscr{B}$, $\min(f, g) \in \mathscr{B}$.

$\max(f, g)$ 就是由

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{如果 } f(x) \geq g(x), \\ g(x) & \text{如果 } f(x) < g(x), \end{cases}$$

定义的函数 h , 并且同样地定义 $\min(f, g)$.

证 这第二步是第一步和恒等式

$$\max(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$$

$$\min(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$$

的直接结果. 重叠地作下去, 这个结果自然可以推广到函数的任意有限集: 如果 $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{B}$, 那么

$$\max(f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{B}, \quad \min(f_1, \dots, f_n) \in \mathscr{B}.$$

第三步. 给定一个在 K 上连续的实函数 f , 一点 $x \in K$, 以及 $\varepsilon > 0$, 便存在着一个函数 $g_x \in \mathscr{B}$ 满足 $g_x(x) = f(x)$, 而且

$$(54) \quad g_x(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in K).$$

证 由于 $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ 而 \mathscr{A} 又满足定理 7.31 的假定, 所以 \mathscr{B} 也满足这些假定. 于是, 对于每个 $y \in E$, 能找到一个函数 $h_y \in \mathscr{B}$, 使得

$$(55) \quad h_y(x) = f(x), \quad h_y(y) = f(y).$$

根据 h_y 的连续性, 存在一个包含 y 点的开集 J_y , 使得

$$(56) \quad h_y(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in J_y).$$

既然 K 是紧集, 便有一个有限个点 y_1, \dots, y_n 的集, 使得

$$(57) \quad K \subset J_{y_1} \cup \dots \cup J_{y_n}.$$

置

$$g_x = \max(h_{y_1}, \dots, h_{y_n}).$$

根据第二步知道 $g_x \in \mathscr{B}$, 而且关系式 (55) 至 (57) 表明 g_x 也有其他所要求的性质.

第四步. 给定一个在 K 上连续的实函数 f 和 $\varepsilon > 0$, 那么便存在着一个函数 $h \in \mathscr{B}$, 使得

$$(58) \quad |h(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (x \in K).$$

因为 \mathscr{B} 是一致闭的, 这个命题与本定理的结论是等价的.

证 在第三步里, 我们对于每个 $x \in K$, 作出了一个函数 g_x . 由于 g_x 的连续性, 存在着包含 x 点的开集 V_x , 使得

$$(59) \quad g_x(t) < f(t) + \varepsilon \quad (t \in V_x).$$

因为 K 是紧的, 有一个有限点集 x_1, \dots, x_m , 使得

$$(60) \quad K \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$$

置

$$h = \min(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}),$$

根据第二步知道 $h \in \mathscr{B}$, 并且由 (54) 得

$$(61) \quad h(t) > f(t) - \varepsilon \quad (t \in K),$$

而由(59)与(60)得

$$(62) \quad h(t) < f(t) + \varepsilon \quad (t \in K).$$

最后, 由(61)与(62)便知(58)式成立.

定理 7.32 对于复代数不成立, 习题 21 中有反例. 然而, 假如给 \mathcal{A} 添一个额外条件: \mathcal{A} 是自伴的, 这定理的结论就也适用于复代数了. \mathcal{A} 是自伴的意味着每当 $f \in \mathcal{A}$ 时, 它的复共轭 \bar{f} 也必须属于 \mathcal{A} ; 这里 \bar{f} 由 $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ 定义.

7.33 定理 设 \mathcal{A} 是(定义在)紧集 K 上的复连续函数的自伴代数. \mathcal{A} 能分离 K 的点, \mathcal{A} 又不在 K 的点消失. 那么, \mathcal{A} 的一致闭包 \mathcal{B} 由 K 上的所有复连续函数组成; 即是说 \mathcal{A} 在 $\mathcal{C}(K)$ 内稠密.

证 设 \mathcal{A}_R 是 K 上属于 \mathcal{A} 的所有实函数的集.

如果 $f \in \mathcal{A}$, 而 $f = u + iv$, u, v 是实的. 那么, $2u = f + \bar{f}$. 并且由于 \mathcal{A} 是自伴的, 知道 $u \in \mathcal{A}_R$. 假如 $x_1 \neq x_2$, 那么就存在着 $f \in \mathcal{A}$, 使得 $f(x_1) = 1, f(x_2) = 0$; 因此 $0 = u(x_2) \neq u(x_1) = 1$. 这表明 \mathcal{A}_R 能分离 K 的点. 如果 $x \in K$, 便有某个 $g \in \mathcal{A}$ 合于 $g(x) \neq 0$. 那么又有一个复数 λ , 使得 $\lambda g(x) > 0$. 假如 $f = \lambda g, f = u + iv$, 从而 $u(x) > 0$. 因此, \mathcal{A}_R 不在 K 的点消失.

这样一来, \mathcal{A}_R 适合定理 7.32 的假定, 所以 K 上的每个实连续函数必在 \mathcal{A}_R 的一致闭包之中, 从而在 \mathcal{B} 中. 假如 f 是 K 上的复连续函数, $f = u + iv$, 这时 $u \in \mathcal{B}, v \in \mathcal{B}$, 因此, $f \in \mathcal{B}$. 到此证明完毕.

习题

1. 试证每个一致收敛的有界函数序列一致有界.
2. 如果 $\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 在集 E 上一致收敛, 试证: $\{f_n + g_n\}$ 在 E 上一致收

敛. 此外, 假如 $\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 都是有界函数的序列, 试证 $\{f_n g_n\}$ 在 E 上一致收敛.

3. 作两个序列 $\{f_n\}, \{g_n\}$. 要它们在某个集 E 上一致收敛, 但是 $\{f_n g_n\}$ 在 E 上不一致收敛 (当然, $\{f_n g_n\}$ 应在 E 上收敛).

4. 研究级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 x}.$$

这级数对于 x 的什么值绝对收敛? 它在什么闭区间上一致收敛? 在什么闭区间上它失去一致收敛性? 是否在级数收敛的地方, f 都是连续的? f 是有界的吗?

5. 设

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(x < \frac{1}{n+1}\right), \\ \sin^2 \frac{\pi}{x} & \left(\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(\frac{1}{n} < x\right). \end{cases}$$

试证 $\{f_n\}$ 收敛于一个连续函数, 但不是一致收敛的. 用级数 $\sum f_n$ 证明: 绝对收敛不能推出一致收敛, 那怕是对于所有 x 都绝对收敛也不行.

6. 试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

在每个有界闭区间上一致收敛, 但是对任何 x 值, 不绝对收敛.

7. 设 $n=1, 2, 3, \dots$, x 是实数. 令

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

试证 $\{f_n\}$ 一致收敛于一个函数 f , 并且等式

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

当 $x \neq 0$ 时是正确的, 而当 $x=0$ 是错误的.

8. 假设

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0), \end{cases}$$

若 $\{x_n\}$ 是 (a, b) 内相异点的序列, 又若 $\sum |c_n|$ 收敛, 试证级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n) \quad (a \leq x \leq b)$$

一致收敛, 对每个 $x \neq x_n$, f 连续.

9. 设 $\{f_n\}$ 是连续函数的序列, 在集 E 上一致收敛于函数 f . 试证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$$

对于每个合于 $x_n \rightarrow x$ 的点列 $\{x_n\}$ 成立, 这里 $x_n \in E$, $x \in E$. 这命题的逆命题是否正确?

10. 用 (x) 表示 x 的小数部分 (定义见第四章习题 16), 考虑函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2} \quad (x \text{ 为实数}).$$

求 f 的所有间断点, 证明它们组成一个可数的稠密集, 再证明 f 在任意有界闭区间上仍然 Riemann 可积.

11. 假设 $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ 都是在 E 上定义的, 并且

(a) $\sum f_n$ 的部分和一致有界,

(b) 在 E 上 $g_n \rightarrow 0$ 是一致的,

(c) 对于每个 $x \in E$, $g_1(x) \geq g_2(x) \geq g_3(x) \geq \dots$.

试证 $\sum f_n g_n$ 在 E 上一致收敛. 提示: 对照定理 3.42.

12. 假设 g 与 f_n ($n=1, 2, 3, \dots$) 都定义在 $(0, \infty)$ 上, 只要 $0 < t < T < \infty$, 便都在 $[t, T]$ 上 Riemann 可积. $|f_n| \leq g$, 在 $(0, \infty)$ 的每个紧子集上 $f_n \rightarrow f$ 是一致的, 而且

$$\int_0^{\infty} g(x) dx < \infty.$$

试证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

(与本题有关的各定义, 可以看第六章习题 7、8.)

这是 Lebesgue 控制收敛定理 (定理 11.32) 的较弱形式. 只要假定了 $f \in \mathcal{R}$, 即便在 Riemann 积分叙述的字句里, 也可以把一致收敛换作逐点收敛. (参考 F. Cunningham 在 *Math. Mag.* 1967 年 40 卷, 第 179—186 页和 H. Kestelman 在 *Amer. Math. Monthly*, 1970 年 77 卷, 第 182—187 页的文章.)

13. 假定 $\{f_n\}$ 是 R' 上单调递增函数序列, 对于一切 x 和一切 n ,

$$0 \leq f_n(x) \leq 1.$$

(a) 试证有一个函数 f 和一个序列 $\{n_k\}$, 能对于每个 $x \in R^1$, 使得

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x).$$

(这样逐点收敛的子序列的存在, 时常称为 Helly 的选择定理.)

(b) 如果再加上 f 连续的条件, 试证在 R^1 上 $f_{n_k} \rightarrow f$ 是一致的.

提示: (i) 某个子序列 $\{f_{n_k}\}$ 在一切有理点 r 收敛, 比如说收敛于 $f(r)$.

(ii) 对于任何 x 定义 $f(x)$ 为 $\sup f(r)$, 这确界取自一切 $r \leq x$ 之中. (iii) 证明在 f 连续的每个点 x 上 $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ (这里单调性起很大的作用). (iv) $\{f_{n_k}\}$ 的一个子序列, 在 f 的每个间断点上收敛. 这因为最多有可数多个那样的点. 这就证明了 (a). 把 (iii) 的证明适当地修改一下, 就可以证明 (b).

14. 设 f 是 R^1 上具有下列性质的连续实函数: $0 \leq f(t) \leq 1$, 对于每个 t , $f(t+2) = f(t)$, 并且

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{3}\right) \\ 1 & \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 1\right). \end{cases}$$

令 $\Phi(t) = (x(t), y(t))$, 其中

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n}t).$$

试证 Φ 连续, 而且 Φ 把 $I = [0, 1]$ 映满单位正方形 $I^2 \subset R^2$. 如果已证出这件事, 再证 Φ 能把 Cantor 集映满单位正方形 $I^2 \subset R^2$.

提示: 每一个 $(x_0, y_0) \in I^2$ 可以取得

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1}, \quad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n}$$

的形式, 这里 a_i 是 0 或 1. 如果

$$t_0 = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i-1} (2a_i)$$

证明 $f(3^k t_0) = a_k$, 于是 $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

(这是所谓“满布空间曲线”的简单例题. 它归功于 I. J. Schoenberg, 见 *bull. A. M. S.* 1938 年 44 卷, 第 519 页.)

15. 假设 f 是 R^1 上的实连续函数, $f_n(t) = f(nt)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, 而且 $\{f_n(t)\}$ 在 $[0, 1]$ 上等度连续. 关于 f 你能得出什么结论?

16. 假设 $\{f_n\}$ 是紧集 K 上的等度连续的函数序列, $\{f_n\}$ 又在 K 上逐点收敛. 试证 $\{f_n\}$ 在 K 上一致收敛.

17. 给映入任意度量空间的映射规定一致收敛与等度连续的概念. 试证定理 7.9 与 7.12 对于映入任何度量空间的映射都正确; 定理 7.8 与 7.11 对于映入任何完备度量空间的映射都正确; 定理 7.10, 7.16, 7.17, 7.24, 7.25 适用于向量值函数, 即是适用于映入任何 R^k 的映射.

18. 设 $\{f_n\}$ 是一致有界的函数序列, 这些函数都在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积. 令

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

求证存在着子序列 $\{F_{n_k}\}$, 它在 $[a, b]$ 上一致收敛.

19. 设 K 是紧度量空间, S 是 $\mathcal{C}(K)$ 的子集. 证明 S 是紧的 (对于 7.14 节定义的量度) 当且仅当 S 一致闭, 逐点有界, 并且等度连续. (如果 S 不等度连续, S 便含有一个序列, 它没有等度连续的子序列, 从而没有在 K 上一致收敛的子序列.)

20. 如果 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 而且

$$\int_0^1 f(x) x^n dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

试证在 $[0, 1]$ 上 $f(x) = 0$. 提示: f 与任何多项式之积的积分是零. 用 Weierstrass 定理证明

$$\int_0^1 f^2(x) dx = 0.$$

21. 设 K 是复平面上的单位圆 (即是一切 z 之合于 $|z| = 1$ 的集), 再设 \mathcal{A} 是所有形式为

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^N c_n e^{in\theta} \quad (\theta \text{ 是实数})$$

的函数组成的代数. 那么 \mathcal{A} 能分离 K 上的点, 也不在 K 的点消失, 但是仍然有 K 上的连续函数不属于 \mathcal{A} 的一致闭包. 提示: 对于每个 $f \in \mathcal{A}$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = 0,$$

而且对于 \mathcal{A} 的闭包里的每个 f , 这也是对的.

22. 假定在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathcal{R}(\alpha)$, 求证有多项式 P_n 合于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f - P_n|^2 d\alpha = 0$$

(与第六章习题 12 对照.)

23. 设 $P_0=0$, 对于 $n=0, 1, 2, \dots$ 定义

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}.$$

试证在 $[-1, 1]$ 上 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x$ 是一致的.

(这就能够证明 Stone-Weierstrass 定理而不先证定理 7.26.)

提示: 用恒等式

$$|x| - P_{n+1}(x) = [|x| - P_n(x)] \left[1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2} \right]$$

证明 $|x| \leq 1$ 时, $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|$ 且 $|x| \leq 1$ 时

$$|x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2} \right)^n \leq \frac{2}{n+1}.$$

24. 设 X 是以 d 为度量的度量空间. 固定一点 $a \in X$. 给每个 $p \in X$ 指派一个函数 f_p ,

$$f_p(x) = d(x, p) - d(x, a) \quad (x \in X).$$

试证 $|f_p(x)| \leq d(a, p)$ 对于一切 $x \in X$ 成立. 从而 $f_p \in \mathscr{C}(X)$. 对于一切 $p, q \in X$, 证明

$$\|f_p - f_q\| = d(p, q).$$

如果 $\Phi(p) = f_p$, 那么 Φ 是从 X 到 $\Phi(X) \subset \mathscr{C}(X)$ 的等距(保持距离的)映射.

设 Y 是 $\Phi(X)$ 在 $\mathscr{C}(X)$ 里的闭包, 试证 Y 是完备的.

结论: X 与完备度量空间 Y 的稠密子集是等距的.

(第三章习题 24 有这命题的另一个证明.)

25. 假设 ϕ 是长条形区域 $0 \leq x \leq 1, -\infty < y < +\infty$ 内的连续有界实函数. 试证初值问题

$$y' = \phi(x, y), \quad y(0) = c$$

有一个解. (注意, 这个存在定理的假定比相应的唯一性定理的假定条件限制较少. 参阅第五章习题 7.)

提示: 固定了 n , 对于 $i=0, \dots, n$, 令 $x_i = i/n$. 设 f_n 是 $[0, 1]$ 上的连续函数, 使得 $f_n(0) = c$, 而当 $x_i < t < x_{i+1}$ 时

$$f'_n(t) = \phi(x_i, f_n(t_i)),$$

并且在 $t \neq x_i$ 时, 置

$$\Delta_n(t) = f'_n(t) - \phi(t, f_n(t)),$$

而当 $t = x_i$ 时, 置 $\Delta_n(t) = 0$, 然后

$$f_n(x) = c + \int_0^x [\phi(t, f_n(t)) + \Delta_n(t)] dt.$$

* 选 $M < \infty$ 使 $|\phi| \leq M$. 证明下列各条:

(a) $|f'_n| \leq M$, $|\Delta_n| \leq 2M$, $\Delta_n \in \mathcal{R}$, 而且在 $[0, 1]$ 上对于一切 n ,

$$|f_n| \leq |c| + M = M_1.$$

(b) 由于 $|f'_n| \leq M$, $\{f_n\}$ 在 $[0, 1]$ 上等度连续.

(c) 某个 $\{f_{n_k}\}$ 在 $[0, 1]$ 一致收敛于某个 f .

(d) 既然 ϕ 在矩形 $0 \leq x \leq 1$, $|y| \leq M_1$ 上一致连续, 那么在 $[0, 1]$ 上

$$\phi(t, f_{n_k}(t)) \rightarrow \phi(t, f(t))$$

是一致的.

(e) 因为在 (x_i, x_{i+1}) 内

$$\Delta_n(t) = \phi(x_i, f_n(x_i)) - \phi(t, f_n(t)),$$

那么 $\Delta_n(t)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0.

(f) 所以

$$f(x) = c + \int_0^x \phi(t, f(x)) dt.$$

这 f 就是所给问题的一个解.

26. 现在设 $c \in R^k$, $y \in R^k$, Φ 是连续有界映射, 它把 R^{k+1} 里被 $0 \leq x \leq 1$, $y \in R^k$ 所限定的部分映入 R^k 内. 对于初值问题

$$y' = \Phi(x, y), \quad y(0) = c$$

证明类似的存在定理. (对照第五章习题 28.) 提示: 用定理 7.25 的向量值说法.

第八章 一些特殊函数

幂级数

在这一节里我们将导出幂级数所表示的函数的一些性质，幂级数表示的函数即是形如

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

或者更一般地形如

$$(2) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

的函数。

这些都称作解析函数。

我们限制 x 取实值，因此不会遇到收敛圆（见定理 3.39）而是要面向收敛区间。

若是有一个 $R > 0$ (R 可以是 $+\infty$)，(1) 对于 $(-R, R)$ 中的一切 x 收敛，我们就说围绕着点 $x=0$ 把 f 展成了幂级数。类似地，若 (2) 对于 $|x-a| < R$ 收敛，便说围绕着点 $x=a$ 把 f 展成了幂级数。为方便起见，我们时常取 $a=0$ ，这无损于一般性。

8.1 定理 假设对于 $|x| < R$ ，级数

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

收敛，并且规定

$$(4) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (|x| < R).$$

那么, 无论选取怎样的 $\varepsilon > 0$, (3) 在 $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ 上一致收敛. 函数 f 在 $(-R, R)$ 内连续、可微, 并且

$$(5) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad (|x| < R).$$

证 给出了 $\varepsilon > 0$. 当 $|x| < R - \varepsilon$ 时, 我们有

$$|c_n x^n| \leq |c_n (R - \varepsilon)^n|;$$

由于

$$\sum c_n (R - \varepsilon)^n$$

绝对收敛(由根值判别法知道, 任何幂级数在它的收敛区间内部绝对收敛). 定理 7.10 说明级数(3)在 $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ 上一致收敛.

由于 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, 我们有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} |c_n| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

所以(4)、(5)两级数有相同的收敛区间.

因为(5)是幂级数, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 它在 $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ 上一致收敛, 我们就可以应用定理 7.17(将序列代之以级数), 推出(5)式在 $|x| \leq R - \varepsilon$ 时成立.

但是, 任意给定一个 x , 只要 $|x| < R$, 我们总可以找到一个 $\varepsilon > 0$, 使得 $|x| < R - \varepsilon$. 这就说明(5)式对 $|x| < R$ 成立.

f 的连续性可以从 f' 的存在性推出来(定理 5.2).

推论 在定理 8.1 的假设下, f 在 $(-R, R)$ 内有一切阶导数. 它们是

$$(6) \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n x^{n-k},$$

特别地,

$$(7) \quad f^{(k)}(0) = k! c_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

(这里 $f^{(0)}$ 即是 f , $f^{(k)}$ 是 f 的 k 阶导数, $k = 1, 2, 3, \dots$).

证 依次对 $f, f', f'' \dots$ 使用定理 8.1 就可以得到等式(6). 在(6)中令 $x=0$, 就得到(7)式.

公式(7)非常有趣, 它一方面说明 f 的幂级数展开式的系数, 由 f 及其导数在一个点的值来确定; 另一方面说明, 如果这些系数给定了, 那么 f 在收敛区间中心的各阶导数值就可以从幂级数立即说出来.

然而要注意, 即使函数 f 有一切阶导数, 按(7)式计算 c_n 而得的级数 $\sum c_n x^n$ 也不一定能在任何点 $x \neq 0$ 收敛于 $f(x)$. 这时 f 不能围绕着 $x=0$ 展成幂级数. 因为当真是 $f(x) = \sum a_n x^n$, 就应该

$$n! a_n = f^{(n)}(0);$$

从而 $a_n = c_n$. 习题 1 有一个这样的例子.

如果级数(3)在一个端点, 比如说在 $x=R$ 收敛, 那么 f 不仅在 $(-R, R)$ 内连续, 而且也在 $x=R$ 连续. 这是 Abel 定理 (为了记号的简便, 取 $R=1$) 的直接结果:

8.2 定理 假设 $\sum c_n$ 收敛, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (-1 < x < 1),$$

那么

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

证 令 $s_n = c_0 + \dots + c_n$, $s_{-1} = 0$. 那么

$$\sum_{n=0}^m c_n x^n = \sum_{n=0}^m (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m.$$

因为 $|x| < 1$, 我们让 $m \rightarrow \infty$, 便得到

$$(9) \quad f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

设 $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, 给定了 $\varepsilon > 0$, 选一个 N , 使得当 $n > N$ 时有

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

那么, 由于

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \quad (|x| < 1),$$

加之以适当地选择 $\delta > 0$, 使 $x > 1 - \delta$, 便可以从(9)得到

$$\begin{aligned} |f(x) - s| &= \left| (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n \right| \\ &\leqslant (1-x) \sum_{n=0}^N |s_n - s| |x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

这就意味着(8)式成立.

作为应用, 我们来证明定理 3.51, 那里说: 若 $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ 收敛于 A, B, C , 而且 $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$, 那么 $C = AB$. 对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$, 令

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \\ h(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \end{aligned}$$

在 $x < 1$ 时, 这些级数绝对收敛. 因此可以按照定义 3.48 做乘法; 经过相乘, 我们便看到

$$(10) \quad f(x) \cdot g(x) = h(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

由定理 8.2 知道 $x \rightarrow 1$ 时,

$$(11) \quad f(x) \rightarrow A, \quad g(x) \rightarrow B, \quad h(x) \rightarrow C.$$

等式(10)和(11)意味着 $AB=C$.

我们现在需要一个关于调换求和次序的定理(参阅习题2, 3).

8.3 定理 设有二重序列 $\{a_{ij}\}$, $i=1, 2, 3, \dots, j=1, 2, 3, \dots$.

假设

$$(12) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

并且 $\sum b_i$ 收敛, 那么

$$(13) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

证 可以仿照定理 3.55 用过的(可是要比那里复杂得多的)方法直接建立(13). 然而下面的方法似乎更有趣些.

令 E 是由点 x_0, x_1, x_2, \dots , 组成的可数集, 再设 $n \rightarrow \infty$ 时 $x_n \rightarrow x_0$.

定义

$$(14) \quad f_i(x_0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \quad (i=1, 2, 3, \dots),$$

$$(15) \quad f_i(x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad (i, n=1, 2, 3, \dots),$$

$$(16) \quad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \quad (x \in E).$$

(14)、(15)连同(12), 说明每个 f_i 在 x_0 连续. 又因为 $x \in E$ 时 $|f_i(x)| \leq b_i$, (16)一致收敛, 所以 g 在 x_0 连续(定理 7.11). 从而

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_0) = g(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n a_{ij} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

8.4 定理 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

这级数在 $|x| < R$ 内收敛, 若 $-R < a < R$, f 便可以在 $x=a$ 附近展成幂级数, 这幂级数在 $|x-a| < R - |a|$ 中收敛, 并且

$$(17) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x-a| < R - |a|).$$

这是定理 5.15 的推广, 也是有名的 Taylor 定理.

证 形式上

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(x-a) + a]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} c_n a^{n-m} (x-a)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} c_n a^{n-m} \right] (x-a)^m. \end{aligned}$$

这就是所希望的在 $x=0$ 附近的展开式. 为了证明它正确, 我们必须证明求和次序的变更是正当的. 定理 8.3 说明, 如果

$$(18) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left| c_n \binom{n}{m} a^{n-m} (x-a)^m \right|$$

收敛, 就允许变更次序. 然而(18)无异于

$$(19) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (|x-a| + |a|)^n,$$

而(19)在 $|x-a| + |a| < R$ 时收敛.

最后, (17) 中系数的形式, 是(7)式的直接结果.

应当注意, (17) 式实际上可以在比 $|x-a| < R-|a|$ 更大的区间上收敛.

如果在 $(-R, R)$ 中, 两个幂级数收敛于同一函数, (7) 式表明两个级数必须完全相同, 即是必须有相同的系数. 有趣的是, 也可以由弱得多的假设得出这个结论:

8.5 定理 设级数 $\sum a_n x^n$ 和 $\sum b_n x^n$ 在开区间 $S = (-R, R)$ 中收敛. S 里有些 x 使得

$$(20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

设一切这样 x 构成的集是 E . 若 E 有极限点属于 S , 则 $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. 因之 (20) 对于一切 $x \in S$ 成立.

证 令 $c_n = a_n - b_n$, 再令

$$(21) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (x \in S).$$

那么, 在 E 上 $f(x) = 0$.

设 A 是一切属于 S 的 E 的极限点的集, 令 B 由 S 的其它一切点组成. 由“极限点”的定义来看 B 显然是开集. 假使我们能证明 A 是开集, 那么 A, B 便是不相交的开集, 所以他们是分离的 (定义 2.45). 既然 $S = A \cup B$, S 又是连通的, 那么必有 A, B 之一是空集. 已经假设 A 不空, 所以 B 必须是空集, 因而 $A = S$. 由于 f 在 S 中连续, 而 $A \subset E$; 于是 $E = S$ (这时 f 在 S 内恒等于零). 而(7)足以说明 $c_n = 0, n = 1, 2, \dots$, 这就是所要的结论.

这样, 我们必须证明 A 是开集. 假若 $x_0 \in A$, 定理 8.4 说明

$$(22) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n, \quad (|x - x_0| < R - |x_0|)$$

我们断言一切 $d_n = 0$. 不然的话, 假设 k 是合于 $d_k \neq 0$ 的最小非负整数. 于是

$$(23) \quad f(x) = (x - x_0)^k g(x) \quad (|x - x_0| < R - |x_0|),$$

这里

$$(24) \quad g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{k+m} (x - x_0)^m.$$

因为 g 在 x_0 连续, 而且

$$g(x_0) = d_k \neq 0,$$

所以存在着一个 $\delta > 0$, 使得 $|x - x_0| < \delta$ 时 $g(x) \neq 0$. 于是从 (23) 推得 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \neq 0$. 但是这与 x_0 是 E 的极限点矛盾.

于是对于一切 n , $d_n = 0$. 因此凡使 (22) 成立的 x , 即是在 x_0 的一个邻域中, 必然使 $f(x) = 0$. 这说明 A 是开集. 证毕.

指数函数与对数函数

定义

$$(25) \quad E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

比值审敛法说明这级数对于一切复数 z 收敛. 把定理 3.50 用于两个绝对收敛级数的相乘, 得到

$$\begin{aligned} E(z)E(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k! (n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}, \end{aligned}$$

这就产生了重要的加法公式

$$(26) \quad E(z+w) = E(z)E(w) \quad (z, w \text{ 复数}).$$

有一个推论是

$$(27) \quad E(z)E(-z) = E(z-z) = E(0) = 1 \quad (z \text{ 复数}).$$

这说明对于一切 z , $E(z) \neq 0$. 由(25)知道 $x > 0$ 时, $E(x) > 0$; 因此(27)说明对于一切实的 x , $E(x) > 0$. 由(25)知道 $x \rightarrow +\infty$ 时, $E(x) \rightarrow +\infty$; 因此(27)说明沿实轴 $x \rightarrow -\infty$ 时 $E(x) \rightarrow 0$. 由(25)知道 $0 < x < y$ 时 $E(x) < E(y)$; 从(27)可以导出 $E(-y) < E(-x)$; 因而 E 在整个数轴上严格递增.

加法公式还说明,

$$(28) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h) - 1}{h} = E(z);$$

最后的等式是(25)的直接结果.

把(26)重复几次就得到

$$(29) \quad E(z_1 + \cdots + z_n) = E(z_1) \cdots E(z_n).$$

取 $z_1 = \cdots = z_n = 1$, 又因为 $E(1) = e$, 这里 e 是定义 3.30 中规定的数, 我们得到

$$(30) \quad E(n) = e^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

若是 $p = \frac{n}{m}$, n, m 都是正整数. 那么

$$(31) \quad [E(p)]^m = E(mp) = E(n) = e^n,$$

所以

$$(32) \quad E(p) = e^p \quad (p > 0, p \text{ 为有理数}).$$

假若 p 是正有理数, 从(27)可以推出 $E(-p) = e^{-p}$. 于是(32)对于一切有理数 p 成立.

第一章习题 6 中, 我们曾经对于任意实数 z 和 $x > 1$ 定义

$$(33) \quad x^y = \sup x^p,$$

这里 \sup 是对一切满足 $p < y$ 的有理数 p 取的. 如果对于任何实数 x 照样地定义

$$(34) \quad e^x = \sup e^p \quad (p < x, p \text{ 为有理数}),$$

那么 E 的连续性、单调性连同 (32) 可以说明对于一切实数 x

$$(35) \quad E(x) = e^x.$$

等式 (35) 解释了为什么称 E 为指数函数.

时常用记号 $\exp(x)$ 代替 e^x , 尤其当 x 是一个复杂的式子时是这样.

实际上用 (35) 代替 (34) 作为 e^x 的定义就很好. 用 (35) 作起点来研究 e^x 的性质要方便得多. 不久将会看到, (33) 也可以用一个更方便的定义代替 [见 (43)].

我们现在恢复惯用的记号 e^x , 来代替 $E(x)$, 并且汇总一下至此已经证明了的结果.

8.6 定理 设在 R^1 上按 (35) 及 (25) 定义了 e^x , 那么

- (a) 对于一切 x , e^x 连续且可微;
- (b) $(e^x)' = e^x$;
- (c) e^x 是 x 的严格递增函数, 而且 $e^x > 0$;
- (d) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$;
- (e) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $e^x \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $e^x \rightarrow 0$;
- (f) 对于任何 n , $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x} = 0$.

我们已经证明了 (a) 到 (e) 各条; (25) 式表明 $x > 0$ 时

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

因此

$$x^n e^{-x} < \frac{(n+1)!}{x},$$

于是 (f) 被证明了. (f) 说明当 $x \rightarrow -\infty$ 时, e^x 趋于 $+\infty$ 比 x 的任何次幂都“快”.

由于 E 在 R^1 上严格递增而且可微, 它便有反函数 L . L 也严格递增而且可微; 并且定义域是 $E(R^1)$, 即全体正数集. L 由等式

$$(36) \quad E(L(y)) = y \quad (y > 0)$$

定义,或者等价地,由

$$(37) \quad L(E(x)) = x \quad (x \text{ 实数})$$

定义,将(37)微分,便得到(对照定理 5.5)

$$L'(E(x)) \cdot E(x) = 1.$$

令 $y = E(x)$, 便得到

$$(38) \quad L'(y) = \frac{1}{y} \quad (y > 0).$$

在(37)中取 $x = 0$, 便看到 $L(1) = 0$, 因此(38)意味着

$$(39) \quad L(y) = \int_1^y \frac{dx}{x}.$$

常常把(39)作为对数和指数函数理论的起点. 令 $u = E(x)$, $v = E(y)$, (26)能告诉我们

$$L(uv) = L(E(x) \cdot E(y)) = L(E(x+y)) = x + y,$$

因而

$$(40) \quad L(uv) = L(u) + L(v) \quad (u > 0, v > 0).$$

这表明, L 有我们熟知的使对数成为有效的计算工具的那种性质. 自然, 在习惯上 $L(x)$ 的记号是 $\log x$.

至于在 $x \rightarrow +\infty$ 和 $x \rightarrow 0$ 时 $\log x$ 的性态, 定理 8.6(e) 表明

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时 } \log x \rightarrow +\infty,$$

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时 } \log x \rightarrow -\infty.$$

容易看出, 若 $x > 0$, n 为整数时,

$$(41) \quad x^n = E(nL(x)).$$

m 若是正整数, 同样会得到

$$(42) \quad x^{\frac{1}{m}} = E\left(\frac{1}{m} L(x)\right),$$

原因是(42)的每项自乘 m 次, 就得出(37)的相应各项. 联合(41)与(42), 就知道对于任意有理数 α ,

$$(43) \quad x^\alpha = E(\alpha L(x)) = e^{\alpha \log x}.$$

现在,我们就用(43)来对于任意实数 α 和任意 $x>0$ 定义 x^α .
 E 和 L 的连续性和单调性说明这样的定义与原先的定义产生的结果相同. 第一章习题6叙述的事实是(43)的简单推论.

将(43)微分,由定理5.5,我们得到

$$(44) \quad (x^\alpha)' = E(\alpha L(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

注意,以前我们只能对于整数 α 使用(44)式,那时候很轻易地就从定理5.3(b)推得了(44)式. 如果 α 为无理数,而 x^α 用(33)式来定义,要直接从导数的定义来证明(44)是十分麻烦的.

熟知的关于 x^α 的积分公式,在 $\alpha \neq -1$ 时,可以从(44)直接推出来,而当 $\alpha = -1$ 时,便由(38)推导. 我们打算证明 $\log x$ 的另一个性质,即是对于任一 $\alpha > 0$,

$$(45) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\alpha} \log x = 0.$$

就是说,当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\log x \rightarrow +\infty$ 比 x 的任何正数次幂都“慢”.

因为,若是 $0 < \varepsilon < \alpha$, $x > 1$, 那么

$$\begin{aligned} x^{-\alpha} \log x &= x^{-\alpha} \int_1^x t^{-1} dt < x^{-\alpha} \int_1^x t^{\varepsilon-1} dt \\ &= x^{-\alpha} \cdot \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} < \frac{x^{\varepsilon-\alpha}}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

于是(45)成立. 我们也可以利用定理8.6(f)推导出(45)式来.

三角函数

定义

$$(46) \quad \begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{2} [E(ix) + E(-ix)], \\ S(x) &= \frac{1}{2i} [E(ix) - E(-ix)]. \end{aligned}$$

我们将要证明 $C(x)$ 和 $S(x)$ 与通常根据几何考虑来定义的 $\cos x$ 和 $\sin x$ 一致. 由 (25) 式知道 $E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$. 因此 (46) 式表明 $C(x)$ 、 $S(x)$ 对于实数 x 是实数. 又

$$(47) \quad E(ix) = C(x) + iS(x).$$

所以, 当 x 是实数时, $C(x)$ 与 $S(x)$ 分别是 $E(ix)$ 的实部和虚部. 由 (27) 知道

$$|E(ix)|^2 = E(ix) \overline{E(ix)} = E(ix) E(-ix) = 1,$$

所以

$$(48) \quad |E(ix)| = 1 \quad (x \text{ 为实数}).$$

从 (46) 式可以断定 $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, 并且 (28) 式说明

$$(49) \quad C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x).$$

我们可以断言存在着正数 x 使 $C(x) = 0$. 因为假若不然, 由 $C(0) = 1$, 便对于一切 $x > 0$ 必然 $C(x) > 0$, 因而由 (49) 必然 $S'(x) > 0$, 那么 S 就严格递增; 又因为 $S(0) = 0$, 那么当 $x > 0$ 时 $S(x) > 0$. 所以若是 $0 < x < y$, 便将要

$$(50) \quad S(x)(y-x) < \int_x^y S(t) dt = C(x) - C(y) \leq 2.$$

其中最末一个不等式是从 (48) 式与 (47) 式推来的. 因为 $S(x) > 0$, 所以 (50) 式不能对很大的 y 成立, 从而出现了矛盾.

令 x_0 是使 $C(x_0) = 0$ 的最小正数. 这是存在的, 因为连续函数的零点集是闭集而且 $C(0) \neq 0$. 定义数 π 如下:

$$(51) \quad \pi = 2x_0$$

那么 $C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 于是 (48) 式说明 $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$. 既然在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

内, $C(x) > 0$, S 便在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内递增; 因而 $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. 于是

$$E\left(\frac{\pi i}{2}\right)=i,$$

再由加法公式得出

$$(52) \quad E(\pi i) = -1, \quad E(2\pi i) = 1;$$

因此

$$(53) \quad E(z + 2\pi i) = E(z). \quad (z \text{ 复数}).$$

8.7 定理

(a) E 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数.

(b) C 和 S 是以 2π 为周期的周期函数.

(c) 若 $0 < t < 2\pi$, 那么 $E(it) \neq 1$.

(d) 如果 z 是复数且 $|z| = 1$, 那么在 $[0, 2\pi)$ 中存在着唯一的 t , 使 $E(it) = z$.

证 由(53), (a)成立; (b)可从(a)及(46)推得.

设 $0 < t < \frac{\pi}{2}$, 并设 $E(it) = x + iy$, x 与 y 是实数. 我们以前的工作说明 $0 < x < 1, 0 < y < 1$. 注意

$$E(4it) = (x + iy)^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4ixy(x^2 - y^2).$$

如果 $E(4it)$ 是实数, 那么 $x^2 - y^2 = 0$; 因为从(48)式知道 $x^2 + y^2 = 1$, 于是 $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$, 因而 $E(4it) = -1$. 这就证明了(c).

如果 $0 \leq t_1 < t_2 < 2\pi$, 那么由(c)知道

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1} = E(it_2 - it_1) \neq 1,$$

这就确定了(d)中的唯一性的论断.

要证明(d)中的存在性的论断, 取定 $z, |z| = 1$. 设 $z = x + iy$, x, y 都是实数. 先假定 $x \geq 0$ 而且 $y \geq 0$. 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上 C 由 1 降到 0. 所以有某个 $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 使得 $C(t) = x$. 既然 $C^2 + S^2 = 1$, 而且在

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上 $S \geq 0$, 所以 $z = E(it)$.

如果 $x < 0, y \geq 0$, 前边的各条件能被 $-iz$ 满足, 于是有某个 $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 使得 $-iz = E(it)$, 又因为 $i = E(\pi i/2)$, 那么又得到 $z = E\left(i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$. 最后, 如果 $y < 0$, 前两种情形表示有某个 $t \in (0, \pi)$ 使得 $-z = E(it)$, 所以 $z = -E(it) = E(i(t + \pi))$.

这就证明了(d), 从而也证明了本定理.

从(d)和(48)式可以知道, 用

$$(54) \quad \gamma(t) = E(it) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

定义的曲线 γ 是简单闭合曲线, 它的值域是平面上的单位圆. 由于 $\gamma'(t) = iE(it)$, 根据定理 6.35, γ 的长度是

$$\int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = 2\pi.$$

这自然是对于半径为 1 的圆周所期待的结果; 它也表明(51)所定义的 π 具有通常的几何意义.

用同样的方法, 我们看到当 t 自 0 增至 t_0 时, 点 $\gamma(t)$ 描出一段长度为 t_0 的圆弧. 考虑顶点为

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \gamma(t_0), \quad z_3 = C(t_0)$$

的三角形, 它说明 $C(t)$ 与 $S(t)$ 和按通常办法作为直角三角形边长之比来定义的 $\cos x$ 与 $\sin x$ 确实等价.

应该强调说一下的是: 我们从(46)式和(25)式导出了三角函数的基本性质, 而丝毫未曾借助于角的几何概念. 还有其他非几何的途径去研究这些函数. W. F. Eberlein (*Amer. Math. Monthly*, 1967 年 74 卷 1223—1225 页)和 G. B. Robison (*Math. Mag*, 1968 年 41 卷 66—70 页)的论文就是讨论这些专题的.

复数域的代数完备性

在代数上复数域是完备的, 这就是说任何复系数的、不是常数的多项式必有复数根. 目前正是给它作简单证明的时机.

8.8 定理 假设 a_0, \dots, a_n 都是复数, $n \geq 1, a_n \neq 0$,

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

那么必有某个复数 z 使 $P(z) = 0$.

证 假定 $a_n = 1$ 无损于一般性, 令

$$(55) \quad \mu = \inf |P(z)| \quad (z \text{ 为复数})$$

如果 $|z| = R$, 那么

$$(56) \quad |P(z)| \geq R^n [1 - |a_{n-1}| R^{-1} - \dots - |a_0| R^{-n}].$$

(56) 的右端在 $R \rightarrow \infty$ 时趋于 ∞ . 因此存在着一个 R_0 , 一旦 $|z| > R_0$ 了, 便使得 $|P(z)| > \mu$. 因为 $|P|$ 在以 0 为心, R_0 为半径的圆面上连续, 定理 4.16 说明, 有某个 z_0 使 $|P(z_0)| = \mu$.

我们断言 $\mu = 0$.

若是不然的话, 令 $Q(z) = P(z + z_0)/P(z_0)$. 那么 Q 是异于常数的多项式, $Q(0) = 1$, 而且对一切 z , $|Q(z)| \geq 1$. 有最小整数 k , $1 \leq k \leq n$, 使得

$$(57) \quad Q(z) = 1 + b_k z^k + \dots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0.$$

根据定理 8.7(d), 有一个实数 θ , 使得

$$(58) \quad e^{ik\theta} b_k = |b_k|.$$

如果 $r > 0$ 而且 $r^k |b_k| < 1$, 那么从 (58) 式有

$$|1 + b_k r^k e^{ik\theta}| = 1 - r^k |b_k|.$$

所以

$$|Q(re^{i\theta})| \leq 1 - r^k \{|b_k| - r|b_{k+1}| - \dots - r^{n-k}|b_n|\};$$

当 r 足够小时, 大括号中的表达式是正数; 因此 $|Q(re^{i\theta})| < 1$. 得

出矛盾来了.

于是 $\mu=0$, 即是 $P(z_0)=0$

习题 27 包含着更一般的结果.

Fourier 级数

8.9 定义 三角多项式是形如

$$(59) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (x \text{ 为实数})$$

的有限和, 其中 $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ 都是复数. 考虑到恒等式(46)也可以把(59)式写作

$$(60) \quad f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} \quad (x \text{ 为实数}),$$

为了多种目的, 这样写更方便. 显然, 每个三角多项式以 2π 为周期.

当 n 是异于零的整数时, e^{inx} 是 e^{ix}/in 的导数, 后者也以 2π 为周期. 因此

$$(61) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 1 & (\text{当 } n=0), \\ 0 & (\text{当 } n=\pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$$

设 m 为整数, 用 e^{-imx} 乘(60)式, 将这乘积积分, 这时(61)式说明 $|m| \leq N$ 时

$$(62) \quad c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

而 $|m| > N$ 时, (62)式里的积分便是零.

从(60)式和(62)式可以推得以下的结论: 用(60)所写的三角多项式 f 是实的, 当且仅当 $c_{-n} = \overline{c_n}$, $n=0, \dots, N$.

为了与(60)相呼应, 我们定义三角级数是形如

$$(63) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (x \text{ 为实数})$$

的级数; (63) 的第 N 个部分和定义为 (60) 的右端.

假若 f 是 $[-\pi, \pi]$ 上的可积函数, 对于一切整数 m , 按 (62) 确定的数 c_m , 叫做 f 的 Fourier 系数, 用这些系数做成的级数 (63) 叫做 f 的 Fourier 级数.

现在自然要发生的一个问题是, f 的 Fourier 级数是否收敛于 f , 或者更一般地说, f 能否被它的 Fourier 级数确定. 即是说, 如果知道一个函数的 Fourier 系数, 能否找到这个函数. 如果能, 怎么找?

研究这种级数, 特别是研究用三角级数表示已知函数的问题, 起源于物理问题, 例如振动理论和热传导理论 (Fourier 所著“热的解析理论” (“Théorie analytique de la chaleur”) 于 1822 年出版). 这些研究中发生的许多困难而精致的问题引起了整个实变函数论全面的修正和改革. 许多杰出的数学家的名字, 诸如 Riemann, Cantor, Lebesgue 都与这个领域紧密联系. 现在可以恰当地说, 它的一切推广和分枝在整个分析学中占有核心的地位.

我们将满足于导出一些基本定理, 这些定理根据前几章所展示的方法, 是容易理解的. 关于更彻底的讨论, Lebesgue 积分是自然而必须的工具.

首先讨论性质类似于 (61) 的更一般的函数系:

8.10 定义 $\{\phi_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 是 $[a, b]$ 上合于

$$(64) \quad \int_a^b \phi_n(x) \overline{\phi_m(x)} dx = 0 \quad (n \neq m)$$

的复值函数序列. 那么, $\{\phi_n\}$ 叫做 $[a, b]$ 上的 函数的正交系. 此外, 若是对于一切 n

$$(65) \quad \int_a^b |\phi_n(x)|^2 dx = 1,$$

$\{\phi_n\}$ 便叫作正规正交系 (orthonormal).

例如, 函数 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{inx}$ 组成 $[-\pi, \pi]$ 上的正规正交系. 实函数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

同样也是.

