具体数学阅读笔记-chap2

weiyuan

更新：2022-07-04

1 求和

1.1 求和符号

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant k < 100} k^2 &= 1^2 + 3^2 + \cdots + 99^2 \\
&= 1^2 + 2^2 + \cdots + 100^2 - (2^2 + 4^2 + \ldots 100^2) \\
&= 1^2 + 2^2 + \cdots + 100^2 - 4 \times (1^2 + 2^2 + \ldots 50^2) \\
&= \frac{100 \times 101 \times 201}{6} - 4 \frac{50 \times 51 \times 101}{6} \\
&= \frac{100 \times 101}{6} (201 - 102) \\
&= \frac{99 \times 100 \times 101}{6} \\
&= 166650
\end{aligned}$$

一般形式比有确定界限形式更好处理

$k \to k+1$

一般形式,

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \sum_{1\leqslant k+1\leqslant n} a_{k+1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} a_{k+1} \tag{2}$$

有确定界限形式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k-1} \tag{3}$$

不要轻易省略 0 项计算有效性不等同于理解的有效性

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(n-k) \quad \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k)$$

保持求和界限简单大有裨益

$$\sum_{\substack{p\leqslant N \\ p\text{是素数}}} \frac{1}{p} = \sum_{p} [p\text{是素数}][p\leqslant N]/p \tag{4}$$

$$[p(k)] \text{ 约定} \to p(k) \text{ 为假} \begin{cases} [p(k)]\text{必定是}0 \\ a_k[p(k)], a_k\text{无意义, } a_k[p(k)]\text{仍是}0 \end{cases}$$

由约定 $\frac{[0\text{是素数}][0\leqslant N]}{0} = 0$

1.2 求和与递归式 Sums and recurrences

和式

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{5}$$

等价于递归式

封闭形式解递归式的值 $\Rightarrow$ 封闭形式解和式

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_n = S_{n-1} + a_n, \quad n > 0. \end{cases} \tag{6}$$

若 $a_n = const. + k \cdot n$, 则有

$$\begin{cases} R_0 = \alpha \\ R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n, \quad n > 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + \beta + \gamma \\ R_2 &= R_0 + 2\beta + 3\gamma \\ &\vdots \\ R_n &= A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \end{aligned}$$

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \tag{8}$$

repertoire method 令 $R_n = 1$, 则 $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$,

$$A(n) = 1$$

令 $R_n = n$, 则 $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$,

$$B(n) = n$$

令 $R_n = n^2$, 则 $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 2$,

$$C(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

例 1.1

$$\sum_{k=0}^{n}(a + bk)$$

解 1

$$\begin{cases} R_0 = a \\ R_n = R_{n-1} + a + bn \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_0 = \alpha \\ R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n \end{cases}$$

$\alpha = \beta = a, \gamma = b$

$$\begin{aligned} A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma &= aA(n) + aB(n) + bC(n) \\ &= a + an + b\frac{n(n+1)}{2} \\ &= a(n+1) + \frac{bn(n+1)}{2} \end{aligned}$$

对上述递归情况进行推广

$$\begin{cases} R_0 = \alpha \\ R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2, \quad n > 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta \tag{10}$$

$\delta = 0$ 时 (9) 与 (7) 一致, 说明 $A(n), B(n), C(n)$ 不变

$R_n = n^3$

$$\begin{aligned} R_n = R_{n-1} &= n^3 - (n-1)^3 \\ &= 3n^2 - 3n + 1 \end{aligned}$$

解得 $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = -3, \delta = 3$

$$\begin{aligned} n^3 &= B(n) - 3C(n) + 3D(n) \\ &= n - 3\frac{n(n+1)}{2} + 3D(n) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
3D(n) &= n^3 - n + 3\frac{n(n+1)}{2} \\
&= n(n+1)\left[(n-1) + \frac{3}{2}\right] \\
&= n(n+1)(n+\frac{1}{2}) \\
D(n) &= \frac{1}{3}\left((n+1)(n+\frac{1}{2})n\right)
\end{aligned}
$$

1. 和式用递归式求解

2. 递归式用和式求解

$$
\begin{cases}
T_0 & = 0 \\
T_n & = 2T_{n-1} + 1, \quad n > 0 \\
fallings &
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\frac{T_0}{2^0} & = 0 \\
\frac{T_n}{2^n} & = \frac{T_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \quad n > 0
\end{cases}
$$

记 $S_n = \frac{T_n}{2^n}$

求和因子 s_n

$$
a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n
$$

$$
s_n a_n T_n = s_n b_n T_{n-1} + s_n c_n
$$

选取求和因子使得 $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$ 这样一来，如果记 $S_n = S_{n-1} + s_n c_n$ ，我们就得到一个和式-递归式

$$
S_n = S_{n-1} + s_n c_n
$$

$$
S_n = s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k = s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k
$$

$$
T_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right) \tag{11}
$$

例如，当 $n=1$ 时得到 $T_1=\dfrac{(s_1b_1T_0+s_1c_1)}{s_1a_1}=\dfrac{(b_1T_0+c_1)}{a_1}$ [1]

但是，我们怎样才能有足够的智慧求出正确的 s_n 呢？没有问题：关系式 $s_n=\dfrac{s_{n-1}a_{-1}}{b_n}$ 可以被展开，从而我们发现，分式

$$s_n=\frac{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1}{b_nb_{n-1}\dots b_2} \tag{12}$$

或者这个值的任何适当的常数倍，会是一个合适的求和因子. 例如，河内塔递归式有 $a_n=1$ 和 $b_n=2$，由刚刚推导出来的一般方法可知，如果要把递归式转化为和式，那么 $s_n=2^{-n}$ 就是一个用来相乘的好东西. 发现这个乘数并不需要闪光的思想灵感.

