施克剛・譯

分析學探源

作者序言

本書是打算作爲研習數學的優秀大學生，或一年級研究生選修分析學課程的教科書。

新版基本上仍包含與第二版相同的論題，有些增加，也略有減少，另有相當程度的次序變動。我希望這些變動，會使得這些材料對修習這類課程的學生來說，更容易接受，也引人入勝。

經驗告訴我，由從有理數建極實數來開始，（儘管邏輯上是正確的，）在教學上却並不好。在剛開始，大多數學生簡直不知道爲什麼要這麼做。因此，我將實數系當作一個具有最小上界性質的有序體來介紹，並立即說明一些有趣的應用。

不過，Dedekind 的建構方法並沒有略去。它現在是第一章的附錄，在時機成熟時可加以研究及咀嚼。

討論多變數函數的材料，幾乎全部改寫，加入了許多細節，更多的例題，以及引導動機的介紹。反函數定理——第九章的關鍵論題——的證明，利用有關收縮映射（Contraction Mapping）的定點定理，已予以簡化。微分型式也討論得更詳盡。還包含了一些 Stokes 定理的應用。

至於其它的變動有，討論 Riemann-Stieljes 積分的一章，有點裁剪，第八章加入了短短的 Gamma 函數論自修式的一節，另外還有大量新的習題，大多數都有相當詳細的提示。

我也加入了一些出現在美國數學月刊(American Mathenatical Monthly)及數學雜誌（Mathematics Magazine）中的參考論文，意欲養成學生查閱雜誌文獻的習慣。這大多數文獻都是由 B. Burckel 好心提供的。

幾年來，承許多人，有學生也有老師，寄給我一些改正，批評，以及有關本書前版的其它意見。我衷心感激，並藉此機會對所有寫信給我的人，表達我誠摯的謝意。

Walter Rudin

譯者序言

這是一本分析學的名著，自 1964 年第二版發行以來，就廣爲數學界所推崇。 1976 年改訂新版，譯者斗膽迻譯，期爲科學中文化盡一分力耳。

全書共費時一年餘，施思明博士的啓發，鼓勵及協助，使譯者獲益良多，謹將此書譯獻給他，聊表敬意。

書中譯名，專有名詞參考正中書局部頒「數學名詞」一書（民國六十年九月），兼採楊維哲先生及賴漢卿先生兩位前輩的譯名，行文儘量口語化，但仍有力不從心之處，這是譯者功力太淺之故，望各方賢達不吝指正。

個人以爲，科學中文化是提高國內科技水平必行之道，實不容再做意氣之爭。學有專長的學者，請儘量以中文著述，（楊維哲先生及賴漢卿先生最應受到崇敬！）學問稍淺無力著述如我等，則請擇世界各國名著，費心迻譯，盡一分科學知識份子的責任，庶幾中華民國之科學水平可逐漸趕上先進國家。

玲於照顧小多多之餘，替我整理索引，實非一個「愛」字可以表達，小多多的嬌憨，也爲翻譯時的愁悶，平添一分歡笑，且記下留念。

施克剛 六十八年十二月一日

目錄

第一章

實數系與複數系

導論

要對分析學中的主要觀念（如：收斂、連續、微分和積分），有個令人滿意的討論，就必須奠基於精確定義的數的概念上。不過，我們將不深入討論那些支配整數運算的公設，而假設對有理數（即，具有 m/n 這種型式的數，其中 m 和 n 是整數，且 $n \neq 0$）很熟悉。

做為一個體（field）或是有序集合（ordered set）兩者，有理數系在許多應用上都是不適足的。（這兩個名詞會定義在 1.6 節及 1.12 節中。）例如，就沒有一個有理數會使 $p^2=2$（我們馬上就要證明這件事）。這就導致了所謂「無理數」的引入，它們通常是寫成無窮小數的展開式，而想成是被對應的有限小數所「逼近」(approximate)。因此，序列

$$1, 1.4, 1.414, 1.4142, \cdots\cdots$$

「趨於$\sqrt{2}$」，但除非這無理數已有明確的定義，否則一定會引起這個問題：我們上面這個序列到底是「趨向」什麼？

一旦所謂「實數系」建構完了，這一類的問題就有答案了。

1.1 例子 我們先證明方程式

$$(1)\qquad p^2=2$$

不能被任何有理數 p 滿足。因爲，若 (1) 滿足了，則我們可以令 $p=m/n$，其中 m 及 n 都是整數，同時我們還可以選擇 m 及 n 使它們不全是偶數。我們假設這已經做好了。則 (1) 蘊涵了

$$(2)\qquad m^2=2n^2.$$

這顯示了 m^2 是個偶數。所以 m 是偶數（如果 m 爲奇數，m^2 就會是奇數），因而 m^2 可以被 4 整除。於是 (2) 的右邊可以被 4 整除，所以 n^2 爲偶數，這又蘊涵了 n 爲偶數。

因此 (1) 成立的假設，導致 m 及 n 皆爲偶數的結論，與我們對 m 及 n 的選擇相違反。所以 (1) 對有理數 p 是不可能的。

我們現在把這情況研究得更仔細一點。令 A 爲所有正有理數 p 而 $p^2<2$ 的集合，令 B 包含所有正有理數 p 而 $p^2>2$。我們將證明 A 不包含最大數，而 B 不包含最小數。

更明白點說，對每個 A 中的 p，我們可以在 A 中找到一個有理數 q，使得 $p<q$；而對每個 B 中的 p，我們可以在 B 中找到一個有理數 q，使得 $q<p$。

要證這個，我們對每個有理數 $p>0$，給它一個數

$$(3)\qquad q=p-\frac{p^2-2}{p+2}=\frac{2p+2}{p+2}$$

則

$$(4)\qquad q^2-2=\frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2}.$$

若 p 在 A 中，則 $p^2-2<0$ (3) 顯示 $q>p$，而 (4) 顯示 $q^2<2$。因此 q 在 A 中。

若 p 在 B 中，則 $p^2-2>0$，(3) 顯示 $0<q<p$，而 (4)