假若 $\{\phi_n\}$ 是 $[a, b]$ 上的正规正交系, 而且

$$(66) \quad c_n = \int_a^b f(t) \overline{\phi_n(t)} dt \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

我们便说 c_n 是 f 关于 $\{\phi_n\}$ 的第 n 个 Fourier 系数. 我们写作

$$(67) \quad f(x) \sim \sum_1^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

并且说这级数是 f 的 Fourier 级数 (关于 $\{\phi_n\}$ 的).

注意, (67) 中的符号 \sim , 并不意味着任何关于级数收敛性的事实; 它仅表示系数是按 (66) 计算的.

下列定理说明 f 的 Fourier 级数的部分和有某种极小性质. 在这里和本章其余部分, 我们都假定 $f \in \mathcal{R}$, 虽然这假定可以减弱.

8.11 定理 设 $\{\phi_n\}$ 是 $[a, b]$ 上的正规正交系. 令

$$(68) \quad s_n(x) = \sum_{m=1}^n c_m \phi_m(x)$$

是 f 的 Fourier 级数的第 n 个部分和. 又假定

$$(69) \quad t_n(x) = \sum_{m=1}^n \gamma_m \phi_m(x),$$

那么

$$(70) \quad \int_a^b |f - s_n|^2 dx \leq \int_a^b |f - t_n|^2 dx,$$

并且, 当且仅当

$$(71) \quad \gamma_m = c_m \quad (m = 1, \dots, n)$$

时才能使等式成立.

这就是说, 在所有函数 t_n 中, s_n 是对于 f 的最佳均方逼近.

证 设 \int 表示在 $[a, b]$ 上的积分, Σ 表示从 1 到 n 的求和, 于是按 $\{c_m\}$ 的定义,

$$\int f \bar{t}_n = \int f \Sigma \bar{\gamma}_m \bar{\phi}_m = \Sigma c_m \bar{\gamma}_m,$$

因为 $\{\phi_n\}$ 是正规正交的; 那么

$$\int |t_n|^2 = \int t_n \bar{t}_n = \int \Sigma \gamma_m \phi_m \Sigma \bar{\gamma}_k \bar{\phi}_k = \Sigma |\gamma_m|^2$$

于是

$$\begin{aligned} \int |f - t_n|^2 &= \int |f|^2 - \int f \bar{t}_n - \int \bar{f} t_n + \int |t_n|^2 \\ &= \int |f|^2 - \Sigma c_m \bar{\gamma}_m - \Sigma \bar{c}_m \gamma_m + \Sigma \gamma_m \bar{\gamma}_m \\ &= \int |f|^2 - \Sigma |c_m|^2 - \Sigma |\gamma_m - c_m|^2, \end{aligned}$$

显然, 当且仅当 $\gamma_m = c_m$ 时, 它最小.

在算式中, 令 $\gamma_m = c_m$, 由于 $\int |f - t_n|^2 \geq 0$, 我们得到

$$(72) \quad \int_a^b |s_n(x)|^2 dx = \sum_{m=1}^n |c_m|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

8.12 定理 若 $\{\phi_n\}$ 是 $[a, b]$ 上的正规正交系, 又若

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x),$$

那么

$$(73) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

特别地

$$(74) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

证 在(72)式中令 $n \rightarrow \infty$, 就得(73), 这即是所谓 “Bessel 不等式”.

8.13 三角级数 从现在起只讨论三角函数系. 将要考虑的函数都以 2π 为周期, 都在 $[-\pi, \pi]$ 上 Riemann 可积 (因而又在每个有界闭区间上可积). 那么 f 的 Fourier 级数便是(63), 它的系数 c_n 就是(62)所写的积分, 并且

$$(75) \quad s_N(x) = s_N(f; x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

是 f 的 Fourier 级数的第 N 个部分和. 不等式(72)现在变作

$$(76) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |s_N(x)|^2 dx = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

为了给 s_N 找到一个比(75)便于使用的表示式, 我们先讲 Dirichlet 核

$$(77) \quad D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

这里第一个等式是 $D_N(x)$ 的定义; 如果将等式

$$(e^{ix} - 1)D_N(x) = e^{i(N+1/2)x} - e^{-iNx}$$

的两端都乘以 $e^{-\frac{ix}{2}}$ 就能得到(77)里的第二个等式.

由(62)式与(75)式求得

$$s_N(f; x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{-N}^N e^{in(x-t)} dt,$$

所以

$$\begin{aligned} (78) \quad s_N(f; x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt. \end{aligned}$$

这里卷入的函数有共同的周期, 说明积分区间只要是长度等于 2π , 在什么区间上积分是无关紧要的. 这说明(78)里的两个积分相等.

关于 Fourier 级数的逐点收敛, 只证一条定理.

8.14 定理 如果对于某一点 x , 有两个常数 $\delta > 0$ 和 $M < \infty$, 对所有的 $t \in (-\delta, \delta)$, 使得

$$(79) \quad \underline{|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|}$$

便一定有

$$(80) \quad \underline{\implies \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f; x) = f(x).}$$

证 当 $0 < |t| \leq \pi$ 时, 定义

$$(81) \quad g(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

再令 $g(0) = 0$. 由定义(77)得

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$$

所以(78)表示

$$\begin{aligned} s_N(f; x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[g(t) \cos \frac{t}{2} \right] \sin Nt dt \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(t)\sin\frac{t}{2}\right]\cos Ntdt.$$

从(79)与(81)来看, $g(t)\cos\frac{t}{2}$ 与 $g(t)\sin\frac{t}{2}$ 都有界. 所以, 根据(74)式, 当 $N\rightarrow\infty$ 时上边两个积分都趋于零. 这就证明了(80)式.

推论 如果对于某个开区间 J 内的一切 x , $f(x)=0$, 那么便对于每个 $x\in J$, $\lim s_N(f;x)=0$.

这推论还有一种叙述方式是:

如果对于 x 的某个邻域之内的一切 t , $f(t)=g(t)$, 那么当 $N\rightarrow\infty$ 时

$$s_N(f;x)-s_N(g;x)=s_N(f-g;x)\rightarrow 0.$$

时常把这叫做局部化定理. 它说明凡是说到收敛性时, 序列 $\{s_N(f;x)\}$ 的性态只依赖于 f 在 x 的某个(任意小的)邻域内的值. 所以两个 Fourier 级数可以在一个区间里有相同的性态, 而在另一个区间里便完全不同. 从这里看到 Fourier 级数与幂级数(定理8.5)之间有极其显著的不同.

我们用另外两个逼近定理作结束.

8.15 定理 如果 f 连续(以 2π 为周期), 并且 $\varepsilon>0$, 那么便有一个三角多项式 P , 对于一切实数 x

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

证 如果把 x 和 $x+2\pi$ 等同起来, 就可以根据映射 $x\rightarrow e^{ix}$ 把 R^1 上周期为 2π 的函数当作单位圆 T 上的函数. 三角多项式, 即是形式为(60)的函数, 形成一个自伴代数 \mathcal{A} , 它能分离 T 上的点, 不在 T 的点消失. 由于 T 是紧的, 那么定理 7.33 能告诉我们 \mathcal{A} 在 $\mathcal{C}(T)$ 内稠密. 这正好是这定理所断定的.

习题 15 里有这定理的一个更确切的形式.

8.16 Parseval 定理 假定 f 与 g 都是 Riemann 可积而且

周期为 2π 的函数.

$$(82) \quad f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{inx}.$$

那么

$$(83) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f; x)|^2 dx = 0,$$

$$(84) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \bar{\gamma}_n,$$

$$(85) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

证 我们将要用记号

$$(86) \quad \|h\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

假设给定了 $\varepsilon > 0$. 因为 $f \in \mathcal{R}$, 又 $f(\pi) = f(-\pi)$. 那么第六章习题 12 所说的方法, 能造成一个连续的 2π 周期的函数 h , 合于

$$(87) \quad \|f - h\|_2 < \varepsilon.$$

根据定理 8.15, 存在一个三角多项式 P , 对于所有的 x 满足 $|h(x) - P(x)| < \varepsilon$; 从而 $\|h - P\|_2 < \varepsilon$. 如果 P 是 N_0 次的, 那么定理 8.11 表示 $N \geq N_0$ 时

$$(88) \quad \|h - S_N(h)\|_2 \leq \|h - P\|_2 < \varepsilon.$$

根据(72), 用 $h - f$ 代换 f

$$(89) \quad \|S_N(h) - S_N(f)\|_2 = \|S_N(h - f)\|_2 \leq \|h - f\|_2 < \varepsilon.$$

现在三角形不等式(第六章习题 11)与(87)、(88)、(89)联合起来就能说明

$$(90) \quad \|f - S_N(f)\|_2 < 3\varepsilon \quad (N \geq N_0).$$

这证明(83)成立. 其次

$$(91) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_N(f) \bar{g} dx = \sum_{-N}^N c_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{g(x)} dx = \sum_{-N}^N c_n \bar{\gamma}_n$$

和 Schwarz 不等式, 说明

$$(92) \quad \left| \int f \bar{g} - \int S_N(f) \bar{g} \right| \leq \left| \int (f - S_N(f)) \bar{g} \right| \\ \leq \left\{ \int |f - S_N|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int |g|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

根据(83), 当 $N \rightarrow \infty$ 时它趋于零. 比较(91)与(92) 便得到(84).

最后, (85) 是(84)在 $g=f$ 之下的特别情形.

第十一章还有定理 8.16 的较为一般的说法.

Γ 函数

这函数与阶乘有密切的关系, 时常在分析学的意料不到的地方出现. 在 P. J. Davis 的有趣的作品里 (*Amer. Math. Monthly*, 1959 年, 66 卷 849—869 页) 对于它的起源, 历史和发展都有很好的叙述. 书目中 Artin 的书是另一本很好的初等引论.

这里提出来的内容很紧凑, 在每个定理后边只有很少的评论. 所以这一节可以看作一个大的习题, 也是应用以前提供的一些材料的机会.

8.17 定义 当 $0 < x < \infty$ 时

$$(93) \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

对于这些 x , 这积分收敛. (当 $x < 1$ 时, 0 与 ∞ 都必须观察.)

8.18 定理

(a) 如果 $0 < x < \infty$, 函数方程

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

成立.

(b) $\Gamma(n+1)=n!$, $n=1, 2, 3, \dots$.

(c) $\log \Gamma$ 在 $(0, \infty)$ 上是凸的.

证 一次分部积分就能证明(a). 因为 $\Gamma(1)=1$, 那么用归纳法就能由(a)推得(b). 如果 $1 < p < \infty$, 又 $(1/p) + (1/q) = 1$, 将 Hölder 不等式(第六章习题 10)用于(93), 便得到

$$\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{x}{q}\right) \leq \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \Gamma(y)^{\frac{1}{q}}.$$

这与(c)等价.

Bohr 与 Mollerup 发现的这三个性质能完全表达 Γ 的本性, 这事实有些令人惊奇.

★ 8.19 定理 如果 f 在 $(0, \infty)$ 上是正值函数, 合于

(a) $f(x+1)=xf(x)$,

(b) $f(1)=1$,

(c) $\log f$ 是凸的,

那么 $f(x)=\Gamma(x)$.

证 因为 Γ 满足(a), (b), (c), 那么证明 $x>0$ 时 $f(x)$ 是(a), (b), (c)唯一决定的函数就行了. 根据(a)只须对于 $x \in (0, 1)$ 做到这一步就够了.

令 $\varphi = \log f$, 那么

$$(94) \quad \varphi(x+1) = \varphi(x) + \log x \quad (0 < x < \infty).$$

$\varphi(1)=0$, 而且 φ 是凸的. 假定 $0 < x < 1$, 而 n 是正整数. 根据(94), $\varphi(n+1) = \log(n!)$. 现在考虑一下 φ 在 $[n, n+1]$, $[n+1, n+1+x]$, $[n+1, n+2]$ 三个闭区间上的差商. 既然 φ 是凸的, 那么

$$\log n \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \log(n+1).$$

重复地使用(94)便得到

$$\varphi(n+1+x) = \varphi(x) - \log[x(x+1)\cdots(x+n)]$$

所以

$$0 \leq \varphi(x) - \log \left[\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \right] \leq x \log \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

最末的式子当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于零. 从而确定了 φ , 证明也完成了.

作为一个副产品, 我们还得到了一个关系式

$$(95) \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

至少当 $0 < x < 1$ 时是这样; 从这又可以推得(95)适用于一切 $x > 0$; 这因为 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

8.20 定理 如果 $x > 0$, 又 $y > 0$, 那么

$$(96) \quad \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

这积分是所谓的 B 函数 $B(x, y)$.

证 注意 $B(1, y) = \frac{1}{y}$, 照定理 8.18 那样, 根据 Hölder 不等

式, 知道 $B(x, y)$ 对于每个固定的 y 是 x 的凸函数; 还有

$$(97) \quad B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

要证明(97), 可以把分部积分用于

$$B(x+1, y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t} \right)^x (1-t)^{x+y-1} dt.$$

$B(x, y)$ 的三个性质说明定理 8.19 可以对于每个 y 用于

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x, y)$$

所定义的函数 f . 所以 $f(x) = \Gamma(x)$.

8.21 一些推论 用 $t = \sin^2 \theta$ 作代换, 便将(96)变为

$$(98) \quad 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

特别地, 当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时有

$$(99) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

用 $t = s^2$ 作代换, 便将(93)变为

$$(100) \quad \Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} s^{2x-1} e^{-s^2} ds \quad (0 < x < \infty).$$

特别当 $x = \frac{1}{2}$ 时有

$$(101) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

根据(99), 可以从定理 8.19 直接推得恒等式

$$(102) \quad \Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

8.22 Stirling 公式 当 x 很大时, 这给 $\Gamma(x+1)$ 提供了一个简单的近似表达式(当 n 很大时, 就是 $n!$ 的近似表达式). 这公式是

$$(103) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x \sqrt{2\pi x}} = 1.$$

下面是一种证明. 在(93)中置 $t = x(1+u)$, 得

$$(104) \quad \Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x} \int_{-1}^{\infty} [(1+u)e^{-u}]^x du.$$

确定 $h(u)$, 要求 $h(0) = 1$, 以及当 $-1 < u < \infty, u \neq 0$ 时

$$(105) \quad (1+u)e^{-u} = \exp\left[-\frac{u^2}{2}h(u)\right].$$

于是

$$(106) \quad h(u) = \frac{2}{u^2} [u - \log(1+u)].$$

因此, h 是连续函数, 并且当 u 从 -1 递增到 ∞ 时, $h(u)$ 从 ∞ 递降到 0.

做代换 $u = s\sqrt{2/x}$ 后, (104) 式就变成

$$(107) \quad \Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2x} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(s) ds.$$

这里

$$\psi_x(s) = \begin{cases} \exp[-s^2 h(s\sqrt{\frac{x}{2}})] & (-\sqrt{\frac{x}{2}} < s < \infty), \\ 0 & (s \leq -\sqrt{\frac{x}{2}}). \end{cases}$$

注意下述关于 $\psi_x(s)$ 的几个事实:

(a) 对于每个 s 来说, 当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\psi_x(s) \rightarrow e^{-s^2}.$$

(b) 对于任何 $A < \infty$ 来说, (a) 中的收敛性, 在 $[-A, A]$ 上是一致的.

(c) $s < 0$ 时, $0 < \psi_x(s) < e^{-s^2}$.

(d) $s > 0$ 并且 $x > 1$ 时, $0 < \psi_x(s) < \psi_1(s)$.

(e) $\int_0^{\infty} \psi_1(s) ds < \infty$.

因此, 第七章习题 12 中所说的收敛定理能应用于积分 (107), 再根据 (101) 式, 就证明了当 $x \rightarrow \infty$ 时这个积分收敛到 $\sqrt{\pi}$. 这就证明了 (103) 式.

R. C. Buck 的“高等分析” (“Advanced Calculus”) 第 216—218 页中有对这个证明更详尽的叙述, 在 *Amer. Math. Monthly*, 1967 年 74 卷 1223—1225 页 W. Feller 的论文 (1968 年 75 卷第 518 页有一订正) 及 Artin 的书第 20—24 页中有两个完全不同的证明.

习题 20 给一个精确度稍差的结论作了一个简单的证明.

习题

1. 定义

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

试证 f 在 $x=0$ 有一切阶的导数, 并且对于 $n=1, 2, 3, \dots, f^{(n)}(0)=0$.

2. 设阵

$$\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

中第 i 行第 j 列的数是 a_{ij} , 就是

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (i < j), \\ -1 & (i = j), \\ 2^{j-i} & (i > j). \end{cases}$$

试证

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = -2, \quad \sum_j \sum_i a_{ij} = 0.$$

3. 设对于一切 i, j 来说, $a_{ij} \geq 0$, 试证

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = \sum_j \sum_i a_{ij}$$

(也可能出现 $+\infty = +\infty$ 这种情况).

4. 试证以下的极限关系:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \log b \quad (b > 0).$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

5. 求下列极限

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log n} [n^{\frac{1}{n}} - 1].$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x(1 - \cos x)}.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

6. 设对任何实数 x, y , $f(x)f(y) = f(x+y)$.

(a) 假设 f 可微且不是零, 试证

$$f(x) = e^{cx}.$$

这里 c 是常数.

(b) 只假定 f 连续, 证明这同一结论.

7. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 试证

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

8. 设 $n = 0, 1, 2, \dots$, 而 x 是实数, 试证

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|.$$

注意, 对于其它的 n 来说, 不等式可能不成立. 例如,

$$\left| \sin \frac{1}{2} \pi \right| > \frac{1}{2} |\sin \pi|.$$

9. (a) 令 $s_N = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N}$. 试证

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (s_N - \log N)$$

存在. (这个极限叫做 Euler 常数, 通常记作 γ . 它的数值是 $0.5772\dots$, 还不知道 γ 是有理数还是无理数.)

(b) m 大约要多大, 才能使 $N = 10^m$ 满足

$$s_N > 100?$$

10. 试证 $\sum 1/p$ 发散; 和中的 p 遍历一切质数.

(这说明, 质数是正整数集的真正有份量的子集.)

提示: 给定 N , 设 p_1, \dots, p_k 是那样的质数, 它至少能整除一个不大于 N 的正整数. 那么

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} &\leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \dots \right) = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_j} \right)^{-1} \\ &\leq \exp \sum_{j=1}^k \frac{2}{p_j}. \end{aligned}$$

最后这个不等式能成立, 是因为当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$(1-x)^{-1} \leq e^{2x}.$$

(这个结论有许多种证法. 例如, 可参看 I. Niven 在 *Amer. Math. Monthly*, 1971 年 78 卷, 272—273 页的文章, 以及 R. Bellman 在 *Amer. Math. Monthly*, 1943 年 50 卷 318—319 页的文章).

11. 设对于一切 $A < \infty$, 在 $[0, A]$ 上 $f \in \mathcal{R}$, 而当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow 1$. 试证

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x) dx = 1 \quad (t > 0).$$

12. 设 $0 < \delta < \pi$, 当 $|x| \leq \delta$ 时 $f(x) = 1$, 当 $\delta < |x| \leq \pi$ 时 $f(x) = 0$, 而对于一切 x , $f(x+2\pi) = f(x)$.

(a) 求 f 的 Fourier 系数.

(b) 推证

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2} \quad (0 < \delta < \pi).$$

(c) 由 Parseval 定理导出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\delta)}{n^2 \delta} = \frac{\pi - \delta}{2}.$$

(d) 令 $\delta \rightarrow 0$ 以证

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

(e) 在 (c) 中令 $\delta = \frac{\pi}{2}$, 能得出什么结论来?

13. 当 $0 \leq x < 2\pi$ 时, 令 $f(x) = x$, 应用 Parseval 定理推证

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

14. 设在 $[-\pi, \pi]$ 上 $f(x) = (\pi - |x|)^2$. 试证

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx.$$

并推证

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(E. L. Stark 的最近的作品, 对形如 $\sum n^{-s}$ 的级数多有论及; 这里的 s 是正整数, 参看 *Math. Mag.*, 1974 年 47 卷, 197—202 页.)

15. 设 D_n 的定义为 (77) 式, 而令

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x).$$

试证

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1 - \cos(N+1)x}{1 - \cos x}$$

及

$$(a) K_N \geq 0,$$

$$(b) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(x) dx = 1,$$

$$(c) \text{ 若 } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi, \text{ 那么 } K_N(x) \leq \frac{1}{N+1} \cdot \frac{2}{1 - \cos \delta}.$$

设 $s_N = s_N(f; x)$ 是 f 的 Fourier 级数的第 N 个部分和, 并设

$$\sigma_N = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_N}{N+1}$$

是算术平均值, 试证

$$\sigma_N(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) dt,$$

并由此证明 Fejér 定理:

设 f 连续, 以 2π 为周期, 那么, 在 $[-\pi, \pi]$ 上 $\sigma_N(f; x) \rightarrow f(x)$ 是一致的.

提示: 应用性质 (a)、(b)、(c), 象在定理 7.26 中那样进行.

16. 证明 Fejér 定理的一个逐点收敛的说法:

设 $f \in \mathcal{B}$ 且在某些点 x 上 $f(x+), f(x-)$ 存在, 那么

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(f; x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)].$$

17. 假设 f 在 $[-\pi, \pi)$ 有界且单调, 并且它的 Fourier 系数 c_n 由 (62) 式定出.

(a) 用第六章习题 17 证明 $\{nc_n\}$ 是有界序列.

(b) 把(a)及习题 16 与第三章的习题 14(e)结合起来, 以证明, 对于每个 x ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f; x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)].$$

(c) 如果只假定在 $[-\pi, \pi]$ 上 $f \in \mathcal{R}$, 而 f 在某开区间 $(\alpha, \beta) \subset [-\pi, \pi]$ 单调. 试证, 对于每个 $x \in (\alpha, \beta)$, (b) 的结论仍能成立.

(这是局部化定理的一项应用).

18. 设

$$f(x) = x^3 - \sin^2 x \operatorname{tg} x$$

$$g(x) = 2x^2 - \sin^2 x - x \operatorname{tg} x.$$

对每个函数来断定, 对一切 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 函数值都是正的, 或者都是负的, 还是变号. 证实你的答案.

19. 设 f 是 R^1 上的连续函数, $f(x+2\pi) = f(x)$, 并且 α/π 是无理数. 试证:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x+n\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

对于每个 x 成立. 提示: 先对 $f(x) = e^{ikx}$ 来证.

20. 下面的简单计算能得出 Stirling 公式的一个很好的近似值.

设 $m = 1, 2, 3, \dots$, 当 $m \leq x \leq m+1$ 时, 规定

$$f(x) = (m+1-x) \log m + (x-m) \log (m+1).$$

而当 $m - \frac{1}{2} \leq x < m + \frac{1}{2}$ 时, 规定

$$g(x) = \frac{x}{m} - 1 + \log m.$$

作出 f 和 g 的图象. 注意, 当 $x \geq 1$ 时 $f(x) \leq \log x \leq g(x)$, 并且

$$\int_1^n f(x) dx = \log(n!) - \frac{1}{2} \log n > -\frac{1}{8} + \int_1^n g(x) dx.$$

在 $[1, n]$ 上积分 $\log x$, 就推断出当 $n = 2, 3, 4, \dots$ 时

$$\frac{7}{8} < \log(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n < 1$$

(注意: $\log \sqrt{2\pi} \sim 0.918\dots$). 于是

$$e^{\frac{1}{n}} < \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{n}} < e.$$

21. 设

$$L_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

试证, 存在着常数 $C>0$, 使得

$$L_n > C \log n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

或者更精确些, 就是序列

$$\left\{ L_n - \frac{4}{\pi^2} \log n \right\}$$

有界.

22. 设 α 是实数, $-1 < x < 1$, 试证牛顿二项式定理:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

提示: 把右端记作 $f(x)$, 证明级数收敛, 证明

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x),$$

再解这个微分方程.

又设 $-1 < x < 1$, 并设 $\alpha > 0$, 试证

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n! \Gamma(\alpha)} x^n.$$

23. 设 γ 是复平面里的连续可微闭曲线, 它的参数区间是 $[a, b]$, 并假定对每个 $t \in [a, b]$, $\gamma(t) \neq 0$. 定义 γ 的指标是

$$\text{Ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt.$$

试证 $\text{Ind}(\gamma)$ 必定是整数.

提示: 存在 $[a, b]$ 上的函数 φ , $\varphi' = \gamma' / \gamma$, $\varphi(a) = 0$, 因此 $\gamma \exp(-\varphi)$ 是常数. 因为 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 于是 $\exp \varphi(b) = \exp \varphi(a) = 1$. 注意

$$\varphi(b) = 2\pi i \text{Ind}(\gamma).$$

当 $\gamma = e^{i\alpha t}$, $a=0$, $b=2\pi$ 时, 求 $\text{Ind}(\gamma)$.

解释为什么通常把 $\text{Ind}(\gamma)$ 叫做 γ 绕 0 的圈数.

24. 令 γ 是习题 23 中那样的曲线, 又假定 γ 的值域与负实轴不交. 试证 $\text{Ind}(\gamma) = 0$. 提示: $\text{Ind}(\gamma + c)$ 在 $0 \leq c < \infty$ 上是 c 的连续整数值函数. 又

当 $c \rightarrow \infty$ 时, $\text{Ind}(\gamma + c) \rightarrow 0$.

25. 设 γ_1, γ_2 都是习题 23 中说的那样的曲线, 并且

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| \quad (a \leq t \leq b).$$

试证 $\text{Ind}(\gamma_1) = \text{Ind}(\gamma_2)$.

提示: 令 $\gamma = \gamma_2/\gamma_1$, 于是 $|1 - \gamma| < 1$, 而据习题 24, 必然 $\text{Ind}(\gamma) = 0$, 又

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}.$$

26. 设 γ 是复平面中的闭曲线 (不需假定可微), 参数区间是 $[0, 2\pi]$, 并且对于每个 $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma(t) \neq 0$.

选定 $\delta > 0$, 使得对于一切 $t \in [0, 2\pi]$, 合于 $|\gamma(t)| > \delta$. 设 P_1, P_2 是对于一切 $t \in [0, 2\pi]$ 都合于 $|P_j(t) - \gamma(t)| < \frac{\delta}{4}$ 的三角多项式 (据定理 8.15, 这样的多项式必定存在), 利用习题 25 证明

$$\text{Ind}(P_1) = \text{Ind}(P_2).$$

把这个公共的值定义作 $\text{Ind}(\gamma)$.

试证习题 24 及 25 的叙述不要任何可微性的假定, 仍然成立.

27. 令 f 是定义在复平面中的连续复函数. 设有正整数 n 及复数 $c \neq 0$, 合于

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^{-n} f(z) = c.$$

试证至少有一个复数 z 能使 $f(z) = 0$.

注意, 这是定理 8.8 的推广.

提示: 假如对于一切 z , $f(z) \neq 0$, 定义

$$\gamma_r(t) = f(re^{it}).$$

这里 $0 \leq r < \infty$, $0 \leq t \leq 2\pi$, 而对曲线 γ_r 来证明以下的命题:

(a) $\text{Ind}(\gamma_0) = 0$.

(b) 当 r 足够大时, $\text{Ind}(\gamma_r) = n$.

(c) $\text{Ind}(\gamma_r)$ 是 r 在 $[0, \infty)$ 上的连续函数

[在 (b) 和 (c) 中, 利用习题 26 的后一部分.]

证明, 由于 $n > 0$, (a)、(b) 与 (c) 是矛盾的.

28. 令 \bar{D} 是复平面中的闭单位圆盘. (即是当且仅当 $|z| \leq 1$ 时 $z \in \bar{D}$.) 又令 g 是把 \bar{D} 映入单位圆 T 的连续映射. (于是对于每个 $z \in \bar{D}$, $|g(z)| = 1$.) 试证, 至少有一个 $z \in T$, 使得 $g(z) = -z$.

提示: 对于 $0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi$, 令

$$\gamma_r(t) = g(re^{it}),$$

而置 $\psi(t) = e^{-it}\gamma_1(t)$. 如果对于每个 $z \in T$, $g(z) \neq -z$, 那么对于每个 $t \in [0, 2\pi]$ 就 $\psi(t) \neq -1$. 因此, 据习题 24 及 26, $\text{Ind}(\psi) = 0$. 因之

$$\text{Ind}(\gamma_1) = 1.$$

但 $\text{Ind}(\gamma_0) = 0$, 象习题 27 那样, 导出矛盾来.

29. 试证把 \bar{D} 映入 \bar{D} 的每个连续映射在 \bar{D} 中有不动点.

(这是 Brouwer 的不动点定理的二维情形.)

提示: 假定对每个 $z \in \bar{D}$, $f(z) \neq z$. 给每个 $z \in \bar{D}$ 联系一点 $g(z) \in T$, 该点位于从 $f(z)$ 出发而通过 z 的射线上. 于是 g 把 \bar{D} 映入 T 内, 而当 $g \in T$ 时, $g(z) = z$, 因为

$$g(z) = z - s(z)[f(z) - z],$$

所以 $g(z)$ 连续, 这里 $s(z)$ 是某个二次方程的唯一非负根. 这方程的系数是 f 和 z 的连续函数. 应用习题 28.

第九章 多元函数

线性变换

本章开始先讨论 n 维欧氏空间 R^n 内的向量的集。这里提出的代数事项，不用改变就可以扩充到任何标量域上的有限维向量空间去。但是按我们的目的来说，只限于欧氏空间提供的那种熟悉的结构就够了。

9.1 定义

(a) 非空集 $X \subset R^n$ 是一个向量空间，如果对于所有 $x \in X$, $y \in X$ 及所有标量 c , $x + y \in X$, 且 $cx \in X$.

(b) 若 $x_1, \dots, x_k \in R^n$, c_1, \dots, c_k 为标量, 则向量 $c_1x_1 + \dots + c_kx_k$ 叫做 x_1, \dots, x_k 的线性组合. 若 $S \subset R^n$, 而 E 为 S 内的元素的所有线性组合的集, 便说 S 生成 E , 或说 E 是 S 的生成.

注意, 每个生成是向量空间.

(c) k 个向量 x_1, \dots, x_k 的集 (以后记作 $\{x_1, \dots, x_k\}$) 叫做无关的, 如果从关系式 $c_1x_1 + \dots + c_kx_k = 0$ 可以推出 $c_1 = \dots = c_k = 0$. 不然的话, 就说 $\{x_1, \dots, x_k\}$ 是相关的.

注意, 无关集不含零向量.

(d) 若向量空间 X 含有由 r 个向量做成的无关集, 但是不含 $r+1$ 个向量的无关集, 便说 X 是 r 维的, 并记作: $\dim X = r$.

只含 0 的集, 是一个向量空间. 它的维数是 0 .

(e) 如果向量空间 X 的一个无关子集能够生成 X , 则把这个无关子集叫做 X 的基.

注意,若 $B = \{x_1, \dots, x_r\}$ 是 X 的一个基, 则每个 $x \in X$ 能唯一地表示成 $x = \sum c_j x_j$. 因为 B 生成 X , 所以这样的表示存在; 又因 B 是无关的, 所以这个表示是唯一的. c_1, \dots, c_r 这些数叫做 x 关于基 B 的坐标.

集 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是我们最熟悉的基的例子, 这里 e_j 是 R^n 中的向量, 它的第 j 个坐标是 1, 而其余坐标是 0. 若 $x \in R^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, 则 $x = \sum x_j e_j$. 我们把 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 叫做 R^n 的标准基.

9.2 定理 设 r 为正整数, 若向量空间 X 能由 r 个向量的集生成, 那么 $\dim X \leq r$.

证 若定理不成立, 就要有一个向量空间 X , 它含有一组无关集 $Q = \{y_1, \dots, y_{r+1}\}$, 但 X 能由含 r 个向量的集 S_0 生成.

假设 $0 \leq i < r$, 而我们已经作成了生成 X 的集 S_i , 它含有 y_j , $1 \leq j \leq i$ 及 S_0 中的某 $r-i$ 个元, 设它们是 x_1, \dots, x_{r-i} (换句话说, S_i 是把 S_0 中的 i 个元代以 Q 的成员而不改变它的生成). 因为 S_i 生成 X , y_{i+1} 在 X 中, 所以有标量 $a_1, \dots, a_{i+1}, b_1, \dots, b_{r-i}$, 其中 $a_{i+1} = 1$, 使得

$$\sum_{j=1}^{i+1} a_j y_j + \sum_{k=1}^{r-i} b_k x_k = 0.$$

如果所有 b_k 为 0, 那么 Q 的无关性将要迫使所有 a_j 为 0, 矛盾. 所以必有某个 $x_k \in S_i$, 它是 $T_i = S_i \cup \{y_{i+1}\}$ 的其余元的线性组合. 从 T_i 中把这个 x_k 去掉, 而把所余下来的集叫做 S_{i+1} . 那么 S_{i+1} 与 T_i 生成的空间相同, 即是 X . 于是 S_{i+1} 具有对于 S_i 所假定的那些性质, 只是把其中的 i 换成 $i+1$ 而已.

从 S_0 出发, 我们照这样造出集 S_1, \dots, S_r . 其最后一个由 y_1, \dots, y_r 组成, 并且我们的构造方法, 说明它能生成 X . 然而 Q 是无关的, 所以 y_{r+1} 不在 S_r 的生成之中. 这矛盾说明定理成立.

推论 $\dim R^n = n$.

证 因 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 生成 R^n . 由本定理知道

$$\dim R^n \leq n.$$

因 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是无关的, 所以 $\dim R^n \geq n$.

9.3 定理 设 X 为向量空间, 且 $\dim X = n$.

(a) X 中 n 个向量的集 E 能生成 X , 当且仅当 E 是无关的.

(b) X 必有基, 而且每个基由 n 个向量组成.

(c) 若 $1 \leq r \leq n$, 而 $\{y_1, \dots, y_r\}$ 是 X 中的一个无关集, 则 X 必有包含 $\{y_1, \dots, y_r\}$ 的基.

证 设 $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. 因 $\dim X = n$, 对于每个 $y \in X$, 集 $\{x_1, \dots, x_n, y\}$ 是相关的. 若 E 是无关的, 那么 y 就在 E 的生成中; 因此 E 生成 X . 反之, 若 E 相关, 就可以去掉 E 中一元而不改变 E 的生成. 因之, 由定理 9.2, E 不能生成 X . (a) 证完.

因 $\dim X = n$, X 必含有 n 个向量的一个无关集. 但是 (a) 说明这样的集是 X 的基. 由 9.1(d) 及 9.2 即得 (b).

今证 (c). 设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是 X 的基. 集

$$S = \{y_1, \dots, y_r, x_1, \dots, x_n\}$$

能生成 X , 又因为它包含的向量多于 n 个, 所以是相关的. 定理 9.2 所用的论证说明, 这些 x_i 中必有一个是 S 中其它元的线性组合. 若从 S 中去掉这个 x_i , 所余的集仍然能生成 X . 这种手续重复 r 次就得到一个包含 $\{y_1, \dots, y_r\}$ 的向量组; 据 (a), 它是 X 的一个基.

9.4 定义 向量空间 X 到向量空间 Y 的一个映射 A 叫做线性变换, 假如对于所有 $x_1, x_2, x \in X$ 及所有标量 c

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2, \quad A(cx) = cAx$$

成立. 如果 A 是线性的, 便时常把 $A(x)$ 写成 Ax .

注意, A 若是线性的, 便有 $A0 = 0$. 还要注意, 一个把 X 变成 Y 的线性变换, 完全决定于它关于任何基的作用: 如果 $\{x_1, \dots, x_n\}$

是 X 的一个基, 那么每个 $x \in X$ 有唯一的一个表示式

$$x = \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

而 A 的一次性(线性)容许我们用公式

$$Ax = \sum_{i=1}^n c_i Ax_i$$

从向量 Ax_1, \dots, Ax_n 及坐标 c_1, \dots, c_n 计算 Ax .

X 到 X 的线性变换, 时常叫做 X 上的线性算子. 若 A 是 X 上的线性算子, 它(i)是1—1的, (ii)把 X 映满 X , 则说 A 是可逆的. 这时可以在 X 上定义一个线性算子 A^{-1} , 要它对于所有 $x \in X$ 使得 $A^{-1}(Ax) = x$ 成立. 不难对于所有 $x \in X$ 证明 $A(A^{-1}x) = x$, 并且 A^{-1} 是线性的.

关于有限维向量空间上线性算子的一个重要事实是, 上述条件(i)与(ii)中的每一个, 都可推出另一个:

9.5 定理 有限维向量空间 X 上的线性算子 A 是 1—1 的, 当且仅当 A 的值域是 X 全体.

证 设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是 X 的一个基. A 的线性, 说明它的值域 $\mathcal{R}(A)$ 是集 $Q = \{Ax_1, \dots, Ax_n\}$ 的生成. 于是由定理 9.3(a) 可以推得, $\mathcal{R}(A) = X$ 当且仅当 Q 是无关的. 现在要证明 Q 是无关的, 当且仅当 A 是 1—1 的.

设 A 是 1—1 的, 且 $\sum c_i Ax_i = 0$. 于是 $A \sum (c_i x_i) = 0$, 因之 $\sum (c_i x_i) = 0$. 由此 $c_1 = \dots = c_n = 0$. 即 Q 是无关的.

反之, 设 Q 是无关的. 如果 $A(\sum c_i x_i) = 0$, 于是 $\sum c_i Ax_i = 0$. 因此 $c_1 = \dots = c_n = 0$. 所以只有当 $x = 0$ 时才有 $Ax = 0$. 如果 $Ax = Ay$, 那么 $A(x - y) = Ax - Ay = 0$, 因此 $x - y = 0$. 这就是说 A 是 1—1 的.

9.6 定义

(a) 设 $L(X, Y)$ 是向量空间 X 到向量空间 Y 内的所有线性变换构成的集. 把 $L(X, X)$ 简写成 $L(X)$. 若 $A_1, A_2 \in L(X, Y)$ 而 c_1, c_2 是标量. 定义 $c_1 A_1 + c_2 A_2$ 是这样 一个变换:

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)x = c_1 A_1 x + c_2 A_2 x \quad (x \in X).$$

显然, $c_1 A_1 + c_2 A_2 \in L(X, Y)$.

(b) 设 X, Y, Z 为向量空间. 若 $A \in L(X, Y), B \in L(Y, Z)$, 将 A 与 B 的复合

$$(BA)x = B(Ax) \quad (x \in X)$$

定义为它们的乘积 BA . 那么 $BA \in L(X, Z)$.

注意, BA 不必与 AB 相同; 即使 $X = Y = Z$ 也是这样.

(c) 对于 $A \in L(R^n, R^m)$, 定义 A 的范数 $\|A\|$ 为所有数 $|Ax|$ 的最小上界 \sup , 这里 x 取遍 R^n 中合于 $|x| \leq 1$ 的一切向量 x .

注意, 不等式

$$|Ax| \leq \|A\| |x|$$

对于所有 $x \in R^n$ 成立. 又如果 λ 对于所有 $x \in R^n$ 使 $|Ax| \leq \lambda |x|$ 成立, 那么 $\|A\| \leq \lambda$.

9.7 定理

(a) 若 $A \in L(R^n, R^m)$, 则 $\|A\| < \infty$ 且 A 为 R^n 到 R^m 的一致连续映射.

(b) 若 $A, B \in L(R^n, R^m)$, c 为一标量, 那么

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \|cA\| = |c| \cdot \|A\|.$$

以 $\|A-B\|$ 作为 A, B 之间的距离, 那么 $L(R^n, R^m)$ 就是一个度量空间.

(c) 若 $A \in L(R^n, R^m)$, 而 $B \in L(R^m, R^k)$, 则

$$\|BA\| \leq \|B\| \|A\|.$$

证

(a) 设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 R^n 中的标准基, 又设 $x = \sum c_i e_i$, $|x| \leq 1$, 由此对于所有 $i = 1, 2, \dots, n$, $|c_i| \leq 1$. 于是

$$|Ax| = \left| \sum c_i A e_i \right| \leq \sum |c_i| |A e_i| \leq \sum |A e_i|.$$

所以

$$\|A\| \leq \sum_{i=1}^n |A e_i| < \infty.$$

因为当 $x, y \in R^n$ 时 $|Ax - Ay| \leq \|A\| |x - y|$, 所以 A 是一致连续的.

(b) (b) 中的不等式, 由不等式

$|(A+B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq (\|A\| + \|B\|) |x|$ 推来. (b) 中第二部分按同样方式证明. 若

$$A, B, C \in L(R^n, R^n),$$

可得到三角形不等式

$$\|A - C\| = \|(A - B) + (B - C)\| \leq \|A - B\| + \|B - C\|.$$

易证 $\|A - B\|$ 有度量的其它性质.

(c) 最后, 由下式推出(c):

$$|(BA)x| = |B(Ax)| \leq \|B\| |Ax| \leq \|B\| \cdot \|A\| |x|.$$

因为我们现在在空间 $L(R^n, R^m)$ 内有了度量, 开集、连续等概念对这些空间就有了意义. 下面的定理就要利用这些概念.

9.8 定理 设 Ω 为 R^n 上所有可逆线性算子的集.

(a) 若 $A \in \Omega$, $B \in L(R^n)$, 而且

$$\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1,$$

则 $B \in \Omega$.

(b) Ω 是 $L(R^n)$ 的开子集, 映射 $A \rightarrow A^{-1}$ 在 Ω 上是连续的. (显然, 它又是把 Ω 映满 Ω 的 1—1 映射, 它是其自身的逆.)

证

(a) 令 $\|A^{-1}\| = 1/\alpha$, 令 $\|B - A\| = \beta$, 那么 $\beta < \alpha$. 对于每个 $x \in R^n$,

$$\begin{aligned}\alpha|\boldsymbol{x}| &= \alpha\|A^{-1}A\boldsymbol{x}\| \leq \alpha\|A^{-1}\| \cdot \|A\boldsymbol{x}\| \\ &= \|A\boldsymbol{x}\| \leq \|(A-B)\boldsymbol{x}\| + \|B\boldsymbol{x}\| \leq \beta|\boldsymbol{x}| + \|B\boldsymbol{x}\|.\end{aligned}$$

所以,

$$(1) \quad (\alpha - \beta)|\boldsymbol{x}| \leq \|B\boldsymbol{x}\| \quad (\boldsymbol{x} \in R^n).$$

因为 $\alpha - \beta > 0$, (1) 说明只要 $\boldsymbol{x} \neq 0$, 则 $B\boldsymbol{x} \neq 0$, 所以 B 是 1-1 的. 根据定理 9.5, $B \in \Omega$. 这对于一切合于 $\|B - A\| < \alpha$ 的 B 都成立. 这样就证明了 (a) 而且 Ω 是开集.

(b) 然后在 (1) 里把 \boldsymbol{x} 换作 $B^{-1}\boldsymbol{y}$. 所得的不等式

$$(2) \quad (\alpha - \beta)\|B^{-1}\boldsymbol{y}\| \leq \|BB^{-1}\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}\| \quad (\boldsymbol{y} \in R^n)$$

说明 $\|B^{-1}\| \leq (\alpha - \beta)^{-1}$. 于是恒等式

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

与定理 9.7(c) 合起来就得出

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \|A - B\| \|A^{-1}\| \leq \frac{\beta}{\alpha(\alpha - \beta)}.$$

因为当 $B \rightarrow A$ 时, $\beta \rightarrow 0$, 这证明了 (b) 中连续性的论断.

9.9 矩阵 设 $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ 与 $\{\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_m\}$ 分别为向量空间 X 与 Y 的基, 于是每个 $A \in L(X, Y)$ 确定一组数 a_{ij} , 使得

$$(3) \quad A\boldsymbol{x}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{y}_i \quad (1 \leq j \leq n).$$

把这些数形象地写成一个 m 行 n 列的长方阵是方便的; 称这个长方阵为 m 行 n 列的矩阵 (又简称为 $m \times n$ 矩阵).

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

注意, 向量 $A\boldsymbol{x}_j$ 对于基 $\{\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_m\}$ 的坐标出现在 $[A]$ 的第 j 列, 所以向量 $A\boldsymbol{x}_j$ 往往叫做列向量. 应用这个名词, 可以说 A 的值域是

由 $[A]$ 的列向量生成的.

若 $x = \sum c_j x_j$, 由 A 的线性及 (3) 式, 就得到

$$(4) \quad Ax = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j \right) y_i.$$

所以, Ax 的坐标为 $\sum_j a_{ij} c_j$. 注意, 在 (3) 中按 a_{ij} 的第一个下标求和; 而当计算坐标时, 则是按第二个下标求和.

假定已经给出了一个具有实数阵元 a_{ij} 的 $m \times n$ 矩阵. 如果这时 A 由 (4) 定义, 显然 $A \in L(X, Y)$, 而且 $[A]$ 就是所给的矩阵. 于是, 在 $L(X, Y)$ 与所有实 $m \times n$ 矩阵的集间, 存在一个自然的 1—1 对应. 可是还要强调, $[A]$ 不只是依赖于 A , 还与 X 及 Y 中基的选择有关. 如果换基的话, 同一个 A 可以导致许多不同的矩阵; 反之亦然. 我们打算再进一步去讨论这一点, 因为我们将在固定的基上进行工作 (关于这问题, 在 § 9.37 里提供了一些评注).