我们必须小心谨慎，永远不用 0 做除数. 只要所有的 a 和所有的 b 都不为零，那么求和因子方法就能奏效.

我们来把这些想法应用到"快速排序"研究中所出现的递归式，快速排序是计算机内部数据排序的一种最重要的方法. 当把它应用到有 n 个随机排列的项目时，用典型的快速排序方法所做的比较步骤的平均次数满足递归式

$$C_0=C_1=0; C_n=n+1+\tfrac{2}{n}\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}C_k, \quad n>1. \tag{13}$$

$C_2=3$, $C_3=6$, $C_4=\frac{19}{2}$

$$C_n=n+1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}C_k, \quad n>1.$$

消去分母中的 n

$$nC_n=n(n+1)+2\sum_{k=0}^{n-1}C_k, \quad n>1. \tag{14}$$

[1] s_1 的值消去了，所以它可以是除零以外的任何数.）

$n \to (n-1)$

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)n + 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k, \quad n-1 > 1. \tag{15}$$

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1}, \quad n > 2.$$

递归式化为

$$C_0 = C_1 = 0; C_2 = 3nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n, \quad n > 2. \tag{16}$$

使用求和因子方法处理 $a_n = n, b_n = n+1$ 且

$$c_n = 2n - 2[n=1] + 2[n=2].$$

故而我们现在能用求和因子方法．前面描述的一般方法告诉我们，要用

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1}{b_n b_{n-1}\ldots b_2} = \frac{(n-1)\times(n-2)\cdots\times 1}{(n+1)\times n\times\cdots\times 3} = \frac{2}{(n+1)n}$$

的某个倍数来遍乘该递归式

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right)$$

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{n+1}{2}\left(0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right) \\
&= \frac{n+1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} 2k\right) \\
&= 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{2}{3}(n+1), \quad n > 1
\end{aligned}$$

mynote(！这里的推导有问题，$s_0 = 0$ 不能直接代入)

调和数（harmonic number）

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{17}$$

之所以这样命名，是因为小提琴弦所产生的第 k 个泛音（harmonic）是弦长 $\frac{1}{k}$ 处所产生的基音.

$$\begin{aligned}
\sum_{q \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k+1} &= \sum_{1 \leqslant k-1 \leqslant n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{2 \leqslant k \leqslant n+1} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k} - \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1} \\
&= H_n - \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$C_n = 2(n+1)H_n - \frac{8}{3}n - \frac{2}{3},\ n > 1. \tag{18}$$

1.3 求和式处理

分配律 distributive law

结合律 associative law

交换律 communicative law

等差级数 arithmetic progression

扰动法 perturbation method 把单独一次从和式中分出去

几何级数 geometric progression

1.4 多重求和

1.4.1 Exercise 1

$$A=\begin{bmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

求 $S_{\triangleleft}=\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_j a_k$ [2]

解 2 $\because a_j a_k = a_k a_j$,$\therefore$ 矩阵 A 沿主对角线对称, $S_{\triangleleft}=S_{\triangleright}$.

$$[1\leqslant j\leqslant k\leqslant n]+[1\leqslant k\leqslant j\leqslant n]=[1\leqslant j,k\leqslant n]+[1\leqslant j=k\leqslant n]$$

$$\begin{aligned} 2S_{\triangleleft} &= S_{\triangleleft}+S_{\triangleright}=S_A+S_{diag(A)} \\ &= \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j a_k + \sum_{1\leqslant j=k\leqslant n} a_j a_k \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)+\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2+\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \end{aligned}$$

$\therefore S_{\triangleleft}=\frac{1}{2}[(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2+\sum_{k=1}^{n} a_k^2]$

1.4.2 Exercise 2

$$S=\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}(a_k-a_j)(b_k-b_j) \tag{20}$$

[2]下三角形矩阵的符号是一个右上部分的直角三角形, 目前我还不会输入

解 3 交换 j, k 仍有对称性.

$$S = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_j - a_k)(b_j - b_k)$$

$$[1 \leqslant j < k \leqslant n] + [1 \leqslant k < j \leqslant n] = [1 \leqslant j, k \leqslant n] - [1 \leqslant j = k \leqslant n]$$

$$\begin{aligned}
2S &= 2 \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\
&= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) + \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\
&= \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) - \sum_{1\leqslant j=k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\
&(a_j - a_k = 0, b_j - b_k = 0, [j = k]) \qquad = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} (a_k b_k - a_j b_k - \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j b_k - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j b_j \\
&= n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j b_k - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_j + n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \\
&= 2n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - 2\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} b_k
\end{aligned}$$

$$S = n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

对上式结果重新排序得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

定理 1.1 切比雪夫单调不等式 (Chebyshec's monotonic inequality)

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) &\leqslant n\sum_{k=1}^n a_k b_k && a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, \text{and } b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n \\
& && a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, \text{and } b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \\
\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right) &\geqslant n\sum_{k=1}^n a_k b_k && a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, \text{and } b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \\
& && a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, \text{and } b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n
\end{aligned}
$$

一般来说，如果 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 且 p 是 $\{1,\ldots,n\}$ 的一个排列。
那么不难证明:
当 $b_{p(1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{p(n)}$ 时 $\sum_{k=1}^n a_k b_{P(k)}$ 最大.
当 $b_{p(1)} \geqslant \cdots \geqslant b_{p(n)}$ 时 $\sum_{k=1}^n a_k b_{P(k)}$ 最小.