顯示 $q^2>2$，因此 q 在 B 中。

1.2　備註　以上討論的目的，就是要證明有理數系中，有某種缺口，儘管每兩個有理數之間必有另一有理數：若 $r<s$，則 $r<(r+s)/2<s$。實數系就塡補了這些缺口。這就是它在分析學中扮演基本角色的最主要的理由。

爲了要說明其結構，以及複數系的結構，我們先對有序集 (ordered set) 和體 (field) 的一般概念作簡短的討論。

這裏是我們整本書中，都會用到的一些標準的集合論的術語。

1.3　定義　如果 A 是任何集合(它的元素可能是數或任何其它事物)，我們用 $x\in A$ 表示 x 是 A 的一個成員（或元素）。

若 x 不是 A 的成員，我們寫作：$x\notin A$

不包含任何元素的集合是叫做空集合 (empty set)。如果一集合至少包含一個元素，則叫做非空 (non-empty)。

如果 A 和 B 是集合，且若 A 的每個元素都是 B 的元素，則我們說 A 是 B 的子集合，並寫成 $A\subset B$，或 $B\supset A$。此外，如果 B 中有一元素不在 A 中，則稱 A 是 B 的眞子集 (proper subset)。注意，對每個集合 A, $A\subset A$

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，我們寫做 $A=B$。否則就是 $A\neq B$

1.4　定義　整個第一章中，所有有理數的集合是記做 Q.

有序集合

1.5　定義　令 S 爲一集合，S 上的次序 (order) 是一種關係，記做 $<$，具有下列兩種性質:

(i) 如果 $x\in S$ 且 $y\in S$，則

$$x<y,\quad x=y,\quad y<x$$

三敍述中，有且僅有一個爲眞。

(ii) 若 $x, y, z\in S$，$x<y$ 且 $y<z$，則 $x<z$

"$x<y$"這敍述，可以唸成「x小於y」或「x比y小」或是「x在y之前。」

常常，以$y>x$代替$x<y$會方便點。

$x\leq y$這符號是表示$x<y$或$x=y$，不特別指明是兩種之一何者成立。換言之，$x\leq y$是$x>y$的否定。

1.6 定義 有序集合是說，一集合S，其中定義了有一種次序。

例如，如果$r<s$是定義說$s-r$是個正有理數的話，則Q就是有序集。

1.7 定義 假設S是個有序集，且$E\subset S$。如果存在$\beta\in S$，而對所有$x\in E$，$x\leq\beta$，則我們說E是在上有界（bounded above)，並稱β是E的一個上界（upper bnund)。

下界也可以同法定義（以$\geq$取代$\leq$）。

1.8 定義 假設S是個有序集，而$E\subset S$，E是在上有界。假設存在$\alpha\in S$，具有以下性質:

（i）α是E的一個上界。

（ii）如果$\gamma<\alpha$，則γ不是E的上界。

則α叫做E的最小上界（least upper bound）〔由(ii)很明顯知道，最多只有一個這樣的α〕，或E的 supremum，我們寫成

$$\alpha=\sup E.$$

一個在下有界的集合E，其最大下界（greatest lower bound)，或 infimum，是以同樣方式來來義: 所謂

$$\alpha=\inf E$$

意思是，α是E的一個下界，而沒有任何β，$\beta>\alpha$，會是E的下界。

1.9 例子

(a）將例 1.1 的集合A和B，想成是有序集合Q的子集。集

合A是在上有界。事實上，A的上界正好是B中的元素。由於B沒有最小元素，故A在Q中沒有最小上界。

同樣的，B在下有界：B的所有下界的集合，包含了A及所有$r \in Q$而$r \leq 0$者。由於A沒有最大元素，故B在Q中沒有最大下界。

(b) 若$\alpha = \sup E$ 存在，則α可以是也可以不是E中的元素。例如，令E_1爲所有$r \in Q$而$r < 0$的集合。E_2爲所有$r \in Q$而$r \leq 0$的集合。則

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0$$

而$0 \notin E_1$，$0 \in E_2$

(c) 令E包含所有 $1/n$, $n = 1, 2, 3 \cdots\cdots$，這些數。則 $\sup E = 1$，它屬於E，而 $\inf E = 0$，它不屬於E。

1.10 定義 一有序集合S，我們說它具有最小上界性質，如果下述爲眞的話：

若$E \subset S$，E是非空，而E是在上有界，則 $\sup E$ 存在於S中。

例 1.9 (a) 顯示，Q並不具有最小上界性質。

我們現在要證明最大下界與最小上界之間，有密切的關係，而每個具有最小上界性質的有序集合，也具有最大下界性質。

1.11 定理 假設S是有序集，具有最小上界性質，$B \subset S$，B爲非空，且B在下有界。令L爲所有B之下界所成的集合。則

$$\alpha = \sup L$$

存在於S中，且$\alpha = \inf B$

特別是，$\inf B$存在於S中。

證明：由於B在下有界，故L爲非空。又因爲L恰包含那些$y \in S$，並對所有$x \in B$，滿足$y \leq x$這不等式，故我們知道，每個$x \in B$，都是L的上界。因此L在上有界。我們對S的假

設，因而蘊涵了L在S中有最小上界；叫它做α。

若$\gamma<\alpha$，則（見定義 1.8）γ不是L的上界，因此$\gamma\notin B$，於是對每個$x\in B$，$\alpha\leq x$。所以$\alpha\in L$。

若$\alpha<\beta$，則$\beta\notin L$，蓋因α是L的上界。

我們已證明了，若$\beta>\alpha$，則$\alpha\in L$但$\beta\notin L$。換言之，α是B的下界，而若$\beta>\alpha$，β就不是了。這意思就是說$\alpha=\inf B$。

體

1.12 定義 一個體（field）是個集合F，具有兩個運算，稱做加法和乘法，它們滿足以下所謂的「體的公設」(A), (M) 及 (D)

(A) 加法公設

(A1) 若$x\in F$且$y\in F$，則其和$x+y$亦屬於F。

(A2) 加法是可交換的：$x+y=y+x$，當所有$x, y\in F$。

(A3) 加法是可結合的：對所有$x, y, z\in F$. $(x+y)+z=x+(y+z)$

(A4) F包含元素0，使得對所有$x\in F$，$0+x=x$.

