

# 具体数学阅读笔记-chap1

weiyuan

更新：2022-06-26

## 1 递归问题

### 1.1 河内塔

使用递归方法解决河内塔问题。先从  $n$  为 1 的情况考虑该问题。为了递归式的完整？将  $n$  等于 0 也纳入考虑

$$T_0 = 0$$

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 3$$

$$T_3 = 7$$

从圆盘的移动规律可以看出，要将  $n$  个圆盘从 A 柱移动到 C 柱上，首先需要将  $n-1$  个圆盘移动到 B 柱上，再移动最大的圆盘到 C 柱上，最后将  $n-1$  个圆盘从 B 柱移动到 A 柱上。

书中使用

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1$$

$$T_n \geq 2T_{n-1} + 1$$

得到  $T_n = 2T_{n-1} + 1$ 。将  $n$  等于 0 的情况作为初始条件，得到完整的递归式 (recurrence)

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \quad n > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

计算得到

$$T_n = 2^n - 1, \quad n \geq 0 \tag{2}$$

### 数学归纳法 (mathematical induction)<sup>1</sup>

1. 基础 basis,  $n$  取最小值  $n_0$  证明该命题
2. 归纳 induction, 假设  $k = n - 1$  时归纳结果成立，证明  $k = n$  时该结果也成立

使用数学归纳法证明河内塔问题递归式

- 证明.** 证明河内塔问题递归式
1.  $k = 0$  时,  $T_0 = 2^0 - 1 = 0$
  2. 假设  $k = n - 1$  时  $T_{n-1} = 2^{n-1} - 1$  成立。
  3.  $k = n$  时,  $T_n = 2 * T_{n-1} + 1 = 2 * (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$

**评论** 1. 研究小的情形

2. 求解递归式 (1)
3. 求解递归式 (2)

Q: 递归式  $T_n = 2^n - 1$  是怎样得到的?

$$\begin{aligned} T_0 + 1 &= 1 \\ T_n + 1 &= 2T_{n-1} + 2 = 2(T_{n-1} + 1) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>数学归纳法的难点并不在于证明本身，而是如何得到关系式

$$\text{令 } U_n = T_n + 1$$

$$U_0 = 1$$

$$U_n = 2U_{n-1}, \quad n > 0.$$

容易推出  $U_n = 2^n, T_n = 2^n - 1$

## 1.2 平面上的直线

平面上  $n$  条直线所界定的区域最大个数  $L_n$  是多少?

$$L_0 = 1$$

$$L_1 = 2$$

$$L_2 = 4$$

$$L_3 = 7$$

$\dots$

$$L_n \leqslant L_{n-1} + n, \quad n > 0$$

$$L_n = L_{n-1} + n$$

$$= L_{n-2} + (n-1) + n$$

$$= \dots$$

$$= L_0 + 1 + 2 + \dots + n$$

$$= 1 + S_n$$

其中  $S_n = 1 + 2 + \dots + n$  被称为**三角形数**。

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3}$$

由此得到平面分割数  $L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ .

使用数学归纳法证明该公式

**证明.** 1.  $k = 0, L_0 = 1$ .

2. 设  $k = n - 1, L_{n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + 1 = \frac{(n-1)n}{2} + 1$  成立.

3.  $k = n, L_n = L_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$

**评论** 将直线的情况拓展到折线。

$$Z_1 = 2$$

$$Z_2 = 7$$

做法，将折线补齐成两条直线<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} Z_n &= L_2n - 2n \quad \text{锯齿点不在交点} \\ &= \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 - 2n \\ &= 2n^2 - n + 1, \quad n \geqslant 0 \end{aligned}$$

### 1.3 约瑟夫问题

$n$  个人围成一圈，从第一个人开始，每隔一个删除一个。

**表 1:** 约瑟夫问题最终剩余数字  $J(n)$  与全体数字  $n$  之间的关系

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
J(n)	1	1	3	1	3	5	7	1	3

---

$$^2L_n \sim \frac{1}{2}n^2$$

$$Z_n \sim 2n^2$$

人数总数为偶数  $J(2n) = 2J(n) - 1, n \geq 1$ . 人数总数为奇数  $J(2n + 1) = 2J(n) + 1, n \geq 1$ .

递归式

$$\begin{aligned} J(1) &= 1 \\ J(2n) &= 2J(n) - 1, & n \geq 1 \\ J(2n + 1) &= 2J(n) + 1, & n \geq 1 \end{aligned}$$

计算得到  $n = 2^m + l$ , 封闭形式  $J(2^m + l) = 2l + 1, m \geq 0, 0 \leq l < 2^m$ .