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{P(k)\in K} a_{P(k)}$$

$P(k)$ 为这些整数的任意一个排列。

$$f : J \Rightarrow K, \quad j \in J \quad f(j) \in K$$

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{k\in K} a_k \quad \#f^-(k)$$

式中 $\#f^-(k)$ 表示集合 $f^-(k) = \{j|f(j) = k\}$ 中元素的个数

$$\sum_{j\in J}[f(j) = k] = \#f^-(k)$$

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_k[f(j) = k] = \sum_{k\in K} a_k \sum_{j\in J}[f(j) = k]$$

若有 $\#f^-(k) = 1$ (一一对应)[3]

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{f(j)\in K} a_{f(j)} = \sum_{k\in K} a_k$$

[3]这里还不太理解

1.4.3 Exercise 3

$$S_n = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j}$$

首先写出前几项，尝试寻找规律：

$$\begin{aligned}
S_1 &= 0 \\
S_2 &= \frac{1}{2-1} = 1 \\
S_3 &= \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-2} = \frac{5}{2} \\
S_4 &= \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{4-1} + \frac{1}{3-2} + \frac{1}{4-2} + \frac{1}{4-3} = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

解 4 1. 先对 j 求和

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{1\leqslant j<k} \frac{1}{k-j} \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{1\leqslant (k-j)<k} \frac{1}{k-(k-j)} \quad j \Rightarrow (k-j) \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{0<j\leqslant k-1} \frac{1}{j} \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} H_{k-1} \quad (H_k \text{为调和级数}) \\
&= \sum_{1\leqslant k+1\leqslant n} H_k \quad k \Rightarrow k+1 \\
&= \sum_{0\leqslant k<n} H_k
\end{aligned}$$

2. 先对 k 求和

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j<k\leqslant n}\frac{1}{k-j}\\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j<(k+j)\leqslant n}\frac{1}{(k+j)-j} \quad k\Rightarrow(k+j)\\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{0<k\leqslant n-j}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}H_{n-j} \quad (H_k\text{为调和级数})\\
&= \sum_{1\leqslant n-j\leqslant n}H_k \quad j\Rightarrow n-j\\
&= \sum_{0\leqslant j<n}H_j
\end{aligned}
$$

以上两种常用的求和顺序都无法得到这个多重求和的结果，我们需要转换思路.

3. 先用 $k+j$ 替换 k (先换元，再求和)

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant j<(k+j)\leqslant n}\frac{1}{(k+j)-j} \quad k\Rightarrow k+j\\
&= \sum_{1\leqslant j<(k+j)\leqslant n}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{1\leqslant j\leqslant n-k}\frac{1}{k} \quad \text{首先对}j\text{求和}\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{n-k}{k}\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{n}{k}-1\right)=nH_n-n
\end{aligned}
$$

综上可得 $\sum_{1\leqslant k\leqslant n}H_k=nH_n-n$

代数：$k+f(j)$, f 为任意函数.

用 $k-f(j)$ 替换 k ，并对 j 先求和较好。

几何：S_n $(n=4)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 \\
j=1 & & \frac{1}{1} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\
j=2 & & & +\frac{1}{1} & +\frac{1}{2} \\
j=3 & & & & +\frac{1}{1} \\
j=4 & & & &
\end{array}$$

先对 j 求和 (按列) $H_1+H_2+H_3$ 先对 k 求和 (按行) $H_3+H_2+H_1$ $k \Rightarrow k+j$ 按对角线求和

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{k} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$nH_n - n$,$n=4$

$$\begin{aligned}
\frac{4}{1}+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4} &= \sum_{k=1}^{4} \frac{4-k}{k} \\
&= 4\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{4} 1 \\
&= 4H_4 - 4
\end{aligned}$$

$$4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-4 = \frac{4}{2}+\frac{4}{3}+\frac{4}{4}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & k-j=0 & k-j=1 & k-j=2 & k-j=3 \\
j=1 & & \frac{1}{1} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\
j=2 & & \frac{1}{1} & +\frac{1}{2} & \\
j=3 & & \frac{1}{1} & & \\
j=4 & & & &
\end{array}$$

1.5 General methods

1.5.1 Exercise 4

求 $\Box_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k^2$, $n \geqslant 0$ 的封闭形式

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2 - 2k - 1] \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - 2\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0^2 - (n+1)^2 &= -2\sum_{k=0}^{n} k - (n+1) \\ 2\sum_{k=0}^{n} k &= (n+1)^2 - (n+1) \\ \sum_{k=0}^{n} k &= \frac{(n+1)n}{2}\end{aligned}$$

上述运算没有告诉我们 $\Box_n$ 的值，但却能推导出 $\sum_{k=0}^{n} k$ 的值。我们可以利用这种思路求解 $\Box_n$ 。

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] &= \sum_{k=0}^{n} \left[3k^2 + 3k + 1\right] \\ (n+1)^3 - 0^3 &= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\ (n+1)^3 &= 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\end{aligned}$$

$$3\sum_{k=0}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}(n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right)$$
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}(n+1)(n+\frac{1}{2})n$$

reference book list:

1. (CRC Tables) CRC Standard Mathematical Tables
2. Handbook of Mathematical Functions
3. Sloane. Handbook of Integer Sequences

software:

Axiom MACSYMA Maple Mathematica

my: Octave maxima 熟悉标准的信息源

方法 3：建立成套方法

参考第二节的内容

方法 4：用积分替换和式 $\sum \Rightarrow \int$

$$\square_n = 1\times 1 + 1\times 4 + 1\times 9 + \cdots + 1\times n^2$$

该式近似等于 0 到 n 之间曲线 $f(x) = x^2$ 下的面积

$$S = \int_0^n x^2 dx$$
$$= \frac{n^3}{3}$$

$\square_n$ 近似等于 $\frac{n^3}{3}$ 。近似的误差 $E_n = \square_n - \frac{n^3}{3}$

1. 近似误差项递归式

$$
\begin{aligned}
\square_n &= \square_{n-1} + n^2 \\
E_n &= \square_n - \frac{n^3}{3} = \square_{n-1} + n^2 - \frac{n^3}{3} \\
E_{n-1} &= \square_{n-1} - \frac{(n-1)^3}{3} \\
E_n &= E_{n-1} + \frac{(n-1)^3}{3} + n^2 - \frac{n^3}{3} \\
&= E_{n-1} + \frac{-3n^2+3n-1}{3} + n^2 \\
&= E_{n-1} + n - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

2. 对楔形误差项面积求和

$$
\begin{aligned}
\square_n - \int_0^n x^2 dx &= \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - \int_{k-1}^{k} x^2 dx \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - \frac{k^3-(k-1)^3}{3} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1}{3} \right)
\end{aligned}
$$

$$
E_n = \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1}{3} \right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n(3n+1)}{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\square_n &= \frac{n^3}{3} + E_n \\
&= \frac{n^3}{3} + \frac{n(3n+1)}{6} \\
&= \frac{n(2n^2+3n-1)}{6} \\
&= \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}
\end{aligned}
$$

方法 5：展开和收缩

$$\begin{aligned}
\Box_n &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^2 = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} k \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j\leqslant k\leqslant n} k \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{(j+n)(n-j+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(n(n+1)+j-j^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[n^2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}-\Box_n\right] \\
&= \frac{1}{2}n(n+\frac{1}{2})(n+1)-\frac{1}{2}\Box_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\Box_n &= \frac{1}{2}n(n+\frac{1}{2})(n+1) \\
\Box_n &= \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)
\end{aligned}$$

方法 6：使用有限微积分

方法 7：用生成函数

1.6 有限微积分和无限微积分 Finite and infinite calculus

表 1: 有限微积分和无限微积分中的运算对比

无限微积分	有限微积分
微分算子 D	差分算子 Δ

$$
\begin{array}{ll}
Df(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} & \Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \\
D(x^m) = mx^{m-1} & \Delta(x^3) = 3x^2 + 3x + 1
\end{array}
$$

为使差分运算在形式上与微分运算类似，引入下降阶乘幂和上升阶乘幂。

下降阶乘幂 (failing factorial power), $x^{\underline{m}}$, 读作 x 直降 m 次.

$$
x^{\underline{m}} = \underbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}_{m\text{ 个因子}}, \quad (m \leqslant 0, m \in \mathbb{N})
$$

上升阶乘幂 (rising factorial power), $x^{\overline{m}}$, 读作 x 直升 m 次.

$$
x^{\overline{m}} = \underbrace{x(x+1)\ldots(x+m-1)}_{m\text{ 个因子}}, \quad (m \leqslant 0, m \in \mathbb{N})
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(x^{\underline{m}}) &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\
&= (x+1)x\ldots(x+1-m+1) - x(x-1)\ldots(x-m+1) \\
&= (x+1-(x-m+1))x(x-1)\ldots(x-m+2) \\
&= mx(x-1)\ldots(x-m+2) \\
&= mx^{\underline{m-1}}
\end{aligned}
$$

$$
g(x) = Df(x), \iff \underbrace{\int g(x)dx}_{\text{不定积分}} = f(x) + \underbrace{C}_{\text{任意常数}} \tag{21}
$$

$$
g(x) = \Delta f(x), \iff \underbrace{\sum g(x)\delta(x)}_{\text{不定和式}} = f(x) + \underbrace{C}_{\text{满足}p(x+1)=p(x)\text{的任意函数}} \tag{22}
$$