(A5) 對每個$x\in F$，必對應一元素$-x\in F$，使得

$$x+(-x)=0$$

(M) 乘法公設

(M1) 若$x\in F$且$y\in F$，則其乘積$xy\in F$

(M2) 乘法是可交換的：對所有$x, y\in F$, $xy=yx$.

(M3) 乘法是可結合的：對所有$x, y, z\in F$, $(xy)z=x(yz)$

(M4) F包含元素$1\neq 0$，使得對每個$x\in F$, $1x=x$

(M5) 若$x\in F$且$x\neq 0$，則存在一元素$1/x$，使得

$$x\cdot(1/x)=1.$$

(D) 分配律

對所有 $x, y, z \in F$,

$$x(y+z)=xy+xz$$

成立。

1.13 備註

(a) 我們通常（在任何體中）以

$$x-y, \frac{x}{y}, x+y+z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x, \cdots\cdots$$

取代

$$x+(-y), x\cdot\left(\frac{1}{y}\right), (x+y)+z, (xy)z, xx, xxx,$$

$x+x, x+x+x, \cdots\cdots$這種寫法。

(b) 在所有有理數的集合Q中，體的公設顯然成立，如果其加法和乘法具有通常的意義。因此Q是一個體。

(c) 雖然對體（或任何其它代數結構）的詳細研究，不是我們的目標，但是證明在Q中某些熟悉的性質，是體的公設所得的結論，仍是值得的；而一旦我們證明了這個，對實數及複數，我們就不必再證明了。

1.14 命題 加法公設蘊涵了以下諸敍述:

(a) 若$x+y=x+z$，則$y=z$

(b) 若$x+y=x$，則$y=0$

(c) 若$x+y=0$，則$y=-x$.

(d) $-(-x)=x$.

敍述 (a) 是消去律。留意 (b) 斷言了在（A4）中，同樣 (c) 斷言了在（A5）中，所假設存在的元素，是唯一的。

證明: 若$x+y=x+z$，則公設 (A) 給了我們

$$y=0+y=(-x+x)+y=-x+(x+y)$$
$$=-x+(x+z)=(-x+x)+z=0+z=z.$$

這便證明了 (a)。在 (a) 中取$z=0$便得到 (b)。在 (a) 中

$z=-x$ 取就得到 (c)。

由於 $-x+x=0$，由 (c) (將 $-x$ 代替 x) 便導出 (d)。

1.15 命題 乘法公設蘊涵了以下諸敘述:

(a) 若 $x\neq 0$ 且 $xy=xz$，則 $y=z$。

(b) 若 $x\neq 0$ 且 $xy=x$，則 $y=1$。

(c) 若 $x\neq 0$ 且 $xy=1$，則 $y=1/x$。

(d) 若 $x\neq 0$，則 $1/(1/x)=x$。

其證明與命題 1.14 雷同，所以我們省略了。

1.16 命題 對任何 $x, y, z\in F$，體的公設蘊涵了以下的敘述。

(a) $0x=0$

(b) 若 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$，則 $xy\neq 0$

$(-x)y=-(xy)=x(-y)$

(d) $(-x)(-y)=xy$

證明: $0x+0x=(0+0)x=0x$。因此 1.14 (b) 蘊涵了 $0x=0$，而 (a) 成立。

其次，假設 $x\neq 0$，$y\neq 0$ 但 $xy=0$。則由 (a) 得出

$$1=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0=0$$

是個矛盾。故 (b) 成立。

(c) 中的第一個等式是由

$$(-x)y+xy=(-x+x)y=0y=0$$

與 1.14 (c) 合起來得到的; (c) 的另一半也同樣可證得。

最後，由 (c) 及 1.14 (d) 知

$$(-x)(-y)=-[x(-y)]=-[-(xy)]=xy.$$

1.17 定義 所謂有序體 (ordered field)，是說一個體 F，它同時也是個有序集合，使得

(i) 若 $x, y, z\in F$，且 $y<z$，則 $x+y<x+z$.

邊都乘上 $(1/x)(1/y)$ 這個正量，則我們得到 $1/y<1/x$.

實數體

我們現在敍述存在定理，它是本章的核心。

1.19 定理 存在一個有序體 R，它具有最小上界性質。

更有甚者，R 包含了 Q，並以之爲子體。

第二個敍述的意思是，$Q\subset R$ 以及 R 中的加法和乘法，當作用在 Q 中的元素時，與平常對有理數的運算是相同的；此外，正有理數也是 R 中的正元素。

R 的元素稱爲實數 (real numbers)。

定理 1.19 的證明相當長，而且有點繁複，所以放在第一章的附錄中呈示之。事實上，這證明是由 Q 來建構 R。

下一定理，可以由這種建構中抽取出來，而幾乎不需另外費什麼力的。不過，我們喜歡由定理 1.19 來導衍它，因爲這樣做提供了一個很好的例子，就是我們對最小上界性質能做如何的運用。

1.20 定理

(a) 若 $x\in R$ 且 $y\in R$，則有一正整數 n 使得

$$nx>y.$$

(b) 若 $x\in R$, $y\in R$, 且 $x<y$，則存在 $p\in Q$，使得 $x<p<y$.

性質 (a) 通常稱爲 R 的阿基德性質 (Archimedean property) (b) 部份可以說成 Q 在 R 中稠密 (dense)：在任意二實數之間，必有一有理數。

證明: (a) 令 A 爲所有 nx 的集合，其中的 n 在正整數中變動。如果 (a) 不眞，則 y 就會是 A 的一個上界。但因此 A 在 R 中就會有最小上界。取 $\alpha=\sup A$。由於 $x>0$. $\alpha-x<\alpha$，而 $\alpha-x$ 不是 A 的上界。故對某個正整數 m, $\alpha-x<mx$。則 $\alpha<$

邊都乘上 $(1/x)(1/y)$ 這個正量，則我們得到 $1/y<1/x$.

