

1 递归问题

1.1 河内塔

使用递归方法解决河内塔问题。先从 n 为 1 的情况考虑该问题。为了递归式的完整？将 n 等于 0 也纳入考虑

$$T_0 = 0$$

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 3$$

$$T_3 = 7$$

从圆盘的移动规律可以看出，要将 n 个圆盘从 A 柱移动到 C 柱上，首先需要将 $n-1$ 个圆盘移动到 B 柱上，再移动最大的圆盘到 C 柱上，最后将 $n-1$ 个圆盘从 B 柱移动到 A 柱上。

书中使用

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1$$

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1$$

得到 $T_n = 2T_{n-1} + 1$ 。将 n 等于 0 的情况作为初始条件，得到完整的递归式 (recurrence)

$$T_0 = 0$$

$$T_n = 2T_{n-1} + 1, \quad n > 0 \tag{1}$$

计算得到

$$T_n = 2^n - 1, \quad n \geq 0 \tag{2}$$

数学归纳法 (mathematical induction)¹

¹数学归纳法的难点并不在于证明本身，而是如何得到关系式

1. 基础 basis, n 取最小值 n_0 证明该命题
2. 归纳 induction, 假设 $k = n - 1$ 时归纳结果成立, 证明 $k = n$ 时该结果也成立

使用数学归纳法证明河内塔问题递归式

- 证明.** 证明河内塔问题递归式
1. $k = 0$ 时, $T_0 = 2^0 - 1 = 0$
 2. 假设 $k = n - 1$ 时 $T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$ 成立。
 3. $k = n$ 时, $T_n = 2 * T_{n-1} + 1 = 2 * (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$

评论 1. 研究小的情形

2. 求解递归式 (1)
3. 求解递归式 (2)

Q: 递归式 $T_n = 2^n - 1$ 是怎样得到的?

$$T_0 + 1 = 1$$

$$T_n + 1 = 2T_{n-1} + 2 = 2(T_{n-1} + 1)$$

令 $U_n = T_n + 1$

$$U_0 = 1$$

$$U_n = 2U_{n-1}, \quad n > 0.$$

容易推出 $U_n = 2^n, T_n = 2^n - 1$

1.2 平面上的直线

平面上 n 条直线所界定的区域最大个数 L_n 是多少?

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = 2$$

$$L_2 = 4$$

$$L_3 = 7$$

\dots

$$L_n \leq L_{n-1} + n, \quad n > 0$$

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n \\ &= \dots \\ &= L_0 + 1 + 2 + \dots + n \\ &= 1 + S_n \end{aligned}$$

其中 $S_n = 1 + 2 + \dots + n$ 被称为三角形数。

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

由此得到平面分割数 $L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$.

使用数学归纳法证明该公式

证明. 1. $k = 0, L_0 = 1$.

2. 设 $k = n - 1, L_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + 1 = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ 成立.

3. $k = n, L_n = L_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$

评论 将直线的情况拓展到折线。

$$Z_1 = 2$$

$$Z_2 = 7$$

做法，将折线补齐成两条直线²

$$\begin{aligned} Z_n &= L_2n - 2n \quad \text{锯齿点不在交点} \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 - 2n \\ &= 2n^2 - n + 1, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

2 约瑟夫问题

n 个人围城一圈，从第一个人开始，每隔一个删除一个。

表 1: 约瑟夫问题最终剩余数字 $J(n)$ 与全体数字 n 之间的关系

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3

人数总数为偶数 $J(2n) = 2J(n) - 1, n \geq 1$. 人数总数为奇数 $J(2n + 1) = 2J(n) + 1, n \geq 1$.

递归式

$$\begin{aligned} J(1) &= 1 \\ J(2n) &= 2J(n) - 1, & n \geq 1 \\ J(2n + 1) &= 2J(n) + 1, & n \geq 1 \end{aligned}$$

² $L_n \sim \frac{1}{2}n^2$
 $Z_n \sim 2n^2$

计算得到 $n = 2^m + l$, 封闭形式 $J(2^m + l) = 2l + 1, m \geq 0, 0 \leq l < 2^m$.