**证明.** 1. 1 is even.

$$\begin{aligned} J(2^m + l) &= 2J(2^m + \frac{l}{2}) - 1 \\ &= 2(2 * \frac{l}{2} + 1) - 1 \\ &= 2l + 1 \end{aligned}$$

2. 1 is odd.

$$\begin{aligned} J(2^m + l) &= 2J(2^m + \frac{l-1}{2}) - 1 \\ &= 2(2 * \frac{l-1}{2} + 1) - 1 \\ &= 2l + 1 \end{aligned}$$

$$J(2n + 1) - J(2n) = 2 \tag{4}$$

**评论** 将  $n$  和  $J(n)$  以 2 为基数表示 (表示为二进制). 假设:

$$\begin{aligned} n &= (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2 \\ &= b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \dots + b_1 2^1 + b_0 2^0 \end{aligned}$$

其中  $b_m = 1, b_i = 0$  或  $1$  ( $0 \leq i < m, i \in \mathbb{N}^+$ )

$$n = 2^m + l$$

$$n = (1b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0)_2$$

$$l = (0b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0)_2$$

$$2l = (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_00)_2$$

$$2l + 1 = (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_01)_2$$

$$J(n) = (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_01)_2$$

因此我们得到  $J((1b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_0)_2) = (b_{m-1}b_{m-2} \dots b_1b_01)_2$ .  
 $n$  向左循环移动一位得到  $J(n)$ !

**案例 1**  $J((1011)_2) = (0111)_2 = (111)_2$ , 该式即  $J(11) = 7$

注意: 0 移动至首位会消失, 而不需要保留空位。

$2^{\nu(n)} - 1$ , 其中  $\nu(n)$  为  $n$  转换成的二进制数中 1 的个数

**案例 2**  $n=13, (13)_{10} = (1101)_2, \mu(13) = 3$ .

$$J(J(\dots(J(13))\dots)) = 2^3 - 1 = 7$$

**案例 3**  $n=23403, \mu(23403) = 10$ , therefore  $J(J(\dots(J(23403))\dots)) = 2^{10} - 1 = 1023$

回到第一个猜测  $J(n) = \frac{n}{2}$   $n$  为偶数。这个猜想在什么情况下成立？

目前已知  $n = 2^m + l$ ,

$$\begin{aligned} J(n) &= \frac{n}{2} \\ 2l + 1 &= (2^m + l)/2 \\ \frac{3}{2}l &= 2^{m-1} - 1 \\ l &= \frac{1}{3}(2^{m-1} - 2) \end{aligned}$$

$m$  为奇数,  $2^m - 2$  是 3 的倍数

$m$  为偶数,  $2^m - 2$  不是 3 的倍数

$J(n) = \frac{n}{2}$  有无穷多组解

**表 2:**  $J(n)$  关系式之间的关系

$m$	1	$n = 2^m + l$	$J(n) = 2l + 1 = \frac{n}{2}$	$(n)_2$
1	0	2	1	10
3	2	10	5	1010
5	10	42	21	101010
7	42	170	85	10101010

**评论** 再推广, 引入常数  $\alpha, \beta, \gamma$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = \alpha \\ f(2n) = 2f(n) + \beta, \quad n \geq 1 \\ f(2n+1) = 2f(n) + \gamma, \quad n \geq 1 \end{array} \right. \quad (5)$$

表 3:  $f(n)$  常数的变化规律

n	$f(n)$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	$\alpha$	1	0	0
2	$2\alpha + \beta$	2	1	0
3	$2\alpha + \gamma$	2	0	1
4	$4\alpha + 3\beta$	4	3	0
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$	4	2	1
6	$4\alpha + \beta + 2\gamma$	4	1	2
7	$4\alpha + 3\gamma$	4	0	3
8	$8\alpha + 7\beta$	8	7	0
9	$8\alpha + 6\beta + \gamma$	8	6	1

假设  $f(n)$  具有如下迭代形式

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \quad (6)$$

看起来似乎有

$$\begin{cases} A(n) = 2^m & n = 2^m + l, \\ B(n) = 2^m - 1 - l & 0 \leq l \leq 2^m \\ C(n) = l & (n \geq 1) \end{cases} \quad (7)$$

使用归纳法证明过程较为繁琐, 可选用特殊值组合

1.  $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ , 此时  $f(n) = A(n)$ , 式5 变为

$$\begin{cases} A(1) = 1 \\ A(2n) = 2A(n), \quad n \geq 1 \\ A(2n+1) = 2A(n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$



表 4:  $f(n)$  在  $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$  时的变化情况

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	1	2	2	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8	16	16	16

此时由归纳法可得  $A(2^m + l) = 2^m$

2.  $f(n) = 1$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = 2 \times 1 + \beta \\ 1 = 2 \times 1 + \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

$$A(n) - B(n) - C(n) = f(n) = 1$$

3.  $f(n) = n$

$$\begin{cases} 1 = \alpha \\ 2n = 2 \times n + \beta \\ 2n + 1 = 2 \times n + \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$A(n) + C(n) = f(n) = n$$

