1 递归问题

1.1 河内塔

使用递归方法解决河内塔问题。先从 n 为 1 的情况考虑该问题。为了递归式的完整？将 n 等于 0 也纳入考虑

$$T_0 = 0$$
$$T_1 = 1$$
$$T_2 = 3$$
$$T_3 = 7$$

从圆盘的移动规律可以看出，要将 n 个圆盘从 A 柱移动到 C 柱上，首先需要将 n-1 个圆盘移动到 B 柱上，再移动最大的圆盘到 C 柱上，最后将 n-1 个圆盘从 B 柱移动到 A 柱上。

书中使用

$$T_n \leqslant 2T_{n-1} + 1$$
$$T_n \geqslant 2T_{n-1} + 1$$

得到 $T_n = 2T_{n-1} + 1$ 。将 n 等于 0 的情况作为初始条件，得到完整的递归式 (recurrence)

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \quad n > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

计算得到

$$T_n = 2^n - 1, \quad n \geqslant 0 \tag{2}$$

数学归纳法 (mathematical induction)[1]

[1] 数学归纳法的难点并不在于证明本身，而是如何得到关系式

1. 基础 basis, n 取最小值 n_0 证明该命题
2. 归纳 induction, 假设 $k = n - 1$ 时归纳结果成立，证明 $k = n$ 时该结果也成立

使用数学归纳法证明河内塔问题递归式

证明. 证明河内塔问题递归式 1. $k = 0$ 时，$T_0 = 2^0 - 1 = 0$
2. 假设 $k = n - 1$ 时 $T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ 成立。
3. $k = n$ 时，$T_n = 2 * T_{n-1} + 1 = 2 * (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$

评论 1. 研究小的情形
2. 求解递归式 (1)
3. 求解递归式 (2)

Q: 递归式 $T_n = 2^n - 1$ 是怎样得到的？

$$T_0 + 1 = 1$$
$$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2 = 2(T_{n-1} + 1)$$

令 $U_n = T_n + 1$

$$U_0 = 1$$
$$U_n = 2U_{n-1}, \quad n > 0.$$

容易推出 $U_n = 2^n, T_n = 2^n - 1$

1.2 平面上的直线

平面上 n 条直线所界定的区域最大个数 L_n 是多少？

$$\begin{aligned}
&L_0 = 1 \\
&L_1 = 2 \\
&L_2 = 4 \\
&L_3 = 7 \\
&\ldots \\
&L_n \leqslant L_{n-1} + n, \quad n > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_n &= L_{n-1} + n \\
&= L_{n-2} + (n-1) + n \\
&= \cdots \\
&= L_0 + 1 + 2 + \cdots + n \\
&= 1 + S_n
\end{aligned}$$

其中 $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ 被称为**三角形数**。

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

由此得到平面分割数 $L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

使用数学归纳法证明该公式

证明. 1. $k = 0, L_0 = 1$.
2. 设 $k = n-1, L_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + 1 = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ 成立.
3. $k = n, L_n = L_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$

评论 将直线的情况拓展到折线。

$$Z_1 = 2$$
$$Z_2 = 7$$

做法，将折线补齐成两条直线[2]

$$\begin{aligned} Z_n &= L_2n - 2n \qquad \text{锯齿点不在交点} \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 - 2n \\ &= 2n^2 - n + 1, \quad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

2 约瑟夫问题

n 个人围城一圈，从第一个人开始，每隔一个删除一个。

表 1: 约瑟夫问题最终剩余数字 J(n) 与全体数字 n 之间的关系

n	1	2	3	4	5	6
J(n)	1	1	3	1	3	5

人数总数为偶数 $J(2n) = 2J(n) - 1, n \geqslant 1$. 人数总数为奇数 $J(2n+1) = 2J(n) + 1, n \geqslant 1$.

递归式

$$\begin{aligned} J(1) &= 1 \\ J(2n) &= 2J(n) - 1, && n \geqslant 1 \\ J(2n+1) &= 2J(n) + 1, && n \geqslant 1 \end{aligned}$$

[2] $L_n \sim \frac{1}{2}n^2$
$Z_n \sim 2n^2$

计算得到 $n = 2^m + l$，封闭形式 $J(2^m + l) = 2l + 1, m \geqslant 0, 0 \leqslant l < 2^m$.

证明. 1. l is even.

$$
\begin{aligned}
J(2^m + l) &= 2J(2^m + \frac{l}{2}) - 1 \\
&= 2(2 * \frac{l}{2} + 1) - 1 \\
&= 2l + 1
\end{aligned}
$$

2. l is odd.

$$
\begin{aligned}
J(2^m + l) &= 2J(2^m + \frac{l-1}{2}) - 1 \\
&= 2(2 * \frac{l-1}{2} + 1) - 1 \\
&= 2l + 1
\end{aligned}
$$

$$
J(2n+1) - J(2n) = 2 \tag{4}
$$

评论 将 n 和 J(n) 以 2 为基数表示 (表示为二进制). 假设:

$$
\begin{aligned}
n &= (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 \\
&= b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2^1 + b_0 2^0
\end{aligned}
$$

其中 $b_m = 1, b_i = 0$ 或$1 \quad (0 \leqslant i < m, i \in \mathbb{N}^+)$

$$
\begin{aligned}
n &= 2^m + l \\
n &= (1b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2 \\
l &= (0b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2 \\
2l &= (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_00)_2 \\
2l+1 &= (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_01)_2 \\
J(n) &= (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_01)_2
\end{aligned}
$$

因此我们得到 $J((1b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_0)_2) = (b_{m-1}b_{m-2}\ldots b_1b_01)_2$.
n 向左循环移动一位得到 J(n)!

案例 1 $J((1011)_2) = (0111)_2 = (111)_2$, 该式即 $J(11) = 7$

注意：0 移动至首位会消失，而不需要保留空位。

$2^{\nu(n)} - 1$, 其中 $\nu(n)$ 为 n 转换成的二进制数中 1 的个数

案例 2 n=13, $(13)_{10} = (1101)_2$, $\mu(13) = 3$.
$J(J(\ldots(J(13))\ldots)) = 2^3 - 1 = 7$

案例 3 n=23403, $\mu(23403) = 10$, therefore $J(J(\ldots(J(23403))\ldots)) = 2^{10}-1 = 1023$

pp10