實數體

我們現在敍述存在定理，它是本章的核心。

1.19　定理　存在一個有序體 R，它具有最小上界性質。更有甚者，R 包含了 Q，並以之爲子體。

第二個敍述的意思是，$Q\subset R$ 以及 R 中的加法和乘法，當作用在 Q 中的元素時，與平常對有理數的運算是相同的；此外，正有理數也是 R 中的正元素。

R 的元素稱爲實數 (real numbers)。

定理 1.19 的證明相當長，而且有點繁複，所以放在第一章的附錄中呈示之。事實上，這證明是由 Q 來建構 R。

下一定理，可以由這種建構中抽取出來，而幾乎不需另外費什麼力的。不過，我們喜歡由定理 1.19 來導衍它，因爲這樣做提供了一個很好的例子，就是我們對最小上界性質能做如何的運用。

1.20　定理

(a) 若 $x\in R$ 且 $y\in R$，則有一正整數 n 使得

$$nx>y.$$

(b) 若 $x\in R$，$y\in R$，且 $x<y$，則存在 $p\in Q$，使得 $x<p<y$.

性質 (a) 通常稱爲 R 的阿基德性質 (Archimedean property) (b) 部份可以說成 Q 在 R 中稠密 (dense)：在任意二實數之間，必有一有理數。

證明: (a) 令 A 爲所有 nx 的集合，其中的 n 在正整數中變動。如果 (a) 不眞，則 y 就會是 A 的一個上界。但因此 A 在 R 中就會有最小上界。取 $\alpha=\sup A$。由於 $x>0$. $\alpha-x<\alpha$，而 $\alpha-x$ 不是 A 的上界。故對某個正整數 m，$\alpha-x<mx$。則 $\alpha<$

$(m+1)x \in A$，但這是不可能的，蓋 α 是 A 的上界。

(b) 由於 $x<y$，故我們有 $y-x>0$，而 (a) 給了一個正整數 n 使得

$$n(y-x)>1$$

再用一次 (a)，我們得到正整數 m_1 及 m_2，使得 $m_1>nx$，$m_2>-nx$。則

$$-m_2<nx<m_1$$

因此有一整數 $m(-m_2 \leq m \leq m_1)$ 使得

$$m-1 \leq nx<m.$$

如果我們將這些不等式合起來，我們得到

$$nx<m \leq 1+nx<ny.$$

由於 $n>0$，於是

$$x<\frac{m}{n}<y.$$

令 $p=\dfrac{m}{n}$，這就證得了 (b)。

我們要證明正實數的 n 次根的存在性，以做為前面所說的一種應用。這將顯示在導論中指出的困難處（$\sqrt{2}$ 的無理性），在 R 中如何解決。

1.21　定理　對每個實數 $x>0$ 及每個整數 $n>0$，有一個且只有一個實數 $y>0$，使得 $y^n=x$.

這個數 y 寫成 $y=\sqrt[n]{x}$，或 $x^{1/n}$。

證明: 最多只有一個這樣的 y 是很明顯，因為 $0<y_1<y_2$ 蘊涵了 $y_1{}^n<y^n{}_2$。

令 E 為包含所有正實數 t 而 $t^n<x$，所成的集合。

若 $t=x/(1+x)$，則 $0<t<1$；因此 $t^n<t<x$，因而 E 不是空集合。

若 $t>1+x$，則 $t^n>t>x$，所以 $t \notin E$。因而 $1+x$

是E的一個上界。

因此定理 1.19 蘊涵了

$$y=\sup E$$

的存在。要證明 $y^n=x$，我們將證明 $y^n>x$及 $y^n<x$ 這個兩不等式，都會導致矛盾。

由 $b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots\cdots+a^{n-1})$ 這恒等式，導得不等式，當$0<a<b$，

$$b^n-a^n<(b-a)nb^{n-1},$$

假設 $y^n<x$，選取h使得$0<h<1$，且

$$h<\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

取$a=y$，$b=y+h$，則

$$(y+h)^n-y^n<hn(y+h)^{n-1}<hn(y+1)^{n-1}<x-y^n.$$

因此 $(y+h)^n<x$，而$y+h\in E$。由於$y+h>y$，這就和y是E的一個上界矛盾。

假設 $y^n>x$。令

$$k=\frac{y^n-x}{ny^{n-1}}.$$

則$0<k<y$。若 $t\geq y-k$，我們歸結到

$$y^n-t^n\leq y^n-(y-k)^n<kny^{n-1}=y^n-x$$

因此$t^n>x$，而$t\notin E$。於是$y-k$是E的一個上界。但$y-k<y$，這就與y是E的最小上界矛盾。

因此 $y^n=x$　證畢。

系：若a和b是正實數，n是正整數，則

$$(ab)^{1/n}=a^{1/n}b^{1/n}.$$

證明：令$\alpha=a^{1/n}$，$\beta=b^{1/n}$。則因爲乘法是可交換的，故

$$ab=\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n,$$

〔定義 1.12 公設 (M2)〕。定理 1.21 斷言的唯一性因而顯示

$$(ab)^{1/n}=\alpha\beta=a^{1/n}b^{1/n}$$

1.22 小數 我們要指出實數與小數之間的關係，以結束本節。

令 $x>0$ 爲實數。n_0 爲使得 $n_0\leq x$ 的最大整數。（留意 n_0 的存在，與 R 的阿基米德性質有關。）當選完了 $n_0, n_1\cdots\cdots, n_{k-1}$，令 n_k 爲使得

$$n_0+\frac{n_1}{10}+\cdots\cdots+\frac{n_k}{10^k}\leq x$$

的最大整數。

令 E 爲所有

$$n_0+\frac{n_1}{10}+\cdots\cdots+\frac{n_k}{10^k} \qquad (k=0, 1, 2, \cdots\cdots) \tag{5}$$