当  $n = 2^m + l, 0 \leq l < 2^m$  时, 由上述三种情况可以得到

$$\begin{cases} A(n) & = 2^m \\ A(n) - B(n) - C(n) & = 1 \\ A(n) & + C(n) = n = 2^m + l \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} A(n) = 2^m \\ B(n) = 2^m - 1 - 1 \\ C(n) = l \end{cases}$$

以上为求解递归式的**成套方法** (repertorire method)

**评论** 约瑟夫递归式二进制解的推广

已知约瑟夫递归式的解为

$$J((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 b_m)_2, \quad b_m = 1$$

推广的约瑟夫递归式有无这种形式的解?

$$\text{令 } \beta_0 = \beta, \beta_1 = \gamma$$

$$\begin{cases} f(1) = \alpha \\ f(2n + j) = 2f(n) + \beta_j, \quad j = 0, 1, \quad n \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f((b_m b_{m-1} \dots b_3 b_2 b_1 b_0)_2) &= 2f((b_m b_{m-1} \dots b_3 b_2 b_1)_2) + \beta_{b_0} \\ &= 2f((b_m b_{m-1} \dots b_3 b_2)_2) + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= \vdots \\ &= 2^m f((b_m)_2) + 2^{m-1} f((b_{m-1})_2) + \dots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &= 2^m \alpha + 2^{m-1} \beta_{b_{m-1}} + \dots + 2\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \end{aligned}$$

$$f((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (\alpha b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2$$

使用成套方法再次求解约瑟夫问题

表 5: 成套方法各项系数

n	f(n)	J(n)
1	$\alpha$	1
2	$2\alpha + \beta$	1
3	$2\alpha + \gamma$	3
4	$4\alpha + 2\beta + \beta$	1
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$	3
6	$4\alpha + \beta + 2\gamma$	5
7	$4\alpha + \beta + 3\gamma$	7
8	$8\alpha 7\beta$	1
7	$4\alpha 6\beta + \gamma$	3

$$n = 100 = (1100100)_2, (\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, 1)$$

$$\begin{aligned}
 n &= ( \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 )_2 = 100 \\
 f(n) &= ( \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 )_2 \\
 &= +64 +32 -16 -8 +4 -2 -1 = 73
 \end{aligned}$$

总结:

$$\begin{aligned}
 n &= ( \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 )_2 = 100 \\
 f(n) &= ( \quad \alpha \quad \gamma \quad \beta \quad \beta \quad \gamma \quad \beta \quad \beta )_2 \\
 &= ( \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 )_2 \\
 &= +2^6 +2^5 -2^4 -2^3 +2^2 -2^1 -2^0 = 73
 \end{aligned}$$

由于在  $n$  的二进制表示中每一块二进制数字  $(1000 \dots 00)_2$  都被变换成

$$(1-1-1-1 \dots -1-1)_2 = (000 \dots 01)_2 \quad (8)$$

因而推出循环移位性质

$$\begin{aligned} f(j) &= \alpha_j & 1 \leq j < d. \\ f(dn + j) &= cf(n) + \beta_j & 0 \leq j < d, \quad n \leq 1 \end{aligned}$$

有变动基数的解

$$f((b_mb_{m-1}\dots b_1b_0)_d) = (\alpha_{b_m}\beta_{b_{m-1}}\dots\beta_{b_1}\beta_{b_0})_c \quad (9)$$

前一式基数为  $d$ ，后一式基数为  $c$ <sup>3</sup>

example:

$$\begin{aligned} f(1) &= 34 \\ f(2) &= 5 \\ f(3n) &= 10f(n) + 76, & n \geq 1 \\ f(3n + 1) &= 10f(n) - 2, & n \geq 1 \\ f(3n + 2) &= 10f(n) + 8, & n \geq 1 \end{aligned}$$

计算  $f(19)$ .

Solve: 通过基数方法可知  $d = 3, c = 10$ .

$$\alpha_1 = 34$$

$$\alpha_2 = 5$$

$$\beta_1 = 76$$

$$\beta_2 = -2$$

$$\beta_3 = 8$$

---

<sup>3</sup>之后会用 tikz 绘图标注

$$(19)_{10} = 2 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = (201)_3$$

$$\begin{aligned} f((19)_{10}) &= f((201)_3) \\ &= (5 \quad 76 \quad -2)_{10} \\ &= 5 \times 10^2 + 76 \times 10^1 + (-2) \times 10^0 \\ &= 500 + 760 - 2 \\ &= 1258 \end{aligned}$$