若 Z 是第三个向量空间, 具有基 $\{z_1, \dots, z_p\}$, 如果 A 由 (3) 式给出, 而

$$By_i = \sum_k b_{ki} z_k, \quad (BA)x_j = \sum_k c_{kj} z_k,$$

那么 $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$, $BA \in L(X, Z)$; 又因为

$$\begin{aligned} B(Ax_j) &= B \sum_i a_{ij} y_i = \sum_i a_{ij} By_i \\ &= \sum_i a_{ij} \sum_k b_{ki} z_k \\ &= \sum_k \left(\sum_i b_{ki} a_{ij} \right) z_k, \end{aligned}$$

那么, $\{z_1, \dots, z_p\}$ 的无关性就说明

$$(5) \quad c_{kj} = \sum_i b_{ki} a_{ij} \quad (1 \leq k \leq p, \quad 1 \leq j \leq n).$$

这说明了如何由 $[B]$ 和 $[A]$ 来计算 $p \times n$ 矩阵 $[BA]$ 。如果我们把 $[B][A]$ 定义为 $[BA]$ ，那么(5)式描绘了矩阵乘法的普通法则。

最后，设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 与 $\{y_1, \dots, y_m\}$ 为 R^n 与 R^m 的标准基，而 A 由(4)给出。从Schwarz不等式，得到

$$\begin{aligned} |Ax|^2 &= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} c_j \right)^2 \leq \sum_i \left(\sum_j a_{ij}^2 \cdot \sum_j c_j^2 \right) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}^2 |x|^2, \end{aligned}$$

所以

$$(6) \quad \|A\| \leq \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right\}^{1/2}.$$

如果 $A, B \in L(R^n, R^m)$ ，而把(6)中的 A 代以 $B-A$ ，就可以知道，矩阵元 a_{ij} 是某个参变量的连续函数时， A 也是连续的。更确切地说，就是：

若 S 是一个度量空间，且 a_{11}, \dots, a_{mn} 是 S 上的实连续函数，又若对于每个 $p \in S$ ， A_p 是 R^n 到 R^m 内的线性变换，它的矩阵的阵元为 $a_{ij}(p)$ ，那么映射 $p \rightarrow A_p$ 为 S 到 $L(R^n, R^m)$ 内的连续映射。

微分法

9.10 前言

为了得到定义在 R^n (或 R^n 中的开子集)上的函数的导数定义，现在对大家熟悉的 $n=1$ 的情形，取另一种观点，看看怎样把 $n=1$ 时的导数解释一下，便能自然地扩充到 $n>1$ 的情况。

设 f 是定义在 $(a, b) \subset R^1$ 上的实函数， $x \in (a, b)$ ，那么， $f'(x)$ 通常定义作实数

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

当然,这里假定这个极限存在. 于是

$$(8) \quad f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h),$$

这里“余项” $r(h)$ 很小,这意思是说

$$(9) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

注意,(8)式把差式 $f(x+h) - f(x)$ 表示成 h 的线性函数 $f'(x)h$ 与一个小余项的和,这里线性函数的功能是把 h 变成 $f'(x)h$. 所以我们可以不说 f 在 x 的导数是一个实数,而说它是在 R^1 上把 h 变为 $f'(x)h$ 的线性算子.

(注意,每个实数 α 都能引出 R^1 上的线性算子;所说的这个算子,只是用 α 去乘. 反之,把 R^1 变成 R^1 的每个线性函数,都是乘以某个实数. 正是 R^1 与 $L(R^1)$ 之间的这个1—1对应关系,促成了上面的说法.)

其次考虑把 $(a, b) \subset R^1$ 映入 R^m 的函数 f . 这时, $f'(x)$ 被定义做满足

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - y \right\} = 0$$

的向量 $y \in R^m$ (假如它存在的话). 这个式子可以重写成

$$(11) \quad f(x+h) - f(x) = hy + r(h).$$

这里,当 $h \rightarrow 0$ 时, $r(h)/h \rightarrow 0$. (11)式右端的主项,又是 h 的线性函数. 只要把每个 $h \in R^1$ 与向量 $hy \in R^m$ 相联系,就使每个 $y \in R^m$ 产生一个从 R^1 到 R^m 内的线性变换. R^m 与 $L(R^1, R^m)$ 的同一化,使我们能把 $f'(x)$ 看作 $L(R^1, R^m)$ 的一员.

于是,如果 f 是 $(a, b) \subset R^1$ 映入 R^m 内的可微映射,并且 $x \in (a, b)$,那么 $f'(x)$ 就是把 R^1 映入 R^m 的线性变换,这线性变换适合

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0$$

或与之等价的式子

$$(13) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} = 0.$$

对于 $n > 1$ 的情形, 现在已经准备好了.

9.11 定义 设 E 是 R^n 中的开集, f 把 E 映入 R^m 内, $x \in E$. 如果存在把 R^n 映入 R^m 的线性变换 A , 使得

$$(14) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0,$$

就说 f 在 x 处可微, 并且写成

$$(15) \quad f'(x) = A$$

如果 f 在每个 $x \in E$ 可微, 就说 f 在 E 内可微.

在(14)式中, 当然不用说就知道 $h \in R^n$. 如果 $|h|$ 足够小, 因为 E 是开集, 所以 $x+h \in E$. 这样, $f(x+h)$ 有定义而 $\in R^m$. 又因 $A \in L(R^n, R^m)$, 而 $Ah \in R^m$. 于是

$$f(x+h) - f(x) - Ah \in R^m$$

在(14)式的分子上的范数是 R^m 中的范数. 而在分母中 h 的范数是 R^n 中的范数.

在进一步讨论之前, 必须先解决明摆着的唯一性问题.

9.12 定理 设 E 和 f 的意义如定义 9.11 的一样, $x \in E$.

(14) 式在 $A = A_1$ 时及 $A = A_2$ 时都成立, 那么 $A_1 = A_2$.

证 如果 $B = A_1 - A_2$. 由不等式

$$|Bh| \leq |f(x+h) - f(x) - A_1h| + |f(x+h) - f(x) - A_2h|$$

即知, 当 $h \rightarrow 0$ 时, $|Bh|/|h| \rightarrow 0$. 对于固定的 $h \neq 0$, 则有

$$(16) \quad \frac{|B(th)|}{|th|} \rightarrow 0, \text{ 当 } t \rightarrow 0.$$

由于 B 是线性的, (16) 式左端与 t 无关.

因此, 对每个 $h \in R^n$, $Bh = 0$. 从而 $B = 0$

9.13 评注

(a) 关系(14)能被写成

$$(17) \quad f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

的形式, 这里余项 $r(\mathbf{h})$ 适合于

$$(18) \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|r(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} = 0.$$

像 § 9.10 那样, 可以把(17)式说成是, 对于固定的 \mathbf{x} 及小的 \mathbf{h} , (17)式的左端近似地等于 $f'(\mathbf{x})\mathbf{h}$, 就是说, 近似地等于一个线性变换作用于 \mathbf{h} 上的值.

(b) 设 f 及 E 都像定义 9.11 中的那样, f 在 E 内可微. 于是对于每个 $\mathbf{x} \in E$, $f'(\mathbf{x})$ 是个函数, 即是把 R^n 映入 R^m 内的线性变换. 但 f' 又是函数: f' 把 E 映入 $L(R^n, R^m)$ 内.

(c) 看看(17)式即知, 在 f 可微的点上, f 都连续.

(d) 由(14)式及(17)式所定义的导数, 常被称为 f 在 \mathbf{x} 的微分, 或叫做 f 在 \mathbf{x} 的全导数, 以便与后面将出现的偏导数相区别.

9.14 例 我们已经把 R^n 映入 R^m 内的函数的导数, 定义为把 R^n 映入 R^m 内的线性变换. 那么, 这样一个线性变换的导数是什么呢? 答案很简单.

如果 $A \in L(R^n, R^m)$ 并且 $\mathbf{x} \in R^n$, 那么

$$(19) \quad A'(\mathbf{x}) = A.$$

注意, \mathbf{x} 只在(19)的左端出现, 但不在右端出现. (19)式的两边都是 $L(R^n, R^m)$ 的成员. 然而 $A\mathbf{x} \in R^m$.

由于 A 是线性的, 所以

$$(20) \quad A(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - A\mathbf{x} = A\mathbf{h}.$$

因此, (19)式的证明是显然的. 于 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ 时, (14)式中的分子, 对每个 $\mathbf{h} \in R^n$ 来说都是 0. 因之在(17)式中

$$r(\mathbf{h}) = 0.$$

现将链导法(定理 5.5)推广到这里来.

9.15 定理 设 E 是 R^n 的开集, f 把 E 映入 R^m 内, f 在 $x_0 \in E$ 可微, g 把包含 $f(E)$ 的一个开集映入 R^k 内, 且 g 在 $f(x_0)$ 可微. 那么, 由

$$F(x) = g(f(x))$$

确定的, 把 E 映入 R^k 内的映射 F 在 x_0 可微, 并且

$$(21) \quad F'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

(21) 的右端是两个线性变换的积和 § 9.6 定义的一样.

证 令 $y_0 = f(x_0)$, $A = f'(x_0)$, $B = g'(y_0)$, 对于使 $f(x_0 + h)$ 及 $g(y_0 + k)$ 有定义的所有的 $h \in R^n$ 和 $k \in R^m$, 规定

$$u(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah,$$

$$v(k) = g(y_0 + k) - g(y_0) - Bk,$$

于是

$$(22) \quad |u(h)| = \varepsilon(h)|h|, \quad |v(k)| = \eta(k)|k|,$$

这里, 当 $h \rightarrow 0$ 时 $\varepsilon(h) \rightarrow 0$, 而当 $k \rightarrow 0$ 时, $\eta(k) \rightarrow 0$.

给定 h , 令 $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$. 那么

$$(23) \quad |k| = |Ah + u(h)| \leq [\|A\| + \varepsilon(h)]|h|,$$

$$\begin{aligned} \text{且} \quad F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh &= g(y_0 + k) - g(y_0) - BAh \\ &= B(k - Ah) + v(k) \\ &= Bu(h) + v(k). \end{aligned}$$

因此, 对于 $h \neq 0$, 由 (22) 及 (23) 式可得出

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh}{|h|} &\leq \|B\|\varepsilon(h) \\ &\quad + [\|A\| + \varepsilon(h)]\eta(k). \end{aligned}$$

令 $h \rightarrow 0$, 则 $\varepsilon(h) \rightarrow 0$. 据 (23), 又有 $k \rightarrow 0$, 因此 $\eta(k) \rightarrow 0$. 随之, $F'(x_0) = BA$, 此即 (21) 式所说的.

9.16 偏导数 再考虑把开集 $E \subset R^n$ 映入 R^m 的函数 f . 设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 及 $\{u_1, \dots, u_m\}$ 分别是 R^n 及 R^m 的标准基, f 的分量是

由

$$(24) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) u_i \quad (\mathbf{x} \in E)$$

确定的实函数 f_1, \dots, f_m ; (24) 式还可以等价地写成

$$f_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \cdot u_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

对于 $\mathbf{x} \in E, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, 定义

$$(25) \quad (D_j f_i)(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t \mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x})}{t},$$

这里假定此极限存在. 把 $f_i(\mathbf{x})$ 写成 $f_i(x_1, \dots, x_n)$, 就知道 $D_j f_i$ 是 f_i 对于 x_j 的导数 (其它变量保持不变). 所以, 经常用记号

$$(26) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

代替 $D_j f_i$, 而 $D_j f_i$ 被叫做偏导数.

对于单变量函数, 只要求导数存在的许多情况, 对于多变量函数, 却需要各个偏导数连续, 或至少要求其有界. 例如第四章习题 7 中所说的函数 f 及 g , 虽然它们的各个偏导数在 R^2 的每个点上存在, 但 f 及 g 都不连续. 对于函数连续, 即使所有偏导数都存在, 也不能保证其在定义 9.11 的意义下可微; 参看习题 6 与 14 及定理 9.21.

然而, 如果已知 f 在某点 \mathbf{x} 可微, 那么, 它的各个偏导数必在 \mathbf{x} 处存在, 并且它们能完全决定线性变换 $f'(\mathbf{x})$:

9.17 定理 设 f 把开集 $E \subset R^n$ 映入 R^m 内, f 在点 $\mathbf{x} \in E$ 可微. 那么, 偏导数 $D_j f_i(\mathbf{x})$ 存在, 且

$$(27) \quad f'(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^m (D_j f_i)(\mathbf{x}) u_i \quad (1 \leq j \leq n).$$

这里象 § 9.16 那样, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}, \{u_1, \dots, u_m\}$ 分别是 R^n 及 R^m 的标准基.

证 固定 j . 因 f 在 x 可微,

$$f(x + te_j) - f(x) = f'(x)(te_j) + r(te_j),$$

这里, 当 $t \rightarrow 0$ 时, $\|\mathbf{r}(t\mathbf{e}_i)\|/t \rightarrow 0$. 因为 $f'(x)$ 是线性的, 所以

$$(28) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = f'(x)e_j.$$

现在, 如果象在(24)式中那样把 f 用它的分量表示出来, 那么, (28)式变为

$$(29) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \frac{f_i(x + te_j) - f_i(x)}{t} u_i = f'(x) e_j.$$

随之, 当 $t \rightarrow 0$ 时, 上面的和式中的每个商有极限(看定理 4.10), 于是每个 $(D_i f_i)(x)$ 存在, 而由(29)即得(27).

定理 9.17 有一些推论:

照 § 9.9 那样, 令 $[f'(x)]$ 是关于上述标准基的 $f'(x)$ 的表现矩阵. 那么 $f'(x)e_j$ 是 $[f'(x)]$ 的第 j 个列向量, 而 (27) 式就说明数 $(D_j f_i)(x)$ 占有 $[f'(x)]$ 的第 i 行第 j 列的位置, 即是

$$[\mathbf{f}'(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} (D_1 f_1)(\mathbf{x}), \dots, (D_n f_1)(\mathbf{x}) \\ \dots\dots\dots \\ (D_1 f_m)(\mathbf{x}), \dots, (D_n f_m)(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

如果 $h = \sum h_j e_j$ 是 R^n 中的任何向量, 那么, 由 (27) 式说明

$$(30) \quad \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h} = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (D_j f_i)(\mathbf{x}) h_j \right\} \mathbf{u}_i.$$

9.18 例 设 γ 是把开区间 $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ 映入开集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 内的可微映射, 换句话说, γ 是 E 内的可微曲线. 令 f 是域 E 上的实值可微函数, 于是 f 是从 E 到 \mathbb{R}^1 内的可微映射. 定义

$$(31) \quad q(t) = f(\gamma(t)) \quad (a < t < b).$$

于是由链导法得到

$$(32) \quad g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

因 $\gamma'(t) \in L(R^1, R^n)$ 而 $f'(\gamma(t)) \in L(R^n, R^1)$, 可见 $g'(t)$ 是由 (32) 确定的 R^1 上的线性算子. 这与 g 把 (a, b) 映入 R^1 的事实是一致的. 然而 $g'(t)$ 也能当作一个实数 (这已在 § 9.10 中讨论过). 我们即将看到, 这个实数能够用 f 的偏导数及 γ 的分量的导数算出来.

对于 R^n 的标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 来说, $[\gamma'(t)]$ 是 $n \times 1$ 矩阵 (“列矩阵”), 它的第 i 行上是 $\gamma'_i(t)$, 其中 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ 是 γ 的分量. 对于每个 $x \in E$, $[f'(x)]$ 是 $1 \times n$ 矩阵 (“行矩阵”), 它的第 j 列上是 $(D_j f)(x)$. 因此 $g'(t)$ 是 1×1 矩阵, 它的唯一的阵元是实数

$$(33) \quad g'(t) = \sum_{i=1}^n (D_i f)(\gamma(t)) \gamma'_i(t).$$

这是链导法的常遇到的一种特殊情形, 并可按下面的方式来表述.

联系着每个 $x \in E$ 有一个向量, 称为 f 在 x 的 “梯度”, 它的定义是

$$(34) \quad (\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^n (D_i f)(x) e_i.$$

因为

$$(35) \quad \gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(t) e_i,$$

所以 (33) 式能写成向量 $(\nabla f)(\gamma(t))$ 与 $\gamma'(t)$ 的标量积的形式:

$$(36) \quad g'(t) = (\nabla f)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t).$$

固定一个 $x \in E$, 令 $u \in R^n$ 是单位向量 (即 $|u| = 1$) 并且按照

$$(37) \quad \gamma(t) = x + tu \quad (-\infty < t < \infty)$$

限定 γ . 于是对任何 t 都有 $\gamma'(t) = u$. 因之, (36) 式说明:

$$(38) \quad g'(0) = (\nabla f)(x) \cdot u.$$

另一方面, (37) 式表示

$$g(t) - g(0) = f(x + tu) - f(x).$$

因此, 从(38)式得到

$$(39) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} = (\nabla f)(x) \cdot u$$

(39)中的极限, 时常被称为 f 在点 x 的, 沿着单位向量 u 的方向的方向导数, 并记作 $(D_u f)(x)$.

如果 f 和 x 都固定, 但 u 变动, 那么(39)式说明, 当 u 是 $(\nabla f)(x)$ 的正数倍时, $(D_u f)(x)$ 达到它的最大值. [这里 $(\nabla f)(x) = 0$ 的情况除外].

如果 $u = \sum u_i e_i$, 那么(39)式说明, $(D_u f)(x)$ 能用 f 在 x 的偏导数, 借公式

$$(40) \quad (D_u f)(x) = \sum_{i=1}^n (D_i f)(x) u_i$$

表出来.

上面的某些概念将在下列定理里起作用.

9.19 定理 设 f 把凸开集 $E \subset R^n$ 映入 R^m 内, f 在 E 内可微, 并有对于每个 $x \in E$ 使

$$\|f'(x)\| \leq M$$

都成立的实数 M . 那么, 对于一切 $a \in E$ 及 $b \in E$,

$$|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|.$$

证 固定了 $a \in E, b \in E$, 对一切 $t \in R^1$ 定义

$$\gamma(t) = (1-t)a + tb,$$

因为 E 是凸集, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时 $\gamma(t) \in E$. 令

$$g(t) = f(\gamma(t)).$$

于是

$$g'(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t) = f'(\gamma(t)) (b - a),$$

因而对于一切 $t \in [0, 1]$

$$|g'(t)| \leq \|f'(\gamma(t))\| |b-a| \leq M |b-a|$$

据定理 5.19.

$$|g(1) - g(0)| \leq M |b-a|$$

但 $g(0) = f(a)$, $g(1) = f(b)$, 所以定理获证.

推论 如果再加上条件: 对于一切 $x \in E$, $f'(x) = 0$, 那么, f 是常值映射.

证 只需注意到定理中的题设在 $M = 0$ 时成立就行了.

9.20 定义 设 f 是开集 $E \subset R^n$ 到 R^m 内的可微映射. 如果 f' 是把 E 映入 $L(R^n, R^m)$ 的连续映射, 就说 f 是在 E 内 连续可微的.

更明确地说, 它要求对于每个 $x \in E$ 及每个 $\varepsilon > 0$, 存在着 $\delta > 0$, 使得当 $y \in E$ 及 $|x - y| < \delta$ 时,

$$\|f'(y) - f'(x)\| < \varepsilon.$$

若是这样的话, 我们也说 f 是 \mathcal{C}^1 映射, 或说 $f \in \mathcal{C}^1(E)$.

9.21 定理 设 f 把开集 $E \subset R^n$ 映入 R^m 内. 那么, 当且仅当 f 的所有偏导数 $D_j f_i$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) 在 E 上都存在并且连续时, $f \in \mathcal{C}^1(E)$.

证 首先假定 $f \in \mathcal{C}^1(E)$. 由 (27) 式, 对于一切 i, j 及一切 $x \in E$,

$$(D_j f_i)(x) = (f'(x)e_j) \cdot u_i.$$

因之

$$(D_j f_i)(y) - (D_j f_i)(x) = \{[f'(y) - f'(x)]e_j\} \cdot u_i,$$

再因 $|u_i| = |e_j| = 1$, 随之有

$$\begin{aligned} |(D_j f_i)(y) - (D_j f_i)(x)| &\leq |[f'(y) - f'(x)]e_j| \\ &\leq \|f'(y) - f'(x)\| \end{aligned}$$

因此 $D_j f_i$ 连续.

关于逆命题, 只需考虑 $m = 1$ 的情况 (为什么?). 固定 $x \in E$ 及

$\varepsilon > 0$. 因 E 是开集, 便有开球 $S \subset E$, 其中心在 x 而半径为 r . 由于 $D_j f$ 连续, 所以能把 r 取得很小, 以致于 $y \in S$ 时

$$(41) \quad |(D_j f)(y) - (D_j f)(x)| < \frac{\varepsilon}{n} \quad (1 \leq j \leq n).$$

设 $h = \sum h_j e_j$, $|h| < r$, 又命 $v_0 = 0$, 而当 $1 \leq k \leq n$ 时, 命 $v_k = h_1 e_1 + \cdots + h_k e_k$. 于是

$$(42) \quad f(x+h) - f(x) = \sum_{j=1}^n [f(x+v_j) - f(x+v_{j-1})].$$

因为当 $1 \leq k \leq n$ 时, $|v_k| < r$, 又因 S 是凸的, 所以连接 $x+v_{j-1}$ 与 $x+v_j$ 的线段位于球内. 因为 $v_j = v_{j-1} + h_j e_j$, 由中值定理 (5.10), 知道 (42) 式中的第 j 个被加量等于

$$h_j (D_j f)(x + v_{j-1} + \theta_j h_j e_j),$$

这里的 $\theta_j \in (0, 1)$. 应用 (41) 式, 知道它与 $h_j (D_j f)(x)$ 的差小于 $|h_j| \varepsilon / n$. 再据 (42) 式即知对于所有合于 $|h| < r$ 的一切 h , 有

$$|f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^n h_j (D_j f)(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |h_j| \varepsilon \leq |h| \varepsilon.$$

这就是说, f 在 x 处可微, 且 $f'(x)$ 是一个线性函数, 它对于每个向量 $h = \sum h_j e_j$ 确定一个数 $\sum h_j (D_j f)(x)$. 矩阵 $[f'(x)]$ 由行向量 $(D_1 f)(x), \dots, (D_n f)(x)$ 组成; 又因 $D_1 f, \dots, D_n f$ 都是 E 上的连续函数, 那么 § 9.9 的结束语说明 $f \in \mathcal{C}'(E)$.

凝缩原理

现在我们中断了微分的讨论, 而插入在任何完备度量空间都有效的不动点定理. 这个定理将在反函数定理的证明中用到.

9.22 定义 设 X 是度量为 d 的度量空间. 如果 φ 把 X 映入 X 内, 并且存在着数 $c < 1$, 能够对于一切 $x, y \in X$, 使得

$$(43) \quad d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x, y),$$

那么, 就说 φ 是 X 到 X 内的一个凝缩函数.

9.23 定理 如果 X 是完备度量空间, φ 是 X 到 X 内的凝缩函数, 那么, 存在着唯一合于 $\varphi(x) = x$ 的 $x \in X$.

换句话说, 就是 φ 有唯一的不动点. 唯一性是明显的, 因为如果 $\varphi(x) = x$ 并且 $\varphi(y) = y$, 于是由 (43) 式得知 $d(x, y) \leq cd(x, y)$. 而这只有在 $d(x, y) = 0$ 时才能成立.

φ 的不动点的存在性, 是这个定理的主要部分. 这个证明实际上提供了一种确定不动点位置的构造性的方法.

证 任取 $x_0 \in X$, 而用

$$(44) \quad x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

来递归地定义 $\{x_n\}$.

选一个合于 (43) 的 $c < 1$. 于是当 $n \geq 1$ 时

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq cd(x_n, x_{n-1}).$$

因此, 由归纳法得

$$(45) \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

如果 $n < m$, 那么

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n+1}^m d(x_i, x_{i-1}) \\ &\leq (c^n + c^{n+1} + \dots + c^{m-1}) d(x_1, x_0) \\ &\leq [(1-c)^{-1} d(x_1, x_0)] c^n. \end{aligned}$$

所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 因为 X 完备, 所以有某个 $x \in X$

$$\lim x_n = x.$$

因 φ 是 X 上的凝缩函数, 所以 φ 在 X 上连续 (实际上还是一致连续的). 因此

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

反函数定理

粗略地说,反函数定理说的是,一个连续可微映射 f , 在使线性变换 $f'(x)$ 可逆的点 x 的邻域内是可逆的.

9.24 定理 设 f 是把开集 $E \subset R^n$ 映入 R^n 内的 \mathcal{C}^1 映射, 对某个 $a \in E$, $f'(a)$ 可逆, 且 $b = f(a)$. 那么

(a) 在 R^n 内存在开集 U 及 V , 使得 $a \in U, b \in V, f$ 在 U 上是 1—1 的, 并且 $f(U) = V$;

(b) 若 g 是 f 的逆 (由 (a), 这个逆存在), 它在 V 内由

$$g(f(x)) = x \quad (x \in U),$$

确定, 那么 $g \in \mathcal{C}^1(V)$.

把方程 $y = f(x)$ 写成分量的形式, 那么, 便可以对于这定理的结论, 得到以下的解释: n 个方程的方程组

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

如果把 x 和 y 限制在 a 和 b 的足够小的邻域内, 就能用 y_1, \dots, y_n 把 x_1, \dots, x_n 解出来; 这组解是唯一的, 并且是连续可微的.

证

(a) 命 $f'(a) = A$, 并且选一个 λ 使得

$$(46) \quad 2\lambda \|A^{-1}\| = 1.$$

因为 f' 在 a 连续, 必有以 a 为中心的开球 $U \subset E$, 使得

$$(47) \quad \|f'(x) - A\| < \lambda, \quad x \in U.$$

我们给每个 $y \in R^n$ 配置一个函数 φ , φ 的定义是

$$(48) \quad \varphi(x) = x + A^{-1}(y - f(x)), \quad x \in E.$$

注意, $f(x) = y$ 当且仅当 x 是 φ 的不动点.

因 $\varphi'(x) = I - A^{-1}f'(x) = A^{-1}(A - f'(x))$, 那么由 (46) 及 (47) 式得到

$$(49) \quad \|\varphi'(x)\| < \frac{1}{2} \quad (x \in U).$$

因之, 由定理 9.19 就有

$$(50) \quad |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \frac{1}{2} |x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \in U),$$

因此, φ 在 U 中最多有一个不动点; 所以最多有一个 $x \in U$, 使得 $f(x) = y$.

这样, f 在 U 中是 1—1 映射.

次令 $V = f(U)$, 并取 $y_0 \in V$. 于是有某个 $x_0 \in U$ 使 $y_0 = f(x_0)$. 设 B 是以 x_0 为中心的开球, 其半径 $r > 0$ 相当小, 以致闭包 \bar{B} 完全含于 U 内. 现在要证明, 只要 $|y - y_0| < \lambda r$, 就必定 $y \in V$, 当然这也就证明了 V 是开集.

固定了 y , $|y - y_0| < \lambda r$. 关于 (48) 式的 φ , 有

$$|\varphi(x_0) - x_0| = |A^{-1}(y - y_0)| < \|A^{-1}\| \lambda r = \frac{r}{2}.$$

如果 $x \in \bar{B}$, 那么, 由 (50) 式,

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - x_0| &\leq |\varphi(x) - \varphi(x_0)| + |\varphi(x_0) - x_0| \\ &\leq \frac{1}{2} |x - x_0| + \frac{r}{2} \leq r; \end{aligned}$$

因此, $\varphi(x) \in B$. 注意, 如果 $x_1 \in \bar{B}$, $x_2 \in \bar{B}$, (50) 就成立.

于是, φ 是 \bar{B} 到 \bar{B} 内的凝缩函数. \bar{B} 作为 R^n 的闭子集, 必是完备集. 所以定理 9.23 说明 φ 有不动点 $x \in \bar{B}$. 对于这个 x 来说, $f(x) = y$. 于是 $y \in f(\bar{B}) \subset f(U) = V$.

这就证明了定理中的 (a).

(b) 取 $y \in V$, $y + k \in V$. 于是存在 $x \in U$, $x + h \in U$, 使 $y = f(x)$, $y + k = f(x + h)$. 用 (48) 式里的 φ ,

$$|\varphi(x + h) - \varphi(x)| = h + A^{-1}[f(x) - f(x + h)] = h - A^{-1}k$$

由 (50) 式得 $|h - A^{-1}k| \leq \frac{1}{2} |h|$. 因此, $|A^{-1}k| \geq \frac{1}{2} |h|$, 并且

$$(51) \quad |h| \leq 2 \|A^{-1}\| |k| = \lambda^{-1} |k|,$$

由(46), (47)式及定理 9.8 知道 $f'(x)$ 有逆, 比如说是 T . 因为

$$g(y+k) - g(y) - Tk = h - Tk = T[f(x+h) - f(x) - f'(x)h],$$

(51)式说明

$$\frac{|g(y+k) - g(y) - Tk|}{|k|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda} \cdot \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|}.$$

当 $k \rightarrow 0$ 时, (51)说明 $h \rightarrow 0$. 上面的不等式的右端也趋于 0. 因之左端也趋于 0. 这就证明了 $g'(y) = T$. 但 T 是 $f'(x) = f'(g(y))$ 的逆, 于是

$$(52) \quad g'(y) = \{f'(g(y))\}^{-1} \quad (y \in V).$$

最后, 注意 g 是把 V 映满 U 的连续映射 (因为 g 是可微的), f' 是 U 到 $L(R^n)$ 的所有可逆元的集 Ω 中的连续映射, 而由定理 9.8, 它的逆是把 Ω 映满 U 的连续映射. 把这些与 (52) 式结合起来就知道 $g \in \mathcal{C}'(V)$.

定理证完.

评注 题设 $f \in \mathcal{C}'(E)$ 的全部力量, 只用在上面证明中的最后一段里. 直到方程 (52) 以前的所有其它证明, 都是由 $f'(x)$ 在 $x \in E$ 存在, $f'(a)$ 的可逆性, 及 f' 在这一点 a 的连续性等导出的. 关于这一点, 请参看 *Amer. Math. Monthly* 1974 年卷 81 第 969—980 页中 A. Nijenhuis 的论文.

下面是反函数定理部分 (a) 的直接推论.

9.25 定理 如果 f 是开集 $E \subset R^n$ 到 R^n 内的 \mathcal{C}' 映射, $f'(x)$ 在每个 $x \in E$ 可逆, 那么, 对于每个开集 $W \subset E$, $f(W)$ 是 R^n 的开子集.

换句话说, f 是 E 到 R^n 内的开映射.

这定理中的假定, 保证每个点 $x \in E$ 有一个邻域, 使 f 在其中是 1—1 的. 这可说成 f 在 E 中是局部一对一的. 但这时 f 并不一定在 E 中是 1—1 的. 关于实例, 看习题 17.

隐函数定理

如果 f 是平面上的连续可微实函数, 函数 f 在点 (a, b) 满足 $f(a, b) = 0$ 且 $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, 那么在 (a, b) 的某个邻域内, 方程 $f(x, y) = 0$ 能把 y 用 x 解出. 类似地, 如果在 (a, b) , $\partial f / \partial x \neq 0$, 就能在 (a, b) 附近把 x 解出而用 y 表示. 为了说明题设中 $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ 之必要, 可以考虑把函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ 作为一个实例.

上面这个极不正式的陈述, 是所谓“隐函数定理”的最简单的情形. (定理 9.28 的 $m = n = 1$ 的情形). 隐函数定理的证明, 很需要应用连续可微函数的局部性态与它们的各导数非常相像这个事实. 因此, 我们首先证明定理 9.27, 它是定理 9.28 的线性的说法.

9.26 记号 如果 $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ 而 $y = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$. 就把点(或向量)

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in R^{n+m}.$$

记作 (x, y) . 此后, 在 (x, y) 或在类似的记号中, 第一个阵元总是 R^n 中的向量, 而第二个阵元总是 R^m 中的向量.

每个 $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ 能被分裂成两个线性变换 A_x 及 A_y , 它们分别由

$$(53) \quad A_x h = A(h, 0), \quad A_y k = A(0, k).$$

来确定, $h \in R^n, k \in R^m$. 于是 $A_x \in L(R^n, R^n), A_y \in L(R^m, R^n)$, 而

$$(54) \quad A(h, k) = A_x h + A_y k.$$

隐函数定理的线性说法现在差不多就是显然的了.

9.27 定理 如果 $A \in L(R^{n+m}, R^n)$ 而 A_x 可逆, 那么, 对应于每个 $k \in R^m$, 有唯一的 $h \in R^n$ 使 $A(h, k) = 0$.

这个 h 能够从 k 利用公式

$$(55) \quad h = -(A_x)^{-1} A_y k.$$

计算出来.

证 由(54)式, $A(h, k) = 0$ 当且仅当

$$A_x h + A_y k = 0,$$

当 A_x 可逆时, 它与(55)式是一样的.

换句话说, 定理 9.27 的结论是, 如果 k 已经给定, 从方程 $A(h, k) = 0$ 能够(唯一地)解出 h 来, 并且 h 是 k 的线性函数. 对于线性代数稍为熟悉的读者, 将发觉这是线性方程组的一个极为熟悉的命题.

9.28 定理 设 f 是开集 $E \subset R^{n+m}$ 到 R^n 内的 \mathcal{C}^1 映射, 且在某点 $(a, b) \in E$ 使 $f(a, b) = 0$

令 $A = f'(a, b)$, 并假定 A_x 可逆.

那么, 存在着开集 $U \subset R^{n+m}$ 及 $W \subset R^m$, $(a, b) \in U$ 而 $b \in W$, 它们有以下性质:

对应于每个 $y \in W$, 有唯一的 x , 它合于

$$(56) \quad (x, y) \in U \quad \text{且} \quad f(x, y) = 0,$$

如果把这 x 定义成 $g(y)$, 那么 g 是 W 到 R^n 内的 \mathcal{C}^1 映射, $g(b) = a$,

$$(57) \quad f(g(y), y) = 0 \quad (y \in W),$$

并且

$$(58) \quad g'(b) = -(A_x)^{-1} A_y.$$

这个函数 g 是由(57)式“不明显地”确定的, 因此, 给定理起了这个名字.

因此,反函数定理能够应用于 F . 这就证明了在 R^{n+m} 中存在着开集 U 和 V , $(a, b) \in U$, $(0, b) \in V$, 而 F 是把 U 映满 V 的 1—1 映射.

令 W 是适合 $(0, y) \in V$ 的一切 $y \in R^m$ 组成的集. 注意, $b \in W$.

因 V 是开集, 显然 W 也是开集.

如果 $y \in W$, 那么必有某个 $(x, y) \in U$ 使 $(0, y) = F(x, y)$. 由 (60) 式, 这个 x 必合于 $f(x, y) = 0$.

假如对于这同一个 y 来说, 又有个 $(x', y) \in U$ 合于 $f(x', y) = 0$. 那么

$$F(x', y) = (f(x', y), y) = (f(x, y), y) = F(x, y).$$

因为 F 在 U 中是 1—1 的, 所以 $x' = x$.

这就证明了定理的第一部分.

现证第二部分. 对于 $y \in W$ 定义 $g(y)$, 使得 $(g(y), y) \in U$ 并且 (57) 式成立. 于是

$$(61) \quad F(g(y), y) = (0, y) \quad (y \in W).$$

如果 G 是把 V 映满 U 的映射, 而且是 F 的逆. 那么, 由反函数定理 $G \in \mathcal{C}'$, 而 (61) 式就给出

$$(62) \quad (g(y), y) = G(0, y) \quad (y \in W).$$

因为 $G \in \mathcal{C}'$, (62) 式说明 $g \in \mathcal{C}'$.

最后, 为求 $g'(b)$ 而令 $(g(y), y) = \Phi(y)$. 于是

$$(63) \quad \Phi'(y)k = (g'(y)k, k) \quad (y \in W, k \in R^m).$$

据 (57) 式, 在 W 中 $f(\Phi(y)) = 0$. 所以由链导法得到

$$f'(\Phi(y))\Phi'(y) = 0$$

当 $y = b$ 时, $\Phi(y) = (a, b)$ 而 $f'(\Phi(y)) = A$. 所以

$$(64) \quad A\Phi'(b) = 0.$$

从 (64), (63) 及 (54), 诸式知道对于每个 $k \in R^m$ 有

$$A_x g'(b)k + A_y k = A(g'(b)k, k) = A\Phi'(b)k = 0.$$

于是

$$(65) \quad A_x g'(b) + A_y = 0$$

这与(58)式等价, 而证明完毕.

注 把(65)式写成 f 及 g 的分量的形式, 就成为

$$\sum_{j=1}^n (D_j f_i)(a, b) (D_j g_j)(b) + (D_{n+k} f_i)(a, b) = 0$$

或

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_k} \right) = - \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right)$$

其中 $1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m$.

对于每个 k 来说, 这是以(偏)导数 $\frac{\partial g_j}{\partial y_k} (1 \leq j \leq n)$ 为未知量的,

有 n 个线性方程的方程组.

9.29 例 取 $n=2, m=3$, 考虑 R^5 到 R^2 内的, 由

$$f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3$$

$$f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3.$$

给出的映射 $f = (f_1, f_2)$. 如果 $a = (0, 1)$, $b = (3, 2, 7)$, 那么, $f(a, b) = 0$.

关于标准基来说, 变换 $A = f'(a, b)$ 的矩阵是

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

因此,

$$[A_x] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}, [A_y] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$[A_x]$ 的列向量是无关的, 所以 A_x 是可逆的, 而隐函数定理断定, 在 $(3, 2, 7)$ 的某个邻域内存在一个 C^1 映射 g , 使得 $g(3, 2, 7) = (0, 1)$ 且 $f(g(y), y) = 0$.

现在用(58)式来计算 $g'(3, 2, 7)$: 因为

$$[(A_x)^{-1}] = [A_x]^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix},$$

从(58)式得到

$$[g'(3, 2, 7)] = -\frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

写成偏导数, 结果就是在点 $(3, 2, 7)$ 上

$$D_1 g_1 = \frac{1}{4}, \quad D_2 g_1 = \frac{1}{5}, \quad D_3 g_1 = -\frac{3}{20},$$

$$D_1 g_2 = -\frac{1}{2}, \quad D_2 g_2 = \frac{6}{5}, \quad D_3 g_2 = \frac{1}{10}.$$

秩定理

虽然这个定理不如反函数定理和隐函数定理重要, 我们也把它算作是“连续可微映射 F 在一点 x 的局部性质, 与线性变换 $F'(x)$ 在 x 点附近的局部性质相似”这个一般原理的另一个有趣的实例.

在讲它以前, 还需要再说一点关于线性变换的事实.

9.30 定义 设 X 和 Y 是向量空间, 而 $A \in L(X, Y)$ 如定义 9.6 中所说的. A 的零空间 $\mathcal{N}(A)$ 是由合于 $Ax=0$ 的所有 $x \in X$ 组成的集. 显然 $\mathcal{N}(A)$ 是 X 中的向量空间.

同样, A 的值域 $\mathcal{R}(A)$ 是 Y 中的向量空间.

A 的秩 定义作 $\mathcal{R}(A)$ 的维数.

例如, $L(R^n)$ 的可逆元, 恰好是那些秩为 n 的元. 这由定理 9.5 就可知道.

如果 $A \in L(X, Y)$ 而 A 的秩是 0, 那么, 对于一切 $x \in X$, $Ax=0$,

因此 $\mathcal{N}(A) = X$. 关于这一点, 看习题 25.

9.31 射影 设 X 是向量空间. 如果算子 $P \in L(X)$, 合于 $P^2 = P$, 就说 P 是 X 里的射影.

更明确点说, 就是要求对于每个 $x \in X$, $P(Px) = Px$. 换句话说, P 把每个向量固定在它的值域 $\mathcal{R}(P)$ 中.

现在讲射影的初等性质:

(a) 若 P 是 X 中的射影, 那么每个 $x \in X$ 能唯一地表示成

$$x = x_1 + x_2$$

的形式, 其中 $x_1 \in \mathcal{R}(P)$, $x_2 \in \mathcal{N}(P)$.

为得到这种表示, 令 $x_1 = Px$, $x_2 = x - x_1$. 于是 $Px_2 = Px - Px_1 = Px - P^2x = 0$. 关于唯一性, 把 P 作用于方程 $x = x_1 + x_2$ 上, 因为 $x_1 \in \mathcal{R}(P)$, $Px_1 = x_1$, 因为 $Px_2 = 0$, 所以 $x_1 = Px$.

(b) 如果 X 是有限维的向量空间, X_1 是 X 内的一个向量空间, 那么, 在 X 中存在着射影 P , $\mathcal{R}(P) = X_1$.

如果 X_1 只包含 0 , 这就是显然的; 对一切 $x \in X$ 令 $Px = 0$ 好了.

假定 $\dim X_1 = k > 0$. 据定理 9.3, X 就有这样一个基 $\{u_1, \dots, u_n\}$, 使 $\{u_1, \dots, u_k\}$ 是 X_1 的基. 对于任意的标量 c_1, \dots, c_n , 定义

$$P(c_1u_1 + \dots + c_nu_n) = c_1u_1 + \dots + c_ku_k.$$

于是, 对于每个 $x \in X_1$, $Px = x$, 并且 $X_1 = \mathcal{R}(P)$.

注意 $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ 是 $\mathcal{N}(P)$ 的基. 还应注意, 如果 $0 < \dim X_1 < \dim X$, 在 X 中存在着无穷多个值域是 X_1 的射影.

9.32 定理 设 m, n, r 是非负整数, $m \geq r$, $n \geq r$. F 是把开集 $E \subset R^n$ 映入 R^m 内的 \mathcal{C}^r 映射, 对于每个 $x \in E$, $F'(x)$ 的秩是 r .

固定 $a \in E$, 令 $A = F'(a)$. 设 A 的值域是 Y_1 , P 是 R^m 中的射影, 其值域也是 Y_1 . Y_2 是 P 的零空间.

那么, 在 R^n 中存在着开集 U 及 V , $a \in U$, $U \subset E$, 并且存在着把 V 映满 U 的 1-1 \mathcal{C}^r 映射 H (它的逆也属于 \mathcal{C}^r 类) 合于

$$(66) \quad F(H(x)) = Ax + \varphi(Ax) \quad (x \in V)$$

这里 φ 是把开集 $A(V) \subset Y_1$ 映入 Y_2 内的 \mathcal{C}' 映射.

证完以后再把(66)式的含义给予更几何的解示.

证 如果 $r=0$, 定理 9.19 说明, 在 a 的某邻域 U 内, $F(x)$ 是常量, 这时让 $V=U$, $H(x)=x$, $\varphi(0)=F(a)$, (66) 式显然成立.

以下假定 $r>0$. 因 $\dim Y_1=r$, Y_1 必有基 $\{y_1, \dots, y_r\}$. 选 $z_i \in R^n$ 使合于 $Az_i = y_i$ ($1 \leq i \leq r$), 并定义 Y_1 到 R^n 的线性映射 S : 对一切标量 c_1, \dots, c_r , 令

$$(67) \quad S(c_1 y_1 + \dots + c_r y_r) = c_1 z_1 + \dots + c_r z_r.$$

于是 $ASy_i = Az_i = y_i$ ($1 \leq i \leq r$), 所以

$$(68) \quad ASy = y \quad (y \in Y_1)$$

定义 E 到 R^n 内的映射 G :

$$(69) \quad G(x) = x + SP[F(x) - Ax] \quad (x \in E).$$

因 $F'(a) = A$, 把(69)微分, 得到 R^n 上的恒等算子: $G'(a) = I$. 据反函数定理, 在 R^n 中有开集 U 及 V , $a \in U$, 使得 G 是把 U 映满 V 的 1—1 映射, G 的逆 H 也属于 \mathcal{C}' 类. 此外, 如果需要的话, 可以把 U 和 V 收缩一下, 使 V 成为凸集, 而 $H'(x)$ 对于每个 $x \in V$ 可逆.

注意 $ASPA = A$, 这因为 $PA = A$, 并且(68)成立, 所以由(69)就得

$$(70) \quad AG(x) = PF(x) \quad (x \in E).$$

特别当 $x \in U$ 时, (70) 成立. 如果我们把 x 换成 $H(x)$, 就得到

$$(71) \quad PF(H(x)) = Ax \quad (x \in V)$$

定义

$$(72) \quad \psi(x) = F(H(x)) - Ax \quad (x \in V)$$

因为 $PA = A$, (71) 式说明 $P\psi(x) = 0$ 对一切 $x \in V$ 成立, 于是 ψ 是 V 到 Y_2 内的 \mathcal{C}' 映射.

因 V 是开集, 显然 $A(V)$ 是它的值域 $\mathcal{R}(A) = Y_1$ 的开子集.