证明. 1. l is even.

$$\begin{aligned} J(2^m + l) &= 2J(2^m + \frac{l}{2}) - 1 \\ &= 2(2 * \frac{l}{2} + 1) - 1 \\ &= 2l + 1 \end{aligned}$$

2. l is odd.

$$\begin{aligned} J(2^m + l) &= 2J(2^m + \frac{l-1}{2}) - 1 \\ &= 2(2 * \frac{l-1}{2} + 1) - 1 \\ &= 2l + 1 \end{aligned}$$

$$J(2n + 1) - J(2n) = 2 \tag{4}$$

评论 将 n 和 $J(n)$ 以 2 为基数表示 (表示为二进制). 假设:

$$\begin{aligned} n &= (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 \\ &= b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \dots + b_1 2^1 + b_0 2^0 \end{aligned}$$

其中 $b_m = 1, b_i = 0$ 或 $1 \quad (0 \leq i < m, i \in \mathbb{N}^+)$

$$n = 2^m + l$$

$$n = (1b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0)_2$$

$$l = (0b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0)_2$$

$$2l = (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_00)_2$$

$$2l + 1 = (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_01)_2$$

$$J(n) = (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_01)_2$$

因此我们得到 $J((1b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0)_2) = (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_01)_2$.
n 向左循环移动一位得到 **J(n)**!

案例 1 $J((1011)_2) = (0111)_2 = (111)_2$, 该式即 $J(11) = 7$

注意: 0 移动至首位会消失, 而不需要保留空位。

$2^{\nu(n)} - 1$, 其中 $\nu(n)$ 为 **n** 转换成的二进制数中 1 的个数

案例 2 $n=13, (13)_{10} = (1101)_2, \mu(13) = 3$.

$$J(J(\dots(J(13))\dots)) = 2^3 - 1 = 7$$

案例 3 $n=23403, \mu(23403) = 10$, therefore $J(J(\dots(J(23403))\dots)) = 2^{10} - 1 = 1023$

回到第一个猜测 $J(n) = \frac{n}{2}$ **n** 为偶数。这个猜想在什么情况下成立?

目前已知 $n = 2^m + l$,

$$J(n) = \frac{n}{2}$$

$$2l + 1 = (2^m + l)/2$$

$$\frac{3}{2}l = 2^{m-1} - 1$$

$$l = \frac{1}{3}(2^{m-1} - 2)$$

m 为奇数, $2^m - 2$ 是 3 的倍数

m 为偶数, $2^m - 2$ 不是 3 的倍数

$J(n) = \frac{n}{2}$ 有无穷多组解

表 2: J(n) 关系式之间的关系

m	l	$n = 2^m + l$	$J(n) = 2l + 1 = \frac{n}{2}$	$(n)_2$
1	0	2	1	10
3	2	10	5	1010
5	10	42	21	101010
7	42	170	85	10101010

评论 再推广, 引入常数 α, β, γ .

$$\begin{cases} f(1) = \alpha \\ f(2n) = 2f(n) + \beta, \quad n \geq 1 \\ f(2n+1) = 2f(n) + \gamma, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

假设 $f(n)$ 具有如下迭代形式

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \quad (6)$$

表 3: $f(n)$ 常数的变化规律

n	$f(n)$	α	β	γ
1	α	1	0	0
2	$2\alpha + \beta$	2	1	0
3	$2\alpha + \gamma$	2	0	1
4	$4\alpha + 3\beta$	4	3	0
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$	4	2	1
6	$4\alpha + \beta + 2\gamma$	4	1	2
7	$4\alpha + 3\gamma$	4	0	3
8	$8\alpha + 7\beta$	8	7	0
9	$8\alpha + 6\beta + \gamma$	8	6	1

看起来似乎有

$$\begin{cases} A(n) = 2^m & n = 2^m + l, \\ B(n) = 2^m - 1 - l & 0 \leq l \leq 2^m \\ C(n) = l & (n \geq 1) \end{cases} \quad (7)$$

使用归纳法证明过程较为繁琐，可选用特殊值组合

1. $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$, 此时 $f(n) = A(n)$, 式5 变为

$$\begin{cases} A(1) = 1 \\ A(2n) = 2A(n), \quad n \geq 1 \\ A(2n+1) = 2A(n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

此时由归纳法可得 $A(2^m + l) = 2^m$

表 4: $f(n)$ 在 $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ 时的变化情况

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	1	2	2	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8	16	16	16

2. $f(n) = 1$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = 2 \times 1 + \beta \\ 1 = 2 \times 1 + \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

$$A(n) - B(n) - C(n) = f(n) = 1$$

3. $f(n) = n$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 2n = 2 \times n + \beta \\ 2n + 1 = 2 \times n + \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$A(n) + C(n) = f(n) = n$$

