

波利亚数学与猜想笔记

weiyuan

2020

Chapter 1

归纳方法

一个猜想性的一般命题若能在新特例中得到证实，则变得更加可信。

1. 随时准备修正我们的信念
2. 有充分理由使我们改变信念，则应改变
3. 无充分理由，不应轻易改变信念

例题：

1. 找规律

11, 31, 41, 61, 71, 101, 131, ...

以上数字都是素数

$$21 = 3 \times 7$$

$$51 = 3 \times 17$$

$$81 = 3^4$$

$$91 = 7 \times 13$$

$$111 = 3 \times 37$$

$$121 = 11^2$$

$$141 = 3 \times 47$$

- 2.

$$1 = 0 + 1$$

$$2 + 3 + 4 = 1 + 8$$

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$$

$$10 + 11 + \cdots + 16 = 27 + 64$$

...

$$n^2 + 1 + \cdots + (n+1)^2 = n^3 + (n+1)^3$$

- 3.

$$1, 1 + 3, 1 + 3 + 5, 1 + 3 + 5 + 7, \dots$$

规律

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \frac{(1 + 2n - 1) \times n}{2} = n^2$$

4.

$$1, 1 + 8, 1 + 8 + 27, 1 + 8 + 27 + 64, \dots$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$