为了完成定理的证明,即是从(72)式出发得(66)式,必须证明存在着 $A(V)$ 到 Y_2 的 \mathcal{C}' 映射 φ , 它满足

$$(73) \quad \varphi(Ax) = \psi(x) \quad (x \in V).$$

作为走向(73)的第一步,先证: 如果 $x_1 \in V, x_2 \in V, Ax_1 = Ax_2$, 那么

$$(74) \quad \psi(x_1) = \psi(x_2)$$

令 $\Phi(x) = F(H(x))$, $(x \in V)$. 因为对于每个 $x \in V$, $H'(x)$ 的秩是 n , 而对每个 $x \in U$, $F'(x)$ 的秩是 r . 必然

$$(75) \quad \Phi'(x) \text{ 的秩} = F'(H(x))H'(x) \text{ 的秩} = r, (x \in V).$$

固定 $x \in V$. 令 M 是 $\Phi'(x)$ 的值域. 那么 $M \subset R^m$, $\dim M = r$. 据(71),

$$(76) \quad P\Phi'(x) = A.$$

因此, P 把 M 映满 $\mathcal{R}(A) = Y_1$. 因 M 与 Y_1 的维数相同, 所以 P (限制在 M 上时) 是 1—1 的

今设 $Ah = 0$. 于是由(76), $P\Phi'(x)h = 0$. 但 $\Phi'(x)h \in M$, 且 P 在 M 上是 1—1 的. 因此, $\Phi'(x)h = 0$. 看一看(72)式, 就知道我们已经证明了:

如果 $x \in V$, 且 $Ah = 0$, 那么, $\psi'(x)h = 0$

现在能证(74)式了. 设 $x_1 \in V, x_2 \in V, Ax_1 = Ax_2$. 令 $h = x_2 - x_1$ 并且定义

$$(77) \quad g(t) = \psi(x_1 + th) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

V 的凸性说明, 对于这些 t 来说, $x_1 + th \in V$. 因此,

$$(78) \quad g'(t) = \psi'(x_1 + th)h = 0 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

因此 $g(1) = g(0)$. 但 $g(1) = \psi(x_2)$, $g(0) = \psi(x_1)$. (74)式获证.

据(74)式, 对于 $x \in V$ 来说, $\psi(x)$ 只依赖于 Ax . 因此, (73)式确实在 $A(V)$ 中确定了 φ . 剩下的只是要证明 $\varphi \in \mathcal{C}'$ 了.

固定 $y_0 \in A(V)$, 再固定 $x_0 \in V$ 使 $Ax_0 = y_0$. 因为 V 是开集, y_0

必在 Y_1 中有邻域 W , 凡是当 $y \in W$ 时, 向量

$$(79) \quad x = x_0 + S(y - y_0)$$

必在 V 内. 由 (68) 式,

$$Ax = Ax_0 + y - y_0 = y.$$

于是由 (73) 及 (79) 式得到

$$(80) \quad \varphi(y) = \psi(x_0 - Sy_0 - Sy) \quad (y \in W)$$

这公式说明, 在 W 中 $\varphi \in \mathcal{C}'$, 由于 y_0 是在 $A(V)$ 中任意取的, 所以在 $A(V)$ 中也是 $\varphi \in \mathcal{C}'$.

定理证完.

现在说一说关于映射 F 的几何, 这个定理告诉我们一些什么.

如果 $y \in F(U)$, 那么有某个 $x \in V$, 使 $y = F(H(x))$, 而 (66) 式说明 $Py = Ax$. 所以

$$(81) \quad y = Py + \varphi(Py) \quad y \in F(U)$$

这就说明 y 被它的射影 Py 所确定, 而如果把 P 限制在 $F(U)$ 内, P 就是把 $F(U)$ 映满 $A(V)$ 的 1—1 映射. 因此 $F(U)$ 是 “ r 维曲面”, 在 $A(V)$ 的每个点的 “上面”, 恰好有 $F(U)$ 的一个点. 也可以把 $F(U)$ 当成 φ 的图象.

如果象在证明中那样, $\Phi(x) = F(H(x))$, 那么 (66) 说明 Φ 的水平集 (在这个集上, Φ 的值是一个给定的值) 恰好是 A 在 V 中的水平集. 这些集 (A 的水平集) 都是平坦的, 因为它们都是向量空间 $\mathcal{N}(A)$ 的平移与 V 的交.

注意 $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$ (习题 25).

F 在 U 中的水平集, 是 Φ 在 V 中的平坦水平集在 H 之下的像. 于是它们是 U 中的 “ $n - r$ 维曲面”.

行列式

行列式是与方阵有关的数, 因此, 与方阵所表示的算子有关. 行列式是 0 的充要条件是相应的算子不可逆. 所以可用它们来断定前面几个定理中的某些假定是否满足. 在第十章中, 它们甚至要起更重要的作用.

9.33 定义 如果 (j_1, \dots, j_n) 是正整数的有序 n 元组 (有序的 n 个正整数), 定义

$$(82) \quad s(j_1, \dots, j_n) = \prod_{p < q} \operatorname{sgn}(j_q - j_p).$$

这里, 当 $x > 0$ 时, $\operatorname{sgn} x = 1$, 当 $x < 0$ 时, $\operatorname{sgn} x = -1$, 当 $x = 0$ 时, $\operatorname{sgn} x = 0$. 于是, $s(j_1, \dots, j_n) = 1, -1$ 或 0 , 如果任意两个 j 交换, 它就变号.

设 $[A]$ 是 R^n 上线性算子 A 关于标准基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的矩阵, 它在第 i 行第 j 列的阵元是 $a(i, j)$. $[A]$ 的行列式定义为数

$$(83) \quad \det[A] = \sum s(j_1, \dots, j_n) a(1, j_1) a(2, j_2) \cdots a(n, j_n).$$

(83) 中的和遍及整数 (j_1, \dots, j_n) 的一切有序 n 元组 (一切排列法), 其中 $1 \leq j_r \leq n$.

$[A]$ 的列向量 x_j 是

$$(84) \quad x_j = \sum_{i=1}^n a(i, j) e_i \quad (1 \leq j \leq n).$$

把 $\det[A]$ 考虑成是 $[A]$ 的列向量的函数, 将是方便的. 如果这样写:

$$\det(x_1, \dots, x_n) = \det[A],$$

\det 就是一个实函数, 它的定义域是 R^n 中向量的一切有序 n 元组所组成的集.

9.34 定理

(a) 如果 I 是 R^n 上的恒等算子, 那么

$$\det[I] \cdot \det(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

(b) 如果除 x_j 外, 其它列向量都保持不变, \det 便是(每个)向量 x_j 的线性函数.

(c) 如果 $[A]_1$ 是把 $[A]$ 的某两列交换而得到的, 那么, $\det[A]_1 = -\det[A]$.

(d) 如果 $[A]$ 有两列相等, 那么, $\det[A] = 0$.

证 如果 $A = I$, 那么 $a(i, i) = 1$, 而 $i \neq j$ 时 $a(i, j) = 0$. 因此,

$$\det[I] = s(1, 2, \dots, n) = 1,$$

(a) 获证. 如果有两个 j 相等, 根据(82)式, $s(j_1, \dots, j_n) = 0$.

(83)中余下的 $n!$ 个乘积中, 每个乘积刚好包含每一列的一个数作因子. 这就证明了(b). 任意两个 j 互相交换时 $s(j_1, \dots, j_n)$ 就变号这个事实的直接结果就是(c), (d)是(c)的推论.

9.35 定理 如果 $[A]$ 及 $[B]$ 都是 $n \times n$ 方阵, 那么

$$\det([B][A]) = \det[B]\det[A].$$

证 设 x_1, \dots, x_n 是 $[A]$ 的各列, 定义

$$(85) \quad \Delta_B(x_1, \dots, x_n) = \Delta_B[A] = \det([B][A]).$$

$[B][A]$ 的各列是向量 Bx_1, \dots, Bx_n , 因此

$$(86) \quad \Delta_B(x_1, \dots, x_n) = \det(Bx_1, \dots, Bx_n).$$

据(86)式及定理 9.34, Δ_B 具有性质(b) — (d). 由(b)及(84)式

$$\Delta_B[A] = \Delta_B\left(\sum_i a(i, 1)e_i, x_2, \dots, x_n\right) = \sum_i a(i, 1)\Delta_B(e_i, x_2, \dots, x_n).$$

对于 x_2, \dots, x_n 重复这种手续, 就得到

$$(87) \quad \Delta_B[A] = \sum a(i_1, 1)a(i_2, 2)\cdots a(i_n, n)\Delta_B(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}),$$

求和时遍及一切有序 n 元组 (i_1, \dots, i_n) , $1 \leq i_r \leq n$. 由 (c) 及 (d),

$$(88) \quad \Delta_B(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) = t(i_1, \dots, i_n) \Delta_B(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n),$$

这里的 $t=1, 0$ 或 -1 ; 因 $[B][I]=[B]$, (85) 式说明

$$(89) \quad \Delta_B(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det[B].$$

将 (88), (89) 式代入 (87) 式, 就得到

$$\det([B][A]) = \left\{ \sum a(i_1, 1) \cdots a(i_n, n) t(i_1, \dots, i_n) \right\} \det[B].$$

这对一切 $n \times n$ 方阵 $[A]$, $[B]$ 都成立. 取 $B=I$, 就看到上面花括号内的和是 $\det[A]$.

证毕.

9.36 定理 R^n 上的线性算子 A 可逆的充分且必要条件是 $\det[A] \neq 0$.

证 如果 A 可逆, 定理 9.35 说明

$$\det[A] \det[A^{-1}] = \det[AA^{-1}] = \det[I] = 1,$$

所以 $\det[A] \neq 0$.

如果 A 不可逆, $[A]$ 的列 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 是相关的 (定理 9.5); 因此有一列, 比如是 \mathbf{x}_k , 使得:

$$(90) \quad \mathbf{x}_k + \sum_{j \neq k} c_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0};$$

c_j 是某些标量. 由 9.34(b) 及 (d), 如果 $j \neq k$, 行列式中的 \mathbf{x}_k 可以用 $\mathbf{x}_k + c_j \mathbf{x}_j$ 代换而使行列式 (的值) 不变. 重复这样做下去, 就看到 \mathbf{x}_k 可以代以 (90) 式的左端, 即代以 $\mathbf{0}$ 而不改变行列式. 但当行列式有一列是 $\mathbf{0}$ 时, 行列式就是 0. 因此 $\det[A] = 0$.

9.37 评注 设 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 及 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ 都是 R^n 的基. R^n 上的每个线性算子 A , 能确定两个方阵 $[A]$ 及 $[A]_U$, 它们的阵元 a_{ij} 及 α_{ij} 由

$$Ae_j = \sum_i a_{ij}e_i, \quad Au_j = \sum_i \alpha_{ij}u_i,$$

计算. 如果 $u_j = Be_j = \sum_i b_{ij}e_i$, 那么 Au_j 等于

$$\sum_k \alpha_{kj} Be_k = \sum_k \alpha_{kj} \sum_i b_{ik} e_i = \sum_i \left(\sum_k b_{ik} \alpha_{kj} \right) e_i.$$

$$\text{又等于} \quad ABe_j = A \sum_k b_{kj} e_k = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) e_i.$$

于是 $\sum_k b_{ik} \alpha_{kj} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ 或

$$(91) \quad [B][A]_U = [A][B].$$

因 B 可逆, $\det[B] \neq 0$. 因此, (91) 式结合定理 9.35 说明:

$$(92) \quad \det[A]_U = \det[A].$$

所以线性算子的矩阵的行列式, 与用以构成矩阵的基无关. 于是不管基而只谈线性算子的行列式, 是有意义的.

9.38 函数行列式 如果 f 把开集 $E \subset R^n$ 映入 R^n 内, 并且 f 在点 $x \in E$ 可微, 线性算子 $f'(x)$ 的行列式就叫做 f 在 x 的函数行列式. 记成:

$$(93) \quad J_f(x) = \det f'(x).$$

如果 $(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n)$, 我们又用记号

$$(94) \quad \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

来记 $J_f(x)$.

在反函数定理中, 有决定意义的题设, 用函数行列式表示就是 $J_f(a) \neq 0$. (比较定理 9.36). 如果隐函数定理是用诸函数 (59) 来叙述的, 那么, 那里对 A 的假定就是

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0.$$

高阶导数

9.39 定义 设 f 是定义在开集 $E \subset R^n$ 内的实函数, 其偏导数是 $D_1 f, \dots, D_n f$. 如果诸函数 $D_i f$ 本身也可微, 那么 f 的二阶偏导数定义为

$$D_{ij}f = D_i D_j f \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

如果所有这些函数 $D_{ij}f$ 都在 E 内连续, 就说 f 在 E 内属于 \mathcal{C}'' 类, 或 $f \in \mathcal{C}''(E)$.

如果 E 到 R^m 内的映射 f 的每个分量都是属于 \mathcal{C}'' 类的, 就说 f 是属于 \mathcal{C}'' 类的.

即使两个导数 $D_{ij}f$ 和 $D_{ji}f$ 都存在, 也能够某个点上出现 $D_{ij}f \neq D_{ji}f$ (见习题 27). 但是, 下面就要看到, 当这些导数都连续时, $D_{ij}f = D_{ji}f$.

为简单起见(但不失掉普遍性), 我们对二元实函数来叙述下面两条定理. 第一条是中值定理.

9.40 定理 设 f 定义在开集 $E \subset R^2$ 中, 并且 $D_1 f$ 及 $D_2 f$ 在 E 的每个点处存在. 设 $Q \subset E$ 是闭矩形, 它的边与坐标轴平行, 并且 (a, b) 及 $(a+h, b+k)$ 是它的对顶 ($h \neq 0, k \neq 0$). 令

$$\Delta(f, Q) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)$$

那么, 在 Q 内存在一点 (x, y) , 使

$$(95) \quad \Delta(f, Q) = hk(D_{21}f)(x, y).$$

注意(95)与定理 5.10 间的类似; Q 的面积是 hk .

证 命 $u(t) = f(t, b+k) - f(t, b)$. 应用定理 5.10 两次, 就表明了 a 与 $a+h$ 之间存在着一个 x , 并且 b 与 $b+k$ 之间存在着一个 y , 使得

$$\begin{aligned} \Delta(f, Q) &= u(a+h) - u(a) \\ &= hu'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= h[(D_1 f)(x, b+k) - (D_1 f)(x, b)] \\
 &= hk(D_{21} f)(x, y).
 \end{aligned}$$

9.41 定理 设 f 定义在开集 $E \subset R^2$ 上, 又设 $D_1 f$, $D_{21} f$ 及 $D_2 f$ 在 E 的每个点上存在, 并且 $D_{21} f$ 在某点 $(a, b) \in E$ 上连续.

那么 $D_{12} f$ 在 (a, b) 上存在, 并且

$$(96) \quad (D_{12} f)(a, b) = (D_{21} f)(a, b).$$

推论 如果 $f \in \mathcal{C}''(E)$, 那么 $D_{21} f = D_{12} f$.

证 设 $A = (D_{21} f)(a, b)$. 任意选定 $\varepsilon > 0$. 如果 Q 是像在定理 9.40 中那样的矩形, 而 h 及 k 充分小, 那么对于一切 $(x, y) \in Q$, 就有

$$|A - (D_{21} f)(x, y)| < \varepsilon$$

于是, 由 (95) 式有

$$\left| \frac{\Delta(f, Q)}{hk} - A \right| < \varepsilon.$$

固定 h 而令 $k \rightarrow 0$. 因为 $D_2 f$ 在 E 中存在, 由上面这个不等式就推出

$$(97) \quad \left| \frac{(D_2 f)(a+h, b) - (D_2 f)(a, b)}{h} - A \right| \leq \varepsilon.$$

因为 ε 是任意的, 并且 (97) 式对于一切足够小的 $h \neq 0$ 都成立, 所以 $(D_{12} f)(a, b) = A$. 这就是 (96) 式.

积分的微分法

设 φ 是二元函数, 它对其中一变元可积, 而对另一变元可微. 如果把这两种极限过程交换次序, 在什么条件下, 将会得到同样的结果呢? 更确切地说, 就是: 在 φ 满足什么条件的时候, 能证明等式

$$(98) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b \varphi(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dx$$

成立? (习题 28 提供一个反例)

用下边这种记号将很方便:

$$(99) \quad \varphi^t(x) = \varphi(x, t),$$

于是对于每个 t 来说, $\varphi^t(x)$ 是一元函数.

9.42 定理 设

(a) 对于 $a \leq x \leq b, c \leq t \leq d$, $\varphi(x, t)$ 有定义;

(b) α 是 $[a, b]$ 上的递增函数;

(c) 对于每个 $t \in [c, d]$, $\varphi^t \in \mathcal{R}(\alpha)$;

(d) $c < s < d$, 并且对于每个 $\varepsilon > 0$ 有 $\delta > 0$, 使得对于一切 $x \in [a, b]$ 及一切 $t \in (s - \delta, s + \delta)$

$$|(D_2\varphi)(x, t) - (D_2\varphi)(x, s)| < \varepsilon.$$

定义

$$(100) \quad f(t) = \int_a^b \varphi(x, t) d\alpha(x) \quad (c \leq t \leq d).$$

那么, $(D_2\varphi)^t \in \mathcal{R}(\alpha)$, $f'(s)$ 存在, 并且

$$(101) \quad f'(s) = \int_a^b (D_2\varphi)(x, s) d\alpha(x).$$

注意(c)只是断言积分(100)对一切 $t \in [c, d]$ 都存在. 再注意, 只要 $D_2\varphi$ 在定义 φ 的那个矩形上连续, (d)就一定成立.

证 考虑差商

$$\psi(x, t) = \frac{\varphi(x, t) - \varphi(x, s)}{t - s}$$

其中 $0 < |t - s| < \delta$. 据定理 5.10, 对应于每个 (x, t) , 在 s 与 t 之间有数 u , 使得

$$\psi(x, t) = (D_2\varphi)(x, u).$$

因此, (d)说明

$$(102) \quad |\psi(x, t) - (D_2\varphi)(x, s)| < \varepsilon, \quad (a \leq x \leq b, 0 < |t - s| < \delta).$$

注意

$$(103) \quad \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \int_a^b \psi(x, t) d\alpha(x).$$

由(102)式, 当 $t \rightarrow s$ 时, 在 $[a, b]$ 上一致地有 $\psi^t \rightarrow (D_2\varphi)^s$. 因为每个 $\psi^t \in \mathcal{R}(\alpha)$, 从(103)式及定理 7.16 即得到所需要的结论.

9.43 例 当然也能证明把定理 9.42 中的 $[a, b]$ 换成 $(-\infty, \infty)$ 时所得的类似的定理. 我们不来证明这事, 只来看个例子. 定义

$$(104) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(xt) dx$$

及

$$(105) \quad g(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \sin(xt) dx,$$

其中 $-\infty < t < \infty$. 两个积分都存在(绝对收敛), 因为被积函数的绝对值分别最多是 $\exp(-x^2)$ 及 $|x| \exp(-x^2)$.

注意, g 是从 f 把被积式对 t 微分得来的, 我们断定 f 可微, 且

$$(106) \quad f'(t) = g(t) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

为了证明这件事, 首先检查余弦的差商: 如果 $\beta > 0$, 那么

$$(107) \quad \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha}{\beta} + \sin \alpha = \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\alpha + \beta} (\sin \alpha - \sin t) dt.$$

因为 $|\sin \alpha - \sin t| \leq |t - \alpha|$, (107)式右端的绝对值最大是 $\beta/2$; $\beta < 0$ 时, 可类似地处理. 于是对于所有 β ,

$$(108) \quad \left| \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos \alpha}{\beta} + \sin \alpha \right| \leq |\beta|.$$

(如果当 $\beta = 0$ 时把左端解释成 0).

现在固定 t 且固定 $h \neq 0$. 以 $\alpha = xt$, $\beta = xh$, 应用(108)式; 随之从(104)及(105)式得到

$$\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g(t) \right| \leq |h| \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$$

于是当 $h \rightarrow 0$ 时, 就得到(106)式.

让我们再前进一步: 把(104)分部积分, 就表明

$$(109) \quad f(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \frac{\sin(xt)}{t} dx$$

于是 $tf(t) = -2g(t)$, 而现在由(106)式就推出 f 满足微分方程

$$(110) \quad 2f'(t) + tf(t) = 0$$

如果解出这个方程, 并用 $f(0) = \sqrt{\pi}$ 这个事实(见 § 8.21), 就发现

$$f(t) = \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right)$$

于是积分(104)就用显式确定出来了.

习题

1. 设 S 是向量空间 X 的不空子集. 证明 (像在 9.1 段中所断定的) S 的生成是一向量空间.

2. 证明(像在 9.6 段中所断定的) 如果 A 及 B 都是线性变换, 那么 BA 是线性的.

再证 A^{-1} 是线性的并且是可逆的.

3. 假设 $A \in L(X, Y)$, 而只有在 $x=0$ 时才有 $Ax=0$. 证明 A 是 1-1 的.

4. 证明(像 9.30 段所断定的)零空间及线性变换的值域都是线性空间.

5. 设 $A \in L(R^n, R^1)$, 证明有唯一的 $y \in R^n$ 合于 $Ax = x \cdot y$.

又证 $\|A\| = |y|$.

提示: Schwarz 不等式在某些条件下等号能成立.

6. 设 $f(0, 0) = 0$, 而当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

证明虽然 f 在 $(0, 0)$ 不连续, 然而 $(D_1 f)(x, y)$ 及 $(D_2 f)(x, y)$ 在 R^2 的每点存在.

7. 设 f 是定义在开集 $E \subset R^n$ 中的实值函数, 并且诸偏导数 $D_1 f, \dots, D_n f$ 在 E 内有界. 证明 f 在 E 内连续.

提示: 像在定理 9.21 的证明中那样进行.

8. 设 f 是开集 $E \subset R^n$ 上的可微实函数. f 在点 $x \in E$ 有局部极大. 证明

$$f'(x) = 0.$$

9. 设 f 是连通开集 $E \subset R^n$ 到 R^m 内的可微映射, 并且对于每个 $x \in E$, $f'(x) = 0$. 证明 f 在 E 中是常量.

10. 设 f 是定义在凸开集 $E \subset R^n$ 中的实值函数, 并且对于每个 $x \in E$, $(D_1 f)(x) = 0$. 证明 $f(x)$ 只依赖于 x_2, \dots, x_n .

试说明 E 的凸性能换成较弱的条件, 但有些条件却是必要的. 例如当 $n=2$ 时, 如果 E 的形状像个马蹄形, 命题就可能不成立.

11. 设 f 及 g 都是 R^n 中的可微实函数, 证明

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

及 $\nabla(1/f) = -f^{-2}\nabla f$, 这里 $f \neq 0$.

12. 固定二实数 a 及 b , $0 < a < b$. 由

$$f_1(s, t) = (b + a \cos s) \cos t$$

$$f_2(s, t) = (b + a \cos s) \sin t$$

$$f_3(s, t) = a \sin s.$$

定义映 R^2 到 R^3 内的映射 $f = (f_1, f_2, f_3)$. 把 f 的值域 K 描述出来. (它是 R^3 的某个紧子集).

(a) 证明存在着四个点 $p \in K$, 合于

$$(\nabla f_1)(f^{-1}(p)) = 0.$$

找出这些点来.

(b) 确定合于

$$(\nabla f_3)(f^{-1}(q)) = 0$$

的一切 $q \in K$.

(c) 证明在 (a) 中找到的四个点 p 之中, 一个对应于 f_1 的局部极大值, 一个对应于局部极小, 另两个既不对应局部极大, 也不对应局部极小 (它们叫做“鞍点”).

在 (b) 中找到的点 q 之中, 哪些点对应于极大或极小?

(d) 令 λ 是无理实数. 规定 $g(t) = f(t, \lambda t)$. 证明 g 是把 R^1 映满 K 的某个稠子集的 1—1 映射. 证明

$$|g'(t)|^2 = a^2 + \lambda^2(b + a \cos t)^2.$$

13. 设 f 是 R^1 到 R^3 中, 对每个 t 合于 $|f(t)| = 1$ 的可微映射. 证明 $f'(t)f(t) = 0$.

用几何解释这个结果.

14. 定义 $f(0, 0) = 0$, 而当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

(a) 证明 $D_1 f$ 及 $D_2 f$ 是 R^2 中的有界函数. (因之, f 连续).

(b) 令 u 是 R^2 中的任一单位向量, 证明方向导数 $(D_u f)(0, 0)$ 存在, 并且它的绝对值最大是 1.

(c) 设 γ 是 R^1 到 R^2 中的可微映射 (换句话说, γ 是 R^2 中的可微曲线), $\gamma(0) = (0, 0)$ 且 $|\gamma'(0)| > 0$. 令 $g(t) = f(\gamma(t))$, 证明 g 对每个 $t \in R^1$ 可微.

如果 $\gamma \in \mathcal{C}'$, 证明 $g \in \mathcal{C}'$.

(d) 虽然如此, 证明 f 在 $(0, 0)$ 不可微.

提示: 公式 (40) 失效.

15. 定义 $f(0, 0) = 0$, 而当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 令

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x^2y - \frac{4x^4y^2}{(x^4 + y^2)^2}.$$

(a) 证明对一切 $(x, y) \in R^2$,

$$4x^4y^2 \leq (x^4 + y^2)^2.$$

推断 f 连续.

(b) 对于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty < t < \infty$, 定义

$$g_\theta(t) = f(t \cos \theta, t \sin \theta).$$

证明 $g_\theta(0) = 0$, $g'_\theta(0) = 0$, $g''_\theta(0) = 2$. 所以每个 g_θ 在 $t = 0$ 有严格局部极小值.

换句话说, 限制 f 在每条过 $(0, 0)$ 的直线时, 在 $(0, 0)$ 有严格局部极小值.

(c) 证明 $(0, 0)$ 仍然不是 f 的局部极小值, 因为 $f(x, x^2) = -x^4$.

16. 证明在反函数定理中, f' 在点 a 的连续性是必需的, 即使在 $n = 1$ 的情况也是如此: 如果当 $t \neq 0$ 时,

$$f(t) = t + 2t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

而 $f(0) = 0$, 那么, $f'(0) = 1$, f' 在 $(-1, 1)$ 有界, 但在 0 的任何邻域内, f 不是 1—1 的.

17. 令 $f = (f_1, f_2)$ 为由

$$f_1(x, y) = e^x \cos y, \quad f_2(x, y) = e^x \sin y$$

给出的, R^2 到 R^2 内的映射.

(a) f 的值域是什么?

(b) 证明 f 的函数行列式在 R^2 的任何点上不为零. 于是 R^2 的每个点有邻域, 使 f 在其中是 1-1 的, 然而 f 在 R^2 上不是 1-1 的.

(c) 令 $a = (0, \pi/3)$, $b = f(a)$, 设 g 是在 b 的某邻域内确定的, f 的连续逆, 且 $g(b) = a$. 求出 g 的显式, 计算 $f'(a)$ 及 $g'(b)$, 并验证公式 (52).

(d) 坐标轴的平行线在 f 下的像是什么?

18. 对于由

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

确定的映射, 回答同样的诸问题.

19. 证明方程组

$$3x + y - z + u^2 = 0$$

$$x - y + 2z + u = 0$$

$$2x + 2y - 3z + 2u = 0$$

能把 x, y, u 用 z 解出; x, z, u 能用 y 解出; y, z, u 能用 x 解出; 但不能把 x, y, z 用 u 解出.

20. 在隐函数定理中取 $n = m = 1$, 用图象来解释这个定理 (还有它的证明).

21. 在 R^2 中, 由

$$f(x, y) = 2x^4 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$$

确定 f .

(a) 在 R^2 中求四个点, 使 f 的梯度在这些点上为零. 证明 f 在 R^2 中正好有一个局部极大和一个局部极小.

(b) 令 S 为使 $f(x, y) = 0$ 的一切 $(x, y) \in R^2$ 的集. 在 S 中找出那些点来, 在它的任何邻域内, 都不能从方程 $f(x, y) = 0$, 把 y 用 x 解出 (或把 x 用 y 解出). 作出 S 的图, 能画多精确就多精确.

22. 对

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^3$$

作类似的讨论

23. 在 R^3 中, 由

$$f(x, y_1, y_2) = x^2 y_1 + e^x + y_2$$

定义 f . 证明 $f(0, 1, -1) = 0$, $(D_1 f)(0, 1, -1) \neq 0$, 因此在 R^2 中存在着在 $(1, -1)$ 的某邻域中的可微函数 g , 合于 $g(1, -1) = 0$ 及

$$f(g(y_1, y_2), y_1, y_2) = 0$$

求 $(D_1g)(1, -1)$ 及 $(D_2g)(1, -1)$.

24. 对于 $(x, y) \neq (0, 0)$, 用

$$f_1(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

来定义 $f = (f_1, f_2)$.

计算 $f'(x, y)$ 的秩, 并求 f 的值域.

25. 设 $A \in L(R^n, R^m)$, 令 A 的秩是 r .

(a) 像在定理 9.32 的证明中那样定义 S , 证明 SA 是 R^n 中的射影, 它的零空间是 $\mathcal{N}(A)$, 而它的值域是 $\mathcal{R}(S)$. 提示: 据 (68), $SASA = SA$.

(b) 用 (a) 证明

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n.$$

26. 证明 $D_{12}f$ 的存在性 (甚至连续性) 并不包含着 $D_{11}f$ 的存在性. 例如, 令 $f(x, y) = g(x)$, 这里 g 无处可微.

27. 设 $f(0, 0) = 0$, 而当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

证明:

(a) f, D_1f, D_2f 都在 R^2 中连续;

(b) $D_{12}f$ 及 $D_{21}f$ 在 R^2 的每点存在, 并且除了在 $(0, 0)$ 点以外都连续;

(c) $(D_{12}f)(0, 0) = 1$ 而 $(D_{21}f)(0, 0) = -1$.

28. 当 $t \geq 0$ 时, 令

$$\varphi(x, t) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \sqrt{t}) \\ -x + 2\sqrt{t} & (\sqrt{t} \leq x \leq 2\sqrt{t}) \\ 0 & (\text{此外}), \end{cases}$$

而当 $t < 0$ 时, 令 $\varphi(x, t) = -\varphi(x, |t|)$.

证明 φ 在 R^2 连续, 且对一切 x

$$(D_x \varphi)(x, 0) = 0.$$

定义

$$f(t) = \int_{-1}^1 \varphi(x, t) dx.$$

证明当 $|t| < \frac{1}{4}$ 时 $f(t) = t$. 因此,

$$f'(0) = \int_{-1}^1 (D_1 \varphi)(x, 0) dx.$$

29. 设 E 是 R^n 中的开集, 类 $\mathcal{C}^1(E)$ 及 $\mathcal{C}^2(E)$ 已在正文中定义了. 对所有正整数 k , 能用归纳法定义 $\mathcal{C}^{(k)}(E)$ 如下: $f \in \mathcal{C}^{(k)}(E)$ 表示诸偏导数 $D_1 f, \dots, D_n f$ 属于 $\mathcal{C}^{(k-1)}(E)$.

假定 $f \in \mathcal{C}^{(k)}(E)$, (重复应用定理 9.41) 证明 k 阶导数

$$D_{i_1 i_2 \dots i_k} f = D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f$$

在下标 i_1, \dots, i_k 重排时不变.

例如, 如果 $n \geq 3$, 那么对于每个 $f \in \mathcal{C}^{(4)}$,

$$D_{1213} f = D_{3112} f.$$

30. 令 $f \in \mathcal{C}^{(m)}(E)$, 这里 E 是 R^n 的开子集. 固定 $\alpha \in E$, 并设 $x \in R^n$ 与 0 如此地近, 以致只要 $0 \leq t \leq 1$, 点

$$p(t) = \alpha + tx$$

就位于 E 内. 对于一切使 $p(t) \in E$ 的 $t \in R^1$, 定义

$$h(t) = f(p(t))$$

(a) 对 $1 \leq k \leq m$, (重复应用链导法) 证明

$$h^{(k)}(t) = \sum (D_{i_1 \dots i_k} f)(p(t)) x_{i_1} \dots x_{i_k}.$$

求和符号遍历一切有序 k -元组 (i_1, \dots, i_k) , 其中每个 i_j 是正整数 $1, \dots, n$ 之一.

(b) 据 Taylor 定理 (5.15), 有某个 $t \in (0, 1)$, 使

$$h(1) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} + \frac{h^{(m)}(t)}{m!}.$$

据此说明式子

$$f(\alpha + x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum (D_{i_1 \dots i_k} f)(\alpha) x_{i_1} \dots x_{i_k} + r(x)$$

把 $f(\alpha + x)$ 表成它的“ $m-1$ 次 Taylor 多项式”及满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|^{m-1}} = 0$$

的余项之和. 然后由此推证 n 个变量的 Taylor 定理.

每个内层和, 像 (a) 那样, 遍历一切有序 k -元组 (i_1, \dots, i_k) . 照例, f 的零阶导数就是 f , 所以 f 在 α 的 Taylor 多项式的常数项就是 $f(\alpha)$.

(c) 习题 29 说明, (b) 所写的 Taylor 多项式中, 会有重复. 例如 D_{113} ,

作为 $D_{113}, D_{131}, D_{311}$ 而出现三次。相应三项的和能写成

$$3(D_1^2 D_3 f)(\alpha) x_1^2 x_3$$

的形式。证明(用计算各阶导数出现的次数)在(b)中的 Taylor 多项式能写成

$$\sum \frac{(D_1^{s_1} \cdots D_n^{s_n} f)(\alpha)}{s_1! \cdots s_n!} x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}$$

的形式。这里求和时遍历一切有序 n -元数组 (s_1, \cdots, s_n) , 每个 s_i 是非负整数, 且 $s_1 + \cdots + s_n \leq m-1$ 。

31. 设在点 $\alpha \in R^2$ 的某邻域内 $f \in C^{(2)}$, f 的梯度在 α 点是 0, 但 f 的诸二阶导数在 α 点不全为零。说明这时从 f 在 α 的(二次) Taylor 多项式怎样判断, f 在 α 点有局部极大或局部极小, 或既没有局部极大又没有局部极小。

把对于 R^2 的这个结果推广到 R^n 。

第十章 微分形式的积分

积分可以在各种水平上进行研究. 可以说第六章是在实轴的子区间上, 对于比较“好”的函数阐述了积分理论. 在第十一章中我们将会遇到积分理论的高度发展, 它可以用于很大的几类函数, 这些函数的定义域是较为随意的集, 不必是 R^n 的子集. 本章致力于积分理论中与欧氏空间的几何紧密相关的各方面, 诸如变量替换公式, 线积分, 微分形式的结构, 而微分形式是用来叙述和证明 Stokes 定理的, 它是与微积分基本定理相当的 n 维的定理.

积分

10.1 定义 设 I^k 是 R^k 中的 k -方格, 它由合于

$$(1) \quad a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i=1, \dots, k)$$

的一切 $x = (x_1, \dots, x_k)$

组成, I^j 是 R^j 中的 j -方格, 它由(1)中的前 j 个不等式来确定, f 是 I^k 上的实连续函数.

令 $f = f_k$, 而用下式定义 I^{k-1} 上的函数 f_{k-1} :

$$f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k) dx_k.$$

f_k 在 I^k 上的一致连续性表明 f_{k-1} 在 I^{k-1} 上连续. 因此, 我们能够重复应用这种手续, 得到 I^j 上的连续函数 f_j , 而 f_{j-1} 是 f_j 关于 x_j 在 $[a_j, b_j]$ 上的积分. 这样做 k 步以后, 就能得到一个数 f_0 , 我们就把这个数叫做 f 在 I^k 上的积分, 并写成下面这种形式:

$$(2) \quad \int_{I^k} f(x) dx \text{ 或 } \int_{I^k} f$$

先验地看来, 积分的这个定义与这 k 个积分的计算次序有关, 但是, 这只是表面上如此. 为证明这一点, 对于积分(2)引入一个暂时的记号 $L(f)$, 而用 $L'(f)$ 来记按另外某个次序求这 k 个积分的结果.

10.2 定理 对每个 $f \in \mathcal{C}(I^k)$, $L(f) = L'(f)$.

证 如果 $h(x) = h_1(x_1) \cdots h_k(x_k)$, $h_j \in \mathcal{C}([a_j, b_j])$, 那么

$$L(h) = \prod_{i=1}^k \int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i) dx_i = L'(h)$$

设 \mathcal{A} 是这样的函数 h 的一切有限和所组成的集, 那么, 只要 $g \in \mathcal{A}$, 就必定 $L(g) = L'(g)$. \mathcal{A} 又是 I^k 上函数构成的代数, Stone-Weiersstrass 定理能用到这些函数上.

置 $V = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i)$. 如果 $f \in \mathcal{C}(I^k)$, 并且 $\varepsilon > 0$, 必有 $g \in \mathcal{A}$,

使 $\|f - g\| < \varepsilon/V$, 这里 $\|f\|$ 的定义是 $\max |f(x)|$ ($x \in I^k$). 于是 $|L(f - g)| < \varepsilon$, $|L'(f - g)| < \varepsilon$, 又由

$$L(f) - L'(f) = L(f - g) + L'(g - f)$$

推知 $|L(f) - L'(f)| < 2\varepsilon$.

习题 2 与这里有联系.

10.3 定义 R^k 上一个(实或复)函数 f 的支集, 是使 $f(x) \neq 0$ 的一切点的集的闭包. 如果 f 是带有紧支集的连续函数, 令 I^k 是含有 f 的支集的任一 k -方格, 并且定义

$$(3) \quad \int_{R^k} f = \int_{I^k} f.$$

这样定义的积分显然与 I^k 的选择无关, 只要假定 I^k 包含 f 的支集.

现在试图把在 R^k 上的积分的定义, 扩充到带有紧支集的连续函数(在某种意义下)的极限函数上去. 我们不去讨论在什么条件下能这样推广; 正当地解决这问题的地方是 Lebesgue 积分. 目前, 只描述一个在 Stokes 定理中要用到的极简单的例子.

10.4 例 令 Q^k 是由 R^k 中的合于 $x_1 + \cdots + x_k \leq 1$ 并且 $x_i > 0$ ($i = 1, \cdots, k$) 的一切点 $x = (x_1, \cdots, x_k)$ 组成的 k -单形. 例如, $k=3$ 时, Q^k 是顶点在 $0, e_1, e_2, e_3$ 的四面体. 如果 $f \in \mathcal{C}(Q^k)$, 就令 $f(x)$ 在 Q^k 之外为 0 来把 f 扩充成 I^k 上的函数, 并且定义

$$(4) \quad \int_{Q^k} f = \int_{I^k} f,$$

这里 I^k 是由

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (1 \leq i \leq k)$$

所确定的“单位立方体”.

因为 f 可能在 I^k 上不连续, 所以(4)式右端的积分的存在性, 必需证明. 我们还希望证明这个积分与积出其中 k 个单积分的次序无关.

为了做到这一点, 假定 $0 < \delta < 1$. 置

$$(5) \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq 1 - \delta) \\ \frac{1-t}{\delta} & (1 - \delta < t \leq 1) \\ 0 & (1 < t) \end{cases}$$

而定义

$$(6) \quad F(x) = \varphi(x_1 + \cdots + x_k) f(x) \quad (x \in I^k)$$

于是, $F \in \mathcal{C}(I^k)$.

置 $y = (x_1, \cdots, x_{k-1})$, $x = (y, x_k)$. 对于每个 $y \in I^{k-1}$ 来说, 能使 $F(y, x_k) \neq f(y, x_k)$ 的一切 x_k 的集, 或者是空集, 或者是长度不超过 δ 的开区间. 因为 $0 \leq \varphi \leq 1$, 所以

$$(7) \quad |F_{k-1}(y) - f_{k-1}(y)| \leq \delta \|f\| \quad (y \in I^{k-1}),$$

这里 $\|f\|$ 的意义与定理 10.2 的证明中所说的相同, 而 F_{k-1} 与 f_{k-1} 都是定义 10.1 中那样的.

当 $\delta \rightarrow 0$ 时, (7) 式表示 f_{k-1} 为连续函数序列的一致极限, 所以 $f_{k-1} \in \mathcal{C}(I^{k-1})$, 而再进一步积分没有什么问题了.

这证明了积分 (4) 是存在的. 此外, (7) 式说明

$$(8) \quad \left| \int_{I^k} F(x) dx - \int_{I^k} f(x) \right| \leq \delta \|f\|.$$

注意, 不论这 k 个单积分是按什么次序进行的, (8) 式总是正确的.

因为 $F \in \mathcal{C}(I^k)$, 不论怎样变更积分次序, $\int F$ 不变. 因而 (8) 式说明 $\int f$ 也是这样.

这就完成了证明.

下一个目标是定理 10.9 中所说的变量替换公式. 为了使证明容易懂, 先来讨论所谓本原映射及单位的分割. 本原映射将使我们对于带有可逆导数的 \mathcal{C}^1 映射的局部的性状有个清晰的图景, 而单位的分割是使我们能在全局中利用局部信息的极为有用的方法.

本原映射

10.5 定义 设 G 把开集 $E \subset R^n$ 映入 R^n 内, 又设有正整数 m 及实函数 g (定义域是 E), 使

$$(9) \quad G(x) = \sum_{i=1}^m x_i e_i + g(x) e_m \quad (x \in E)$$

就把 G 叫做本原映射. 于是本原映射至多改变一个坐标. 注意, (9) 式也可写成

$$(10) \quad G(x) = x + [g(x) - x_m] e_m$$

的形状.

如果 g 在某点 $a \in E$ 可微, 那么 G 也是这样. 算子 $G'(a)$ 的矩阵 $[\alpha_{ij}]$ 的第 m 行是

$$(11) \quad (D_1 g)(a), \dots, (D_m g)(a), \dots, (D_n g)(a).$$

当 $j \neq m$ 时, 我们有 $\alpha_{jj} = 1$, 而当 $i \neq j$ 时, $\alpha_{ij} = 0$. 于是 G 在 a 处的函数行列式就是

$$(12) \quad J_G(a) = \det[G'(a)] = (D_m g)(a),$$

我们知道 (根据定理 9.36), 当且仅当 $(D_m g)(a) \neq 0$ 时, $G'(a)$ 可逆.

10.6 定义 在 R^n 上, 只把标准基的某一对成员交换, 而其它成员不变的线性算子 B 叫做对换.

例如, 在 R^4 上, 交换 e_2 和 e_4 的对换 B 是

$$(13) \quad B(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) = x_1 e_1 + x_2 e_4 + x_3 e_3 + x_4 e_2.$$

或者写成

$$(14) \quad B(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4) = x_1 e_1 + x_4 e_2 + x_3 e_3 + x_2 e_4.$$

因此, B 又能看成是交换某两个坐标, 而不看成是交换两个基向量.

在后面的证明中, 我们要用 R^n 中的射影 P_0, \dots, P_n , 它们的定义是 $P_0 x = 0$, 而当 $1 \leq m \leq n$ 时

$$(15) \quad P_m x = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m.$$

于是射影 P_m 的值域和零空间分别由 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 和 $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ 生成.

10.7 定理 设 F 是把开集 $E \subset R^n$ 映入 R^n 内的 \mathcal{C}' 映射, $0 \in E, F(0) = 0, F'(0)$ 可逆.

那么, 在 R^m 中有 0 点的一个邻域, 在其中

$$(16) \quad F(x) = B_1 \cdots B_{n-1} G_n \circ \cdots \circ G_1(x)$$

这个表示法能成立.

在 (16) 式中, 每个 G_i 是在 0 的某邻域中的本原 \mathcal{C}' 映射; $G_i(0) = 0, G'_i(0)$ 可逆, 而每个 B_i 或者是个对换, 或者是恒等

算子.

简短地说, (16) 把 F 局部地表成本原映射与对换的复合.

证 令 $F = F_1$. 假设 $1 \leq m \leq n-1$ 而做下面的归纳假定 (这假定当 $m=1$ 时显然成立).

V_m 是 0 的邻域, $F_m \in \mathcal{C}'(V_m)$, $F_m(0) = 0$, $F'_m(0)$ 可逆, 并且

$$(17) \quad P_{m-1}F_m(x) = P_{m-1}x \quad (x \in V_m).$$

据 (17) 即有

$$(18) \quad F_m(x) = P_{m-1}x + \sum_{i=m}^n \alpha_i(x) e_i,$$

这里 $\alpha_m, \dots, \alpha_n$ 是 V_m 中的实 \mathcal{C}' 函数. 因此,

$$(19) \quad F'_m(0)e_m = \sum_{i=m}^n (D_m\alpha_i)(0)e_i.$$

因为 $F'_m(0)$ 可逆, (19) 式左端不是 0 , 所以有一个 k 合于 $m \leq k \leq n$, 使 $(D_m\alpha_k)(0) \neq 0$.

令 B_m 是交换 m 与这个 k 的对换 (如果 $k=m$, 那么 B_m 就是恒等算子) 并定义

$$(20) \quad G_m(x) = x + [\alpha_k(x) - x_m]e_m \quad (x \in V_m).$$

于是 $G_m \in \mathcal{C}'(V_m)$, G_m 是本原的, 并且由于 $D_m(\alpha_k)(0) \neq 0$, 所以 $G'_m(0)$ 可逆.

因此, 反函数定理说明, 存在着包含 0 的开集 $U_m \subset V_m$, 使得 G_m 是把 U_m 映满 0 的某邻域 V_{m+1} 的一一映射, 在 V_{m+1} 中 G_m^{-1} 连续可微. 按

$$(21) \quad F_{m+1}(y) = B_m F_m \circ G_m^{-1}(y) \quad (y \in V_{m+1})$$

来定义 F_{m+1} .