這些數的集合。則 $x=\sup E$. x 的小數展開式爲

$$n_0.\, n_1n_2n_3\cdots\cdots \tag{6}$$

反之，對任意無窮小數 (6)，由 (5) 這些數所成的集合 E 是在上有界，而 (6) 是 $\sup E$ 的小數展開式。

由於我們永遠不會用到小數，所以我們也不再深入討論了。

擴充了的實數系 (The Extended Real Number System)

1.23 定義 擴充了的實數系包含實數體 R，以及 $+\infty$ 和 $-\infty$ 兩個符號。我們保留 R 中原來的次序，並定義對所有 $x\in R$，

$$-\infty<x<+\infty$$

則很顯然，$+\infty$ 是每個擴充的實數系中的子集合的上界，且每個非空子集都有一個最小上界。例如，若 E 是實數所成的非空集合，在 R 中不是在上有界，則在擴充的實數系中，$\sup E=+\infty$。

完全一樣的說明，對下界同樣適用。

擴充了的實數系，並不構成一個體，但通常我們制定以下的規約:

(a) 若 x 是實數，則

$$x+\infty=\infty,\ x-\infty=-\infty,\ \frac{x}{\infty}=\frac{x}{-\infty}=0$$

(b) 若 $x>0$，則 $x\cdot(+\infty)=+\infty,\ x\cdot(-\infty)=-\infty.$

(c) 若 $x<0$，則 $x\cdot(+\infty)=-\infty,\ x\cdot(-\infty)=+\infty.$

當我們想很明確地分別一個是實數，另一是$+\infty$和$-\infty$符號時，前者通常說是有限 (finite)。

複數體

1.24 定義　一複數 (complex number) 是一組有序實數對 (a,b)。「有序」是指若 $a\neq b$，則 (a,b) 和 (b,a) 是視爲相異。

令 $x=(a,b)$, $y=(c,d)$ 爲二複數。我們寫成 $x=y$ 若且唯若 $a=c$ 及 $b=d$。（留意，這定義並非多餘；試想當有理數表爲整數之商時，其等號的定義。）我們定義

$$x+y=(a+c,b+d)$$
$$xy=(ac-bd,ad+bc)$$

1.25 定理　這個加法和乘法的定義，將所有複數所成的集合，變爲一個體，而以 $(0,0)$ 及 $(1,0)$ 替代了 0 和 1 的位置。

證明: 我們只須驗證體的公設，條列在定義 1.12 中者，（當然，我們要用到 R 的體的結構。）

令 $x=(a,b)$,　$y=(c,d)$,　$z=(e,f)$

(A1)　很明顯。

(A2)　$x+y=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=y+x.$

(A3)　$(x+y)+z=(a+c,b+d)+(e,f)$
$=(a+c+e,b+d+f)$
$=(a,b)+(c+e,d+f)=x+(y+z)$

(A4)　$x+0=(a,b)+(0,0)=(a,b)=x$

(A5)　令 $-x=(-a,-b)$，則 $x+(-x)=(0,0)=0$.

(M1)　很明顯。

(M2)　$xy=(ac-bd,ad+bc)=(ca-db,da+cb)=yx.$

(M3)　$(xy)z=(ac-bd,ad+bc)(e,f)$
$=(ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce)$
$=(a,b)(ce-df,cf+de)=x(yz).$

(M4)　$1x=(1,0)(a,b)=(a,b)=x$

(M5)　若 $x\neq 0$，則 $(a,b)\neq(0,0)$ 這意思是實數 a,b 中至少有一不爲 0。因此由命題 1.18（d）知，$a^2+b^2>0$ 而我們可以定義

$$\frac{1}{x}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

則

$$x\cdot\frac{1}{x}=(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=1$$

(D)　$x(y+z)=(a,b)(c+e,d+f)$
$=(ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)$
$=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)$
$=xy+xz.$

1.26　定理　對任意實數 a 及 b，我們有

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),\ (a,0)(b,0)=(ab,0)$$

證明是極容易的。

定理 1.26 顯示，$(a,0)$ 這種型式的複數，與所對應的實數 a，具有相同的算術性質，因此我們可以將 $(a,0)$ 視爲與 a 相

同。這種認同使我們得到實數體是複數體的一個子體。

讀者可能已注意到了，我們定義複數，並沒有利用到神秘的 -1 平方根，我們現在要證明 (a, b) 這符號與比較常用的 $a+bi$，是相同的。

1.27 定義 $i=(0.1)$

1.28 定理 $i^2=-1$

證明: $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

1.29 定理 若 a 和 b 是實數，則$(a,b)=a+bi$.

證明: $a+bi=(a,0)+(b,0)(0,1)$

$$=(a,0)+(0,b)=(a,b).$$

1.30 定義 若 a,b 是實數且 $z=a+bi$，則複數 $\bar{z}=a-bi$ 叫做 z 的共軛複數 (conjugate)。a 和 b 這兩數分別叫做 z 的實部 (real part) 及虛部 (imaginary part)。

我們有時會寫做

$$a=Re(z), \quad b=\mathrm{Im}(z)$$

1.31 定理 若 z 和 w 是複數，則

(a) $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

(b) $\bar{z}\bar{w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$,

(c) $z+\bar{z}=2Re(z), z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}(z)$

(d) $z\bar{z}$ 是正實數 (除了 $z=0$ 之外)

證明: (a),(b) 和 (c) 都相當顯然，要證明(d)，令 $z=a+bi$，留意 $z\bar{z}=a^2+b^2$

1.32 定義 若 z 是複數，其絕對值 $|z|$ 是 $z\bar{z}$ 的非負平方根；即$|z|=(z\bar{z})^{1/2}$.

$|z|$的存在性 (及唯一性) 由定理 1.21 及 1.31(d) 可以導得。注意，當 x 是實數，則 $x=\bar{x}$，故$|x|=\sqrt{x^2}$。所以若 $x\geq 0$ 則$|x|=x$ 若 $x<0$，則$|x|=-x$

1.33 定理 令 z 及 w 為複數，則

(a) 除非 $z=0$, $|0|=0$, 否則 $|z|>0$,

(b) $|\bar{z}|=|z|$

(c) $|zw|=|z||w|$

(d) $|Re z|\le|z|$

(e) $|z+w|\le|z|+|w|$.