表 2: 有限微积分和无限微积分中的运算对比

无限微积分	有限微积分
D 逆运算 $\int$ (积分算子，逆微分算子)	Δ 逆运算 $\sum$ (求和算子，逆差分算子)
微积分基本定理	
$g(x) = Df(x) \iff \int g(x)dx = f(x) + C$	$g(x) = \Delta f(x) \iff \sum g(x)\delta(x) = f(x) + C$
定积分	和式
若 $g(x) = Df(x)$ 那么	若 $g(x) = \Delta f(x)$ 那么
$\int_a^b g(x)dx = f(x)\|_a^b = f(b) - f(a)$	$\sum_a^b g(x)\delta x = f(x)\|_a^b = f(b) - f(a)$
$\int_b^a g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx$	$\sum_b^a g(x)\delta x = -\sum_a^b g(x)\delta x$
$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$	$\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$
$\int_0^n x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big\|_0^n = \frac{n^{m+1}}{m+1}, m \neq -1$	$\sum_0^n k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big\|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, m \neq -1$ $\sum_0^n k^{\overline{m}} = \frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1}\Big\|_0^n = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, m \neq -1$
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	$(x+y)^{\underline{2}} = x^{\underline{2}} + 2x^{\underline{2}}y^{\underline{1}} + y^{\underline{2}}$ $(x+y)^{\overline{2}} = x^{\overline{2}} + 2x^{\overline{1}}y^{\overline{1}} + y^{\overline{2}}$
$m = -1, \int_a^b x^{-1} = \ln x\Big\|_a^b$	$m = -1, \sum_a^b k^{\underline{-1}} = H_k\Big\|_a^b$
$\int_a^b x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big\|_a^b, \ m \neq -1$ $\ln n\Big\|_a^b, \ m = -1$	$\sum_a^b k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big\|_a^b, \ m \neq -1$ $H_k\Big\|_a^b, \ m = -1$ $\sum_a^b k^{\overline{m}} = \frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1}\Big\|_a^b, \ m \neq -1$ $H_{(k+1)}\Big\|_a^b, \ m \neq -1$
连续性问题的解中会出现自然对数	快速排序这样的问题中会出现调和数的原因
e^x, 性质 $De^x = e^x$	$\Delta f(x) = f(x), f(x) = 2^x$ 离散指数函数

$$\sum_a^b g(x)\delta x = f(x)|_a^b = f(b) - f(a) \tag{23}$$

设 $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$

如果 $b = a$, 我们就有

$$\sum_a^a g(x)\delta x = f(a) - f(a) = 0 \tag{24}$$

如果 $b = a + 1$, 我们就有

$$\sum_a^{a+1} g(x)\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\sum_a^{b+1} g(x)\delta x - \sum_a^b g(x)\delta x &= \big[f(b+1) - f(a)\big] - \big[f(b) - f(a)\big] \\ &= f(b+1) - f(b) = g(b)\end{aligned}$$

由数学归纳法 $a, b \in \mathbb{N}$ 且 $b \leqslant a$ 时，$\sum_a^b g(x)\delta x$ 的确切含义是

$$\sum_a^b g(x)\delta x = \sum_{k=1}^{b-1} g(k) = \sum_{a \leqslant k < b} g(k), \quad (b \geqslant a, a, b \in \mathbb{N}) \tag{26}$$

若有 $g(x) = f(x+1) - f(x)$

$$\sum_{a \leqslant k < b} g(l) = \sum_{a \leqslant k < b} (f(k+1) - f(k)) = f(b) - f(a)$$

$$\begin{aligned}\sum_a^b g(x)\delta x = f(b) - f(a) \qquad (b < a) \\ = -(f(a) - f(b)) = -\sum_a^b g(x)\delta x\end{aligned}$$

$$\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$$

应用：计算下降幂和式的简单方法

$$\sum_{0\leqslant k<n} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\bigg|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, \quad \big(m,n\geqslant 0 \quad m,n\in\mathbb{N}^+\big) \tag{27}$$

$m=1$ 时，$k^{\underline{1}}=k$

$$\sum_{0\leqslant k<n} k = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$k^2 = k(k-1)+k = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n} k^2 &= \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{1}{3}n(n-\frac{1}{2})(n-1)\end{aligned}$$

$$k^3 = k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k = k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n} k^3 &= \frac{n^{\underline{4}}}{4} + 3\frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} + 3\frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)^2 = \left(\sum_{0\leqslant k<n} k\right)^2\end{aligned}$$

负指数下降幂

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2) \\
x^{\underline{2}} &= x(x-1) \\
x^{\underline{1}} &= x \\
x^{\underline{0}} &= 1 \\
x^{\underline{-1}} &= \frac{1}{x+1} \\
x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\
&\vdots \\
x^{\underline{-m}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)}
\end{aligned}
$$

$$
x^{\underline{3}} \cdot \frac{1}{x-3+1} = x^{\underline{2}} \Rightarrow x^{\underline{0}} \cdot \frac{1}{x-0+1} = x^{\underline{-1}}
$$

为什么选用 $x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$ 而不是 $x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$ 作为下降阶乘幂的拓展定义?[4]

通常幂法则 $x^{m+n} = x^m x^n$, 推广:

$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}},\ (m, n \in \mathbb{N}^+)$

$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}},\ (m, n \in \mathbb{N}^+)$

[4]当一个原有的记号被拓展包含更多种情形时，以一种使得一般性法则继续成立的方式来表述它的定义，这永远是最佳选择

my 推广至正指数下降幂

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{3}} &= x(x+1)(x+2) \\
x^{\overline{2}} &= x(x+1) \\
x^{\overline{1}} &= x \\
x^{\overline{0}} &= 1 \\
x^{\overline{-1}} &= \frac{1}{x-1} \\
x^{\overline{-2}} &= \frac{1}{(x-1)(x-2)} \\
&\vdots \\
x^{\overline{-m}} &= \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-m)}
\end{aligned}
$$

$$
x^{\overline{3}} \cdot \frac{1}{x+3} = x^{\overline{2}} \Rightarrow x^{\overline{0}} \cdot \frac{1}{x+0-1} = x^{\overline{-1}}
$$