于是, $F_{m+1} \in \mathcal{C}'(V_{m+1})$, $F_{m+1}(0) = 0$ 并且 (由链导法) $F'_{m+1}(0)$ 可逆. 又, 当 $x \in U_m$ 时,

$$(22) \quad P_m F_{m+1}(G_m(x)) = P_m B_m F_m(x)$$

$$\begin{aligned}
&= P_m [P_{m-1}x + \alpha_k(x)e_m + \cdots] \\
&= P_{m-1}x + \alpha_k(x)e_m \\
&= P_m G_m(x)
\end{aligned}$$

因此,

$$(23) \quad P_m F_{m+1}(y) = P_m(y) \quad (y \in V_{m+1})$$

所以用 $m+1$ 代替 m 时我们的归纳假定仍然成立.

[在(22)中, 先用(21)式, 然后用(18)式及 B_m 的定义, 再用 P_m 的定义, 最后用(20)].

因 $B_m B_m = 1$, (21)式由于 $y = G_m(x)$ 而等价于

$$(24) \quad F_m(x) = B_m F_{m+1}(G_m(x)) \quad (x \in U_m).$$

如果取 $m = 1, \dots, n-1$, 用这公式相继推演, 就能在 0 的某个邻域内得到

$$\begin{aligned}
F &= F_1 = B_1 F_2 \circ G_1 \\
&= B_1 B_2 F_3 \circ G_2 \circ G_1 = \cdots \\
&= B_1 \cdots B_{n-1} F_n \circ G_{n-1} \circ \cdots \circ G_1
\end{aligned}$$

据(18)式, F_n 是本原映射. 定理证完.

单位的分割

10.8 定理 设 K 是 R^n 的紧子集, $\{V_\alpha\}$ 是 K 的开覆盖, 那么, 必有函数 $\psi_1, \dots, \psi_s \in \mathcal{C}(R^n)$ 合于

- (a) $0 \leq \psi_i \leq 1, 1 \leq i \leq s$;
- (b) 每个 ψ_i 的支集属于某个 V_α , 并且
- (c) 对每个 $x \in K$ 来说, $\psi_1(x) + \cdots + \psi_s(x) = 1$.

由(c)的缘故, $\{\psi_i\}$ 叫做单位的分割, 而时常把(b)说成 $\{\psi_i\}$ 是覆盖 $\{V_\alpha\}$ 的从属函数组.

推论 如果 $f \in \mathcal{C}(R^n)$ 并且 f 的支集位于 K 内, 那么

$$(25) \quad f = \sum_{i=1}^s \psi_i f.$$

每个 $\psi_i f$ 的支集在某个 V_α 中.

(25) 的要点是它把 f 表成了有“小”支集的连续函数 $\psi_i f$ 之和.

证 对每个 $x \in K$ 联系上一个指标 $\alpha(x)$, 使 $x \in V_{\alpha(x)}$. 于是存在着中心在 x 的开球 $B(x)$ 及 $W(x)$, 使

$$(26) \quad \overline{B(x)} \subset W(x) \subset \overline{W(x)} \subset V_{\alpha(x)}.$$

因为 K 紧, 所以在 K 中存在着点 x_1, \dots, x_s , 使得

$$(27) \quad K \subset B(x_1) \cup B(x_2) \cup \dots \cup B(x_s).$$

由(26), 存在函数 $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathcal{C}(R^n)$, 使得在 $B(x_i)$ 上 $\varphi_i(x) = 1$, 而在 $W(x_i)$ 之外 $\varphi_i(x) = 0$, 并且在 R^n 上 $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$. 定义 $\psi_1 = \varphi_1$, 而当 $i = 1, \dots, s-1$ 时定义

$$(28) \quad \psi_{i+1} = (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_i) \varphi_{i+1}.$$

性质(a)及(b)是显然的. 当 $i = 1$ 时, 关系

$$(29) \quad \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_i = 1 - (1 - \varphi_1) \cdots (1 - \varphi_i)$$

当然对. 如果(29)式对某个 $i < s$ 成立, 那么, 把(28)式加到(29)式上, 得到的就是用 $i+1$ 代替 i 时的(29)式. 因此

$$(30) \quad \sum_{i=1}^s \psi_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^s [1 - \varphi_i(x)] \quad (x \in R^n).$$

如果 $x \in K$, 那么 x 属于某个 $B(x_i)$, 因此 $\varphi_i(x) = 1$, 而(30)中的乘积是 0. 这证明了(c).

变量代换

现在我们能够叙述在重积分中变量代换的作用了. 为了简单起见, 我们还是仅限于讨论具有紧支集的连续函数; 虽然这对于许多应用来说是限制的太多了, 习题 19 至 23 就是限制太多的例证.

10.9 定理 设 T 是把开集 $E \subset R^k$ 映入 R^k 内的 $1-1 \mathcal{C}^1$ 映射, 并且对于一切 $\mathbf{x} \in E$, $J_T(\mathbf{x}) \neq 0$. 如果 f 是 R^k 上的连续函数, 它的支集是紧的并且位于 $T(E)$ 内, 那么

$$(31) \quad \int_{R^k} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{R^k} f(T(\mathbf{x})) |J_T(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

回想一下, J_T 是 T 的函数行列式. 根据反函数定理, 由题设 $J_T(\mathbf{x}) \neq 0$ 推知 T^{-1} 是 $T(E)$ 上的连续函数, 这就保证了 (31) 式右端的被积函数在 E 中取得紧支集 (定理 4.14).

(31) 式中 $J_T(\mathbf{x})$ 的绝对值的出现, 要做些解释. 就 $k=1$ 的情况而论, 假设 T 是把 R^1 映满 R^1 的 $1-1 \mathcal{C}^1$ 映射. 于是 $J_T(x) = T'(x)$; 如果 T 是递增的, 那么, 由定理 6.19 及 6.17 对于具有紧支集的一切连续函数 f , 有

$$(32) \quad \int_R f(y) dy = \int_R f(T(x)) T'(x) dx.$$

但是如果 T 递减, 那么 $T'(x) < 0$; 这时如果 f 在它的支集内部是正的话, 那么 (32) 式的左端是正的而右端是负的. 如果在 (32) 中把 T' 换成 $|T'|$, 才会得到正确的等式.

问题在于, 我们所考虑的积分是函数在 R^k 的一个子集上的积分, 而我们却没有给这些子集配置方向或定向. 等到在曲面上对微分形式积分时, 将采用其它的观点.

证 由刚作的评注得知, 如果 T 是本原 \mathcal{C}^1 映射 (见定义 10.5), 那么 (31) 式正确, 而定理 10.2 说明, 当 T 是只交换两个坐标的线性映射时, (31) 式正确.

如果定理对于变换 P, Q 正确, 并且 $S(\mathbf{x}) = P(Q(\mathbf{x}))$, 那么

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} &= \int f(P(\mathbf{y})) |J_P(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &= \int f(P(Q(\mathbf{x}))) |J_P(Q(\mathbf{x}))| |J_Q(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$= \int f(S(\mathbf{x})) |J_S(\mathbf{x})| d\mathbf{x},$$

这因为根据行列式的乘法定理及链导法, 可以得到

$$\begin{aligned} J_P(Q(\mathbf{x})) J_Q(\mathbf{x}) &= \det P'(Q(\mathbf{x})) \det Q'(\mathbf{x}) \\ &= \det P'(Q(\mathbf{x})) Q'(\mathbf{x}) \\ &= \det S'(\mathbf{x}) J_S(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

所以对于 S 来说, 定理也正确.

每个点 $\mathbf{a} \in E$ 有邻域 $U \subset E$, 在 U 中

$$(33) \quad T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{a}) + B_1 \cdots B_{k-1} G_k \circ \cdots \circ G_1(\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

这里 G_i 与 B_i 都是像定理 10.7 中那样的. 令 $V = T(U)$, 那么就当 f 的支集在 V 中时, (31) 式成立. 所以

每个点 $\mathbf{y} \in T(E)$ 必在这样的开集 $V_y \subset T(E)$ 里; 使得对于支集在 V_y 中的一切连续函数 f , (31) 式都成立.

现在令 f 是具有紧支集 $K \subset T(E)$ 的连续函数. 因为 $\{V_y\}$ 覆盖了 K , 定理 10.8 的推论说明 $f = \sum \psi_i f$, 这里每个 ψ_i 连续, 并且每个 ψ_i 的支集在某个 V_y 内, 这样, 对于每个 $\psi_i f$ 来说, (31) 式成立, 因此对于它们的和 f 来说也成立.

微分形式

现在我们安排一种布局, 叙述 n 维的微积分基本定理时需要它. 这个定理通常叫做 Stokes 定理. Stokes 定理的原始形式, 起因于向量分析对电磁学的应用, 而且是用向量场的环流来叙述的. Green 定理及散度定理是另外的特殊情形. 这些论题, 在本章之末有简短的讨论.

Stokes 定理的稀有特色, 在于它只有一个难点, 那就是叙述这个定理时, 必需用到一些定义的精心制做的结构. 这些定义涉及微分形式, 它们的导数, 边界以及指向. 一旦弄清楚了这些定义,

定理的叙述就非常简明, 它的证明也困难很少.

直到现在, 我们只讨论了开集上定义的多变量函数的导数. 这样做是为了避免在边界点上所遇到的困难. 但是现在在紧集上讨论可微函数才方便. 所以我们采用下面的约定:

说 f 是紧集 $D \subset R^k$ 到 R^n 内的 \mathcal{C}^1 映射 (或 \mathcal{C}^r 映射), 就表示存在着开集 $W \subset R^k$ 到 R^n 的 \mathcal{C}^1 映射 (或 \mathcal{C}^r 映射) g , 使得 $D \subset W$ 并且当 $x \in D$ 时 $g(x) = f(x)$.

10.10 定义 设 E 是 R^n 中的开集. E 中的 k -曲面是从紧集 $D \subset R^k$ 到 E^n 内的 \mathcal{C}^1 映射 Φ .

D 叫 Φ 的参数域. D 中的点记成 $u = (u_1, \dots, u_k)$.

我们限定 D 或为 k -方格, 或为例题 10.4 中所说的 k -单形 Q^k 这种简单情况. 其中理由是我们以后要在 D 上积分, 但是还没有讨论在 R^k 的更复杂的子集上的积分. 我们将看到, 对 D 的这个限制 (今后不再每次明说), 在微分形式的最后理论中, 不会失去重大的一般性.

我们强调, E 中的 k -曲面的定义是到 E 中的映射, 而不是 E 的子集. 这与我们早先对于曲线的定义 (定义 6.26) 是一致的. 其实, 1-曲面刚好与连续可微曲线是一样的.

10.11 定义 设 E 是 R^n 中的开集. E 中的 $(k \geq 1)$ 次微分形式 (简称为 E 中的 k -形式) 是一个用和式

$$(34) \quad \omega = \sum a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

(指标 i_1, \dots, i_k 各自从 1 到 n 独立变化) 作符号表示的函数, 它给 E 中的每个 k -曲面 Φ , 按照规则

$$(35) \quad \int_{\Phi} \omega = \int_D \sum a_{i_1, \dots, i_k}(\Phi(u)) \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} du$$

规定一个数 $\omega(\Phi) = \int_{\Phi} \omega$, 这里的 D 是 Φ 的参数域.

假定 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 都是 E 内的实连续函数. 如果 ϕ_1, \dots, ϕ_n 是 Φ 的分量, (35) 中的函数行列式是由映射

$$(u_1, \dots, u_k) \rightarrow (\phi_{i_1}(u), \dots, \phi_{i_k}(u))$$

所确定的.

注意, 象在定义 10.1 中 (或例 10.4 中) 所规定的那样, (35) 式右端是在 D 上的积分, 而 (35) 式是符号 $\int_{\phi} \omega$ 的定义.

如果 (34) 式中的函数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 都属于 \mathcal{C}' 或 \mathcal{C}'' , 那么就说 k -形式 ω 属于 \mathcal{C}' 类或 \mathcal{C}'' 类.

E 中的 0-形式规定是 E 中的一个连续函数.

10.12 例题

(a) 令 γ 是 R^2 中的 1-曲面 (\mathcal{C}' 类曲线), 参数域是 $[0, 1]$. 用 (x, y, z) 代替 (x_1, x_2, x_3) , 并且置

$$\omega = xdy + ydx.$$

那么,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^1 [\gamma_1(t)\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)\gamma_1'(t)] dt \\ &= \gamma_1(1)\gamma_2(1) - \gamma_1(0)\gamma_2(0). \end{aligned}$$

注意, 在这个例子里, $\int_{\gamma} \omega$ 只依赖于 γ 的始点 $\gamma(0)$ 与终点 $\gamma(1)$. 特别地, 如果 γ 是闭曲线, 那么 $\int_{\gamma} \omega = 0$ (下面就要见到, 这对任何恰当 1-形式 ω 都是对的).

1-形式的积分时常叫做线积分.

(b) 固定 $a > 0, b > 0$, 定义

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

于是 γ 是 R^2 中的闭曲线 (它的值域是一椭圆). 于是

$$\int_{\gamma} xdy = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t dt = \pi ab,$$

然而

$$\int_{\gamma} y dx = - \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t dt = -\pi ab.$$

注意, $\int_{\gamma} x dy$ 是 γ 所界区域的面积. 这是 Green 定理的特殊情形.

(c) 设 D 是由

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

确定的 3-方格. 定义 $\Phi(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$, 这里

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta$$

于是

$$J_{\Phi}(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta.$$

因此

$$(36) \quad \int_D dx \wedge dy \wedge dz = \int_D J_{\Phi} = \frac{4}{3} \pi.$$

注意, 这 Φ 把 D 映满 R^3 的闭单位球, 在 D 的内部, 这映射是 1—1 的. (但是有些边界点要被 Φ 等同起来), 积分 (36) 等于 $\Phi(D)$ 的体积.

10.13 初等性质 设 $\omega, \omega_1, \omega_2$ 是 E 中的 k -形式. 当且仅当对于 E 中的每个 k -曲面 Φ , $\omega_1(\Phi) = \omega_2(\Phi)$ 时, 就写成 $\omega_1 = \omega_2$. 特别地, $\omega = 0$ 就表示对于 E 中的每个 k -曲面 Φ , $\omega(\Phi) = 0$. 设 c 是实数, 那么 $c\omega$ 是由

$$(37) \quad \int_{\Phi} c\omega = c \int_{\Phi} \omega$$

确定的 k -形式, 而 $\omega = \omega_1 + \omega_2$ 表示对于 E 中的每个 k -曲面 Φ ,

$$(38) \quad \int_{\phi} \omega = \int_{\phi} \omega_1 + \int_{\phi} \omega_2.$$

作为(37)式的特殊情况, 注意, $-\omega$ 是由

$$(39) \quad \int_{\phi} (-\omega) = - \int_{\phi} \omega$$

确定的 k -形式.

考虑 k -形式

$$(40) \quad \omega = a(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

而令 $\bar{\omega}$ 是对调 (40) 式中的某两个足码所得到的 k -形式. 如果把 (35) 式及 (39) 式与“行列式的两列交换, 则行列式变号”这件事联系起来, 就知道

$$(41) \quad \bar{\omega} = -\omega.$$

作为它的特殊情况, 注意, 对一切 i 及 j 来说, 反换位关系

$$(42) \quad dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$

成立. 特别的,

$$(43) \quad dx_i \wedge dx_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

再把 (40) 式广泛地说一下, 假定某个 $r \neq s$ 而 $i_r = i_s$. 如果交换了这两个下标, 就有 $\bar{\omega} = \omega$, 因此据 (41) 式, 必然 $\omega = 0$.

换句话说, 如果 ω 是由 (40) 式表出的, 那么, $\omega = 0$, 除非是下标全不相同.

如果 ω 是像 (34) 中那样, 有重复下标的加项就能略去, 而不影响 ω .

因此, 如果 $k > n$, 那么, 在 R^n 的任何开子集中, 就只有 0 是 k -形式.

(42) 式所表示的反换位性, 就是为什么在研究微分形式时, 要格外注意减号的根由.

10.14 基本 k -形式 设 i_1, \dots, i_k 都是正整数, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, 又设 I 是 k 元有序组 (简称 k -序组) $\{i_1, \dots, i_k\}$, 那么, 我

们称 I 为递增 k -指标, 并采用简短的记法

$$(44) \quad dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

这些形式 dx_I 叫做 R^n 中的基本 k -形式.

不难证明恰好存在着 $n! / k!(n-k)!$ 个基本 k -形式. 然而我们用不着这个事实.

更为重要的是, 每个 k -形式能用基本 k -形式来表示. 要想明白这一点, 注意每个不同整数的 k -元组 $\{j_1, \dots, j_k\}$, 经过有限次两两对换, 能变成一个递增 k -指标 I ; 像在 10.13 段中已知的那样, 每次对换等于乘上个 -1 ; 因之,

$$(45) \quad dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} = \varepsilon(j_1, \dots, j_k) dx_I,$$

这里 $\varepsilon(j_1, \dots, j_k)$ 是 1 或 -1 , 全看所需对换的次数而定. 其实, 极易知道

$$(46) \quad \varepsilon(j_1, \dots, j_k) = s(j_1, \dots, j_k),$$

这里 s 的意义见定义 9.33.

例如

$$dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_7 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5$$

而

$$dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

如果 (34) 式中的每个 k -元组变成了递增 k -指标, 那么就得到 ω 的标准表示:

$$(47) \quad \omega = \sum_I b_I(x) dx_I$$

(47) 中的和号遍历一切递增 k -指标 I . [当然, 每个递增 k -指标是从许多 (精确地说是 $k!$ 个) k -元组得来的. 这样, (47) 中的每个 b_I 可能是 (34) 中所遇到的好几个系数的和].

例如,

$$x_1 dx_2 \wedge dx_1 - x_2 dx_3 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2$$

是 R^3 中的 2-形式, 它的标准表示是

$$(1-x_1)dx_1 \wedge dx_2 + (x_2+x_3)dx_2 \wedge dx_3.$$

下面的唯一性定理, 是引入 k -形式的标准表示的主要来源之一.

10.15 定理 设

$$(48) \quad \omega = \sum_I b_I(x) dx_I$$

是开集 $E \subset R^n$ 中的 k -形式 ω 的标准表示. 如果在 E 中 $\omega=0$, 那么, 对于每个递增 k -指标 I 以及每个 $x \in E$, $b_I(x)=0$

注意, 对于像 (34) 式那样的和式来说, 这种类似的命题不成立. 因为, 例如

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_1 = 0.$$

证 我们假定有某个 $v \in E$ 及某个递增 k -指标 $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, 使 $b_J(v) > 0$, 来达到矛盾. 因为 b_J 连续, 所以存在着 $h > 0$, 它保证坐标满足 $|x_i - v_i| \leq h$ 的一切 $x \in R^n$ 使 $b_J(x) > 0$. 令 D 是 R^k 中的这样一个 k -方格: 当且仅当 $|u_r| \leq h$ (对 $r=1, \dots, k$) 时, $u \in D$. 定义

$$(49) \quad \Phi(u) = v + \sum_{r=1}^k u_r e_{j_r}, \quad (u \in D).$$

于是 Φ 是 E 中的 k -曲面, 它的参数域是 D , 并且对于每个 $u \in D$ 来说, $b_J(\Phi(u)) > 0$.

我们断言

$$(50) \quad \int_{\Phi} \omega = \int_D b_J(\Phi(u)) du.$$

因为 (50) 式的右端是正的, 因此 $\omega(\Phi) \neq 0$. 所以 (50) 式产生了我们所要的矛盾来.

要证明 (50) 式, 把 (35) 式用于 (48) 式, 或者更明确点, 计算

(35)式中的函数行列式. 由(49)式得

$$\frac{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)} = 1.$$

对于其余的递增 k -指标 $I \neq J$ 来说, 函数行列式为 0, 因为它至少有一列元素都是零.

10.16 基本 k -形式的积 设

$$(51) \quad I = \{i_1 \cdots i_p\}, \quad J = \{j_1, \dots, j_q\}.$$

这里 $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ 而 $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$. R^n 中的与 $dx_{i_1}, dx_{i_2}, \dots, dx_{i_p}$ 对应的基本形式的积, 是 R^n 中的 $(p+q)$ -形式, 用符号 $dx_I \wedge dx_J$ 来记它, 而定义为

$$(52) \quad dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

如果 I 与 J 有公共元素, 那么, 10.13 段的讨论说明 $dx_I \wedge dx_J = 0$.

如果 I 与 J 没有公共元素, 把 $I \cup J$ 的成员按递增的顺序排列, 而将得到的 $(p+q)$ -指标写做 $[I, J]$. 那么 $dx_{[I, J]}$ 是基本 $(p+q)$ -形式. 我们断定

$$(53) \quad dx_I \wedge dx_J = (-1)^\alpha dx_{[I, J]},$$

这里 α 是负差数 $j_t - i_s$ 的个数. (于是正差数的个数是 $pq - \alpha$).

今证(53)式. 对于诸数

$$(54) \quad i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$$

施行下面的运算. 把 i_p 一步一步地往右移, 直到 i_p 小于它的右邻为止. 右移的步数就是使 $i_p > j_t$ 的下标 t 的个数. (注意, 显然也可能是 0 步). 然后对 i_{p-1}, \dots, i_1 , 也这样做. 右移的总步数是 α . 得到的最终排列是 $[I, J]$. 每当(52)式右端施行一步, $dx_I \wedge dx_J$ 就乘上个 -1 . 因此, (53)式成立.

注意, (53)式右端是 $dx_I \wedge dx_J$ 的标准表示.

其次, 设 $K = \{k_1, \dots, k_r\}$ 是 $\{1, \dots, n\}$ 中的递增 r -指标. 今用

(53) 式证明

$$(55) \quad (dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K).$$

如果 I, J, K 中任何两个有公共元素, 那么, (55) 式两边都是 0. 所以它们相等.

因此, 我们假定 I, J, K 两两不交. 设从它们的并得到的递增 $(p+q+r)$ -指标记作 $[I, J, K]$. 用 (53) 中给序对 (I, J) 联系上 α 的方法, 对于序对 (J, K) 联系 β , 对于 (I, K) 联系 γ . 那么, 把 (53) 式应用两次, 得知 (55) 式的左端就是

$$(-1)^\alpha dx_{[I, J]} \wedge dx_K = (-1)^\alpha (-1)^{\beta+\gamma} dx_{[I, J, K]}$$

而 (55) 式的右端是

$$(-1)^\beta dx_I \wedge dx_{[J, K]} = (-1)^\beta (-1)^{\alpha+\gamma} dx_{[I, J, K]}$$

因此, (55) 式正确.

10.17 乘法 设 ω 与 λ 分别是某开集 $E \subset R^n$ 中的 p -形式与 q -形式, 它们的标准表示为

$$(56) \quad \omega = \sum_I b_I(\mathbf{x}) dx_I, \quad \lambda = \sum_J c_J(\mathbf{x}) dx_J,$$

其中 I 遍历从集 $\{1, \dots, n\}$ 取得的一切递增 p -指标, 而 J 遍历从集 $\{1, \dots, n\}$ 取得的一切递增 q -指标.

它们的乘积记作 $\omega \wedge \lambda$, 而定义为

$$(57) \quad \omega \wedge \lambda = \sum_{I, J} b_I(\mathbf{x}) c_J(\mathbf{x}) dx_I \wedge dx_J.$$

在这个和中, I 与 J 独立地遍历其可能值, 而 $dx_I \wedge dx_J$ 则是 10.16 段那样的. 于是 $\omega \wedge \lambda$ 是 E 中的 $(p+q)$ -形式.

非常容易知道 (证明的细节留作习题), 对于 10.13 段所定义的加法的分配律

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \lambda = (\omega_1 \wedge \lambda) + (\omega_2 \wedge \lambda)$$

及

$$\omega \wedge (\lambda_1 + \lambda_2) = (\omega \wedge \lambda_1) + (\omega \wedge \lambda_2)$$

都成立. 如果把这些分配律与(55)式结合起来, 就得到对于 E 中的任何形式 ω, λ, σ 的结合律:

$$(58) \quad (\omega \wedge \lambda) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda \wedge \sigma).$$

在这段讨论中, 暗中假定 $p \geq 1, q \geq 1$. 至于 0-形式 f 与(56)式中给出的 p -形式的乘积, 就简单地定义为下面这个 p -形式:

$$f\omega = \omega f = \sum_I f(\mathbf{x}) b_I(\mathbf{x}) dx_I.$$

当 f 是 0-形式时, 习惯上宁愿写成 $f\omega$, 而不写成 $f \wedge \omega$.

10.18 微分 设 ω 是某开集 $E \subset R^n$ 中的 \mathcal{C}^1 类 k -形式. 现在定义微分算子 d , 它给每个 ω 联系上一个 $(k+1)$ -形式.

E 中的 \mathcal{C}^1 类的 0-形式, 恰好是实函数 $f \in \mathcal{C}^1(E)$, 我们定义

$$(59) \quad df = \sum_{i=1}^n (D_i f)(\mathbf{x}) dx_i.$$

如果 $\omega = \sum b_I(\mathbf{x}) dx_I$ 是 k -形式 ω 的标准表示, 而对于每个递增 k -指标 I 来说 $b_I \in \mathcal{C}^1(E)$, 就定义

$$(60) \quad d\omega = \sum_I (db_I) \wedge dx_I.$$

10.19 例 设 E 是 R^n 中的开集, $f \in \mathcal{C}^1(E)$, γ 是 E 中的连续可微曲线, 其参数域是 $[0, 1]$. 由(59)式及(35)式

$$(61) \quad \int_{\gamma} df = \int_0^1 \sum_{i=1}^n (D_i f)(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt.$$

据链导法, 最后的被积式是 $(f \circ \gamma)'(t)$. 因此,

$$(62) \quad \int_{\gamma} df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

于是 $\int_{\gamma} df$ 对于具有相同始点和相同终点的一切 γ 都是相同的; 这和 10.12 的例(a)相仿.

因此, 与例题 10.12(b) 比较一下就知道, 1-形式 xdy 不是任何 0-形式 f 的导数. 因为

$$d(xdy) = dx \wedge dy \neq 0,$$

这事实又可以从下述定理的部分(b)推知.

10.20 定理

(a) 设 ω 与 λ 分别是 E 中的 \mathcal{C}' 类的 k -形式和 m -形式, 那么

$$(63) \quad d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda - (-1)^k \omega \wedge d\lambda.$$

(b) 如果 ω 在 E 中属于 \mathcal{C}'' 类, 那么 $d^2\omega = 0$.

这里的 $d^2\omega$ 当然表示 $d(d\omega)$.

证 由(57)式及(60)式, 如果(63)式对于

$$(64) \quad \omega = f dx_i, \quad \lambda = g dx_j$$

这种特殊情形成立的话, 那么(a)就得证了; 这里 $f, g \in \mathcal{C}'(E)$, dx_i 是基本 k -形式, dx_j 是基本 m -形式. [如果 k 或 m 或二者是零, 只要把(64)式中的 dx_i 或 dx_j 略去就行了; 下面的证明并不受影响]. 这时

$$\omega \wedge \lambda = fg dx_i \wedge dx_j.$$

假定 I 与 J 没有公共元素. [不然的话, (63)里的三项都是 0.]. 然后用(53)式就得到

$$d(\omega \wedge \lambda) = d(fg dx_i \wedge dx_j) = (-1)^k d(fg dx_{[i,j]}).$$

据(59)式, $d(fg) = f dg + g df$. 因之从(60)式得出

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \lambda) &= (-1)^k (f dg + g df) \wedge dx_{[i,j]} \\ &= (g df + f dg) \wedge dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

因为 dg 是 1-形式, dx_i 是 k -形式, 所以由(42)式,

$$dg \wedge dx_i = (-1)^k dx_i \wedge dg.$$

因此,

$$d(\omega \wedge \lambda) = (df \wedge dx_i) \wedge (g dx_j) + (-1)^k (f dx_i) \wedge (dg \wedge dx_j)$$

$$=d\omega \wedge \lambda + (-1)^k \omega \wedge d\lambda.$$

(a)得证.

注意, 结合律(58)的使用是没有条件的.

我们先对 0-形式 $f \in \mathcal{C}^n$ 来证(b):

$$\begin{aligned} d^2 f &= d \left(\sum_{j=1}^n (D_j f)(\mathbf{x}) dx_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n d(D_j f) \wedge dx_j \\ &= \sum_{i,j=1}^n (D_{ij} f)(\mathbf{x}) dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

因为 $D_{ij} f = D_{ji} f$ (定理 9.41) 及 $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, 得知 $d^2 f = 0$.

如果像在(64)式中那样, $\omega = f dx_I$, 那么 $d\omega = (df) \wedge dx_I$. 据(60)式, $d(dx_I) = 0$. 因此, (63)式说明

$$d^2 \omega = (d^2 f) \wedge dx_I = 0.$$

10.21 变量代换 设 E 是 R^n 中的开集, T 是 E 到开集 $V \subset R^m$ 内的 \mathcal{C}^1 映射, ω 是 V 中的 k -形式, 它的标准表示是

$$(65) \quad \omega = \sum_I b_I(\mathbf{y}) dy_I.$$

(我们用 \mathbf{y} 表示 V 中的点, 用 \mathbf{x} 表示 E 中的点).

令 t_1, \dots, t_m 是 T 的分量. 如果

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) = T(\mathbf{x}),$$

那么 $y_i = t_i(\mathbf{x})$. 像(59)式中那样,

$$(66) \quad dt_i = \sum_{j=1}^n (D_j t_i)(\mathbf{x}) dx_j \quad (1 \leq i \leq m).$$

这样, 每个 dt_i 是 E 中的一个 1-形式.

映射 T 把 ω 变成 E 中的 k -形式 ω_T , 它的定义是

$$(67) \quad \omega_T = \sum_I b_I(T(x)) dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}.$$

在 (67) 中每个被加项的 $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ 是递增 k -指标.

下一个定理说明, 前边定义的形式加、乘及微分运算, 都能与变量代换交换次序的.

10.22 定理 用 10.21 段里的 E 和 T , 令 ω 及 λ 分别为 V 中的 k -形式及 m -形式. 那么

(a) 当 $k = m$ 时, $(\omega + \lambda)_T = \omega_T + \lambda_T$;

(b) $(\omega \wedge \lambda)_T = \omega_T \wedge \lambda_T$;

(c) 当 ω 属于 \mathcal{C}' 类, T 属于 \mathcal{C}'' 类时, $d(\omega_T) = (d\omega)_T$.

证 从定义可以直接得到 (a). 一旦了解

$$(68) \quad (dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_r})_T = dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_r},$$

而与 $\{i_1, \dots, i_r\}$ 是否递增无关, (b) 差不多就是显然的了. 因为要把 (68) 式的左、右两端变成递增的排列, 需要同样多的负号, 所以 (68) 式成立.

现在证 (c). 如果 f 是 V 中的 \mathcal{C}' 类的 0-形式, 那么

$$f_T(x) = f(T(x)), \quad df = \sum_i (D_i f)(y) dy_i.$$

据链导法得到

$$\begin{aligned} (69) \quad d(f_T) &= \sum_j (D_j f_T)(x) dx_j \\ &= \sum_j \sum_i (D_i f)(T(x)) (D_j t_i)(x) dx_j \\ &= \sum_i (D_i f)(T(x)) dt_i \\ &= (df)_T \end{aligned}$$

如果 $dy_I = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$, 那么, $(dy_I)_T = dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}$, 而

定理 10.20 说明

$$(70) \quad d((dy_I)_T) = 0.$$

(这里是用到题设 $T \in \mathcal{C}''$ 的地方)

现在假定 $\omega = f dy_I$, 于是

$$\omega_T = f_T(x) (dy_I)_T,$$

由前面的一些计算结果得到

$$\begin{aligned} d(\omega_T) &= d(f_T) \wedge (dy_I)_T = (df)_T \wedge (dy_I)_T \\ &= ((df) \wedge dy_I)_T = (d\omega)_T. \end{aligned}$$

这里第一个等式是根据(63)式和(70)式, 第二个根据(69)式, 第三个根据(b), 最后一个根据 $d\omega$ 的定义.

从刚证明了的(c)的这种特殊情况, 再使用(a), 就得到(c)的一般情况. 这就完成了定理的证明.

下一个目标是定理 10.25. 它将由微分形式的另外两个重要变换性质直接得出来. 现在就来讲这两个性质.

10.23 定理 设 T 是开集 $E \subset R^n$ 到开集 $V \subset R^m$ 内的 \mathcal{C}' 映射, S 是 V 到开集 $W \subset R^p$ 内的 \mathcal{C}' 映射, ω 是 W 中的 k -形式, 它使 ω_S 是 V 中的 k -形式, 并且 $(\omega_S)_T$ 及 ω_{ST} 都是 E 中的 k -形式, 这里 ST 由 $(ST)(x) = S(T(x))$ 定义. 那么,

$$(71) \quad (\omega_S)_T = \omega_{ST}.$$

证 如果 ω 及 λ 都是 W 中的形式, 定理 10.22 说明

$$((\omega \wedge \lambda)_S)_T = (\omega_S \wedge \lambda_S)_T = (\omega_S)_T \wedge (\lambda_S)_T$$

并且

$$(\omega \wedge \lambda)_{ST} = \omega_{ST} \wedge \lambda_{ST}.$$

于是, 如果(71)式对于 ω 及 λ 成立, 随之(71)式对 $\omega \wedge \lambda$ 也成立. 因为每个形式能由 0-形式与 1-形式用加法和乘法构成, 并且因为(71)式对于 0-形式当然成立, 因此, 只需对于 $\omega = dz_q$ ($q=1, \dots, p$) 这种情况来证明(71)式就够了. (我们分别用 x, y, z 来记 E, V, W

中的点.)

令 t_1, \dots, t_m 是 T 的分量, s_1, \dots, s_p 是 S 的分量, r_1, \dots, r_p 是 ST 的分量. 如果 $\omega = dz_q$, 那么,

$$\omega_S = dS_q = \sum_j (D_j s_q)(y) dy_j.$$

所以, 链导法表明

$$\begin{aligned} (\omega_S)_T &= \sum_j (D_j s_q)(T(x)) dt_j \\ &= \sum_j (D_j s_q)(T(x)) \sum_i (D_i t_j)(x) dx_i \\ &= \sum_i (D_i r_q)(x) dx_i = dr_q = \omega_{ST}. \end{aligned}$$

10.24 定理 设 ω 是开集 $E \subset R^n$ 中的 k -形式, Φ 是 E 中的 k -曲面, 它的参数域 $D \subset R^k$, Δ 是 R^k 中的、参数域为 D 并且是用 $\Delta(u) = u (u \in D)$ 确定的 k -曲面, 那么,

$$\int_{\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{\Phi}.$$

证 只需对

$$\omega = a(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

这种情况来证明. 如果 ϕ_1, \dots, ϕ_n 是 Φ 的分量, 那么

$$\omega_{\Phi} = a(\Phi(u)) d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k}.$$

要证明本定理, 只需能够证明

$$(72) \quad d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_k} = J(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_k,$$

就行了, 这里

$$J(u) = \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)},$$

因为由(72)式可以得到

$$\begin{aligned}\int_{\Phi} \omega &= \int_D a(\Phi(u)) J(u) du \\ &= \int_{\Delta} a(\Phi(u)) J(u) du_1 \wedge \cdots \wedge du_k = \int_{\Delta} \omega_{\Phi}.\end{aligned}$$

令 $[A]$ 是 k 行 k 列的矩阵, 它的阵元是

$$\alpha(p, q) = (D_p \phi_{i_p})(u) \quad (p, q = 1, \dots, k).$$

那么

$$d\phi_{i_p} = \sum_q \alpha(p, q) du_q,$$

因而

$$d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} = \sum \alpha(1, q_1) \cdots \alpha(k, q_k) du_{q_1} \wedge \cdots \wedge du_{q_k}.$$

在最后这个和里, q_1, \dots, q_k 各自取遍 $1, \dots, k$. 由反换位关系 (42) 可得

$$du_{q_1} \wedge \cdots \wedge du_{q_k} = s(q_1, \dots, q_k) du_1 \wedge \cdots \wedge du_k,$$

这里 s 照定义 9.33 那样取, 应用这个定义, 就知道

$$d\phi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\phi_{i_k} = \det[A] du_1 \wedge \cdots \wedge du_k;$$

又因为 $J(u) = \det[A]$, (72) 式得证.

本节的最後结果, 把上面两个定理联系了起来.

10.25 定理 设 T 是开集 $E \subset R^n$ 到开集 $V \subset R^m$ 内的 \mathcal{C}^1 映射, Φ 是 E 中的 k -曲面, ω 是 V 中的 k -形式.

那么

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Phi} \omega_T.$$

证 设 Φ 的参数域是 D (从而也是 $T\Phi$ 的参数域), 并按定理 10.24 定义 Δ . 于是

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Delta} \omega_{T\Phi} = \int_{\Delta} (\omega_T)_{\Phi} = \int_{\Phi} \omega_T.$$

其中第一个等式是在定理 10.24 中用 $T\Phi$ 代替 Φ 得到的. 第二个等式由定理 10.23 得出. 第三个等式是在定理 10.24 中用 ω_T 代

替 ω 的结果.

单形与链

10.26 仿射单形 设 f 是把向量空间 X 映入向量空间 Y 的映射. 如果 $f - f(0)$ 是线性的, 就称 f 为仿射映射. 换句话说, 就是要求存在某个 $A \in L(X, Y)$ 使得

$$(73) \quad f(x) = f(0) + Ax.$$

如此, 要确定 R^k 到 R^n 中的仿射映射, 只要知道 $f(0)$ 及 $f(e_i)$ ($1 \leq i \leq k$) 就行了, 这里像通常那样, $\{e_1, \dots, e_k\}$ 是 R^k 的标准基.

我们定义标准单形 Q_k 为形如

$$(74) \quad u = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$$

而使 $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, k$) 并且 $\sum \alpha_i \leq 1$ 的一切 $u \in R^k$ 组成的集.

设 p_0, p_1, \dots, p_k 是 R^n 中的点. 所谓有向仿射 k -单形

$$(75) \quad \sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k]$$

是用 Q^k 作参数域, 由仿射映射

$$(76) \quad \sigma(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k) = p_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i (p_i - p_0).$$

给出的 R^n 中的 k -曲面. 注意, σ 的本性是

$$(77) \quad \sigma(0) = p_0, \quad \sigma(e_i) = p_i \quad (1 \leq i \leq k)$$

及

$$(78) \quad \sigma(u) = p_0 + Au \quad (u \in Q^k),$$

这里 $A \in L(R^k, R^n)$ 而对于 $1 \leq i \leq k$, $Ae_i = p_i - p_0$.

我们称 σ 为有向的, 借以着重考虑顶点 p_0, \dots, p_k 的次序. 如果

$$(79) \quad \bar{\sigma} = [p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_k}]$$

这里 $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ 是有序集 $\{0, 1, \dots, k\}$ 的一个排列, 我们就采用

$$(80) \quad \bar{\sigma} = s(i_0, i_1, \dots, i_k) \sigma$$

这种记号, 这里的 s 是定义 9.33 中所定义的函数. 这样 $\bar{\sigma} = \pm \sigma$ 在于 $s=1$ 或 $s=-1$. 严格地说, 在采用 (75) 式及 (76) 式作为 σ 的定义时, 除非 $i_0=0, \dots, i_k=k$, 我们不应写 $\bar{\sigma} = \sigma$, 即使 $s(i_0, \dots, i_k) = 1$ 也是这样; 在这里我们得到的只是等价关系, 而不是等式. 然而对于我们的目的来说, 根据定理 10.27, 这种记号还是合适的.

设 $\bar{\sigma} = e\sigma$ (沿用上面的约定), 如果 $e=1$, 就说 $\bar{\sigma}$ 与 σ 同向; 如果 $e=-1$, 就说 $\bar{\sigma}$ 与 σ 反向. 注意, 我们并没有定义“单形的向”的意义. 我们所定义的只是取同一点集为顶点的两个单形之间的关系, 即“同向”的关系.

然而, 这里有这么一种情况, 单形的方向能按一种自然的方法来定义. 这就是当 $n=k$, 并且当诸向量 $p_i = p_0 (1 \leq i \leq k)$ 无关时的情况. 这时 (78) 式中的线性变换 A 可逆, 它的行列式 (即 σ 的函数行列式) 不是 0. 于是, 如果 $\det A$ 是正的 (或负的), 就说 σ 是正向的 (或负向的). 特别是 R^k 中由恒等映射给出的单形 $[0, e_1, \dots, e_k]$ 有正向.

到现在为止, 我们一直假定了 $k \geq 1$. 有向 0-单形 定义为附有正负号的一个点. 我们把它写成 $\sigma = p_0$ 或 $\sigma = -p_0$. 如果 $\sigma = \varepsilon p_0 (\varepsilon = \pm 1)$ 并且 f 是 0-形式 (即实函数), 我们定义

$$\int_{\sigma} f = \varepsilon f(p_0).$$

10.27 定理 设 σ 是开集 $E \subset R^n$ 中的有向仿射 k -单形, 并设 $\bar{\sigma} = e\sigma$, 那么, 对于 E 中的每个 k -形式 ω 来说

$$(81) \quad \int_{\bar{\sigma}} \omega = e \int_{\sigma} \omega.$$

证 对于 $k=0$, (81) 式由上面的定义就得到了. 所以我们假定 $k \geq 1$, 并且假定 σ 是由 (75) 式给出的.

假设 $1 \leq j \leq k$, 并设 $\bar{\sigma}$ 是从 σ 交换 p_0 与 p_j 得来的. 于是

$\varepsilon = -1$, 并且

$$\bar{\sigma}(u) = p_0 + Bu \quad (u \in Q^k),$$

这里 B 是 R^k 到 R^n 内的线性映射, 其中 $Be_j = p_0 - p_j$ 而当 $i \neq j$ 时 $Be_i = p_i - p_j$. 如果借(78)式里的 A , 令 $Ae_i = x_i (1 \leq i \leq k)$, 那么 B 的列向量(即向量 Be_i)便是

$$x_1 - x_j, \dots, x_{j-1} - x_j, -x_j, x_{j+1} - x_j, \dots, x_k - x_j.$$

如果把第 j 列从其余各列减去, 那么, (35) 式中的行列式, 没有一个会受影响, 然而我们得到了这些列 $x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_k$. 这些列与 A 中各列, 只是在第 j 列上差一个符号. 因此, 对于这种情况, (81) 式成立.

次设 $0 < i < j \leq k$ 而 $\bar{\sigma}$ 是由 σ 交换 p_i 与 p_j 得到的. 那么 $\bar{\sigma}(u) = p_0 + Cu$, 这里 C 的各列与 A 的各列, 除了第 i 列与第 j 列交换了之外, 其余都一样. 这又可推出(81)式成立, 因为 $\varepsilon = -1$.

一般的情况随之也成立, 因为 $\{0, 1, \dots, k\}$ 的每个排列是上面已经处理过的诸特殊情形的复合.

10.28 仿射链 开集 $E \subset R^n$ 中的仿射 k -链 Γ , 是 E 中的有限多个有向仿射 k -单形 $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ 的集体. 这些 k -单形不必各不相同; 于是, 一个 k -单形可以在 Γ 中重复出现.

设 Γ 如上, 并设 ω 是 E 中的 k -形式, 定义

$$(82) \quad \int_{\Gamma} \omega = \sum_{i=1}^r \int_{\sigma_i} \omega.$$

我们可以把 E 中的 k -曲面 Φ 看成一个函数, 它的定义域是 E 中一切 k -形式的集体, 并且它给 ω 配置一个数 $\int_{\Phi} \omega$. 因为实值函数能够相加(像定义 4.3 中那样), 这就使人联想到用记号

$$(83) \quad \Gamma = \sigma_1 + \dots + \sigma_r,$$

或写成更紧凑的形式而用

$$(84) \quad \Gamma = \sum_{i=1}^r \sigma_i,$$

说明(82)式对于 E 中的每个 k -形式成立.

为了避免误解, 我们明确指出, (83) 式及 (80) 式所引入的记号必须当心地使用. 要害是在于 R^n 里的每个有向仿射 k -单形 σ , 作为函数的途径有两种; 它们的定义域不同, 值域也不同, 于是有两种绝然不同的加法运算. 本来, σ 是定义为 Q^k 上的 R^n -值函数, 因此, 能够说 $\sigma_1 + \sigma_2$ 是给每个 $u \in Q^k$ 派定向量 $\sigma_1(u) + \sigma_2(u)$ 的函数 σ . 注意, σ 仍然是 R^n 中的有向仿射 k -单形! 这不是 (83) 式的含意.

例如, 像在 (80) 式中那样, 如果 $\sigma_2 = -\sigma_1$ (就是说 σ_1 与 σ_2 的顶点的集相同但方向相反) 并且设 $\Gamma = \sigma_1 + \sigma_2$, 那么对于一切 ω 有 $\int_{\Gamma} \omega = 0$, 并且我们可以把这件事记成 $\Gamma = 0$ 或 $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$. 这并不意味着 $\sigma_1(u) + \sigma_2(u)$ 是 R^n 中的零向量.