證明: (a) 和 (b) 是顯然的。令 $z=a+bi$, $w=c+di$, a,b,c,d 皆實數。則

$$|zw|^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$
$$=|z|^2|w|^2,$$

或是 $|zw|^2=(|z||w|)^2$ 現在 (c) 則由定理 1.21 的唯一性敍述導得。

要證明 (d), 留意 $a^2\le a^2+b^2$ 所以

$$|a|=\sqrt{a^2}\le\sqrt{a^2+b^2}$$

要證明 (e), 留意 $\bar{z}w$ 是 $z\bar{w}$ 的共軛複數, 因此 $z\bar{w}+\bar{z}w=2Re(z\bar{w})$ 所以

$$|z+w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=z\bar{z}+z\bar{w}+\bar{z}w+w\bar{w}$$
$$=|z|^2+2Re(z\bar{w})+|w|^2$$
$$\le|z|^2+2|z\bar{w}|+|w|^2$$
$$=|z|^2+2|z||w|+|w|^2=(|z|+|w|)^2.$$

現在, 取平方根卽得 (e).

1.34 符號 若 $x_1,\cdots\cdots,x_n$ 爲複數, 我們令

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=\sum_{j=1}^{n}x_j$$

我們用一個重要的不等式總結這一節, 它通常名爲 Schwarz 不等式:

1.35 定理 若 $a_1\cdots\cdots,a_n$ 及 $b_1,\cdots\cdots,b_n$ 爲複數, 則

$$|\sum_{j=1}^{n} a_j\bar{b}_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

證明: 令 $A=\sum|a_j|^2$, $B=\sum|b_j|^2$, $C=\sum|a_j\bar{b}_j|$（本證明中所有的作和，j 的值都是由 $1, \cdots\cdots, n$）若 $B=0$，則 $b_1=\cdots\cdots=b_n=0$，結論顯然成立。因此假設 $B>0$，由定理 1.60 我們有

$$\begin{aligned}\sum|Ba_j-cb_j|^2 &= \sum(Ba_j-Cb_j)(\overline{Ba_j}-\overline{Cb_j})\\ &= B^2\sum|a_j|^2-B\bar{C}\sum a_j\bar{b}_j-BC\sum\bar{a}_jb_j+|C|^2\sum|b_j|^2\\ &= B^2A-B|C|^2=B(AB-|C|^2)\end{aligned}$$

由於第一個和中每一項都是非負，我們知道

$$B(AB-|C|^2)\geq 0$$

因爲 $B>0$，導得 $AB-|C|^2\geq 0$，這就是所要的不等式。

歐氏空間

1.36 定義 對每個正整數 k，令 R^k 爲所有

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

所成的集合，這裏的 $x_1, \cdots\cdots x_k$ 爲實數，稱爲$\mathbf{x}$的座標 (coordinates)，R^k 元素稱做點，或向量，特別是在 $k>1$ 的時候。我們將以黑體字母表示向量。如果 $\mathbf{y}=(y_1, y_2\cdots\cdots, y_k)$ 且若 α 爲一實數，令

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1, \cdots\cdots, x_k+y_k),$$
$$\alpha\mathbf{x}=(\alpha x_1, \cdots\cdots, \alpha x_k)$$

使得 $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in R^k$，且 $\alpha\mathbf{x}\in R^k$ 這就定義了向量的加法以及一實數（一個純量）與向量的乘法。這兩種運算滿足交換律，結合律及分配律（由對實數類似的定律來看，證明都很容易，）且使R^k成爲佈於實數系的向量空間，R^k 的零元素（有時叫做原點或零向量）就是點 $\mathbf{0}$，所有它的座標都是 0。

我們也定義所謂 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 的「內積」(inner product)（或純量積）爲

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{k} x_i y_i. \quad = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_k y_k$$

$\mathbf{x}$ 的範數（norm）爲

$$|\mathbf{x}|=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)^{1/2}$$

現在所定出的結構（向量空間 R^k 及上面的內積和範數）稱爲歐氏 k 維空間。

1.37 定理 設若 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in R^k$，且 α 爲實數。則

(a) $|\mathbf{x}|\geq 0$;

(b) $|\mathbf{x}|=0$ 若且唯若 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$;

(c) $|\alpha\mathbf{x}|=|\alpha||\mathbf{x}|$;

(d) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$;

(e) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|\leq|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$;

(f) $|\mathbf{x}-\mathbf{z}|\leq|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}-\mathbf{z}|$.

證明: (a),(b) 及 (c) 是很顯然的，而 (d) 是 Schwarz 不等式的立即結論，由 (d)，我們有

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2&=(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\\&\leq|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|^2=(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2\end{aligned}$$

故 (e) 得證。最後，如果我們將 $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ 取代 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}-\mathbf{z}$ 取代 $\mathbf{y}$，(f) 則由 (e) 導得。

1.38 備註 定理 1.37(a),(b) 及 (f) 允許我們（見第 2 章）將 R^k 視爲一度量空間。

R^1（所有實數的集合）通常稱做線，或實數線，同樣 R^2 稱做平面，或複數平面（比較定義 1.24 及 1.36）。在這兩種情形，範數不過是相當於實數或複數的絕對值。

附錄

在本附錄中，我們要由Q來建構R，以證明定理 1.19。我們要將這個建構，分做幾步來做。

第 1 步，R的元素會是某種Q的子集合，稱爲斷切 (cut)。由定義，所謂斷切是任意集合$\alpha \subset Q$，具有下列三個性質:

(I) α爲非空，$\alpha \neq Q$;

(II) 若$p \in \alpha$，$q \in Q$，而$q < p$，則$q \in \alpha$;

(III) 若$p \in \alpha$，則對某個$r \in \alpha$，$p < r$。

p, q, r……這些字母將一直表示有理數，而α, β, γ, ……則表示斷切。

留意，(III) 就只是說α沒有最大元素；(II) 則蘊涵了兩件事，我們會隨時用到它們:

若$p \in \alpha$且$q \notin \alpha$，則$p < q$

若$r \notin \alpha$，且$r < s$，則$s \notin \alpha$

第 2 步，定義“$\alpha<\beta$”的意思爲: α是β的眞子集。

我們且驗證一下，這滿足定義 1.5 的要求。

若$\alpha < \beta$且$\beta < \gamma$，則顯然$\alpha < \gamma$，(一個眞子集的眞子集，是個眞子集。) 同樣也很明顯，對任意一對 α, β,

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

這三個關係，最多只有一個會成立，要證明至少有一會成立，假設前兩個都不眞。則α就不是β的子集合。因此有一個$p \in \alpha$而$p \notin \beta$，若$q \in \beta$，則$q < p$ (蓋$p \notin \beta$)，所以由 (II) 知，$q \in \alpha$，故$\beta \subset \alpha$，由於$\beta \neq \alpha$我們歸結到: $\beta < \alpha$,

因而，現在R是個有序集合。

第 3 步，有序集合R具有最小上界性質。

要證明這個，令A爲R的非空子集，並假設$\beta \in R$是A的上界。定義γ爲所有$\alpha \in A$的聯集。換言之，$p \in \gamma$若且唯若對某個$\alpha \in A$，$p \in \alpha$。我們要證明$\gamma \in R$而$\gamma = \sup A$。

由於A是非空，故存在 $\alpha_0 \in A$，這個 α_0 是非空。由於 α_0

$\subset \gamma$，γ 是非空，其次，$\gamma \subset \beta$（因爲對所有 $\alpha \in A$，$\alpha \subset \beta$），而因此 $\gamma \neq Q$ 故 γ 滿足性質（I）。要證明（II）及（III），取 $p \in \gamma$，則對某個 $\alpha_1 \in A$，$p \in \alpha_1$。若 $q < p$，則 $q \in \alpha_1$，因此 $q \in \gamma$；這證明了（II）。若 $r \in \alpha_1$ 是選得使 $r > p$，則我們知道 $r \in \gamma$（蓋 $\alpha_1 \subset \gamma$），因此 γ 滿足（III）。

所以 $\gamma \in R$

很明顯對每個 $\alpha \in A$，$\alpha \leq \gamma$

假設 $\delta < \gamma$，則有一 $s \in \gamma$ 而 $s \notin \delta$，因爲 $s \in \gamma$，故對某個 $\alpha \in A$，$s \in \alpha$，因此 $\delta < \alpha$，δ 就不是 A 的一個上界了。

這就給了我們所要的結果：$\gamma = \sup A$.

第 4 步，若 $\alpha \in R$ 且 $\beta \in R$，我們定義 $\alpha + \beta$ 爲所有 $r + s$ 這類和所成的集合，其中 $r \in \alpha$ 而 $s \in \beta$。

我們定義 0^* 爲所有負有理數的集合，很明顯的，0^* 是個斷切，我們要證明加法公設（見定義 1.12）在中 R 成立，而以 0^* 當做 0。

(A1) 我們必須證明 $\alpha + \beta$ 是個斷切。很明顯 $\alpha + \beta$ 是 Q 的一個非空子集。取 $r' \notin \alpha$，$s' \notin \beta$，則 $r' + s' > r + s$ 對所有 $r \in \alpha$，$s \in \beta$。因此 $r' + s' \notin \alpha + \beta$，於是 $\alpha + \beta$ 具有性質(I)。

取 $p \in \alpha + \beta$，則 $p = r + s$，$r \in \alpha$，$s \in \beta$，若 $q < p$ 則 $q - s < r$ 故 $q - s \in \alpha$，且 $q = (q - s) + s \in \alpha + \beta$，因此（II）成立，取 $t \in \alpha$ 使得 $t > r$。則 $p < t + s$ 而 $t + s \in \alpha + \beta$，因此（III）成立。

(A2) $\alpha + \beta$ 是所有 $r + s$ 而 $r \in \alpha$，$s \in \beta$ 的集合。由同樣的定義知，$\beta + \alpha$ 是所有 $s + r$ 的集合，由於對所有 $r \in Q$，$s \in Q$，$r + s = s + r$，故我們有 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$。

(A3) 同上，這由 Q 中的結合律可得。

(A4) 若 $r \in \alpha$ 而 $s \in 0^*$，則 $r + s < r$，所以 $r + s \in \alpha$。

故$\alpha+0^*\subset\alpha$。要證逆反的包含關係，取$p\in\alpha$，並取$r\in\alpha$，$r>p$，則$p-r\in 0^*$，而$p=r+(p-r)\in\alpha+0^*$，故$\alpha\subset\alpha+0^*$，我們歸結到$\alpha+0^*=\alpha$。

(A5) 固定$\alpha\in R$，令β爲所有具以下性質的p的集合:

存在$r>0$使得$-p-r\notin\alpha$。

換言之，某個比$-p$小的有理數，不在α中。

我們要證明$\beta\in R$且$\alpha+\beta=0^*$。

若$s\notin\alpha$且$p=-s-1$，則$-p-1\notin\alpha$，故$p\in\beta$，所以β爲非空。若$q\in\alpha$，則$-q\notin\beta$。所以$\beta\neq Q$，因此β滿足(I)。

取$p\in\beta$，並取$r>0$，故$-q-r\notin\alpha$。若$q<p$，則$-q-r>-p-r$，因此$-q-r\notin\alpha$。所以$q\in\beta$，而(II)成立，令$t=p+(r/2)$，則$t>p$，且$-t-(r/2)=-p-r\notin\alpha$ 所以$t\in\beta$，因此β滿足 (III)。

我們已經證明了$\beta\in R$。

若$r\in\alpha$且$s\in\beta$ 則$-s\notin\alpha$，因此$r<-s$，$r+s<0$，因此$\alpha+\beta\subset 0^*$。

要證明逆反的包含關係，取$v\in 0^*$，令$w=-v/2$。則$w>0$，並有一整數n使得$nw\in\alpha$而$(n+1)w\notin\alpha$。(留意這與Q具有阿基米德性質有關!) 令$p=-(n+2)w$。則$p\in\beta$，蓋$-p-w\notin\alpha$且

$$v=nw+p\in\alpha+\beta$$

所以 $0^*\subset\alpha+\beta$。

我們歸結到$\alpha+\beta=0^*$.