例如

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{2+3}} &= x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{3}} = x^{\underline{3}}(x-3)^{\underline{2}} \\
x^{\underline{2-3}} &= x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{-3}} \\
&= x(x-1)\frac{1}{(x-2+1)(x-2+2)(x-2+3)} \\
&= x(x-1)\frac{1}{(x-1)x(x+1)} \\
&= \frac{1}{x+1}
\end{aligned}
$$

$m<0$ 时，$\Delta x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}}$ 是否仍成立?

$$
\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\
&= \frac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\
&= -2x^{\underline{-3}}
\end{aligned}
$$

通常幂法则对负指数下降阶乘幂仍然成立。

离散指数函数 2^x

$$
\begin{aligned}
&\Delta(c^x) = c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x \\
&c \neq 1 \frac{c^x}{c-1} \overset{\Delta}{\Longrightarrow} c^x \\
&\sum_{a \leqslant k < b} c^k = \sum_a^b c^x \delta x = \left.\frac{c^x}{c-1}\right|_a^b = \frac{c^b - c^a}{c-1},\ c \neq 1
\end{aligned}
$$

$$
D(uv) = uDv + vDu \tag{28}
$$

$$
\int uDv = uv - \int vDu \tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(u(x)v(x)) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x) \\
&= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1) + u(x)v(x+1) - u(x)v(x) \\
&= \Delta u(x)v(x+1) + u(x)\Delta v(x) \\
&= u\Delta v + Ev\Delta u
\end{aligned} \tag{30}
$$

其中 E 被称为移位算子.

在无限微积分中，令 $x+1 \to x$ 无限细分，避开了 E

$$
\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u \tag{31}
$$

表 3: Table 55(1994), What's difference

$f=\sum g$	$\Delta f = g$
$x^{\underline{0}}=1$	0
$x^{\underline{1}}=x$	1
$x^{\underline{2}}=x(x-1)$	$2x$
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$
$x^{\underline{m+1}}$	$(m+1)x^{\underline{m}}$
H_x	$x^{\underline{-1}}=\frac{1}{x+1}$
2^x	2^x
c^x	$(c-1)c^x$
$\frac{c^x}{c-1}$	c^x
$cu(x)$, c is constant	$c\Delta u(x)$
$u+v$	$\Delta u+\Delta v$
uv	$u\Delta v+Ev\Delta u$, $Ev=v(x+1)$

例 1.2 $\int xe^x dx \xrightarrow{\text{离散模拟}} \sum x2^x\delta x \qquad (\sum_{k=0}^{n} k2^k)$

解 5 令 $u(x)=x, \delta v(x)=2^x$,
可得 $\delta u(x)=1, v(x)=2^x, Ev=2^{x+1}$

$$\begin{aligned}\sum x2^x\delta x &= x\cdot 2^x - \sum 2^{x+1}\cdot 1\delta x\\ &= x\cdot 2^x - 2^{x+1}+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{0}^{n} k2^k &= \sum_{0}^{n+1} x2x\delta x\\ &= x\cdot 2^x - 2^{x+1}\Big|_{0}^{n+1}\end{aligned}$$

关于第二组等式的推导，我一开始没有完全掌握，主要是对求和符号 $\sum$ 的上下标范围存在误解.

记 $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k2^k = S_n$

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k2^k + (n+1)2^{n+1} &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n+1} k2^k \\ &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} (k-1)2^k + \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} 2^k \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k2^{k+1} + \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} 2^k \\ &= 2S_n + \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} 2^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_n + (n+1)2^{n+1} &= 2S_n + \frac{2^{n+1}-2^1}{2-1} \\ S_n &= (n+1)2^{n+1} - (2^{n+1}-2) \\ &= (n-1)2^{n+1} + 2\end{aligned}$$

$$\sum_{0\leqslant k<n} H_k = nH_n - n \tag{32}$$

求解看起来更困难的和式 $\sum_{0\leqslant k<n} kH_k$

类比 $\int x\ln x dx$

$$\begin{aligned}I &= \int x\ln x dx \\ &= x^2\ln x - \int x(\ln x + x\cdot\frac{1}{x})dx \\ &= x^2\ln x - I - \int x dx \\ I &= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

对 $\sum_{0\leqslant k<n} kH_k$，取 $u(x)=H_x\Delta$, $v(x)=x=x^{\underline{1}}$
$\Delta u(x)=x^{\underline{-1}}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^{\underline{2}}$,$Ev(x)=v(x+1)=\frac{1}{2}(x+1)^{\underline{2}}$

$$\begin{aligned}\sum xH_x\delta x &= \frac{1}{2}x^{\underline{2}}H_x-\sum\frac{1}{2}(x+1)^{\underline{2}}x^{\underline{-1}}\delta x\\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x-\sum\frac{(x+1)x}{2}\frac{1}{x+1}\delta x\\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x-\sum\frac{x^{\underline{1}}}{2}\delta x\\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x-\frac{1}{4}x^{\underline{2}}+C\end{aligned}$$

$$\sum_{0\leqslant k<n} kH_k=\sum_{x=0}^{n-1}xH_x\delta x=\frac{(n-1)^{\underline{2}}}{2}(H_{n-1}-\frac{1}{2})$$

教材上是

$$\sum_{0\leqslant k<n} kH_k=\sum_{x=0}^{n}xH_x\delta x=\frac{n^{\underline{2}}}{2}(H_n-\frac{1}{2})$$