10.29 边界 当 $k \geq 1$ 时, 规定有向仿射 k -单形

$$\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k]$$

的边界就是仿射 $(k-1)$ -链

$$(85) \quad \partial\sigma = \sum_{j=0}^k (-1)^j [p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_k].$$

例如, 设 $\sigma = [p_0, p_1, p_2]$, 那么,

$$\partial\sigma = [p_1, p_2] - [p_0, p_2] + [p_0, p_1] = [p_0, p_1] + [p_1, p_2] + [p_2, p_0],$$

这与三角形的有向边界的普通概念一致.

注意, 当 $1 \leq i \leq k$ 时, 在 (85) 式中出现的单形 $\sigma_j = [p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_k]$, 以 Q^{k-1} 为参数域, 并由

$$(86) \quad \sigma_j(u) = p_j + Bu \quad (u \in Q^{k-1})$$

确定, 这里的 B 是由

$$Be_i = p_i - p_0 \quad (\text{当 } 1 \leq i \leq j-1),$$

$$Be_i = p_{i+1} - p_0 \quad (\text{当 } j \leq i \leq k-1)$$

确定的从 R^{k-1} 到 R^k 的线性映射.

在(85)式中出现的另一单形

$$\sigma_0 = [p_1, p_2, \dots, p_k]$$

是由映射

$$\sigma_0(u) = p_1 + Bu$$

得出的, 这里当 $1 \leq i \leq k-1$ 时, $Be_i = p_{i+1} - p_1$.

10.30 可微单形及可微链 设 T 是开集 $E \subset R^n$ 到开集 $V \subset R^m$ 内的 \mathcal{C}^r 映射; T 不必是一一的. 如果 σ 是 E 中的有向仿射 k -单形, 那么复合映射 $\Phi = T \circ \sigma$ (有时写成较简单的形式 $T\sigma$) 是 V 中的以 Q^k 为参数域的 k -曲面. 称 Φ 为 \mathcal{C}^r 类的有向 k -单形.

V 中 \mathcal{C}^r 类的有向 k -单形 Φ_1, \dots, Φ_r 的有限集 Ψ 叫做 V 中的 \mathcal{C}^r 类的 k -链. 设 ω 是 V 中的 k -形式, 我们定义

$$(87) \quad \int_{\Psi} \omega = \sum_{i=1}^r \int_{\Phi_i} \omega,$$

并且应用相应的记号 $\Psi = \sum \Phi_i$.

如果 $\Gamma = \sum \sigma_i$ 是仿射链, 并且如果 $\Phi_i = T \circ \sigma_i$, 那么又写成 $\Psi = T \circ \Gamma$, 或写成

$$(88) \quad T(\sum \sigma_i) = \sum T\sigma_i.$$

有向 k -单形 $\Phi = T \circ \sigma$ 的边界 $\partial\Phi$ 定义为 $(k-1)$ -链

$$(89) \quad \partial\Phi = T(\partial\sigma).$$

为了说明(89)式是合理的, 可以想一想, 如果 T 是仿射的, 那么 $\Phi = T \circ \sigma$ 是有向仿射 k -单形, 这时(89)式就不应该是定义, 而应该看作(85)式的推论了. 所以(89)式是推广了这种特殊情况.

如果 Φ 是属于 \mathcal{C}^r 类的, $\partial\Phi$ 就是属于 \mathcal{C}^r 类的. 这可以直

接推知.

最后, 定义 k -链 $\Psi = \sum \Phi_i$ 的边界 $\partial\Psi$ 为 $(k-1)$ 链.

$$(90) \quad \partial\Psi = \sum \partial\Phi_i.$$

10.31 正向边界 到现在为止, 我们已把边界与链联系上了, 但还没有与 R^n 的子集联系上. 关于边界的这种看法, 对于 Stokes 定理的叙述和证明, 是最适当不过了. 然而在实际应用中, 特别是在 R^2 或 R^3 的应用中, 谈某些集合的“有向边界”也是很通常和很方便的. 现在简要地谈一下.

设 Q^n 是 R^n 中的标准单形, σ_0 是以 Q^n 为参数域的恒等映射. 在 10.26 段中已知, σ_0 可以看做 R^n 中的正向 n -单形. 它的边界 $\partial\sigma_0$ 是仿射 $(n-1)$ -链. 这个链叫做 集 Q^n 的正向边界.

例如 Q^3 的正向边界是

$$[e_1, e_2, e_3] - [0, e_2, e_3] + [0, e_1, e_3] - [0, e_1, e_2].$$

今令 T 为 Q^n 到 R^n 中的 \mathcal{C}^r 类 1—1 映射, 并设它的函数行列式是正的 (至少在 Q^n 内部). 设 $E = T(Q^n)$. 由反函数定理, E 是 R^n 中某个开集的闭包. 我们定义集 E 的正向边界为 $(n-1)$ -链

$$\partial T = T(\partial\sigma_0),$$

并且可以把这个 $(n-1)$ -链记作 ∂E .

在这里显然会发生这样的疑问: 如果 $E = T_1(Q^n) = T_2(Q^n)$, 并且如果 T_1 与 T_2 的函数行列式都是正的, 是否必然 $\partial T_1 = \partial T_2$ 呢? 即是说, 等式

$$\int_{\partial T_1} \omega = \int_{\partial T_2} \omega$$

是否对于每个 $(n-1)$ -形式 ω 成立呢? 答案是肯定的, 但我们打算略去它的证明. (看个例子, 把本节的结尾与习题 17 作一对比).

还可以推进一步. 设

$$\Omega = E_1 \cup \cdots \cup E_r,$$

这里 $E_i = T_i(Q^n)$, 每个 T_i 与上面的 T 有同样的性质, 并且诸 E_i 的内部两两不交. 那么, 就把 $(n-1)$ -链

$$\partial T_1 + \cdots + \partial T_r = \partial \Omega$$

叫做 Ω 的正向边界.

例如, R^2 中的单位正方形 I^2 是 $\sigma_1(Q^2)$ 与 $\sigma_2(Q^2)$ 的并, 这里

$$\sigma_1(u) = u, \quad \sigma_2(u) = e_1 + e_2 - u.$$

σ_1 及 σ_2 的函数行列式都是 $1 > 0$. 因为

$$\sigma_1 = [0, e_1, e_2], \quad \sigma_2 = [e_1 + e_2, e_2, e_1],$$

所以

$$\partial \sigma_1 = [e_1, e_2] - [0, e_2] + [0, e_1],$$

$$\partial \sigma_2 = [e_2, e_1] - [e_1 + e_2, e_1] + [e_1 + e_2, e_2];$$

这两个边界之和为

$$\partial I^2 = [0, e_1] + [e_1, e_1 + e_2] + [e_1 + e_2, e_2] + [e_2, 0]$$

即是 I^2 的正向边界. 注意 $[e_1, e_2]$ 抵消了 $[e_2, e_1]$.

如果 Φ 是 R^m 中以 I^2 为参数域的 2-曲面, 那么 Φ (当作 2-形式上的函数) 与 2-链

$$\Phi \circ \sigma_1 + \Phi \circ \sigma_2$$

相同. 于是

$$\partial \Phi = \partial(\Phi \circ \sigma_1) + \partial(\Phi \circ \sigma_2) = \Phi(\partial \sigma_1) + \Phi(\partial \sigma_2) = \Phi(\partial I^2).$$

换句话说, 如果 Φ 的参数域是正方形 I^2 , 我们不必回到单形 Q^2 , 而可以直接从 ∂I^2 得到 $\partial \Phi$.

其它例子可在习题 17—19 中找到.

10.32 例 对于 $0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$, 定义

$$\Sigma(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

于是 Σ 是 R^3 中的 2-曲面, 它的参数域是长方形 $D \subset R^2$, 它的值域是 R^3 中的单位球. 它的边界是

$$\partial \Sigma = \Sigma(\partial D) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

这里的

$$\gamma_1(u) = \Sigma(u, 0) = (\sin u, 0, \cos u),$$

$$\gamma_2(v) = \Sigma(\pi, v) = (0, 0, -1),$$

$$\gamma_3(u) = \Sigma(\pi - u, 2\pi) = (\sin u, 0, -\cos u),$$

$$\gamma_4(v) = \Sigma(0, 2\pi - v) = (0, 0, 1),$$

u, v 的参数区间为 $[0, \pi], [0, 2\pi]$.

因为 γ_2 及 γ_4 是常量, 它们的导数是 0, 因此任何 1-形式在 γ_2 或 γ_4 上的积分是 0 [见例 10.12(a)].

因 $\gamma_3(u) = \gamma_1(\pi - u)$, 直接应用 (35) 式, 就能证明

$$\int_{\gamma_3} \omega = - \int_{\gamma_1} \omega.$$

对于任何 1-形式 ω 成立; 于是 $\int_{\partial \Sigma} \omega = 0$, 进而推知 $\partial \Sigma = 0$.

(按照地理学的术语, $\partial \Sigma$ 从北极 N 出发, 沿子午线跑到南极 S , 在 S 停一下, 沿同一子午线回到 N , 最后停在 N . 沿子午线的这两段路方向相反, 所以相应的两个线积分彼此消掉. 在习题 32 中也有一条曲线, 它在边界上出现两次, 但是没有消掉).

Stokes 定理

10.33 定理 设 Ψ 是开集 $V \subset \mathbb{R}^m$ 中的 \mathcal{C}^n 类 k -链, ω 是 V 中的 \mathcal{C}^1 类 $(k-1)$ -形式, 那么

$$(91) \quad \int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega.$$

$k=m=1$ 时, 这不过是微积分基本定理 (加一个可微性的假定). $k=m=2$ 的情形就是 Green 定理. $k=m=3$ 时得出所谓 Gauss “散度定理”. $k=2, m=3$ 的情况, 是由 Stokes 最先发现的. (Spivak 的书描述了一些历史背景). 这些特殊情况将在本章末进一步讨论.

证 只要对 V 中 \mathcal{C}'' 类的每个有向 k -单形 Φ 证明

$$(92) \quad \int_{\Phi} d\omega = \int_{\partial\Phi} \omega$$

就够了. 因为, 如果证明了 (92) 式, 再如果 $\Psi = \sum \Phi_i$, 那么, 由 (87) 及 (90) 就可推出 (91) 式.

固定这样一个 Φ , 并且令

$$(93) \quad \sigma = [0, e_1, \dots, e_k].$$

这样, σ 是以 Q^k 为参数域而由恒等映射所确定的有向仿射 k -单形. 因 Φ 又是定义在 Q^k 上的 (看定义 10.30) 并且 $\Phi \in \mathcal{C}''$, 所以存在着包含 Q^k 的开集 $E \subset R^k$, 并且存在着 E 到 V 内并使得 $\Phi = T \circ \sigma$ 的 \mathcal{C}'' 映射 T . 由定理 10.25 及 10.22(c), (92) 式的左端等于

$$\int_{T\sigma} d\omega = \int_{\sigma} (d\omega)_T = \int_{\sigma} d(\omega_T).$$

再用一次定理 10.25, 并根据 (89) 式就知道 (92) 式的右端是

$$\int_{\partial(T\sigma)} \omega = \int_{T(\partial\sigma)} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega_T.$$

因为 ω_T 是 E 中的 $(k-1)$ -形式, 所以为了证明 (92) 式, 只要对于特殊的单形 (93), 及 E 中的每个 \mathcal{C}' 类 $(k-1)$ -形式 λ 来证

$$(94) \quad \int_{\sigma} d\lambda = \int_{\partial\sigma} \lambda.$$

如果 $k=1$, 有向 0-单形的定义说明, (94) 式只不过是说, 对于 $[0, 1]$ 上的每个连续可微函数 f 有关系式

$$(95) \quad \int_0^1 f'(u) du = f(1) - f(0),$$

而由微积分基本定理, 这当然是正确的.

从现在起, 我们假定 $k > 1$, 固定了整数 r ($1 \leq r \leq k$), 并且选定 $f \in \mathcal{C}'(E)$. 我们说, 只要对于

$$(96) \quad \lambda = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \dots \wedge dx_k$$

这种情形来证(94)式就够了,这是因为任何 $(k-1)$ -形式,一定是如(96)这样一些特殊的 $(k-1)$ -形式之和,其中 $r=1, \dots, k$.

据(85)式,单形(93)的边界是

$$\partial\sigma = [e_1, \dots, e_k] + \sum_{i=1}^k (-1)^i \tau_i,$$

这里

$$\tau_i = [0, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_k],$$

$i=1, \dots, k$. 令

$$\tau_0 = [e_r, e_1, \dots, e_{r-1}, e_{r+1}, \dots, e_k].$$

注意 τ_0 是由 $[e_1, \dots, e_k]$ 将 e_r 与其左邻逐次交换 $r-1$ 次得到的. 所以

$$(97) \quad \partial\sigma = (-1)^{r-1} \tau_0 + \sum_{i=1}^k (-1)^i \tau_i,$$

每个 τ_i 以 Q^k 为参数域.

如果 $x = \tau_0(u)$ 并且 $u \in Q^{k-1}$, 那么

$$(98) \quad x_j = \begin{cases} u_j & (1 \leq j < r), \\ 1 - (u_1 + \dots + u_{k-1}) & (j = r), \\ u_{j-1} & (r < j \leq k). \end{cases}$$

如果 $1 \leq i \leq k$, $u \in Q^{k-1}$ 且 $x = \tau_i(u)$, 那么,

$$(99) \quad x_j = \begin{cases} u_j & (1 \leq j < i), \\ 0 & (j = i), \\ u_{j-1} & (i < j \leq k). \end{cases}$$

对于 $0 \leq i \leq k$, 令 J_i 为由 τ_i 诱导出来的映射

$$(100) \quad (u_1, \dots, u_{k-1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_k)$$

的函数行列式. 当 $i=0$ 及 $i=r$ 时, (98)式及(99)式说明, (100)式是恒等映射. 所以 $J_0=1$, $J_r=1$. 对于其它的 i 来说, 在(99)中的 $x_i=0$ 说明, J_i 有一行全是0, 因之 $J_i=0$. 这样, 由(35)式

及(96)式得到

$$(101) \quad \int_{\tau_i} \lambda = 0 \quad (i \neq 0, i \neq r).$$

结果, 从(97)式推知

$$(102) \quad \begin{aligned} \int_{\sigma_r} \lambda &= (-1)^{r-1} \int_{\tau_0} \lambda + (-1)^r \int_{\tau_r} \lambda \\ &= (-1)^{r-1} \int [f(\tau_-(u)) - f(\tau_r(u))] du. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} d\lambda &= (D_r f)(\mathbf{x}) dx_r \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{r-1} \wedge dx_{r+1} \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= (-1)^{r-1} (D_r f)(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k, \end{aligned}$$

所以

$$(103) \quad \int_{\sigma} d\lambda = (-1)^{r-1} \int_{Q^k} (D_r f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

我们先对 x_r 在闭区间

$$[0, 1 - (x_1 + \cdots + x_{r-1} + x_{r+1} + \cdots + x_k)]$$

上积分以求(103)式的值. 令 $(x_1, \cdots, x_{r-1}, x_{r+1}, \cdots, x_k) = (u_1, \cdots, u_{k-1})$ 并借助(98)式, 可以知道(103)式中在 Q^k 上的积分, 等于(102)式中在 Q^{k-1} 上的积分. 这就是说(94)式成立, 而定理证完.

闭形式与恰当形式

10.34 定义 设 ω 是开集 $E \subset R^n$ 上的 k -形式. 如果存在着 E 中的 $(k-1)$ -形式 λ , 适合 $\omega = d\lambda$, 那么就说 ω 在 E 中是恰当的. 如果 ω 属于 \mathcal{C}' 类并且 $d\omega = 0$, 那么 ω 叫做闭的.

定理 10.20(b)说明, \mathcal{C}' 类的每个恰当形式是闭形式.

在某些集 E , 例如在凸集上, 逆命题正确; 这就是定理 10.39 (通常称为 Poincaré 引理) 及定理 10.40 的内容. 然而, 例题 10.36 及 10.37 要提出不是恰当的闭形式.

10.35 评注

(a) 要判定一个已知 k -形式是否是闭的, 只要把 ω 的标准表示中的系数微一下分就行了. 例如, 开集 $E \subset R^n$ 上的 $f_i \in \mathcal{C}'(E)$ 时, 1-形式

$$(104) \quad \omega = \sum_{i=1}^n f_i(x) dx_i$$

是闭的当且仅当对于 $\{1, \dots, n\}$ 中的一切 i, j 及一切 $x \in E$, 诸等式

$$(105) \quad (D_j f_i)(x) = (D_i f_j)(x)$$

成立

注意, (105) 式是“点态”条件; 它并不蕴含那种依赖于 E 的形状的整体性质.

另一方面, 要想证明 ω 在 E 中是恰当的, 必须证明存在着 E 上的形式 λ , 合于 $d\lambda = \omega$. 这就等于在整个 E 中, 而不是局部的, 解一组偏微分方程. 例如为了证明 (104) 式在集 E 中是恰当的, 就必需求一函数 (或 0-形式) $g \in \mathcal{C}'(E)$, 要它合于

$$(106) \quad (D_i g)(x) = f_i(x) \quad (x \in E, 1 \leq i \leq n).$$

当然, (105) 式是 (106) 式可解的必要条件.

(b) 设 ω 是 E 中的恰当 k -形式. 于是存在着 E 中的 $(k-1)$ -形式 λ 使 $d\lambda = \omega$, 而 Stokes 定理断定, 对于 E 中的每个 \mathcal{C}^n 类 k -链 Ψ

$$(107) \quad \int_{\Psi} \omega = \int_{\Psi} d\lambda = \int_{\partial \Psi} \lambda$$

如果 Ψ_1 及 Ψ_2 都是这样的链, 并且它们有相同的边界, 那么

$$\int_{\Psi_1} \omega = \int_{\Psi_2} \omega.$$

特别在 E 中的每个边界为 0 的 k -链上, E 中的恰当 k -形式的积分为 0.

作为这件事的一个重要的特殊情况, 注意 E 中的恰当 1-形式在 E 中的闭(可微)曲线上的积分为 0.

(c) 设 ω 是 E 中的闭 k -形式. 于是 $d\omega = 0$, 并且 Stokes 定理断定, 对于 E 中属于 \mathcal{C}^n 类的每个 $(k+1)$ -链 Ψ ,

$$(108) \quad \int_{\partial\Psi} \omega = \int_{\Psi} d\omega = 0$$

换句话说, E 中的闭 k -形式, 在作为 E 中 $(k+1)$ -链的边界这样的 k -链上, 积分为 0.

(d) 设 Ψ 是 E 中的 $(k+1)$ -链, λ 是 E 中的 $(k-1)$ -形式, 二者都属于 \mathcal{C}^n 类. 因为 $d^2\lambda = 0$, 把 Stokes 定理使用两次就知道

$$(109) \quad \int_{\partial\partial\Psi} \lambda = \int_{\partial\Psi} d\lambda = \int_{\Psi} d^2\lambda = 0$$

由此推知 $\partial^2\Psi = 0$. 换句话说, 边界的边界是 0.

关于这一点的更直接的证明见习题 16.

10.36 例 令 $E = R^2 - \{0\}$ 为去掉原点的平面. 1-形式

$$(110) \quad \eta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

在 $R^2 - \{0\}$ 中是闭的. 这极易用微分验证. 固定 $r > 0$, 并定义

$$(111) \quad \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

于是 γ 是 $R^2 - \{0\}$ 中的曲线(“有向 1-单形”). 因为 $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, 所以

$$(112) \quad \partial\gamma = 0$$

直接计算就知道

$$(113) \quad \int_{\gamma} \eta = 2\pi \neq 0.$$

评注 10.35(b) 及 (c) 的讨论说明, 从 (113) 式能得到两个结论:

第一, η 在 $R^2 - \{0\}$ 中不是恰当微分, 因若不然, (112) 式就必

然使(113)式为0了.

第二, γ 不是 $R^2 - \{0\}$ 中任何(\mathcal{C}'' 类)2-链的边界, 因若不然, 由于 η 是闭的, 必然使得积分(113)式为0了.

10.37 例 令 $E = R^3 - \{0\}$ 是去掉原点的三维空间. 定义

$$(114) \quad \xi = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

这里已将 (x_1, x_2, x_3) 换写成了 (x, y, z) . 直接微分就知道 $d\xi = 0$, 所以 ξ 是 $R^3 - \{0\}$ 中的闭2-形式.

令 Σ 是例 10.32 中所构造的, 在 $R^3 - \{0\}$ 中的2-链; 请回想一下, Σ 是 R^3 中单位球的参数表示. 用例题 10.32 的矩形 D 作为参数域, 很容易算出

$$(115) \quad \int_{\Sigma} \xi = \int_D \sin u \, du \, dv = 4\pi \neq 0.$$

像上面的例题那样, 能够推断 ξ 不是 $R^3 - \{0\}$ 中的恰当微分 (因为如例题 10.32 所证 $\partial\Sigma \neq 0$), 并且虽然 $\partial\Sigma = 0$, 球 Σ 也不能是 $R^3 - \{0\}$ 中任何(\mathcal{C}'' 类)3-链的边界.

下一个结果在定理 10.39 的证明中将要用到.

10.38 定理 设 E 是 R^n 中的凸开集, $f \in \mathcal{C}'(E)$, p 是整数, $1 \leq p \leq n$, 且

$$(116) \quad (D_j f)(x) = 0 \quad (p < j \leq n, x \in E)$$

于是存在 $F \in \mathcal{C}'(E)$ 使得

$$(117) \quad (D_p F)(x) = f(x), (D_j F)(x) = 0 \quad (p < j \leq n, x \in E)$$

证 把 x 写成 $x = (x', x_p, x'')$, 这里

$$x' = (x_1, \dots, x_{p-1}), x'' = (x_{p+1}, \dots, x_n).$$

(当 $p=1$ 时, 缺 x' , 当 $p=n$ 时, 缺 x''). 设 V 是能与某个 x'' 拼成 $(x', x_p, x'') \in E$ 的一切 $(x', x_p) \in R^p$ 的集. V 是 E 的射影, 必为 R^p 中的凸开集. 因为 E 是凸集并且(116)式成立, $f(x)$ 就与 x'' 无关.

因此存在以 V 为定义域的函数 φ , 对一切 $\mathbf{x} \in E$ 合于

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}', x_p).$$

如果 $p=1$, V 是 R^1 中的开区间 (可能无界), 取 $c \in V$ 并且定义

$$F(\mathbf{x}) = \int_c^{x_1} \varphi(t) dt \quad (\mathbf{x} \in E).$$

如果 $p>1$, 令 U 是能够对于某个 x_p 使得 $(\mathbf{x}', x_p) \in V$ 的所有 $\mathbf{x}' \in R^{p-1}$ 的集. 于是 U 是 R^{p-1} 的凸开集, 并且存在函数 $\alpha \in \mathcal{C}'(U)$, 它对每个 $\mathbf{x}' \in U$ 合于 $(\mathbf{x}', \alpha(\mathbf{x}')) \in V$. 换句话说, α 的图象在 V 中 (习题29). 定义

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\alpha(\mathbf{x}')}^{x_p} \varphi(\mathbf{x}', t) dt \quad (\mathbf{x} \in E).$$

不论在哪种情况, F 满足(117)式.

(注意: 如果 $b < a$, 一般约定 \int_a^b 的意义是 $-\int_b^a$).

10.39 定理 设 $E \subset R^n$ 是凸开集, $k \geq 1$, ω 是 E 中的 \mathcal{C}' 类 k -形式且 $d\omega = 0$, 那么 E 中必有一个 $(k-1)$ -形式 λ , 合于 $\omega = d\lambda$.

简单地说, 凸集中的闭形式是恰当的.

证 当 $p=1, \dots, n$ 时, 用 Y_p 表示由 E 中的, 合于以下条件的一切 k -形式 ω 构成的集: ω 属于 \mathcal{C}' 类, 标准表示

$$(118) \quad \omega = \sum_I f_I(\mathbf{x}) dx_I$$

中不含 dx_{p+1}, \dots, dx_n . 换句话说, 如果有某个 $\mathbf{x} \in E$ 使 $f_I(\mathbf{x}) \neq 0$, 就会 $I \subset \{1, \dots, p\}$.

现在对 p 作归纳法

首先假定 $\omega \in Y_1$. 于是 $\omega = f(\mathbf{x}) dx_1$. 因为 $d\omega = 0$, 对于 $1 < j \leq n$, $\mathbf{x} \in E$ 有 $(D_j f)(\mathbf{x}) = 0$. 由定理10.38, 存在着一个 $F \in \mathcal{C}'(E)$

使得 $D_1 F = f$ 而对 $1 < j \leq n$ 有 $D_j F = 0$. 因此

$$dF = (D_1 F)(\mathbf{x}) dx_1 = f(\mathbf{x}) dx_1 = \omega.$$

现在取 $p > 1$, 并做如下的归纳假定: 属于 Y_{p-1} 的每个闭 k -形式是 E 中的恰当形式.

选 $\omega \in Y_p$ 使 $d\omega = 0$. 据(118)式,

$$(119) \quad \sum_I \sum_{j=1}^n (D_j f_I)(\mathbf{x}) dx_j \wedge dx_I = d\omega = 0.$$

考虑合于 $p < j \leq n$ 的一个固定的 j . 在(118)式中出现的每个 I 在 $\{1, \dots, p\}$ 中. 如果 I_1, I_2 是两个这样的 k -指标, 并且设 $I_1 \neq I_2$, 那么 $(k+1)$ -指标 (I_1, j) 与 (I_2, j) 就不同, 所以不能抵消, 而由(119)式推知(118)中的每个系数满足

$$(120) \quad (D_j f_I)(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in E, p < j \leq n).$$

现在在(118)式中, 把含 dx_p 的项集中到一起, 并把 ω 写成

$$(121) \quad \omega = \alpha + \sum_{I_0} f_{I_0}(\mathbf{x}) dx_{I_0} \wedge dx_p,$$

的形式, 其中 $\alpha \in Y_{p-1}$, 每个 I_0 是 $\{1, \dots, p-1\}$ 中的递增 $(k-1)$ -指标, 并且 $I = (I_0, p)$. 据(120)式, 定理 10.38 可以提供合于

$$(122) \quad D_p F_I = f_I, \quad D_j F_I = 0 \quad (p < j \leq n)$$

的函数 $F_I \in \mathcal{C}^1(E)$.

令

$$(123) \quad \beta = \sum_{I_0} F_{I_0}(\mathbf{x}) dx_{I_0}.$$

而定义 $\gamma = \omega - (-1)^{k-1} d\beta$. 因为 β 是 $(k-1)$ -形式, 从而

$$\begin{aligned} \gamma &= \omega - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^p (D_j F_{I_0})(\mathbf{x}) dx_{I_0} \wedge dx_j \\ &= \alpha - \sum_{I_0} \sum_{j=1}^{p-1} (D_j F_{I_0})(\mathbf{x}) dx_{I_0} \wedge dx_j, \end{aligned}$$

它显然在 Y_{p-1} 中. 因为 $d\omega=0, d^2\beta=0$, 所以必然 $d\gamma=0$. 因此, 由归纳假定知道, 在 E 中有某个 $(k-1)$ -形式 μ , 它使 $\gamma=d\mu$. 如果令 $\lambda=\mu+(-1)^{k-1}\beta$, 就得到 $\omega=d\lambda$.

这就由归纳法完成了证明.

10.40 定理 固定 $k, 1 \leq k \leq n$. 令 $E \subset R^n$ 是开集, 其中每个闭 k -形式是恰当的. 再令 T 是把 E 映满开集 $U \subset R^n$ 的 1-1 \mathcal{C}^∞ 映射, 它的逆 S 又属于 \mathcal{C}^∞ .

那么 U 中的每个闭 k -形式是 U 中的恰当形式.

注意, 由定理 10.39, 每个凸开集 E 满足本定理的题设. E 和 U 之间的关系可以说成是它们 \mathcal{C}^∞ -等价.

于是在与凸开集 \mathcal{C}^∞ -等价的任意集中, 每个闭形式是恰当形式.

证 令 ω 是 U 中的 k -形式且 $d\omega=0$. 由定理 10.22(c), ω_T 是 E 中的 k -形式且 $d(\omega_T)=0$. 因此 $\omega_T=d\lambda$, λ 是 E 中的 $(k-1)$ -形式. 由定理 10.23 及再一次使用定理 10.22(c), 得到

$$\omega = (\omega_T)_S = (d\lambda)_S = d(\lambda_S).$$

因 λ_S 是 U 中的 $(k-1)$ -形式, 所以 ω 是 U 中的恰当形式.

10.41 评注 在应用中, 方格(看定义 2.17)时常是比单形更方便的参数域. 如果我们的全部论述都基于方格, 而不基于单形的话, Stokes 定理的证明中出现的计算将会简单些. (在 Spivak 的书中就是这样做的.) 我们宁愿要单形的理由是, 有向单形边界的定义, 看来是比方格边界的定义容易些也自然些. (见习题19). 又, 把集分割成单形(称为“三角剖分”)在拓扑学中起着重要作用. 而在拓扑学的某些方面与微分形式之间, 又存在着密切的联系. 这些在 10.35 段内曾暗示过. Singer 及 Thorpe 的书对于这个论题有很好的介绍.

因为每个方格能被三角剖分, 所以可以当做链. 在二维的情

形,这已在例 10.32 中做了;对于三维的情况,见习题 18.

Poincaré 引理(定理 10.39)有许多证明的方法.例如可参看 Spivak 书的第 94 页,或 Fleming 书的 280 页.对一些特殊情况两种简单证法,在习题 24 及习题 27 中指出来了.

向量分析

在本章行将结束时,我们把前面的材料,对 R^3 中有关向量分析的定理,作一点应用.这些定理是关于微分形式定理的一些特殊情况,但又时常是以不同的术语来叙述的.所以我们面对的任务是把一种说法翻译成另外的说法.

10.42 向量场 令 $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$ 为开集 $E \subset R^3$ 到 R^3 内的连续映射.因为 F 给 E 的每个点联系上一个向量,所以有时把 F 叫做向量场,特别在物理中是如此.联系着每个这样的 F ,有一个 1-形式

$$(124) \quad \lambda_F = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

及一个 2-形式

$$(125) \quad \omega_F = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy.$$

这里以及本章下余各处,都用惯用的记法 (x, y, z) 代替 (x_1, x_2, x_3) .

反之,显然 E 中的每个 1-形式 λ , 必定是 E 中某个向量场 F 的 λ_F , 并且每个 2-形式, 必是某个 F 的 ω_F . 因此,在 R^3 中 1-形式及 2-形式的研究,就是这样与向量场的研究共同发展的.

如果 $u \in \mathcal{C}^1(E)$ 是实函数,那么,它的梯度

$$\nabla u = (D_1 u) e_1 + (D_2 u) e_2 + (D_3 u) e_3$$

是 E 中向量场的一个例子.

今设 F 是 E 中的 \mathcal{C}^1 类的向量场. 它的旋度 $\nabla \times F$ 是用

$$\nabla \times F = (D_2 F_3 - D_3 F_2) e_1 + (D_3 F_1 - D_1 F_3) e_2 + (D_1 F_2 - D_2 F_1) e_3$$

定义的, E 中的向量场, 而它的散度 $\nabla \cdot F$ 是在 E 中由

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = D_1 F_1 + D_2 F_2 + D_3 F_3$$

定义的实函数,

这些量有各种物理解释, 至于它们的细节, 介绍大家去看 O. D. Kellogg 的书.

下面是梯度、散度和旋度之间的某些联系.

10.43 定理 设 E 是 R^3 中的开集, $u \in \mathcal{C}^\infty(E)$, \mathbf{G} 是 E 中 \mathcal{C}^∞ 类的向量场.

(a) 如果 $\mathbf{F} = \nabla u$, 那么 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$

(b) 如果 $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, 那么 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$

此外, 如 E 能 \mathcal{C}^∞ 等价于凸集, 那么 (a) 及 (b) 的逆命题也成立, 其中要假定 \mathbf{F} 是 E 中的 \mathcal{C}^∞ 类的向量场:

(a') 如果 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, 那么 \mathbf{F} 是某个 $u \in \mathcal{C}^\infty(E)$ 的梯度: $\mathbf{F} = \nabla u$.

(b') 如果 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, 那么 \mathbf{F} 是 E 中某个 \mathcal{C}^∞ 类向量场 \mathbf{G} 的旋度场: $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$

证 如果把 ∇u , $\nabla \times \mathbf{F}$ 及 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 的定义与 (124) 式及 (125) 式所给的微分形式 $\lambda_{\mathbf{F}}$ 及 $\omega_{\mathbf{F}}$ 相比较, 就得到下面的四个命题:

$$\mathbf{F} = \nabla u \quad \text{当且仅当} \quad \lambda_{\mathbf{F}} = du,$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{当且仅当} \quad d\lambda_{\mathbf{F}} = 0,$$

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G} \quad \text{当且仅当} \quad \omega_{\mathbf{F}} = d\lambda_{\mathbf{G}},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{当且仅当} \quad d\omega_{\mathbf{F}} = 0.$$

现在, 如果 $\mathbf{F} = \nabla u$, 那么 $\lambda_{\mathbf{F}} = du$, 所以 $d\lambda_{\mathbf{F}} = d^2u = 0$. (定理 10.20), 这表示 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. 于是 (a) 获证.

至于 (a'), 题设等于说在 E 中 $d\lambda_{\mathbf{F}} = 0$. 据定理 10.40, 有某个 0-形式 u , 使 $\lambda_{\mathbf{F}} = du$. 因此, $\mathbf{F} = \nabla u$.

(b) 和 (b') 的证明顺着完全一样的模式进行.

10.44 体积元素 k -形式

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$$

叫做 R^k 中的体积元素, 体积元素时常记作 dV (如果希望明显地指出维数时, 就记成 dV_k), 当 Φ 是 R^k 中的正向 k -曲面, 而 f 是 Φ 的值域上的连续函数时, 使用

$$(126) \quad \int_{\Phi} f(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_{\Phi} f dV$$

这个记号.

用这个术语的理由非常简单: 设 D 是 R^k 中的参数域, 如果 Φ 是 D 到 R^k 中的 $1-1 \mathcal{C}'$ 映射, 并带有正的函数行列式 J_{Φ} , 那么, 据(35)式及定理 10.9, (126)式的左端就是

$$\int_D f(\Phi(u)) J_{\Phi}(u) du = \int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

特别当 $f=1$ 时, (126)式便确定 Φ 的体积. 我们在(36)式中已经见过它的一个特殊情形.

关于 dV_2 , 常用记号 dA .

10.45 Green 定理 设 E 是 R^2 中的开集, $\alpha \in \mathcal{C}'(E)$, $\beta \in \mathcal{C}'(E)$, Ω 是 E 的闭子集, 并且 Ω 有 10.31 段中所说的正向边界 $\partial\Omega$. 那么

$$(127) \quad \int_{\partial\Omega} (\alpha dx + \beta dy) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right) dA.$$

证 令 $\lambda = \alpha dx + \beta dy$, 于是

$$\begin{aligned} d\lambda &= (D_2\alpha)dy \wedge dx + (D_1\beta)dx \wedge dy \\ &= (D_1\beta - D_2\alpha)dA. \end{aligned}$$

所以(127)式无异于

$$\int_{\partial\Omega} \lambda = \int_{\Omega} d\lambda.$$

据定理 10.33, 上式成立.

取 $\alpha(x, y) = -y$ 而 $\beta(x, y) = x$, (127)式就变成 Ω 的面积

$$(128) \quad \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (x dy - y dx) = A(\Omega).$$

取 $\alpha=0, \beta=x$, 就得一个类似的公式. 例题 10.12(b) 含有它的一个特殊情况.

10.46 R^3 中的面积元素 令 Φ 是 R^3 中的 \mathcal{C}' 类 2-曲面, 其参数域 $D \subset R^2$. 给每点 $(u, v) \in D$ 结合一个向量

$$(129) \quad N(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} e_1 + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} e_2 + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} e_3.$$

(129) 式中的诸函数行列式与方程

$$(130) \quad (x, y, z) = \Phi(u, v).$$

相对应.

如果 f 是 $\Phi(D)$ 上的连续函数, f 在 Φ 上的面积分就定义为

$$(131) \quad \int_{\Phi} f dA = \int_D f(\Phi(u, v)) |N(u, v)| du dv$$

特别当 $f=1$ 时就得到 Φ 的面积, 即

$$(132) \quad A(\Phi) = \int_D |N(u, v)| du dv.$$

下面的讨论, 说明 (131) 式及其特殊情况 (132) 式是合理的定义. 它又刻划了向量 N 的几何特征.

设 $\Phi = \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_3 e_3$, 固定一点 $p_0 = (u_0, v_0) \in D$, 令 $N = N(p_0)$, 并令

$$(133) \quad \alpha_i = (D_1 \varphi_i)(p_0), \quad \beta_i = (D_2 \varphi_i)(p_0) \quad (i=1, 2, 3).$$

然后让 $T \in L(R^2, R^3)$ 是由

$$(134) \quad T(u, v) = \sum_{i=1}^3 (\alpha_i u + \beta_i v) e_i$$

给出的线性变换. 注意, 按照定义 9.11, $T = \Phi'(p_0)$.

现在假定 T 的秩是 2. (如果 T 的秩是 1 或 0, 那么 $N=0$, 下面提到的切平面就退化为一條线或一个点了), 于是仿射映射

$$(u, v) \rightarrow \Phi(p_0) + T(u, v)$$

的值域是一个平面 Π , 叫做 Φ 在 p_0 的切平面 [有人爱把 Π 叫做

在 $\Phi(p_0)$ 的切平面, 而不说在 p_0 的切平面; 如果 Φ 不是一对一的, 这就要陷入困难了].

把(133)式用于(129)式中, 就得到

$$(135) \quad \mathbf{N} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_3$$

而(134)说明

$$(136) \quad T\mathbf{e}_1 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{e}_i, \quad T\mathbf{e}_2 = \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{e}_i.$$

直接计算就得到

$$(137) \quad \mathbf{N} \cdot (T\mathbf{e}_1) = 0 = \mathbf{N} \cdot (T\mathbf{e}_2)$$

因此 \mathbf{N} 垂直于 Π , 所以把它叫做 Φ 在 p_0 的法线.

再据(135)式及(136)式进行直接计算, 能证明 \mathbf{N} 的第二个性: R^3 中把 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 变成 $\{T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \mathbf{N}\}$ 的线性变换的行列式是 $|\mathbf{N}|^2 > 0$ (习题 30). 于是 3-单形

$$(138) \quad [\mathbf{0}, T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \mathbf{N}]$$

是正向的.

下面用到 \mathbf{N} 的第三个性, 它是前两性质的推论: 上面所提到的以 $|\mathbf{N}|^2$ 为值的行列式, 是用 $[\mathbf{0}, T\mathbf{e}_1], [\mathbf{0}, T\mathbf{e}_2], [\mathbf{0}, \mathbf{N}]$ 作棱的平行六面体的体积. 由(137), $[\mathbf{0}, \mathbf{N}]$ 垂直于其它两棱. 所以, 以

$$(139) \quad \mathbf{0}, T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$$

为顶点的平行四边形的面积是 $|\mathbf{N}|$

这个平行四边形是 R^2 中单位正方形在 T 之下的象. 如果 E 是 R^2 中的矩形, (由 T 的线性) 能推知平行四边形 $T(E)$ 的面积是

$$(140) \quad A(T(E)) = |\mathbf{N}| A(E) = \int_E |\mathbf{N}(u_0, v_0)| du dv.$$

我们断定, 当 Φ 是仿射映射时, (132) 式正确. 为了证明定义 (132) 在一般情况下正确, 把 D 分成许多小矩形, 在每个小矩形中取一点 (u_0, v_0) , 并在每个矩形内用相应的切平面代替 Φ . 通过

(140)所得到的诸平行四边形面积之和, 就是 $A(\Phi)$ 的一个近似值. 最后, 能够从(132)式, 用阶跃函数逼近 f 的办法来证明(131)式的正确性.

10.47 例 设 $0 < a < b$, a, b 都是固定的. K 是由

$$0 \leq t \leq a, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

确定的 3- 方格. 方程

$$\begin{aligned} x &= t \cos u, \\ (141) \quad y &= (b + t \sin u) \cos v, \\ z &= (b + t \sin u) \sin v, \end{aligned}$$

描写的是把 R^3 映到 R^3 内的映射 Ψ , 它在 K 的内部是 1-1 的, 因此 $\Psi(K)$ 是个实心环, 它的函数行列式是

$$J_{\Psi} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, v)} = t(b + t \sin u),$$

它在 K 上取正值, 除非是在面 $t=0$ 上. 如果在 K 上将 J_{Ψ} 积分, 就得到实心环的体积

$$\text{vol}(\Psi(K)) = 2\pi^2 a^2 b$$

今考虑 2-链 $\Phi = \partial\Psi$ (看习题 19), Ψ 把 K 的两个面 $u=0$ 及 $u=2\pi$ 映满同一个柱面带, 但指向相反. Ψ 把面 $v=0$ 及 $v=2\pi$ 映满同一个圆盘, 但指向相反. Ψ 把面 $t=0$ 映满一个圆, 这圆要把 0 算成 2-链 $\partial\Psi$ 的一部分. (相应的函数行列式为 0). 所以 Φ 只不过是当在(141)中令 $t=a$ 时, 以正方形域 $0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi$ 为参数域 D , 所得到的 2-曲面.

按照(129)及(141), Φ 在 $(u, v) \in D$ 的法线是向量

$$N(u, v) = a(b - a \sin u) n(u, v),$$

这里

$$n(u, v) = (\cos u) e_1 + (\sin u \cos v) e_2 + (\sin u \sin v) e_3.$$

因为 $|n(u, v)| = 1$, 所以得到 $|N(u, v)| = a(b + a \sin u)$, 如果把它在 D 上积分, (131) 式就给出了环面的面积

$$A(\Phi) = 4\pi^2 ab$$

如果把 $N = N(u, v)$ 看成是从 $\Phi(u, v)$ 指向 $\Phi(u, v) + N(u, v)$ 的一个有向线段, 那么 N 指向外, 这就是说, 从 $\Psi(K)$ 离去, 当 $t = a$ 时也如此, 因为 $J_\Psi > 0$.

例如, 取 $u = v = \frac{\pi}{2}$, $t = a$. 这给出 z 在 $\Psi(K)$ 上的最大值, 而对于这样选取的 (u, v) , $N = a(b + a)e_3$ 指向上方.

10.48 R^3 中 1-形式的积分 令 γ 是开集 $E \subset R^3$ 中的 \mathcal{C}^1 曲线, 其参数闭区间为 $[0, 1]$, 就如 10.42 中那样, F 是 E 中的向量场, 再按 (124) 式定义 λ_F . λ_F 在 γ 上的积分能按确定的方式写出. 我们现在就来描述这种方式.

对于任何 $u \in [0, 1]$,

$$\gamma'(u) = \gamma'_1(u)e_1 + \gamma'_2(u)e_2 + \gamma'_3(u)e_3$$

叫做 γ 在 u 的切向量. 定义 $t = t(u)$ 为 $\gamma'(u)$ 方向上的单位向量, 于是

$$|\gamma'(u)| = |\gamma'(u)| t(u).$$

[如果对某个 u , $\gamma'(u) = 0$, 则令 $t(u) = e_1$; 选用其它的也可以]. 据 (35) 式,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \lambda_F &= \sum_{i=1}^3 \int_0^1 F_i(\gamma(u)) \gamma'_i(u) du \\ (142) \quad &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(u)) \cdot \gamma'(u) du \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(u)) \cdot t(u) |\gamma'(u)| du. \end{aligned}$$

定理 6.27 使得有理由把 $|\gamma'(u)| du$ 叫做沿着 γ 的弧长元素. 习惯上把它记作 ds , 而 (142) 式也就写成

$$(143) \quad \int_{\gamma} \lambda_F = \int (F \cdot t) ds$$

的形式.

因为 t 是 γ 的单位切向量, $F \cdot t$ 叫做 F 沿着 γ 的切线分量.

(143)式的右端应该当作 (142) 式最后一个积分的缩写. 关键是 F 在 γ 的值域上定义, 但 t 在 $[0, 1]$ 上定义; 所以 $F \cdot t$ 必须做适当的解释. 当然, 当 γ 是 1—1 的时候, $t(u)$ 能换成 $t(\gamma(u))$, 而这种困难也就不出现了.

10.49 R^3 中 2-形式的积分 设 Φ 是开集 $E \subset R^3$ 中的 \mathcal{C}' 类 2-曲面, 其参数域 $D \subset R^2$. F 为 E 中的向量场, 并由 (125) 式定义 ω_F . 像在上一段中那样, 我们要给 ω_F 在 Φ 上的积分另找一个表示法.

由 (35) 式及 (129) 式.