当 $n = 2^m + l, 0 \leq l < 2^m$ 时, 由上述三种情况可以得到

$$\begin{cases} A(n) & = 2^m \\ A(n) - B(n) - C(n) & = 1 \\ A(n) & + C(n) = n = 2^m + l \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A(n) = 2^m \\ B(n) = 2^m - 1 - l \\ C(n) = l \end{cases}$$

以上为求解递归式的**成套方法** (repertorire method)

评论 约瑟夫递归式二进制解的推广

已知约瑟夫递归式的解为

$$J((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 b_m)_2, \quad b_m = 1$$

推广的约瑟夫递归式有无这种形式的解？

$$\text{令 } \beta_0 = \beta, \beta_1 = \gamma$$

$$\begin{cases} f(1) = \alpha \\ f(2n+j) = 2f(n) + \beta_j, \quad j = 0, 1, \quad n \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f((b_m b_{m-1} \dots b_3 b_2 b_1 b_0)_2) &= 2f((b_m b_{m-1} \dots b_3 b_2 b_1)_2) + \beta_{b_0} \\ &= 2f((b_m b_{m-1} \dots b_3 b_2)_2) + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= \vdots \\ &= 2^m f((b_m)_2) + 2^{m-1} f((b_{m-1})_2) + \dots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= 2^m \alpha + 2^{m-1} \beta_{b_{m-1}} + \dots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \end{aligned}$$

$$f((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (\alpha b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$$

使用成套方法再次求解约瑟夫问题

$$n = 100 = (1100100)_2, (\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, 1)$$

$$\begin{aligned} n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_2 = 100 \\ f(n) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}_2 \\ &= \begin{matrix} +64 & +32 & -16 & -8 & +4 & -2 & -1 \end{matrix} = 73 \end{aligned}$$

表 5: 成套方法各项系数

n	f(n)	J(n)
1	α	1
2	$2\alpha + \beta$	1
3	$2\alpha + \gamma$	3
4	$4\alpha + 2\beta + \beta$	1
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$	3
6	$4\alpha + \beta + 2\gamma$	5
7	$4\alpha + \beta + 3\gamma$	7
8	$8\alpha 7\beta$	1
7	$4\alpha 6\beta + \gamma$	3

总结:

$$\begin{aligned}
 n &= (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)_2 = 100 \\
 f(n) &= (\alpha \ \gamma \ \beta \ \beta \ \gamma \ \beta \ \beta \ 0)_2 \\
 &= (1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 0)_2 \\
 &= +2^6 + 2^5 - 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2^1 - 2^0 = 73
 \end{aligned}$$

由于在 n 的二进制表示中每一块二进制数字 $(1000 \dots 00)_2$ 都被变换成

$$(1-1-1-1 \dots -1-1)_2 = (000 \dots 01)_2 \quad (8)$$

因而推出循环移位性质

$$\begin{aligned}
 f(j) &= \alpha_j & 1 \leq j < d. \\
 f(dn + j) &= cf(n) + \beta_j & 0 \leq j < d, \quad n \leq 1
 \end{aligned}$$

有变动基数的解

$$f((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_d) = (\alpha_{b_m} \beta_{b_{m-1}} \dots \beta_{b_1} \beta_{b_0})_c \quad (9)$$

前一式基数为 d , 后一式基数为 c ³

example:

$$f(1) = 34$$

$$f(2) = 5$$

$$f(3n) = 10f(n) + 76, \quad n \geq 1$$

$$f(3n+1) = 10f(n) - 2, \quad n \geq 1$$

$$f(3n+2) = 10f(n) + 8, \quad n \geq 1$$

计算 $f(19)$.

Solve: 通过基数方法可知 $d = 3, c = 10$.

$$\alpha_1 = 34$$

$$\alpha_2 = 5$$

$$\beta_1 = 76$$

$$\beta_2 = -2$$

$$\beta_3 = 8$$

$$(19)_{10} = 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = (201)_3$$

$$f((19)_{10}) = f((201)_3)$$

$$= (5 \quad 76 \quad -2)_{10}$$

$$= 5 \times 10^2 + 76 \times 10^1 + (-2) \times 10^0$$

$$= 500 + 760 - 2$$

$$= 1258$$

³之后会用 tikz 绘图标注