借助有限微积分的原理，我们很容易地记住

$$\sum_{0\leqslant k<n} k=\frac{n^{\underline{2}}}{2}=n(n-1)/2 \tag{33}$$

[5] myex $\sum_{0\leqslant k<n} H_k$

$$\begin{aligned} u(x)&=H_x & \Delta v(x)&=x^{\underline{0}}=1\\ \Delta u(x)&=x^{\underline{-1}} & v(x)&=x^{\underline{1}}\\ & & Ev(x)&=v(x+1)=(x+1)^{\underline{1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum H_x\cdot 1\delta x &= x^{\underline{1}}H_x-\sum x^{\underline{-1}}(x+1)^{\underline{1}}\delta x\\ &= x^{\underline{1}}H_x-\sum x^{\underline{0}}\delta x\\ &= x^{\underline{1}}H_x-x^{\underline{1}}+C\end{aligned}$$

$$\sum_{0\leqslant k<n} H_k=\sum_{0}^{n}H_x\delta x=nH_n-n-(0-0)=nH_n-n$$

[5]数学的终极目标是不需要聪明的想法

1.7 无限和式 Infinite sums

a_k 非负，$\sum_{k\in K} a_k$

定义 1.1 如果有 $A = const$. s.t. $\forall$ 有限子集 $F \subset K$, 均有

$$\sum_{k\in F} a_k \leqslant A$$

那么我们定义 $\sum_{k\in K} a_k$ 是最小的这样的 A (所有这样的 A 总包含一个最小元素)。若没有这样的常数 A，我们就说 $\sum_{k\in K} a_k = \infty$ 即 $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists$ 有限多项 a_k 组成的一个集合, 它的和超过 A

该定义与指标集 K 中可能存在的任何次序无关

特殊情形：K 为非负整数集合 $a_k \leqslant 0$ 意味着

$$\sum_{k\geqslant 0} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

理由：实数任意非减序列均有极限

$F \subset \mathbb{N}$, $\forall i \in F, i \leqslant n$, $\exists \sum_{k\in F} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant A$. $\quad \therefore \begin{cases} A = \infty \\ A\text{为有界常数} \end{cases}$

又 $\forall A' < A$. $\exists n$. s.t $\sum_{k=0}^{n} a_k > A'$, $F = \{0, 1, \ldots, n\}$. 证明 A' 不是有界常数。

练习 1 $a_k = x^k$ 有

$$\sum_{k\geqslant 0} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 \leqslant x < 1 \\ \infty, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

练习 2

$$
\begin{aligned}
S &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots \\
\frac{1}{2}S &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots = S-1,\ S=2 \\
T &= 1+2+4+8+\dots \\
2T &= 2+4+8+\dots = T-1,\ T=-1(\times) \\
T &= \infty.\ (\text{另一个解})
\end{aligned}
$$

练习 3

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k\geqslant 0} k^{\underline{-2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{-2}}\delta k \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{k^{\underline{-1}}}{-1}\Big|_0^n \\
&= \lim_{n\to\infty}(-1)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{0+1}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

非负和式 $\to$ 和式中有非负项与负项 1.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k &= 1-1+1-1+1-1+\dots \\
&= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 0 \\
&= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 1
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{k\geqslant 0} x^k = \frac{1}{1-x},\ x\in[0,1)
$$

$x=-1$ 代入上式，$I=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$

2. 双向无限 $\sum_k a_k$

$$k \geqslant 0 \quad a_k = \tfrac{1}{k+1}$$
$$k < 0 \quad a_k = \tfrac{1}{k-1}$$

$$\cdots + (-\tfrac{1}{4}) + (-\tfrac{1}{3}) + (-\tfrac{1}{2}) + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \dots$$

$$\cdots + \left((-\tfrac{1}{4}) + \left((-\tfrac{1}{3}) + \left((-\tfrac{1}{2}) + (1) + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{4}\right) + \dots \qquad = 1$$

$$\cdots + \left((-\tfrac{1}{4}) + \left((-\tfrac{1}{3}) + ((-\tfrac{1}{2})) + 1\right) + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \dots \qquad = 1$$

$$(\ ) = 1 - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}$$

$$\cdots + \left((-\tfrac{1}{4}) + \left((-\tfrac{1}{3}) + \left((-\tfrac{1}{2}) + 1 + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \right) \dots \qquad = 1 + \ln 2$$

从内往外第 n 对括号包含数

$$-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \cdots - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = 1 + H_{2n} - H_{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}(H_{2n} - H_{n+1}) = \ln 2$

按照不同方式对其项相加而得出不同值的和式，有某些不同寻常之处．关于分析学的高等教材中有五花八门的定义，它们对这样自相矛盾的和式赋予了有意义的值，但是，如果我们采用那些定义，就不能像一直在做的那样自由地对记号 $\sum$ 进行操作．就本书的目的而言，不需要“条件收敛”这种精巧的改进，因此我们会坚持使用无限和的一种定义，以保证在这一章里所做的所有运算都是正确的．

事实上，我们关于无限和式的定义相当简单．设 K 是任意一个集合，而 a_k 是对每一个 $k \in K$ 定义的实值项（这里“k ”实际上可以代表若干个指标 $k_1, k_2, \dots$ ，因而 K 可以是多维的）．任何实数 x 都可以写成其正的部分减去负的部分

$$x = x^+ - x^-,\ x^+ := x \times [x > 0],\ x^- := -x \times [x < 0]$$

对 $\{a_k\}$ 中的每一项这样操作，得到无限和式 $\sum_{k\in K} a_k^+$ 和 $\sum_{k\in K} a_k^-$ (mynote: 将任