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} \omega_F &= \int_{\Phi} (F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy) \\ &= \int_D \left\{ (F_1 \circ \Phi) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (F_2 \circ \Phi) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right. \\ &\quad \left. + (F_3 \circ \Phi) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right\} du dv \\ &= \int_D F(\Phi(u, v)) \cdot N(u, v) du dv. \end{aligned}$$

今令 $n = n(u, v)$ 是 $N(u, v)$ 方向上的单位向量. [如果对于某个 $(u, v) \in D$ 有 $N(u, v) = 0$, 取 $n(u, v) = e_1$]. 于是 $N = |N|n$, 因此上边最后这个积分变成

$$\int_D F(\Phi(u, v)) \cdot n(u, v) |N(u, v)| du dv.$$

据 (131) 式, 我们最后能把它写成

$$(144) \quad \int_{\Phi} \omega_F = \int_{\Phi} (F \cdot n) dA$$

的形式. 至于 $F \cdot n$ 的意义, 10.48 段之末的评注在这里依然适用.

现在我们能够叙述 Stokes 定理的最原始的形式了.

10.50 Stokes 公式 设 F 是开集 $E \subset R^3$ 中的 \mathcal{C}' 类向量场, Φ 是 E 中的 \mathcal{C}'' 类 2-曲面, 那么

$$(145) \quad \int_{\Phi} (\nabla \times F) \cdot n dA = \int_{\partial\Phi} (F \cdot t) ds$$

证 令 $H = \nabla \times F$. 那么, 象定理 10.43 的证明中那样, 得到

$$(146) \quad \omega_H = d\lambda_F.$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} (\nabla \times F) \cdot n dA &= \int_{\Phi} (H \cdot n) dA = \int_{\Phi} \omega_H \\ &= \int_{\Phi} d\lambda_F = \int_{\partial\Phi} \lambda_F = \int_{\partial\Phi} (F \cdot t) ds. \end{aligned}$$

这里先用了 H 的定义, 再用到 (144) 式, 其中的 F 换作 H , 再用 (146) 式, 然后——主要的一步——用定理 10.33, 最后用到按照明显的方式从曲线推广到 1-链的 (143) 式.

10.51 散度定理 设 F 是开集 $E \subset R^3$ 中的 \mathcal{C}' 类向量场, Ω 是 E 的带有正向边界 $\partial\Omega$ (见 10.31 段) 的闭子集, 那么

$$(147) \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n) dA.$$

证 由 (125) 式

$$d\omega_F = (\nabla \cdot F) dx \wedge dy \wedge dz = (\nabla \cdot F) dV.$$

因此, 根据定理 10.33, 把它用于 2-形式 ω_F , 再根据 (144) 式得到

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot F) dV = \int_{\Omega} d\omega_F = \int_{\partial\Omega} \omega_F = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n) dA.$$

习题

1. 设 H 是 R^k 中的紧凸集且其内部不空, $f \in \mathcal{C}(H)$, 在 H 的余集中令 $f(x) = 0$, 按定义 10.3 定义 $\int_H f$.

证明 $\int_H f$ 与其中 k 个积分的施行次序无关.

提示: 象在例题 10.4 中那样, 将 f 用 R^2 上的连续函数来逼近, 要这些连续函数的支集在 H 内.

2. 设 $\varphi_i \in \mathcal{C}(R^1)$ 的支集在 $(2^{-i}, 2^{1-i})$ 内, $\int \varphi_i = 1, i = 1, 2, 3, \dots$ 令

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} [\varphi_i(x) - \varphi_{i+1}(x)] \varphi_i(y),$$

那么 f 在 R^2 上有紧支集, 除了在 $(0, 0)$ 以外, f 连续并且

$$\int dy \int f(x, y) dx = 0 \quad \text{而} \quad \int dx \int f(x, y) dy = 1.$$

注意, f 在 $(0, 0)$ 的每个邻域无界.

3. (a) 设 F 是定理 10.7 所说的, 令 $A = F'(0), F_1(x) = A^{-1}F(x)$. 那么 $F'_1(0) = I$. 试证在 0 的某邻域内, 对某些本原映射 G_1, \dots, G_n ,

$$F_1(x) = G_n \circ G_{n-1} \circ \dots \circ G_1(x).$$

这可以产生定理 10.7 的另一种叙述法:

$$F(x) = F'(0) G_n \circ G_{n-1} \circ \dots \circ G_1(x).$$

(b) 证明把 R^2 映满 R^2 的映射 $(x, y) \rightarrow (y, x)$, 在原点的任何邻域内不能是任何两个本原映射的复合. (这说明这些对换 B_i 不能从定理 10.7 的叙述中略去).

4. 对于 $(x, y) \in R^2$, 定义

$$F(x, y) = (e^x \cos y - 1, e^x \sin y).$$

试证 $F = G_2 \circ G_1$, 这里

$$G_1(x, y) = (e^x \cos y - 1, y)$$

$$G_2(u, v) = (u, (1+u) \lg v)$$

在 $(0, 0)$ 的某邻域内是本原映射.

计算 G_1, G_2, F 在 $(0, 0)$ 的函数行列式. 定义

$$H_2(x, y) = (x, e^x \sin y)$$

而求

$$H_1(x, y) = (h(u, v), v)$$

使得在 $(0, 0)$ 的某邻域内 $F_1 = H_1 \circ H_2$.

5. 设 K 是任意度量空间的紧子集, 叙述并证明与定理 10.8 类似的定理 (把定理 10.8 的证明中出现的函数 φ_i 换成第四章习题 22 中所构造的那种

函数).

6. 证明定理 10.8 中的函数 ψ_i 能被换成可微的, 甚至是无穷次可微的, 借以加强定理 10.8 的结论. (在构造辅助函数 φ_i 时用第八章习题 1).

7. (a) 证明单形 Q^k 是 R^k 的含有 $0, e_1, \dots, e_k$ 的最小凸子集.

(b) 证明仿射映射把凸集变为凸集.

8. 设 H 是 R^2 中以 $(1, 1), (3, 2), (4, 5), (2, 4)$ 为顶点的平行四边形. 求把 $(0, 0)$ 变为 $(1, 1)$, $(1, 0)$ 变为 $(3, 2)$, $(0, 1)$ 变为 $(2, 4)$ 的仿射变换 T , 证明 $J_T = 5$, 用 T 把积分

$$\alpha = \int_H e^{x-y} dx dy$$

变成 I^2 上的积分以求 α .

9. 在矩形

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

上用方程

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

定义 $(x, y) = T(r, \theta)$. 证明 T 把这个矩形映满以 $(0, 0)$ 为中心, 以 a 为半径的闭圆盘 D , T 在矩形内部是 1-1 的, $J_T(r, \theta) = r$. 如果 $f \in \mathcal{C}(D)$, 证明在极坐标下积分的公式是:

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(T(r, \theta)) r dr d\theta.$$

提示: 设 D_0 为 D 的内部减去从 $(0, 0)$ 到 $(0, a)$ 这段闭区间. 就这样情形, 定理 10.9 便能用于支集在 D_0 内的连续函数 f . 再象例题 10.4 那样把这个限制去掉.

10. 在习题 9 中令 $a \rightarrow \infty$, 证明: 对于 $|x| + |y| \rightarrow \infty$ 时下降得足够快的连续函数 f 来说,

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(T(r, \theta)) r dr d\theta.$$

(做出更精确的阐述). 把这个公式用于函数

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

以导出第八章的公式 (101).

11. 在带形区域

$$0 < s < \infty, \quad 0 < t < 1$$

上, 令 $u = s - st$, $v = st$ 来定义 $(u, v) = T(s, t)$. 证明 T 是把这带形区域映

满 R^2 中正象限 (即 $u > 0, v > 0$) Q 的 1-1 映射, 证明 $J_T(s, t) = s$

对于 $x > 0, y > 0$, 在 Q 上积分

$$u^{x-1} e^{-u} v^{y-1} e^{-v},$$

用定理 10.9 把这个积分变成带形区域上的积分, 再按这种方法导出第八章的公式(96)来.

(为了这里的应用, 必须把定理 10.9 推广到能包括某些广义积分, 请读者先做这项推广).

12. 令 I^k 是一切合于 $0 \leq u_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, k$) 的 $u = (u_1, \dots, u_k) \in R^k$ 的集; Q^k 是合于 $x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1$ 的一切 $x = (x_1, \dots, x_k) \in R^k$ 的集. (I^k 是单位立方体; Q^k 是 R^k 中的标准单形). 用

$$x_1 = u_1$$

$$x_2 = (1 - u_1) u_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_k = (1 - u_1) \cdots (1 - u_{k-1}) u_k$$

定义 $x = T(u)$. 证明

$$\sum_{i=1}^k x_i = 1 - \prod_{i=1}^k (1 - u_i).$$

证明 T 把 I^k 映满 Q^k , T 在 I^k 内部是 1-1 的, 它的逆 S 定义在 Q^k 内部, 而由 $u_i = x_i$ 及

$$u_i = \frac{x_i}{1 - x_1 - \cdots - x_{i-1}}$$

($i = 2, \dots, k$) 确定. 证明

$$J_T(u) = (1 - u_1)^{k-1} (1 - u_2)^{k-2} \cdots (1 - u_{k-1}),$$

$$\text{及 } J_S(x) = [(1 - x_1)(1 - x_1 - x_2) \cdots (1 - x_1 - \cdots - x_{k-1})]^{-1}.$$

13. 设 r_1, \dots, r_k 为非负整数, 证明

$$\int_{Q^k} x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k} dx = \frac{r_1! \cdots r_k!}{(k + r_1 + \cdots + r_k)!}.$$

提示: 用习题 12, 定理 10.9 及 8.20.

注意, 特殊情况 $r_1 = \cdots = r_k = 0$ 表示 Q^k 的体积是 $1/k!$.

14. 证明公式(46).

15. 设 ω 及 λ 分别为 k -形式及 m -形式. 证明

$$\omega \wedge \lambda = (-1)^{km} \lambda \wedge \omega.$$

16. 设 $k \geq 2$, $\sigma = [p_0, p_1, \dots, p_k]$ 是有向仿射 k -单形, 直接从边界算子 ∂ 的定义证明 $\partial^2 \sigma = 0$. 由此推证对每个链 ψ 必然 $\partial^2 \psi = 0$

提示: 首先对 $k=2, k=3$ 定向. 一般来说, 如果 $i < j$, 令 σ_{ij} 为从 σ 中删去 p_i 及 p_j 所得的 $(k-2)$ -单形. 证明每个 σ_{ij} 在 $\partial^2 \sigma$ 中出现两次, 且符号相反.

17. 令 $J^2 = \tau_1 + \tau_2$, 这里

$$\tau_1 = [0, e_1, e_1 + e_2], \quad \tau_2 = -[0, e_2, e_2 + e_1].$$

阐明为什么把 J^2 叫做 R^2 中的正向单位正方形是合理的. 证明 ∂J^2 是四个仿射 1-单形的和. 找出这些 1-单形来. $\partial(\tau_1 - \tau_2)$ 是什么?

18. 考虑 R^3 中的有向仿射 3-单形

$$\sigma_1 = [0, e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3].$$

证明 σ_1 (当作线性变换) 的行列式是 1. 于是 σ_1 是正向的.

令 $\sigma_2, \dots, \sigma_6$ 是如下得到的五个另外的有向 3-单形: 除去 $(1, 2, 3)$ 以外 1, 2, 3 还有五种不同的排列 (i_1, i_2, i_3) . 每个 (i_1, i_2, i_3) 联系一个单形

$$s(i_1, i_2, i_3) [0, e_{i_1}, e_{i_1} + e_{i_2}, e_{i_1} + e_{i_2} + e_{i_3}],$$

这里 s 是在行列式定义里出现的符号 (这就是在习题 17 中怎样从 τ_1 得到 τ_2 的).

证明 $\sigma_2, \dots, \sigma_6$ 是正向的

令 $J^3 = \sigma_1 + \dots + \sigma_6$, 那么可以把 J^3 叫做 R^3 中的正向单位立方体.

证明 ∂J^3 是 12 个有向仿射 2-单形之和 (这些是覆盖单位立方体 I^3 曲面的 12 个三角形).

证明 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 在 σ_1 的值域中当且仅当 $0 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$.

证明 $\sigma_1, \dots, \sigma_6$ 的值域内部不交, 而它们的并能够覆盖 I^3 . (与习题 13 比较; 注意 $3! = 6$).

19. 令 J^2 及 J^3 的定义如习题 17 及 18 中那样. 定义

$$B_{01}(u, v) = (0, u, v), \quad B_{11} = (1, u, v),$$

$$B_{02}(u, v) = (u, 0, v), \quad B_{12} = (u, 1, v),$$

$$B_{03}(u, v) = (u, v, 0), \quad B_{13} = (u, v, 1).$$

这些都是仿射映射, 并把 R^2 映入 R^3 内.

令 $\beta_{ri} = B_{ri}(J^2)$, 其中 $r=0, 1, i=1, 2, 3$. 每个 β_{ri} 是一个仿射有向 2-链 (看 10.30 段). 试证

$$\partial J^3 = \sum_{i=1}^3 (-1)^i (\beta_{0i} - \beta_{1i}),$$

与习题 18 一致.

20. 说明公式

$$\int_{\partial \omega} f d\omega = \int_{\partial \omega} f \omega - \int_{\omega} (df) \wedge \omega$$

成立的条件, 并证明它推广了分部积分公式.

提示: $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$.

21. 象在例题 10.36 中那样, 考虑 $R^2 - \{0\}$ 中的 1-形式

$$\eta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

(a) 施行导出 (113) 式的计算, 并证明 $d\eta = 0$.

(b) 令 $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$, r 是某个大于 0 的数, 又令 Γ 是在 $R^2 - \{0\}$ 中的, 以 $[0, 2\pi]$ 为参数域并且使 $\Gamma(0) = \Gamma(2\pi)$ 的 \mathcal{C}^∞ 曲线, 又使闭区间 $[r(t), \Gamma(t)]$ 对任何 $t \in [0, 2\pi]$ 不包含 0. 证明

$$\int_{\Gamma} \eta = 2\pi.$$

提示: 对于 $0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq u \leq 1$, 定义

$$\Phi(t, u) = (1-u)\Gamma(t) + u\gamma(t).$$

于是 Φ 是 $R^2 - \{0\}$ 中的 2-曲面. 它的参数域是上面指出的矩形. 由于抵消 (像例题 10.32 中那样),

$$\partial \Phi = \Gamma - \gamma.$$

因 $d\eta = 0$, 用 Stokes 定理推出

$$\int_{\Gamma} \eta = \int_{\gamma} \eta.$$

(c) 取 $\Gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$. 其中正数 a, b 是固定的. 用 (b) 条证明

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = 2\pi.$$

(d) 证明在 $x \neq 0$ 的任意凸开集中

$$\eta = d\left(\arctg \frac{y}{x}\right),$$

而在 $y \neq 0$ 的任意凸开集中

$$\eta = d\left(-\arctg \frac{x}{y}\right).$$

阐明为什么虽然 η 在 $R^2 - \{0\}$ 中不是恰当的, 但这还能说明记号 $\eta = d\theta$ 是合理的.

(e) 证明 (b) 能由 (d) 导出.

(f) 设 Γ 是 $R^2 - \{0\}$ 中的任意闭 \mathscr{C}^1 -曲线, 证明

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \eta = \text{Ind}(\Gamma).$$

(曲线的指标的定义见第八章习题 23).

22. 像在例题 10.37 中那样, 在 $R^3 - \{0\}$ 中用

$$\xi = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{r^3}$$

来定义 ξ , 这里 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. 设 D 为矩形域 $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$. 又令 Σ 是 R^3 中以 D 为参数域的 2-曲面

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u.$$

(a) 证明在 $R^3 - \{0\}$ 中 $d\xi = 0$.

(b) 令参数域为 $E \subset D$, 那么曲面 S 只是 Σ 的一部分, 叫做 Σ 的约束, 证明

$$\int_S \xi = \int_E \sin u du dv = A(S).$$

像 10.43 段那样, 这里的 A 指的是面积. 注意, 这就把 (115) 式作为特殊情况包含了进来.

(c) 设 g, h_1, h_2, h_3 是 $[0, 1]$ 上的 \mathscr{C}^∞ 函数, $g > 0$. 令 $(x, y, z) = \Phi(s, t)$ 是以 I^2 为参数域而由

$$x = g(t)h_1(s), \quad y = g(t)h_2(s), \quad z = g(t)h_3(s).$$

定义的 2-曲面 Φ . 直接从 (35) 式证明

$$\int_{\Phi} \xi = 0$$

注意, Φ 的值域的形状: 对固定的 s , $\Phi(s, t)$ 历经通过 0 的某直线上的一个开区间. 因此 Φ 的值域在以原点为顶点的一个“锥”上.

(d) 令 E 为 D 中的闭矩形, 它的边与 D 的边平行. 假定 $f \in \mathscr{C}^\infty(D)$, $f > 0$. 令 Ω 是以 E 为参数域, 而由

$$\Omega(u, v) = f(u, v) \Sigma(u, v)$$

确定的二曲面. 像在 (b) 中那样定义 S , 证明

$$\int_{\Omega} \xi = \int_S \xi = A(S).$$

(因 S 是 Ω 到单位球内的“径向射影”, 这从结果来看, 把 $\int_{\Omega} \xi$ 叫做 Ω 的值域在
原点所对的“立体角”是合理的.)

提示: 考虑由

$$\Psi(t, u, v) = [1 - t + tf(u, v)] \Sigma(u, v)$$

定出的 3-曲面 Ψ , 这里的 $(u, v) \in E, 0 \leq t \leq 1$. 对于固定的 v , 映射

$$(t, u) \rightarrow \Psi(t, u, v)$$

是 2-曲面 Φ , (c) 可以用于 Φ , 这样来证明 $\int_{\Phi} \xi = 0$. u 固定时也是这样. 由
(a) 及 Stokes 定理

$$\int_{\partial \Psi} \xi = \int_{\Psi} d\xi = 0.$$

(e) 如习题 21, 取

$$\eta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

令 $\lambda = -(z/r)\eta$. 于是 λ 是开集 $V \subset R^3$ 中的 1-形式, V 中 $x^2 + y^2 > 0$. 证
明

$$\xi = d\lambda.$$

借以证明 ξ 在 V 中是恰当的.

(f) 不要用 (c), 从 (e) 导出 (d).

提示: 首先假定在 E 上 $0 < u < \pi$. 由 (e)

$$\int_{\Omega} \xi = \int_{\partial \Omega} \lambda \quad \text{且} \quad \int_S \xi = \int_{\partial S} \lambda.$$

用习题 21(d), 并注意 z/r 在 $\Sigma(u, v)$ 与 $\Omega(u, v)$ 上相同, 以证明 λ 的这两个
积分相等.

(g) 是否在过原点的每条直线的余集中 ξ 都是恰当的?

23. 固定 n . 对 $1 \leq k \leq n$ 定义 $r_k = (x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{\frac{1}{2}}$, 令 E_k 是使 $r_k > 0$ 的
一切 $x \in R^n$ 的集, 又令 ω_k 是 E_k 中由

$$\omega_k = (r_k)^{-k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k$$

确定的 $(k-1)$ -形式.

注意, 按习题 21 及习题 22 的名词来说, $\omega_2 = \eta$, $\omega_3 = \xi$. 再注意

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n = R^n - \{0\}.$$

(a) 证明在 E_k 中 $d\omega_k = 0$.

(b) 对于 $k=2, \dots, n$, 证明

$$\omega_k = d(f_k \omega_{k-1}) = (df_k) \wedge \omega_{k-1}$$

然后借此证明 ω_k 在 E_{k-1} 中是恰当的, 这里的 $f_k(\mathbf{x}) = (-1)^k g_k(x_k/r_k)$ 而

$$g_k(t) = \int_{-1}^t (1-s^2)^{(k-3)/2} ds \quad (-1 < t < 1).$$

提示: f_k 满足微分方程

$$\mathbf{x} \cdot (\nabla f_k)(\mathbf{x}) = 0$$

且

$$(D_k f_k)(\mathbf{x}) = -\frac{(-1)^k (r_{k-1})^{k-1}}{(r_k)^2}.$$

(c) ω_n 在 E_n 中是否为恰当的.

(d) 注意, (b) 是习题 22(e) 的推广. 试把习题 21 及习题 22 中一些其它的论断推广到 ω_n , n 是任意的.

24. 令 $\omega = \sum a_i(\mathbf{x}) dx_i$ 是凸开集 $E \subset R^n$ 中的 \mathscr{C}^k 类 1-形式. 假设 $d\omega = 0$, 而按照下面的提纲证明 ω 在 E 中是恰当的:

固定 $p \in E$. 定义

$$f(\mathbf{x}) = \int_{[p, \mathbf{x}]} \omega \quad (\mathbf{x} \in E),$$

把 Stokes 定理用于 E 中的仿射-有向 2-单形 $[p, \mathbf{x}, \mathbf{y}]$. 对于 $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in E$ 导出

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum (y_i - x_i) \int_0^1 a_i((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) dt.$$

因之 $(D_i f)(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x})$.

25. 假定 ω 是开集 $E \subset R^n$ 中的, 能使 E 中的每个闭曲线 γ 合于

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

的 \mathscr{C}^k 类的 1-形式. 模仿习题 24 中草拟的部分论证, 来证明 ω 在 E 内恰当.

26. 假定 ω 是 $R^3 - \{0\}$ 中的 \mathscr{C}^k 类 1-形式且 $d\omega = 0$. 证明 ω 在 $R^3 - \{0\}$ 中是恰当的.

提示: $R^3 - \{0\}$ 中的每个闭连续可微曲线是 $R^3 - \{0\}$ 的某个 2-曲面的边界. 应用 Stokes 定理及习题 25.

27. 令 E 是 R^3 中的开 3-方格, 它的棱与坐标轴平行. 设 $(a, b, c) \in E$, 而对 $i=1, 2, 3$, $f_i \in \mathscr{C}^k(E)$,

$$\omega = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy,$$

并假定在 E 中 $d\omega = 0$. 定义

$$\lambda = g_1 dx + g_2 dy,$$

这里当 $(x, y, z) \in E$ 时,

$$g_1(x, y, z) = \int_c^z f_2(x, y, s) ds - \int_b^y f_3(x, t, c) dt,$$

$$g_2(x, y, z) = - \int_c^z f_1(x, y, s) ds.$$

证明在 E 中 $d\lambda = \omega$.

计算当 $\omega = \zeta$ 时的这些积分值, 因而求出习题 22(e) 中出现的形式 λ .

28. 固定 $b > a > 0$, 对 $a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 定义

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

(Φ 的值域是 R^2 中的圆环.) 令 $\omega = x^3 dy$, 计算

$$\int_{\Phi} d\omega \text{ 及 } \int_{\partial\Phi} \omega$$

来验证它们相等.

29. 证明存在函数 α , 它有定理 10.38 证明中用到的那些性质, 并证明所得函数 F 是 \mathcal{C}' 类的. (如果 E 是开方格或开球, 这些论断就都是无关紧要的了, 因为 α 可取作常数, 参考定理 9.42.)

30. 设 N 是由 (135) 式给出的向量. 证明

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \end{bmatrix} = |N|^2.$$

再验证方程 (137).

31. 令 $E \subset R^3$ 是开集, 假定 $g \in \mathcal{C}''(E), h \in \mathcal{C}''(E)$, 并考虑向量场

$$F = g \nabla h.$$

(a) 证明

$$\nabla \cdot F = g \nabla^2 h + (\nabla g) \cdot (\nabla h),$$

这里 $\nabla^2 h = \nabla \cdot (\nabla h) = \sum \partial^2 h / \partial x_i^2$ 是 h 的所谓“Laplace 算子”.

(b) 如果 Ω 是 E 的闭子集且有正向边界 $\partial\Omega$ (如定理 10.51) 证明

$$\int_{\Omega} [g \nabla^2 h + (\nabla g) \cdot (\nabla h)] dV = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial h}{\partial n} dA.$$

这里 (按照习惯) 我们已经把 $(\Delta h) \cdot n$ 写成了 $\frac{\partial h}{\partial n}$. (如此, $\partial h / \partial n$ 是 h 在 $\partial\Omega$ 的

外法线方向的方向导数, 即所谓 h 的法向导数), 将 g 与 h 的位置互换得到式子,

$$\int_{\Omega} [h \nabla^2 g + (\nabla h) \cdot (\nabla g)] dV = \int_{\partial \Omega} h \frac{\partial g}{\partial n} dA$$

再从第一式中减去它, 得

$$\int_{\Omega} (g \nabla^2 h - h \nabla^2 g) dV = \int_{\partial \Omega} \left(g \frac{\partial h}{\partial n} - h \frac{\partial g}{\partial n} \right) dA.$$

这两个公式通常叫做 Green 恒等式.

(c) 假定 h 在 E 中是调和的, 这指的是 $\nabla^2 h = 0$. 取 $g = 1$ 便推知

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial h}{\partial n} dA = 0.$$

取 $g = h$, 便推知: 在 $\partial \Omega$ 上 $h = 0$ 时, 在 Ω 内就也 $h = 0$.

(d) 证明 Green 恒等式在 R^3 中也成立.

32. 固定 $\delta, 0 < \delta < 1$. 令 D 是合于 $0 \leq \theta \leq \pi, -\delta \leq t \leq \delta$ 的一切 $(\theta, t) \in R^2$ 的集. 又令 Φ 是 R^3 中以 D 为参数域, 而由

$$x = (1 - t \sin \theta) \cos 2\theta$$

$$y = (1 - t \sin \theta) \sin 2\theta$$

$$z = t \cos \theta$$

给出的 2-曲面, 这里 $(x, y, z) = \Phi(\theta, t)$. 注意 $\Phi(\pi, t) = \Phi(0, -t)$, 而在 D 的其余部分上, Φ 是 1-1 的.

Φ 的值域 $M = \Phi(D)$ 是著名的 Mobius 带, 它是不可定向曲面的最简单的例子.

证明下面所述各种论断: 置 $p_1 = (0, -\delta), p_2 = (\pi, -\delta), p_3 = (\pi, \delta), p_4 = (0, \delta), p_5 = p_1$. 设 $\gamma_i = [p_i, p_{i+1}], i = 1, \dots, 4$, 而 $\Gamma_i = \Phi \circ \gamma_i$. 于是

$$\partial \Phi = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4.$$

令 $a = (1, 0, -\delta), b = (1, 0, \delta)$. 那么

$$\Phi(p_1) = \Phi(p_3) = a \quad \Phi(p_2) = \Phi(p_4) = b$$

而 $\partial \Phi$ 可描述如下:

Γ_1 从 a 到 b 螺旋上升; 它在 (x, y) -平面上的射影绕原点 +1 圈 (参看第八章习题 23).

$$\Gamma_2 = [b, a].$$

Γ_3 从 a 到 b 螺旋上升, 它在 (x, y) -平面上的射影绕原点 -1 圈

$$\Gamma_4 = [b, a]$$

因此, $\partial\Phi = \Gamma_1 + \Gamma_3 + 2\Gamma_2$.

如果我们从 a 沿 Γ_1 到 b , 再继续沿 M 的“边缘”前进最后回到 a 处, 所描出的曲线是

$$\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_3.$$

这曲线又可在参数区间 $[0, 2\pi]$ 上用方程

$$x = (1 + \delta \sin \theta) \cos 2\theta,$$

$$y = (1 + \delta \sin \theta) \sin 2\theta,$$

$$z = -\delta \cos \theta$$

来表示.

应当强调 $\Gamma \neq \partial\Phi$: 令 η 是习题 21 及 22 中所讨论的 1-形式. 因 $d\eta = 0$, Stokes 定理说明

$$\int_{\partial\Phi} \eta = 0.$$

然而, 尽管 Γ 是 M 的“几何”边界, 却有

$$\int_{\Gamma} \eta = 4\pi.$$

为了避开这种混乱的可能来源, Stokes 公式(定理 10.50) 每每只对于可定向曲面 Φ 来叙述.

第十一章 LEBESGUE 理论

本章目的是讲 Lebesgue 的测度和积分理论的基本概念, 在相当广泛的条件下证明某些关键的定理, 务使发展的主要线索不致被大量的相对说来无关紧要的细节所掩盖. 所以只有若干情形作了简略的证明, 而有些容易的命题则述而不证. 然而, 凡是熟悉前几章中所用的证明技巧的读者, 肯定不难把略去的步骤补上.

Lebesgue 积分的理论可以从几种不同途径展开. 这里只讨论其中之一, 关于另外的方法, 我们推荐一些积分论的专著, 列在后面的书目中.

集函数

如果 A 与 B 是任意两集, 我们把满足 $x \in A, x \notin B$ 的一切 x 之集记为 $A - B$. 这个记号并不意味着 $B \subset A$, 我们用 0 表示空集, 如果 $A \cap B = 0$, 就说 A 与 B 不相交.

11.1 定义 设 \mathcal{R} 是由集构成的一个类, 并且由 $A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{R}$ 能推出

$$(1) \quad A \cup B \in \mathcal{R}, \quad A - B \in \mathcal{R}.$$

就称 \mathcal{R} 是环.

由于 $A \cap B = A - (A - B)$, 所以当 \mathcal{R} 是环时, 必然有 $A \cap B \in \mathcal{R}$.

如果一旦 $A_n \in \mathcal{R}, n = 1, 2, 3, \dots$, 就有

$$(2) \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R},$$

\mathcal{R} 便叫做 σ -环.

由于 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n)$, 因而如果 \mathcal{R} 是 σ -环, 必然

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}.$$

11.2 定义 如果 ϕ 能给每个 $A \in \mathcal{R}$ 指派扩大实数系内的一个数 $\phi(A)$, 便说 ϕ 是定义在 \mathcal{R} 上的集函数. 如果能从 $A \cap B = \emptyset$ 得出

$$(3) \quad \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B),$$

ϕ 便是可加的. 如果能从 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ 得出

$$(4) \quad \phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$$

ϕ 便是可数可加的.

以下一概假定 ϕ 的值域不能同时包含 $+\infty$ 及 $-\infty$; 因为这会使(3)的右端变得无意义. 此外, 我们还排除只以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为值的集函数.

有趣的是, (4)的左端与 A_n 的排列次序无关. 因此, 重排定理表明, (4)的右端只要收敛就绝对收敛; 如果不收敛, 那么它的部分和就趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$.

如果 ϕ 是可加的, 下列性质容易验证:

$$(5) \quad \phi(\emptyset) = 0.$$

如果凡当 $i \neq j$ 时, $A_i \cap A_j = \emptyset$, 必然

$$(6) \quad \phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n).$$

$$(7) \quad \phi(A_1 \cup A_2) + \phi(A_1 \cap A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2).$$

如果对于一切 A , $\phi(A) \geq 0$, 并且 $A_1 \subset A_2$, 那么

$$(8) \quad \phi(A_1) \leq \phi(A_2).$$

由于(8), 非负的可加集函数常常称为单调的.

如果 $B \subset A$ 且 $|\phi(B)| < +\infty$, 那么

$$(9) \quad \phi(A-B) = \phi(A) - \phi(B).$$

11.3 定理 假定 ϕ 在环 \mathcal{R} 上可数可加, 并且 $A_n \in \mathcal{R}, (n=1, 2, 3, \dots), A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots, A \in \mathcal{R}$, 而

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

那么, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\phi(A_n) \rightarrow \phi(A).$$

证 置 $B_1 = A_1, B_n = A_n - A_{n-1}, n=2, 3, \dots$, 那么, 当 $i \neq j$ 时, $B_i \cap B_j = \emptyset$. $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$, 且 $A = \bigcup B_n$. 所以

$$\phi(A_n) = \sum_{i=1}^n \phi(B_i),$$

于是

$$\phi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(B_i).$$

Lebesgue 测度的建立

11.4 定义 令 R^p 表示 p 维欧氏空间. R^p 中的区间指的是满足

$$(10) \quad a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i=1, \dots, p)$$

的点 $x = (x_1, \dots, x_p)$ 的集; 或是把(10)内任何或全部符号 \leq 改为 $<$ 所划定的点集. 对于任何 i 不排除 $a_i = b_i$ 的可能. 尤其是, 空集也在区间之列.

若 A 是有限个区间的并, 便称 A 为初等集.

如果 I 是区间, 不论(10)中的那些不等式包括或不包括等号, 都定义

$$m(I) = \prod_{i=1}^p (b_i - a_i).$$

如果 $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$, 并且这些区间两两不相交, 我们便令

$$(11) \quad m(A) = m(I_1) + \cdots + m(I_n).$$

我们用 \mathcal{C} 表示 R^p 的所有初等子集的类.

在这里需要验证下列性质:

(12) \mathcal{C} 是环, 但不是 σ -环.

(13) 如果 $A \in \mathcal{C}$, 那么 A 必是有限个不相交的区间的并.

(14) 如果 $A \in \mathcal{C}$, $m(A)$ 便由 (11) 完全确定; 即是 A 分解为两种不同的互不相交的区间的并时, 用这两种分解从 (11) 得出相同的数值 $m(A)$.

(15) m 在 \mathcal{C} 上可加.

当 $p=1, 2, 3$ 时, m 分别是长度, 面积和体积.

11.5 定义 设 ϕ 是在 \mathcal{C} 上定义的非负可加的集函数. 如果对于每个 $A \in \mathcal{C}$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在着闭集 $F \in \mathcal{C}$ 和开集 $G \in \mathcal{C}$, 满足 $F \subset A \subset G$, 并且

$$(16) \quad \phi(G) - \varepsilon \leq \phi(A) \leq \phi(F) + \varepsilon,$$

便称 ϕ 是正规的.

11.6 例

(a) 集函数 m 是正规的.

如果 A 是一个区间, 那么它显然满足定义 11.5 的要求. 一般情形可由 (13) 导出.

(b) 取 $R^p = R^1$, 并且令 α 是对一切实 x 有定义的单调增函数. 置

$$\mu([a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-),$$

$$\mu([a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-),$$

$$\mu((a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+),$$

$$\mu((a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+).$$

这里 $[a, b)$ 是集 $a \leq x < b$, 等等. 由于 α 可能间断, 区分这些情况是必要的. 如果 μ 象 (11) 中那样是对于若干初等集定义的, μ 在 \mathcal{C} 上是正规的. 证明和 (a) 相同.

下一个目标是证明 \mathcal{C} 上的每个正规集函数可以推广成可数可加的集函数, 后者定义在包含 \mathcal{C} 的 σ -环上.

11.7 定义 设 μ 在 \mathcal{C} 上可加, 正规, 非负并且有限. E 是 R^p 中的任何集. 考虑由初等开集 A_n 组成的 E 的覆盖:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

定义

$$(17) \quad \mu^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

此处的下确界是对 E 的一切由初等开集组成的可数覆盖来取的. $\mu^*(E)$ 叫做 E 的对应于 μ 的 外测度

显然对于所有的 E , $\mu^*(E) \geq 0$, 而且当 $E_1 \subset E_2$ 时,

$$(18) \quad \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2).$$

11.8 定理

(a) 对于每个 $A \in \mathcal{C}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(b) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 时,

$$(19) \quad \mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

注意 (a) 断言 μ^* 是 μ 从 \mathcal{C} 到 R^p 的一切子集的类上的推广. 性质 (19) 叫做 次加性.

证 选取 $A \in \mathcal{C}$ 以及 $\varepsilon > 0$.

μ 的正规性表明 A 包含在一个初等开集 G 之内, 而 $\mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$. 由于 $\mu^*(A) \leq \mu(G)$ 并且 ε 是任意的, 我们得到

$$(20) \quad \mu^*(A) \leq \mu(A)$$

μ^* 的定义说明有一列初等开集 $\{A_n\}$, 它们的并包含着 A , 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

μ 的正规性表明 A 包含着一个初等闭集 F , 合于 $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$; 又由于 F 是紧的, 一定有某个 N , 使得

$$F \subset A_1 \cup \cdots \cup A_N.$$

所以

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_N) + \varepsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^N \mu(A_i) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

这与(20)结合起来就证明了(a).

其次, 设 $E = \bigcup E_n$, 再设 $\mu^*(E_n) < +\infty$ 对一切 n 成立. 给了 $\varepsilon > 0$, 各 E_n 总有用初等开集造成的覆盖 $\{A_{nk}\}$, $k=1, 2, 3, \dots$, 使得

$$(21) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(E_n) + 2^{-n} \varepsilon.$$

于是

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

从而得到(19). 在排除了的情形, 即是对于某些 n , $\mu^*(E_n) = +\infty$ 时, (19)是当然的.

11.9 定义 对于任意的 $A \subset R^p, B \subset R^p$, 定义

$$(22) \quad S(A, B) = (A - B) \cup (B - A),$$

$$(23) \quad d(A, B) = \mu^*(S(A, B)).$$

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A, A_n) = 0$, 就记作 $A_n \rightarrow A$.

倘若有一列初等集 $\{A_n\}$ 满足 $A_n \rightarrow A$, 便称 A 为 有限 μ 可测集, 记作 $A \in \mathfrak{M}_f(\mu)$.

倘若 A 是可数多个有限 μ 可测集的并, 便称 A 为 μ 可测集, 并且记作 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$.

$S(A, B)$ 是 A 与 B 的所谓“对称差”. 马上就会知道, $d(A, B)$ 实质上是一个距离函数.

下列定理能使我们对于 μ 得到所希望的推广.

11.10 定理 $\mathfrak{M}(\mu)$ 是 σ -环, μ^* 在 $\mathfrak{M}(\mu)$ 上可数可加.

在证明本定理之前, 我们先开列 $S(A, B)$ 与 $d(A, B)$ 的一些性质, 计有

$$(24) \quad S(A, B) = S(B, A), \quad S(A, A) = 0$$

$$(25) \quad S(A, B) \subset S(A, C) \cup S(C, B)$$

$$(26) \quad \left. \begin{array}{l} S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ S(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{array} \right\} \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2).$$

(24) 显然. (25) 来自

$$(A - B) \subset (A - C) \cup (C - B), \quad (B - A) \subset (C - A) \cup (B - C).$$

(26) 的第一式得自

$$(A_1 \cup A_2) - (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 - B_1) \cup (A_2 - B_2).$$

下一步, 用 E^c 表示 E 的余集, 我们就推得

$$\begin{aligned} S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) &= S(A_1^c \cup A_2^c, B_1^c \cup B_2^c) \\ &\subset S(A_1^c, B_1^c) \cup S(A_2^c, B_2^c) = S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2); \end{aligned}$$

如果我们注意到

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c,$$

便能得到(26)的最后一式.

由(23), (19), (18)知道 $S(A, B)$ 的这些性质包含着

$$(27) \quad d(A, B) = d(B, A), \quad d(A, A) = 0$$

$$(28) \quad d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B),$$

$$(29) \quad \left. \begin{aligned} d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 - A_2, B_1 - B_2) \end{aligned} \right\} \leq d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$$

(27)和(28)两关系式表明 $d(A, B)$ 满足定义 2.15 的要求, 仅有一点例外是 $d(A, B) = 0$ 时并不能推出 $A = B$. 比如, $\mu = m$, A 可数, B 是空集时,

$$d(A, B) = m^*(A) = 0;$$

为了明白这一点, 可以用满足条件

$$m(I_n) < 2^{-n} \epsilon.$$

的区间 I_n 把 A 的第 n 个点盖住.

但是, 如果我们规定 $d(A, B) = 0$ 时, 算作 A, B 两集等价, 便可以把 R^p 的子集分成等价类, 而 $d(A, B)$ 就把这些等价类的集转化成度量空间. $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 就可以做为 \mathcal{C} 的闭包而得到. 这个解释对于证明并不重要, 然而它能说明背后的想法.

我们还需要 $d(A, B)$ 的一个性质, 这就是如果 $\mu^*(A), \mu^*(B)$ 中至少有一个是有限的, 必然

$$(30) \quad |\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B).$$

因为假如 $0 \leq \mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ 的话, 那么(28)就表明

$$d(A, 0) \leq d(A, B) + d(B, 0),$$

$$\text{即是} \quad \mu^*(A) \leq d(A, B) + \mu^*(B)$$

由于 $\mu^*(B)$ 有限, 所以

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d(A, B).$$

定理 11.10 的证明: 设 $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, $B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$. 选择 $\{A_n\}$,

$\{B_n\}$ 使 $A_n \in \mathcal{C}$, $B_n \in \mathcal{C}$, $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$, 那么 (29) 和 (30) 说明

$$(31) \quad A_n \cup B_n \rightarrow A \cup B,$$

$$(32) \quad A_n \cap B_n \rightarrow A \cap B,$$

$$(33) \quad A_n - B_n \rightarrow A - B,$$

$$(34) \quad \mu^*(A_n) \rightarrow \mu^*(A),$$

并且由 $d(A_n, A) \rightarrow 0$ 知道 $\mu^*(A) < +\infty$. 由 (31) 及 (33) 知道 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 是环.

由 (7),

$$\mu(A_n) + \mu(B_n) = \mu(A_n \cup B_n) + \mu(A_n \cap B_n).$$

令 $n \rightarrow \infty$, 由 (34) 和定理 11.8(a) 得

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B).$$

如果 $A \cap B = 0$, 那么 $\mu^*(A \cap B) = 0$.

由此知道 μ^* 在 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 上可加.

现在设 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. 那么 A 可以表示为 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 的可数个不相交的集的并. 这因为若是 $A = \bigcup A'_n$, $A'_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, 令 $A_1 = A'_1$, 再令

$$A_n = (A'_1 \cup \cdots \cup A'_n) - (A'_1 \cup \cdots \cup A'_{n-1}), \quad (n=2, 3, 4, \cdots)$$

那么

$$(35) \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

是所求的表示法. 由 (19) 知道

$$(36) \quad \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

另一方面, $A \supset A_1 \cup \cdots \cup A_n$, 再由 $\mathfrak{M}_F(\mu)$ 上 μ^* 的可加性, 我们得到

$$(37) \quad \mu^*(A) \geq \mu^*(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_n).$$

由等式 (36) 与 (37) 得出

$$(38) \quad \mu^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

假定 $\mu^*(A)$ 有限. 置 $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, 那么 (38) 表明当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$d(A, B_n) = \mu^*\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(A_i) \rightarrow 0$$

所以 $B_n \rightarrow A$; 并且由于 $B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, 易见 $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$,

这样就证明了 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ 而且 $\mu^*(A) < \infty$ 时 $A \in \mathfrak{M}_F(\mu)$.

现在 μ^* 显然在 $\mathfrak{M}(\mu)$ 上是可数可加的了. 这因为假若 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 这里 $\{A_n\}$ 是 $\mathfrak{M}(\mu)$ 内的一列不相交的集, 我们已经证明了: 如果对于每个 n , $\mu^*(A_n) < +\infty$, 那么 $[A_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)]$, (38) 成立. 在其它情形, (38) 是显然的.

最后, 我们还需证明 $\mathfrak{M}(\mu)$ 是 σ -环. 如果 $A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$, $n=1, 2, 3, \dots$, 很明显 $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}(\mu)$ (定理 2.12). 假定 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, $B \in \mathfrak{M}(\mu)$, $A_n, B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, 并且

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

那么 $(A_n \cap B_n \in \mathfrak{M}_F(\mu))$, 恒等式

$$A_n \cap B = \bigcup_{i=1}^n (A_n \cap B_i)$$

说明 $A_n \cap B \in \mathfrak{M}(\mu)$; 并且由于

$$\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n) < +\infty,$$

而 $A_n \cap B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, 因此 $A_n - B \in \mathfrak{M}_F(\mu)$, 并且因为

$$A - B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n - B)$$

而 $A - B \in \mathfrak{M}(\mu)$.

现在如果 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ 的话, 我们便径直用 $\mu(A)$ 代替 $\mu^*(A)$. 这样就把原来只定义在 \mathcal{G} 上的 μ 推广成 σ -环 $\mathfrak{M}(\mu)$ 上的可数可加集函数了. 这个推广了的集函数叫做一个测度. $\mu = m$ 的特殊情形叫做 R^n 上的 Lebesgue 测度.

11.11 评注

(a) 假若 A 是开的, 那么 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$. 这因为 R^n 内每个开集是可数个开区间的并. 想要明白这一点, 只须构造一个可数基使其成员都是开区间即可.

通过取余集, 可以知道每个闭集在 $\mathfrak{M}(\mu)$ 内.

(b) 如果 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$ 而 $\varepsilon > 0$, 那么存在着闭集 F 与开集 G , 满足

$$F \subset A \subset G,$$

并且

$$(39) \quad \mu(G - A) < \varepsilon, \quad \mu(A - F) < \varepsilon.$$

第一个不等式成立是因为 μ^* 是用初等开集覆盖来定义的, 而通过取余集就可以推出第二个不等式来.

(c) 如果从开集出发, 通过可数次运算而得到 E , 其中每次运算是取并, 取交或取余, 就说 E 是 Borel 集—— B 集. R^n 内一切 B 集的类 \mathcal{B} 是 σ -环; 实际这是包括一切开集的最小 σ -环. 根据评注(a), $E \in \mathcal{B}$ 时 $E \in \mathfrak{M}(\mu)$.

(d) 如果 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, 那么存在着 B 集 F 与 G , 满足 $F \subset A \subset G$ 并且

$$(40) \quad \mu(G - A) = \mu(A - F) = 0$$

这可以由(b)推导出来, 只须取 $\varepsilon = 1/n$, 并且令 $n \rightarrow \infty$.

由于 $A = F \cup (A - F)$, 我们可以看到每个 $A \in \mathfrak{M}(\mu)$, 是一个 B 集与零测度集的并.