意和式拆成两个非负和式)

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} a_k^+ - \sum_{k\in K} a_k^- \tag{34}$$

除非右边的两个和式都等于 ∞． 在后面这种情形，我们不定义 $\sum_{k\in K} a_k$

设 $A^+ = \sum_{k\in K} a_k^+$，$A^- = \sum_{k\in K} a_k^-$． 如果 A^+ 和 A^- 都是有限的，就说和式 $\sum_{k\in K} a_k$ 绝对收敛 (converge absolutely) 于值 $A = A^+ - A^-$． 如果 $A^+ = \infty$ 而 A^- 是有限的，就说和式 $\sum_{k\in K} a_k$ 发散 (diverge) 于 $+\infty$． 类似地，如果 A^+ 是有限的而 $A^- = \infty$，就说和式 $\sum_{k\in K} a_k$ 发散 (diverge) 于 $-\infty$． 如果 $A^+ = A^- = \infty$，结果还很难说．[6]

mynote:

$\forall$ 集合 K (可以是多维的), $a_k \in \mathbb{R}$ $(k \in K)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = x^+ - x^-$

a_k^+, a_k^- 均非负

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} a_k^+ - \sum_{k\in K} a_k^-$$

$\sum_{k\in K} a_k^+$, $\sum_{k\in K} a_k^-$ 不同时为 0

$$\begin{array}{llll} A & = A^+ & -A^- & A = \sum_{k\in K} a_k \\ & A^+\text{有限} & A^-\text{有限} & \sum_{k\in K} a_k\text{绝对收敛 (converge absolutely)} \\ & A^+ = \infty & A^-\text{有限} & \sum_{k\in K} a_k\text{发散 (diverge) 于}\infty \\ & A^+\text{有限} & A^- = \infty & \sum_{k\in K} a_k\text{发散 (diverge) 于} -\infty \end{array}$$

$a_k \in \mathbb{R} \Rightarrow a_k \in \mathbb{C}$

两式均有定义时，$\sum_{k\in K} a_k$有定义

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} \Re(a_k) + i\sum_{k\in K} \Im(a_k)$$

[6]换句话说，绝对收敛就意味着绝对值的和式收敛.

分配律

结合律 $\Rightarrow$ 多个指标集绝对收敛的和式，永远可以对指标中的任何一个首先

交换律

求和。(结果与求和顺序无关)

$\forall$ 指标集 J 且 $\{K_j | j \in J\}$ 的元素是任意的指标集. s.t.

$$\sum_{\substack{j \in J \\ k \in K_j}} a_{j,k} \text{绝对收敛于} A$$

那么对每一个 $j \in J$, $\exists A_j \in \mathbb{C}$ .s.t.

$$\sum_{k \in K_j} a_{j,k} \text{绝对收敛于} A_j. \text{ 且} \sum_{j \in J} A_j \text{绝对收敛于} A$$

对所有项非负证明这一结记即可.

每项分解成实部与虚部，正的和负的部分，证明一般情形.

设对所有指标 $(j,k) \in M$ 都有 $a_{j,k} \geqslant 0$.

其中 M 是主指标集 $\{(j,k) | j \in J, k \in K_j\}$

给定 $\sum_{(j,k) \in M} a_{j,k}$ 是有限的即对所有有限子集 $F \subset M$ 有

$$\sum_{(j,k) \in M} a_{j,k} \leqslant A$$

而 A 是这样的最小上界.

$\forall j \in J$ 形如 $\sum_{k \in F_j} a_{j,k}$ 的每一个和都以 A 为上界. 其中 F_j 是 k_j 的一个有限子集, 从而这些和式有一个最小上界 $A_j \geqslant 0$. 且根据定义有 $\sum_{k \in K_j} = A_j$.

需证明对所有有限子集 $G \subset J$. A 是 $\sum_{j \in G} A_j$ 的最小上界.

假设 G 是 J 满足 $\sum_{j \in G} A_j = A' > A$ 的有限子集.

我们可以求出一个有限子集 $F_j \subseteq K_j$.

使得对每个满足 $A_j > 0$ 的 $j \in G$ 均有 $\sum_{k\in F_j} a_{j,k} > \left(\frac{A}{A'}\right) A_j$.
至少存在一个这样的 j .
但此时有 $\sum_{j\in G, k\in F_j} a_{j,k} > \left(\frac{A}{A'}\right) \sum_{j\in G} A_j = A$.
这与如下事实矛盾. 对有限子集 $F \subseteq M$ 有 $\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} \leqslant A$.
从而对所有有限子集 $G \subset J$ 都有 $\sum_{j\in G} A_j \leqslant A$.

最后, 设 A' 是小于 A 的任何一个实数如果我们能找到一个有限集合 $G \subseteq J$ s.t $\sum_{j\in G} A_j > A'$. 证明就完成了.

已知存在有限集合 $F \subseteq M$ s.t. $\sum_{(j,k) a_{j,k} > A'}$.
设 G 是 F 中 j 组成的集合, 又设 $F_j = \{k | (j,k) \in F\}$ 那么有

$$\sum_{j\in G} A_j \geqslant \sum_{j\in G} \sum_{k\in F_j} a_{j,k} = \sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} > A'$$

证完.