B 集对于每个 μ 都 μ 可测. 然而零测度的集(即是 $\mu^*(E) = 0$

的集 E) 可以因 μ 之不同而不同.

(e) 对每个 μ , 零测度的集构成一个 σ -环.

(f) 若是 Lebesgue 测度的话, 每个可数集的测度是零. 但是还有不可数的(实际上是完备的)零测度集, Cantor 集可以做为一例. 使用 2.44 段的符号, 容易看出

$$m(E_n) = (2/3)^n, \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

又因为 $P = \bigcap E_n$, 对每个 n , $P \subset E_n$, 因而 $m(P) = 0$.

测度空间

11.12 定义 假定 X 是一个集, 它不必是欧氏空间或者甚至任何度量空间的子集. 如果存在 X 的子集(称它们为可测集)组成的 σ -环 \mathfrak{M} , 以及定义在 \mathfrak{M} 上的一个非负可数可加集函数 μ (称为测度), 就说 X 是测度空间.

此外, 假如还有 $X \in \mathfrak{M}$, 那么 X 称为可测空间.

比如, 可以取 $X = R^p$, \mathfrak{M} 是 R^p 的所有勒贝格可测子集的类, μ 是 Lebesgue 测度.

或者令 X 是一切正整数的集, \mathfrak{M} 是 X 的一切子集的类, 而 $\mu(E)$ 是 E 的元素个数.

另一个例子是由概率论所提供的, 事件可以看成是集, 而事件发生的概率是可加(或可数可加)集函数.

以下各节一概考虑可测空间. 必须强调指出, 即使牺牲掉已经达到的普遍性而局限于实数轴上的区间的 Lebesgue 测度, 我们行将讨论的积分理论在任何方面也不会变得简单. 其实, 按照更一般的情况提出这项理论的主要特点, 就会更加明确. 在那里将会看清楚, 每件事情都仅仅与 μ 在 σ -环上的可数可加性有关.

为方便起见, 我们将引用符号

$$(41) \quad \{x, P\}$$

代表具有性质 P 的一切元素 x 之集.

可测函数

11.13 定义 设 f 是定义在可测空间 X 上的函数, 在扩大的实数系内取值. 如果集

$$(42) \quad \{x | f(x) > a\}$$

对于每个实数 a 都可测, 就说函数 f 是可测的.

11.14 例 如果 $X = R^p$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mu)$ 即是定义 11.9 所定义的, 那么每个连续函数可测, 因为这时 (42) 是一开集.

11.15 定理 下面四个条件的每一个都可推出另外三个:

(43) 对于每个实数 a , $\{x | f(x) > a\}$ 可测.

(44) 对于每个实数 a , $\{x | f(x) \geq a\}$ 可测.

(45) 对于每个实数 a , $\{x | f(x) < a\}$ 可测.

(46) 对于每个实数 a , $\{x | f(x) \leq a\}$ 可测.

证 关系式

$$\{x | f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x | f(x) > a - \frac{1}{n} \right\},$$

$$\{x | f(x) < a\} = X - \{x | f(x) \geq a\},$$

$$\{x | f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x | f(x) < a + \frac{1}{n} \right\},$$

$$\{x | f(x) > a\} = X - \{x | f(x) \leq a\}$$

相继表明: 由 (43) 可得出 (44), 由 (44) 可得出 (45), 由 (45), 可得出 (46), 由 (46) 可得出 (43).

因此可以用这些条件中的任一条代替 (42) 来定义可测性.

11.16 定理 如果 f 可测, 那么 $|f|$ 可测.

证

$$\{x | |f(x)| < a\} = \{x | f(x) < a\} \cap \{x | f(x) > -a\}.$$

11.17 定理 设 $\{f_n\}$ 是一列可测函数. 当 $x \in X$ 时, 置

$$g(x) = \sup f_n(x), \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$h(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

那么 g 与 h 可测.

对于 \inf 与 \liminf , 同样的结论自然也成立.

证

$$\{x | g(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x | f_n(x) > a\},$$

$$h(x) = \inf g_m(x),$$

这里 $g_m(x) = \sup f_n(x), (n \geq m)$.

推论

(a) 假若 f, g 可测, 那么 $\max(f, g)$ 与 $\min(f, g)$ 可测. 如果

$$(47) \quad f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = -\min(f, 0),$$

那么特别地 f^+ 与 f^- 都可测.

(b) 可测函数序列的极限函数是可测函数.

11.18 定理 设 f 与 g 是定义在 X 上的可测实值函数, 而 F 是 R^2 上的实连续函数, 置

$$h(x) = F(f(x), g(x)), \quad (x \in X).$$

那么 h 可测.

特别地, $f+g$ 与 fg 可测

证 设

$$G_a = \{(u, v) | F(u, v) > a\}.$$

那么 G_a 是 R^2 的开集, 于是可以认为

$$G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

这里 $\{I_n\}$ 是一列开区间:

$$I_n = \{(u, v) \mid a_n < u < b_n, \quad c_n < v < d_n\}.$$

由于

$$\{x \mid a_n < f(x) < b_n\} = \{x \mid f(x) > a_n\} \cap \{x \mid f(x) < b_n\}$$

可测, 必然

$$\{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x \mid a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x \mid c_n < g(x) < d_n\}$$

是可测集. 因而

$$\{x \mid h(x) > \alpha\} = \{x \mid (f(x), g(x)) \in G_\alpha\}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\}$$

同样也可测.

总而言之, 把分析里的所有普通运算, 包括极限运算在内, 用于可测函数时, 仍然得到可测函数. 或者说, 寻常遇到的函数都可测.

然而这仅仅是一种粗略的说法, 这一点有下列例题(基于实数轴上的 Lebesgue 测度)为证: 如果 $h(x) = f(g(x))$, 这里的 f 可测而 g 连续, 这时 h 未必可测(详见 McShane, 第 241 页).

读者可能注意到了, 在我们讨论可测函数时未曾提及测度. 实际上, X 上的可测函数类仅仅与 σ -环 \mathcal{B} (使用定义 11.12 的记号)有关. 比如, 我们可以谈论 R^p 上的 Borel 可测函数, 即是使

$$\{x \mid f(x) > \alpha\}$$

总是 Borel 集的函数 f , 而不涉及任何特定的测度.

简单函数

11.19 定义 设 s 是定义在 X 上的实值函数. 如果 s 的值域是有限的(集), 便称 s 为 简单函数.

设 $E \subset X$, 再令

$$(48) \quad K_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \notin E). \end{cases}$$

K_E 称为 E 的特征函数.

假定 s 的值域由不同的数 c_1, \dots, c_n 组成. 设

$$E_i = \{x \mid s(x) = c_i\} \quad (i = 1, \dots, n).$$

那么

$$(49) \quad s = \sum_{i=1}^n c_i K_{E_i}.$$

这说明每个简单函数是特征函数的有限线性组合. 很明显, s 可测当且仅当集 E_1, \dots, E_n 可测.

使我们感兴趣的是, 每个函数能用简单函数来逼近:

11.20 定理 设 f 为 X 上的实函数. 那么存在一系列简单函数 $\{s_n\}$, 对于每个 $x \in X$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $s_n(x) \rightarrow f(x)$. 若 f 可测, 可以选 $\{s_n\}$ 为可测函数序列. 若 $f \geq 0$, 可以选 $\{s_n\}$ 为单调增序列.

证 设 $f \geq 0$, 对于 $n = 1, 2, 3, \dots, i = 1, 2, \dots, n2^n$ 规定

$$E_{ni} = \left\{x \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right\}, \quad F_n = \{x \mid f(x) \geq n\}.$$

置

$$(50) \quad s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} K_{E_{ni}} + n K_{F_n}.$$

一般情况, 令 $f = f^+ - f^-$, 再将前面的推断施行于 f^+ 与 f^- .

注意, (50) 所写的序列 $\{s_n\}$, 当 f 有界时, 一致收敛于 f .

积分

我们把积分定义在可测空间 X 上, 在这里 \mathfrak{M} 是可测集的 σ -环, 而 μ 是测度. 愿意把情况想象得具体些的读者可以把 X 设想成实数轴, 或者一个区间, 而把 μ 设想为 Lebesgue 测度 m .

11.21 定义 设

$$(51) \quad s(x) = \sum_{i=1}^n c_i K_{E_i}(x) \quad (x \in X, c_i > 0)$$

可测, 而且 $E \in \mathfrak{M}$. 我们定义

$$(52) \quad I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i).$$

如果 f 可测且为非负的, 我们定义

$$(53) \quad \int_E f d\mu = \sup I_E(s),$$

此处 \sup 是对于所有满足 $0 \leq s \leq f$ 的简单函数 s 而取的.

(53) 的左端叫做 f 关于测度 μ 在集 E 上的 Lebesgue 积分. 应该注意, 积分可以取 $+\infty$ 为值.

对于每个非负可测简单函数 s , 容易验证,

$$(54) \quad \int_E s d\mu = I_E(s).$$

11.22 定义 设 f 为可测函数, 考虑两积分

$$(55) \quad \int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu,$$

此处 f^+ 与 f^- 是 (47) 所定义的.

如果 (55) 的积分中至少有一个是有限的, 我们定义

$$(56) \quad \int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

若 (55) 的两个积分都有限, 那么 (56) 有限, 就说 f 在 E 上对 μ 按 Lebesgue 意义是 可积的 (或 可求和的), 并且写作: 在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$, 若 $\mu = m$, 通常的写法是: 在 E 上 $f \in \mathcal{L}$.

这命名法可能有一点混乱, 如果 (56) 是 $+\infty$ 或 $-\infty$, 那么 f 在 E 上的积分是确定的, 然而在上述的字义下 f 不可积; 只有当它在 E 上的积分有限时 f 在 E 上才是可积的.

以后我们主要关心于可测函数，尽管偶而也希望讨论较为一般的情形。

11.23 评注 下列性质是明显的：

(a) 若 f 在 E 上有界可测，而且 $\mu(E) < +\infty$ ，那么在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$ 。

(b) 如果 $x \in E$ 时 $a \leq f(x) \leq b$ ，而且 $\mu(E) < +\infty$ ，那么

$$a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E).$$

(c) 如果在 E 上 f 与 $g \in \mathcal{L}(\mu)$ ，而且当 $x \in E$ 时 $f(x) \leq g(x)$ ，那么

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

(d) 如果在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$ ，那么对于每个有限常数 c ，在 E 上 $cf \in \mathcal{L}(\mu)$ ，而且

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu.$$

(e) 如果 $\mu(E) = 0$ ，而 f 可测，那么 $\int_E f d\mu = 0$ 。

(f) 如果在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$ ， $A \in \mathfrak{M}$ ，且 $A \subset E$ ，那么在 A 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$ 。

11.24 定理

(a) 设在 X 上 f 非负可测。若 $A \in \mathfrak{M}$ ，定义

$$(57) \quad \phi(A) = \int_A f d\mu,$$

那么 ϕ 在 \mathfrak{M} 上可数可加。

(b) 如果在 X 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$ ，这结论也成立。

证 显然 (b) 可以从 (a) 推来，只需认为 $f = f^+ - f^-$ 而把 (a) 用于 f^+ 与 f^- 就成了。

要证 (a)，我们需要证明

$$(58) \quad \phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

这里, $A_n \in \mathfrak{M}$ ($n=1, 2, 3, \dots$), $i \neq j$ 时 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 而且 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

若 f 是特征函数, 那么 ϕ 的可数可加性与 μ 的可数可加性完全是一回事, 这因为

$$\int_A K_E d\mu = \mu(A \cap E).$$

若 f 是简单函数, 那么 f 的形状是 (51) 那样的; 结论仍正确.

在一般情况下, 对于每个可测的简单函数 s , 若能满足 $0 \leq s \leq f$, 必然

$$\int_A s d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

所以由 (53) 得

$$(59) \quad \phi(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

现在假若有某 n 使 $\phi(A_n) = +\infty$, 因为 $\phi(A) \geq \phi(A_n)$, 那么 (58) 是当然的. 假定每个 n 使 $\phi(A_n) < +\infty$.

给定 $\varepsilon > 0$, 我们可以选一个可测函数 s 使 $0 \leq s \leq f$ 并且

$$(60) \quad \int_{A_1} s d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} s d\mu \geq \int_{A_2} f d\mu - \varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned} \phi(A_1 \cup A_2) &\geq \int_{A_1 \cup A_2} s d\mu = \int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \\ &\geq \phi(A_1) + \phi(A_2) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

由此推出

$$\phi(A_1 \cup A_2) \geq \phi(A_1) + \phi(A_2),$$

从而对于每个 n

$$(61) \quad \phi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \phi(A_1) + \cdots + \phi(A_n).$$

由于 $A \supset A_1 \cup \cdots \cup A_n$, 由 (61) 可以得出

$$(62) \quad \phi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n),$$

于是 (58) 是 (59) 及 (62) 的应有结果.

推论 若 $A \in \mathfrak{M}$, $B \subset A$, 而且 $\mu(A-B)=0$, 那么

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

由于 $A = B \cup (A-B)$, 这可以从评注 10.23(e) 推出来.

11.25 评注 上述推论说明, 零测度集在积分时可以忽略.

若集 $\{x | f(x) \neq g(x)\} \cap E$ 是零测度的, 就写作: 在 E 上 $f \sim g$.

这样, $f \sim f$; $f \sim g$ 意味着 $g \sim f$; 由 $f \sim g, g \sim h$ 能推出 $f \sim h$. 这就是说, 关系 \sim 是等价关系.

若在 E 上 $f \sim g$, 显然可得

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu,$$

只要这些积分对每个可测子集 $A \subset E$ 存在.

若一性质 P 对于每个点 $x \in E-A$ 成立, 并且 $\mu(A)=0$, 习惯上说 P 几乎对于一切 $x \in E$ 成立, 或 P 在 E 上几乎处处成立. (“几乎处处”这个概念自然依赖于所考虑的特定测度. 在文献中, 除非有什么别的附笔, 一般指的是 Lebesgue 测度.)

若在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$, 显然 $f(x)$ 必然在 E 上几乎处处有限. 所以在大部分情形下如果我们从开始便假定所设函数是有限值的, 并不会丧失一般性.

11.26 定理 若在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$, 那么在 E 上 $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$, 而且

$$(63) \quad \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

证 记 $E = A \cup B$, 在 A 上 $f(x) \geq 0$, 而在 B 上 $f(x) < 0$. 由定理 11.24,

$$\begin{aligned} \int_E |f| d\mu &= \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu \\ &= \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

所以 $|f| \in \mathcal{L}(\mu)$. 从 $f \leq |f|$ 及 $-f \leq |f|$, 知道

$$\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu, \quad -\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu,$$

由此即得 (63).

因为 f 的可积性包含着 $|f|$ 的可积性, 所以 Lebesgue 积分常常被称为绝对收敛积分. 自然还可以定义非绝对收敛的积分, 而且在处理某些问题时这样做是重要的. 但是这种积分缺乏勒贝格积分的某些最有用的性质, 在分析中起的作用比较次要些.

11.27 定理 设 f 在 E 上可测, $|f| \leq g$, 并且在 E 上 $g \in \mathcal{L}(\mu)$. 那么在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

证 $f^+ \leq g$ 且 $f^- \leq g$.

11.28 Lebesgue 单调收敛定理 假设 $E \in \mathfrak{M}$, $\{f_n\}$ 是可测函数序列, 满足条件

$$(64) \quad 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad (x \in E).$$

$n \rightarrow \infty$ 时用,

$$(65) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in E)$$

来定义 f . 那末

$$(66) \quad \int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu \quad (n \rightarrow \infty).$$

证 由 (64) 显见, 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$(67) \quad \int_E f_n d\mu \rightarrow \alpha$$

对某个 α 成立; 又因为 $\int f_n \leq \int f$, 那么

$$(68) \quad \alpha \leq \int_E f d\mu.$$

选择 c 合于 $0 < c < 1$, 再设 s 是合于 $0 \leq s \leq f$ 的可测简单函数. 置

$$E_n = \{x \mid f_n(x) \geq cs(x)\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

由 (64), $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$, 又由 (65)

$$(69) \quad E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

对于每个 n

$$(70) \quad \int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu.$$

在 (70) 中让 $n \rightarrow \infty$. 由于积分是可数可加集函数 (定理 11.24), (69) 表明我们可以将定理 11.3 用于 (70) 内的最后积分, 从而得到

$$(71) \quad \alpha \geq c \int_E s d\mu$$

令 $c \rightarrow 1$, 得

$$\alpha \geq \int_E s d\mu.$$

而 (53) 蕴含着

$$(72) \quad \alpha \geq \int_E f d\mu.$$

这定理是 (67)、(68)、(72) 的应有结果.

11.29 定理 假设 $f = f_1 + f_2$. 在 E 上 $f_i \in \mathcal{L}(\mu)$ ($i = 1, 2$), 那么在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$, 并且

$$(73) \quad \int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu,$$

证 首先, 假设 $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$. 如果 f_1, f_2 都是简单函数, (73) 可以由 (52) 与 (54) 轻而易举地推出来. 不然的话, 选择非负的可测简单函数的单调增序列 $\{s'_n\}, \{s''_n\}$, 使它们各收敛于 f_1, f_2 . 定理 11.20 说明这是可能的. 置 $s_n = s'_n + s''_n$, 那么

$$\int_E s_n d\mu = \int_E s'_n d\mu + \int_E s''_n d\mu,$$

如果令 $n \rightarrow \infty$ 并且应用定理 11.28, (73) 就推出来了.

其次, 假设 $f_1 \geq 0, f_2 \leq 0$ 置

$$A = \{x | f(x) \geq 0\}, B = \{x | f(x) < 0\}.$$

那么 $f, f_1, -f_2$ 在 A 上非负. 因此

$$(74) \quad \int_A f_1 d\mu = \int_A f d\mu + \int_A (-f_2) d\mu = \int_A f d\mu - \int_A f_2 d\mu.$$

同样, $-f, f_1, -f_2$ 在 B 上非负, 因此

$$\int_B (-f_2) d\mu = \int_B f_1 d\mu + \int_B (-f) d\mu,$$

或

$$(75) \quad \int_B f_1 d\mu = \int_B f d\mu - \int_B f_2 d\mu,$$

把 (74) 与 (75) 相加, 即得 (73).

一般情形, E 可以分成四个集 E_i , 在每个 E_i 上 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 各有一定的符号. 由已经证过的两种情形可得

$$\int_{E_i} f d\mu = \int_{E_i} f_1 d\mu + \int_{E_i} f_2 d\mu \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

把这四个等式相加即得 (73).

现在可以对级数把定理 11.28 重述一遍.

11.30 定理 假设 $E \in \mathfrak{M}$, $\{f_n\}$ 是非负可测函数序列, 并且

$$(76) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad (x \in E),$$

那么

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

证 (76)的部分和组成单调序列.

10.31 Fatou 定理 假设 $E \in \mathfrak{M}$, 若 $\{f_n\}$ 是非负可测函数序列, 并且

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in E),$$

那么

$$(77) \quad \int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

在(77)内会有严格的不等式成立. 在习题 5 中有一个例子.

证 对于 $n=1, 2, 3, \dots$ 以及 $x \in E$ 置

$$g_n(x) = \inf_{i \geq n} f_i(x) \quad (i \geq n),$$

那么 $g_n(x)$ 在 E 上可测, 并且

$$(78) \quad 0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots,$$

$$(79) \quad g_n(x) \leq f_n(x),$$

$$(80) \quad g_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

由(78), (80) 以及定理 11.28, 知道

$$(81) \quad \int_E g_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu.$$

因此, (77) 是(79)与(81)的应有结果.

11.32 Lebesgue 控制收敛定理 假设 $E \in \mathfrak{M}$, $\{f_n\}$ 是可测函数序列, 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$(82) \quad f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in E),$$

如果在 E 上有函数 $g \in \mathcal{L}(\mu)$, 使

$$(83) \quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots, x \in E),$$

那么

$$(84) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

由于(83)的关系,才说 $\{f_n\}$ 受 g 的控制,然后我们讲到控制收敛. 根据评注 11.25, 如果(82)在 E 上几乎处处成立, 结论仍然相同.

证 首先,由(83)和定理 11.27 能推出 $f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ 以及在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

由于 $f_n + g \geq 0$, Fatou 定理表明

$$\int_E (f + g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n + g) d\mu$$

或

$$(85) \quad \int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

因为 $g - f_n \geq 0$, 同样地知道

$$\int_E (g - f) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (g - f_n) d\mu.$$

所以

$$-\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[-\int_E f_n d\mu \right],$$

这无异于

$$(86) \quad \int_E f d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

(84)内极限的存在以及(84)所说的等式现在来看是(85)与(86)的直接结果.

推论 若 $\mu(E) < +\infty$, $\{f_n\}$ 在 E 上一致有界, 且在 E 上 $f_n(x) \rightarrow f(x)$, 必然(84)成立.

一致有界收敛序列常常被称为有界收敛序列.

与 Riemann 积分的比较

下一条定理将要证明, 一个区间上的每个 Riemann 可积函数一定也 Lebesgue 可积, 并且 Riemann 可积函数要服从更严密的

连续条件。因此且莫说 Lebesgue 理论可以将广泛得多的一类函数类进行积分，而其最大优点或许在于使许多极限运算变得容易掌握，从这个观点来看，Lebesgue 的收敛定理完全可以认为是 Lebesgue 理论的核心。

Riemann 理论遇到的困难之一，是 Riemann 可积函数（甚至连续函数）的极限可以不是 Riemann 可积的。现在，因为可测函数的极限一定可测，所以这个困难几乎消除了。

令可测空间 X 是实轴上的区间 $[a, b]$ ，取 $\mu = m$ (Lebesgue 测度)，并且 \mathfrak{M} 是 $[a, b]$ 的 Lebesgue 可测子集之类。习惯上采用熟悉的符号

$$\int_a^b f dx$$

代替 $\int_X f dm$ ，来表示 f 在 $[a, b]$ 上的 Lebesgue 积分。为了区别 Riemann 积分与 Lebesgue 积分，我们现在把前者表示为

$$\mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

11.33 定理

(a) 如果在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathcal{R}$ ，必然在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathcal{L}$ 而且

$$(87) \quad \int_a^b f dx = \mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

(b) 假定 f 在 $[a, b]$ 上有界，那么在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathcal{R}$ ，当且仅当 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续。

证 假设 f 有界，根据定义 6.1 与定理 6.4，存在着 $[a, b]$ 的一系列分割 $\{P_k\}$ ，其中 P_{k+1} 是 P_k 的加细，而 P_k 中相邻两点的距离都小于 $1/k$ ，而且

$$(88) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} L(P_k, f) = \mathcal{R} \int_a^b f dx, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} U(P_k, f) = \mathcal{R} \int_a^b f dx.$$

(本证明中所有积分都是在 $[a, b]$ 上取的)。

如果 $P_k = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 其中 $x_0 = a, x_n = b$, 规定

$$U_k(a) = L_k(a) = f(a);$$

采用定义 6.1 所介绍的符号, 对于 $1 \leq i \leq n$, 当 $x_{i-1} < x < x_i$ 时, 令 $U_k(x) = M_i, L_k(x) = m_i$, 这时

$$(89) \quad L(P_k, f) = \int L_k dx, \quad U(P_k, f) = \int U_k dx,$$

并且因为 P_{k+1} 加细了 P_k , 那么对于一切 $x \in [a, b]$

$$(90) \quad L_1(x) \leq L_2(x) \leq \dots \leq f(x) \leq \dots \leq U_2(x) \leq U_1(x)$$

根据(90), 必然存在着

$$(91) \quad L(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(x), \quad U(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(x).$$

留心 L 与 U 都是 $[a, b]$ 上的有界可测函数, 注意

$$(92) \quad L(x) \leq f(x) \leq U(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

而且根据(88)与(90)和单调收敛定理, 知道,

$$(93) \quad \int L dx = \mathcal{R} \int f dx, \quad \int U dx = \mathcal{R} \int f dx.$$

一直到现在, 除去假设 f 是 $[a, b]$ 上的有界实函数而外, 关于 f 没有作别的假设.

要把证明完成, 注意 $f \in \mathcal{R}$ 当且仅当它的上下 Riemann 积分相等, 从而当且仅当

$$(94) \quad \int L dx = \int U dx;$$

因为 $L \leq U$, (94) 实现当且仅当对于几乎所有 $x \in [a, b]$, $L(x) = U(x)$ (习题 1).

在那时候, 就能由(92)推出在 $[a, b]$ 上几乎处处

$$(95) \quad L(x) = f(x) = U(x),$$

所以 f 可测, 而(87)是(93)与(95)的必然结果.

此外如果 x 不属于任何 P_k , 便十分容易知道 $U(x) = L(x)$ 当且仅当 f 在 x 点连续. 因为 P_k 各集的并可数, 它的测度是 0, 于

是可以断定 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续当且仅当几乎处处 $L(x) = U(x)$, 从而当且仅当 $f \in \mathcal{R}$ (犹如上边见到的).

这就把证明完成了.

积分和微分之间常见的联系, 大部可以转入 Lebesgue 理论中来. 若在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathcal{L}$, 并且

$$(96) \quad F(x) = \int_a^x f dt \quad (a \leq x \leq b),$$

那么在 $[a, b]$ 上几乎处处 $F'(x) = f(x)$.

反之, 若 F 在 $[a, b]$ 的每一点处可微, (“几乎处处”在这里是不够的!) 并且在 $[a, b]$ 上 $F' \in \mathcal{L}$, 则

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

关于这两条定理的证明, 建议读者阅览参考书目里开列的任何关于积分的书.

复函数的积分

假设 f 是定义在测度空间 X 上的复值函数, $f = u + iv$, u, v 都是实的. 当且仅当 u, v 都是可测函数时我们称 f 是可测的.

容易验证, 复可测函数的和与积仍然可测.

由于

$$|f| = \sqrt{u^2 + v^2},$$

定理 11.18 说明对于每个复可测函数 f , $|f|$ 是可测的.

假设 μ 是 X 上的测度, E 是 X 的可测子集, f 是 X 上的复值函数. 当 f 可测, 并且

$$(97) \quad \int_E |f| d\mu < +\infty,$$

就说在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$, 而且当 (97) 成立时, 定义

$$\int_E f d\mu = \int_E u d\mu + i \int_E v d\mu,$$

由于 $|u| \leq |f|$, $|v| \leq |f|$, 并且 $|f| \leq |u| + |v|$, 显然, 当且仅当在 E 上 $u \in \mathcal{L}(\mu)$ 以及 $v \in \mathcal{L}(\mu)$ 时 (97) 成立.

定理 11.23(a), (d), (e), (f), 11.24(b), 11.26, 11.27, 11.29, 以及 11.32 现在都可以推广到复函数的 Lebesgue 积分. 证明都很简单. 只有定理 11.26 的证明有一点趣味:

如果在 E 上 $f \in \mathcal{L}$, 存在一复数 c , $|c| = 1$ 使

$$c \int_E f d\mu \geq 0,$$

置 $g = cf = u + iv$, u, v 是实的, 那么

$$\left| \int_E f d\mu \right| = c \int_E f d\mu = \int_E g d\mu = \int_E u d\mu \leq \int_E |f| d\mu.$$

上列等式中的第三个成立, 是因为前面的等式表明 $\int_E g d\mu$ 是实数.

\mathcal{L}^2 类的函数

作为 Lebesgue 理论的一个应用我们现在推广 Parseval 定理 (在第 8 章只对于 Riemann 可积的函数证过), 并且对于函数的正规正交集(orthonormal sets)证明 Riesz-Fischer 定理.

11.34 定义 设 X 是可测空间. 如果复函数 f 可测并且

$$\int_X |f|^2 d\mu < +\infty,$$

就说在 X 上 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$. 如果 μ 是 Lebesgue 测度, 就说 $f \in \mathcal{L}^2$. 当 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ 时, (从现在起, 省略“在 X 上”三个字) 定义

$$\|f\| = \left\{ \int_X |f|^2 d\mu \right\}^{\frac{1}{2}},$$

而把 $\|f\|$ 叫做 f 的 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 范数.

11.35 定理 假设 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. 那么 $fg \in \mathcal{L}(\mu)$,

并且

$$(98) \quad \int_x |fg| d\mu \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

这是我们在级数和 Riemann 积分中已经遇到的 Schwarz 不等式, 它是不等式

$$0 \leq \int_x (|f| + \lambda |g|)^2 d\mu = \|f\|^2 + 2\lambda \int_x |fg| d\mu + \lambda^2 \|g\|^2$$

的直接结果, 这不等式对于每个实数 λ 成立.

11.36 定理 如果 $f \in \mathcal{L}^2(\mu), g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, 那么 $f+g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, 而且

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

证 Schwarz 不等式说明

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= \int |f|^2 + \int f\bar{g} + \int \bar{f}g + \int |g|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

11.37 评注 如果我们把 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 内两函数 f 与 g 间的距离定义为 $\|f-g\|$, 可以知道定义 2.15 的条件都能满足, 仅有的例外是 $\|f-g\|=0$ 并不意味着 $f(x)=g(x)$ 对一切 x 成立, 而只是几乎对一切 x 成立. 所以如果把只在一个零测度集上不不同的函数等同起来, $\mathcal{L}^2(\mu)$ 便是一个度量空间.

现在我们在实轴的一个区间上对于 Lebesgue 测度来考虑 \mathcal{L}^2 .

11.38 定理 连续函数在 $[a, b]$ 上构成 \mathcal{L}^2 的一个稠子集.

更明确地说, 这里的意思是: 对于 $[a, b]$ 上的任何 $f \in \mathcal{L}^2$, 和任何 $\varepsilon > 0$, 总有 $[a, b]$ 上的连续函数 g , 使得

$$\|f-g\| = \left\{ \int_a^b (f-g)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

证 说 f 在 \mathcal{L}^2 内被序列 $\{g_n\}$ 逼近, 就是说 $n \rightarrow \infty$ 时 $\|f - g_n\| \rightarrow 0$.

设 A 是 $[a, b]$ 的闭子集, K_A 是它的特征函数. 置

$$t(x) = \inf |x - y| \quad (y \in A),$$

再令

$$g_n(x) = \frac{1}{1 + nt(x)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

那么 g_n 在 $[a, b]$ 上连续, 在 A 上 $g_n(x) = 1$, 在 $B = [a, b] - A$ 上 $g_n(x) \rightarrow 0$. 因此根据定理 11.32

$$\|g_n - K_A\| = \left\{ \int_B g_n^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0.$$

由此可见, 闭集的特征函数可以在 \mathcal{L}^2 内用连续函数逼近.

由(39)知道, 对于任意可测集的特征函数有同样的结果, 因而对于可测简单函数也如此.

若 $f \geq 0$ 且 $f \in \mathcal{L}^2$, 令 $\{s_n\}$ 为非负可测简单函数的单调增序列, 它满足 $s_n(x) \rightarrow f(x)$. 由于 $|f - s_n|^2 \leq f^2$, 定理 11.32 说明 $\|f - s_n\| \rightarrow 0$.

一般情形随之而来.

11.39 定义 我们说复函数序列 $\{\phi_n\}$ 是可测空间 X 上函数的正规正交系, 就是要求

$$\int_X \phi_n \bar{\phi}_m d\mu = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 1 & (n = m). \end{cases}$$

特别地, 我们必有 $\phi_n \in \mathcal{L}^2(\mu)$. 若是 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ 而且

$$c_n = \int f \bar{\phi}_n d\mu \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

便照定义 8.10 那样, 写成

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n.$$

三角 Fourier 级数的定义同样可以在 $[-\pi, \pi]$ 上扩充到 \mathcal{L}^2 (或甚至扩充到 \mathcal{L}). 定理 8.11 与 8.12 (Bessel 不等式) 对任何 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ 成立. 证明逐字逐句地相同.

我们现在可以证 Parseval 定理了.

11.40 定理 假设在 $[-\pi, \pi]$ 上 $f \in \mathcal{L}^2$,

$$(99) \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

令 s_n 是 (99) 的第 n 个部分和, 那么

$$(100) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0,$$

$$(101) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx$$

证 给定 $\varepsilon > 0$. 由定理 11.38, 存在连续函数 g , 使得

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

进一步容易知道, 我们可以安排得 $g(\pi) = g(-\pi)$. 那末 $g(x)$ 可以拓展成周期连续函数. 由定理 8.16, 有一个三角多项式 T , 比如说是 N 阶的, 使得

$$\|g - T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此, 根据定理 8.11 (扩充到 \mathcal{L}^2), 当 $n \geq N$ 时

$$\|s_n - f\| \leq \|T - f\| \leq \varepsilon,$$

从而 (100) 成立. 照定理 8.16 的证明中所做过的那样, 可以从 (100) 推得等式 (101).

推论 若在 $[-\pi, \pi]$ 上 $f \in \mathcal{L}^2$, 且若

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

必然 $\|f\| = 0$.

这样一来,如果 \mathcal{L}^2 里的两个函数能取得相同的 Fourier 级数,那么它们至多在一个零测度集上不相同.

11.41 定义 设 f 与 $f_n \in \mathcal{L}^2(\mu) (n=1, 2, 3, \dots)$, 如果 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, 就说 $\{f_n\}$ 在 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 内收敛于 f . 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 有一个正整数 N 使得当 $n \geq N$ 与 $m \geq N$ 时, $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$, 就说 $\{f_n\}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 内的 Cauchy 序列.

11.42 定理 假若 $\{f_n\}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 内的 Cauchy 序列, 必然存在着一个函数 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, 使 $\{f_n\}$ 在 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 内收敛于 f .

换言之,这是说 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 是完备度量空间.

证 由于 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 序列, 我们可以找到一个序列 $\{n_k\}$, $k=1, 2, 3, \dots$ 使

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\| \leq \frac{1}{2^k} \quad (k=1, 2, \dots),$$

选一个函数 $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. 根据 Schwarz 不等式, 得

$$\int_X |g(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})| d\mu \leq \frac{\|g\|}{2^k}.$$

由此得

$$(102) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_X |g(f_{n_k} - f_{n_{k+1}})| d\mu \leq \|g\|.$$

由定理 11.30, 在(102)内可以交换求和与积分的次序, 从而在 X 上几乎处处

$$(103) \quad |g(x)| \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| < +\infty.$$

所以在 X 上几乎处处

$$(104) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| < +\infty.$$

这因为, 倘若(104)的级数在一个正测度集 E 上发散, 我们便可以

使 $g(x)$ 在 E 的一个正测度子集上非零, 这就与 (103) 矛盾了.

由于在 X 上几乎处处收敛的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

的第 k 个部分和是 $f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_1}(x)$, 可见等式

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$$

能对于几乎一切 $x \in X$ 确定函数 $f(x)$, 而在 X 的其余点上 $f(x)$ 如何定义就无关紧要了.

现在我们来证明这个函数 f 具有所要求的性质. 给定了 $\varepsilon > 0$, 再照定义 11.41 所指示的选择 N , 若 $n_k > N$, Fatou 定理表明

$$\|f - f_{n_k}\| \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|f_{n_i} - f_{n_k}\| \leq \varepsilon.$$

所以 $f - f_{n_k} \in \mathcal{L}^2(\mu)$, 又由于 $f = (f - f_{n_k}) + f_{n_k}$, 知道 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$. 再由于 ε 的任意性,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_{n_k}\| = 0.$$

最后, 不等式

$$(105) \quad \|f - f_n\| \leq \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_n\|$$

说明 $\{f_n\}$ 在 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 内收敛于 f ; 这因为如果我们取得 n 与 n_k 相当大, (105) 右端的两项都可以弄得任意小.

11.43 Riesz-Fischer 定理 设 $\{\phi_n\}$ 是 X 上的正规正交系. 假定 $\sum |c_n|^2$ 收敛, 再设 $s_n = c_1 \phi_1 + \cdots + c_n \phi_n$, 必然存在一个函数 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, 使 $\{s_n\}$ 在 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 内收敛于 f , 并且

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n.$$

证 当 $n > m$ 时,

$$\|s_n - s_m\|^2 = |c_{m+1}|^2 + \cdots + |c_n|^2,$$

所以 $\{s_n\}$ 是 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 内的 Cauchy 序列. 由定理 11.42, 有一个函数 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0.$$

但是当 $n > k$ 时,

$$\int_X f \bar{\phi}_k d\mu - c_k = \int_X f \bar{\phi}_k d\mu - \int_X s_n \bar{\phi}_k d\mu,$$

所以

$$\left| \int_X f \bar{\phi}_k d\mu - c_k \right| \leq \|f - s_n\| \cdot \|\phi_k\| = \|f - s_n\|.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$c_k = \int_X f \bar{\phi}_k d\mu \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

证完.

11.44 定义 $\{\phi_n\}$ 是正规正交集, $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$. 如果由等式

$$\int_X f \bar{\phi}_n d\mu = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

能推出 $\|f\|=0$, 就说 $\{\phi_n\}$ 是完备的.

在定理 11.40 的推论内我们从 Parseval 等式(101)导出了三角系的完备性. 反之, Parseval 等式对于每个完备正规正交集成立.

11.45 定理 设 $\{\phi_n\}$ 是完备正规正交系. 如果 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, 并且

$$(106) \quad f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n,$$

必然

$$(107) \quad \int_X |f|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

证 根据 Bessel 不等式, 知道 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ 收敛. 令

$$s_n = c_1 \phi_1 + \cdots + c_n \phi_n,$$

Riesz-Fischer 定理表明, 有一个函数 $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ 合于

$$(108) \quad g \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n,$$

并且 $\|g - s_n\| \rightarrow 0$. 从而 $\|s_n\| \rightarrow \|g\|$, 因为

$$\|s_n\|^2 = |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2.$$

我们得到

$$(109) \quad \int_X |g|^2 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

现在 (106), (108) 以及 $\{\phi_n\}$ 的完备性可以说明 $\|f - g\| = 0$, 因此能由 (109) 得出 (107).

把定理 11.34 与 11.45 合并起来, 我们得到一个非常有趣的结论, 这就是每个完备正规正交系能在一切函数 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ (把几乎处处相等的函数等同起来), 与一切使 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ 收敛的序列 $\{c_n\}$ 之间, 建立一一对应. 表达式

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n,$$

以及 Parseval 等式合在一起表明 $\mathcal{L}^2(\mu)$ 可以被看成一个无限维的欧氏空间 (所谓 Hilbert 空间), 在其中点 f 的坐标是 c_n , 而函数 ϕ_n 是坐标向量.

习题

1. 若 $f \geq 0$ 且 $\int_X f d\mu = 0$, 求证在 E 上几乎处处 $f(x) = 0$. 提示: 令 E_n

是 E 的子集, 在它上面 $f(x) > \frac{1}{n}$. 认为 $A = \bigcup E_n$, 那么 $\mu(A) = 0$ 当且仅当对每个 n , $\mu(E_n) = 0$.

2. 如果对于可测集 E 的每个可测子集 A , $\int_A f d\mu = 0$, 那么在 E 上几乎处处 $f(x) = 0$.

3. 若 $\{f_n\}$ 是一列可测函数, 求证 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点集是可测的.

4. 若在 E 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$, 又 g 在 E 上有界可测, 那么在 E 上 $fg \in \mathcal{L}(\mu)$.

5. 置

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \\ 1 & (\frac{1}{2} < x \leq 1), \end{cases}$$

$$f_{2n}(x) = g(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$f_{2n+1}(x) = g(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

求证

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

但是

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2},$$

[与 (77) 对比.]

6. 设

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & (|x| \leq n), \\ 0 & (|x| > n), \end{cases}$$

必然 $f_n(x) \rightarrow 0$ 在 R^1 上一致成立, 但是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n dx = 2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(用 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 代替了 \int_R .) 可见一致收敛并不包含定理 11.32 意义下的控制收敛. 然而, 在有限测度的集上, 有界函数的一致收敛序列确实满足定理 11.32.

7. 找出在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathcal{R}(a)$ 的一个充分必要条件. 提示: 考虑例 11.6 (b) 和定理 11.33.

8. 若在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathcal{R}$, 又若 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$; 求证 $F'(x) = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处成立.

9. 求证 (96) 里给出的函数 F 在 $[a, b]$ 上连续.

10. 若 $\mu(X) < +\infty$, 并且在 X 上 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, 求证在 X 上 $f \in \mathcal{L}(\mu)$. 若 $\mu(X) = +\infty$, 此事不成立. 例如,

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

时, 在 R^1 上 $f \in \mathcal{L}^2$, 但在 R^1 上 $f \notin \mathcal{L}$.

11. 若在 X 上 $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, 定义 f 与 g 间的距离为

$$\int_X |f-g| d\mu.$$

求证 $\mathcal{L}(\mu)$ 是完备度量空间.

12. 假定

(a) 当 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 时, $|f(x, y)| \leq 1$,

(b) 当 x 固定时, $f(x, y)$ 是 y 的连续函数,

(c) 当 y 固定时, $f(x, y)$ 是 x 的连续函数.

置 $g(x) = \int_0^1 f(x, y) dy \quad (0 \leq x \leq 1),$

g 是连续的吗?

13. 认为函数

$$f_n(x) = \sin nx \quad (n=1, 2, 3, \dots, -\pi \leq x \leq \pi)$$

是 \mathcal{L}^2 里的点. 证明这个点集是闭的有界集, 但不是紧集.

14. 证明复值函数 f 可测, 当且仅当对于平面上的每个开集 $V, f^{-1}(V)$ 可测.

15. 设 \mathcal{C} 是 $(0, 1]$ 的一切初等子集构成的环. 如果 $0 < a \leq b \leq 1$, 定义

$$\begin{aligned} \phi([a, b]) &= \phi([a, b)) = \phi((a, b]) \\ &= \phi((a, b)) = b - a, \end{aligned}$$

但如果 $0 < b \leq 1$, 便定义

$$\phi((0, b)) = \phi((0, b]) = 1 + b.$$

证明 ϕ 是 \mathcal{C} 上的一个可加集函数, 它不是正规的, 并且不能延拓为 σ -环上的可数可加集函数.

★ 16. 假定 $\{n_k\}$ 是正整数的增序列, 并且 E 是 $(-\pi, \pi)$ 内一切使 $\{\sin n_k x\}$ 收敛的点 x 的集. 求证 $m(E) = 0$.

提示: 对于每个 $A \subset E$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$\int_A \sin n_k x dx \rightarrow 0,$$

并且

$$2 \int_A (\sin n_k x)^2 dx = \int_A (1 - \cos 2n_k x) dx \rightarrow m(A).$$

17. 假定 $E \subset (-\pi, \pi)$, $m(E) > 0$, $\delta > 0$. 应用 Bessel 不等式证明至多有有限个整数 n 能使 $\sin nx \geq \delta$ 对一切 $x \in E$ 成立.

18. 假定 $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^2(\mu)$. 求证

$$\left| \int f \bar{g} d\mu \right|^2 = \int |f|^2 d\mu \cdot \int |g|^2 d\mu$$

当且仅当有一个常数 c 使 $g(x) = cf(x)$ 几乎处处成立. (与定理 10.35 对比.)

参 考 书 目

- ARTIN, E.: "The Gamma Function", Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.
- BOAS, R. P.: "A Primer of Real Functions," Carus Mathematical Monograph No. 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.
- BUCK, R. C. (ed.): "Studies in Modern Analysis," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- : "Advanced Calculus," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
- BURKILL, J. C.: "The Lebesgue Integral," Cambridge University Press, New York, 1951.
- DIEUDONNÉ, J.: "Foundations of Modern Analysis," Academic Press, Inc., New York, 1960.
- FLEMING, W. H.: "Functions of Several Variables," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.
- GRAVES, L. M.: "The Theory of Functions of Real Variables," 2d ed. McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
- HALMOS, P. R.: "Measure Theory," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1950.
- : "Finite-dimensional Vector Spaces," 2d ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1958.
- HARDY, G. H.: "Pure Mathematics," 9th ed., Cambridge University

- Press, New York, 1947.
- and ROGOSINSKI, W.: "Fourier Series," 2d ed., Cambridge University Press, New York, 1950.
- HERSTEIN, I. N.: "Topics in Algebra." Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.
- HEWITT, E., and STROMBERG, K.: "Real and Abstract Analysis," Springer Publishing Co., Inc., New York, 1965.
- KELLOGG, O. D.: "Foundations of Potential Theory," Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1940.
- KNOPP, K.: "Theory and Application of Infinite Series," Blackie & Son, Ltd., Glasgow, 1928.
- LANDAU, E. G. H.: "Foundations of Analysis," Chelsea Publishing Company, New York, 1951.
- MCSHANE, E. J.: "Integration," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.
- NIVEN, I. M.: "Irrational Numbers," Carus Mathematical Monograph No. 11, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.
- ROYDEN, H. L.: "Real Analysis," The Macmillan Company, New York, 1963.
- RUDIN, W.: "Real and Complex Analysis," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.
- SIMMONS, G. F.: "Topology and Modern Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
- SINGER, I. M., and THORPE, J. A.: "Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry," Scott, Foresman and Company, Glenview, Ill., 1967.
- SMITH, K. T.: "Primer of Modern Analysis," Bogden and Quigley, Tarrytown-on-Hudson, N. Y., 1971.
- SPIVAK, M.: "Calculus on Manifolds," W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.
- THURSTON, H. A.: "The Number System" Blackie & Son, Ltd London-Glasgow, 1956.