這個β當然是要記作$-\alpha$。

第 5 步，證完了定義在第 4 步中的加法滿足定義 1.12 的公設 (A) 之後，我們導得命題 1.14 在R中也成立，而且我們可以證明定義 1.17 中的一個要件:

若 $\alpha,\beta,\gamma\in R$ 且 $\beta<\gamma$，則 $\alpha+\beta<\alpha+\gamma$.

確實的，很明顯由 R 中 $+$ 的定義可知 $\alpha+\beta\subset\alpha+\gamma$；如果我們有 $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$，則消去律（命題1.14）就會蘊涵 $\beta=\gamma$。

也可導得 $\alpha>0^*$ 若且唯若 $-\alpha<0^*$。

第 6 步，乘法在目前的情況來看，是比加法來得麻煩一點，因爲負有理數相乘是正的。因此我們先限制自己在 R^+，卽所有 $\alpha\in R$, $\alpha>0^*$ 的集合。

若 $\alpha\in R^+$ 且 $\beta\in R^+$，則我們定義 $\alpha\beta$ 爲所有 p 而 $p\leq rs$ 的集合，其中 $r\in\alpha$，$s\in\beta$，$r>0$，$s>0$。

我們定義 1^* 爲所有 $q<1$ 的集合。

則定義 1.12 的公設（M）及（D）都成立，將 R^+ 取代 F，以 1^* 當做 1。

證明與在第 4 步中的詳證極類似，所以我們省略了。

特別是要注意定義 1.17 的第二個要件也成立：若 $\alpha>0^*$ 且 $\beta>0^*$，則 $\alpha\beta>0^*$。

第 7 步，我們完成這個乘法的定義。令 $\alpha0^*=0^*\alpha=0^*$，並令

$$\alpha\beta=\begin{cases}(-\alpha)(-\beta) & \text{若 } \alpha<0^*,\ \beta<0^*,\\ -[(-\alpha)\beta] & \text{若 } \alpha<0^*,\ \beta>0^*\\ -[\alpha\cdot(-\beta)] & \text{若 } \alpha>0^*,\ \beta<0^*\end{cases}$$

右邊的乘積是定義在第 6 步中。

（在第 6 步中）證完了在 R^+ 中，公設（M）成立之後，如果我們重複使用恒等式 $\gamma=-(-\gamma)$，這是命題 1.14 的一部份（見第 5 步），則很容易證明在 R 中，它們也成立。

分配律

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

的證明，要分成幾種情形。例如，假設 $\alpha>0^*$, $\beta<0^*$, $\beta+\gamma>$

0^*，則 $\gamma=(\beta+\gamma)+(-\beta)$，以及（因為我們早知分配律在 R^+ 中成立）

$$\alpha\gamma=\alpha(\beta+\gamma)+\alpha\cdot(-\beta).$$

但是 $\alpha\cdot(-\beta)=-(\alpha\beta)$ 所以

$$\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha(\beta+\gamma).$$

另外的情形也可以同樣處理。

我們現在已證完了 R 是個有序集合，具有最小上界的性質。

第 8 步，我們對每個 $r\in Q$，給一個集合 r^*，它包含了所有 $p\in Q$ 而 $p<r$。很明顯 r^* 是個斷切；即 $r^*\in R$。這種斷切滿足下列關係:

(a) $r^*+s^*=(r+s)^*$,

(b) $r^*s^*=(rs)^*$,

(c) $r^*<s^*$ 若且唯若 $r<s$。

要證明(a)，選取 $p\in r^*+s^*$。則 $p=u+v$，其中 $u<r$，$v<s$。因此 $p<r+s$，這就是說 $p\in(r+s)^*$.

反之，假設 $p\in(r+s)^*$，則 $p<r+s$，選取 t 使得 $2t=r+s-p$，令

$$r'=r-t, \quad s'=s-t。$$

則 $r'\in r^*, s'\in s^*$，且 $p=r'+s'$，所以 $p\in r^*+s^*$.

這就證明了 (a),(b) 的證明類似。

若 $r<s$ 則 $r\in s^*$，但 $r\notin r^*$，故 $r^*<s^*$.

若 $r^*<s^*$，則有 $p\in s^*$ 而 $p\notin r^*$。因此 $r\leq p<s$，所以 $r<s$。

這就證明了 (c)。

第 9 步，我們在第 8 步中看到，將有理數 r 以相對應的「有理斷切」$r^*\in R$ 取代，仍維持和,積及次序關係。這可以說成是,

有序體Q與有序體 Q^* 同構 (isomorphic)，Q^* 的元素是有理斷切。當然，r^* 絕不同於 r，但我們所關心的性質（算術的和次序的），在這兩個體中是相同的。

就是這種將Q視同於 Q^*，讓我們可以將Q看成是R的子體。

定理 1.19 的第二部份，就是要以這個視同過程來了解。留意，相同的現象，在我們將實數體視為複數體的一個子體時會出現，在更加初步的層面上，當我們將整數視同為Q的某個子集合時也會出現。

有個事實，我們此處不證明，是任意兩個具有最小上界性質的有序體皆為同構。因此，定理 1.19 的第一部份，將實數體R完全刻劃了。

錄在書目中的 Landau 及 Thurston 的書，完全是處理數系的。Knopp 的書第 1 章包含了一段審慎的描述，如何由Q得出R。另一種建構方法，其中每個實數都定義為一個有理數 Cauchy 序列（見第 3 章）的等價族，在 Hewitt 及 Stromberg 的書中第 5 節是這麼做的。

這裏我們用的，Q中的斷切，是由 Dedekind 所發明的，由Q經由 Cauchy 序列以建構 R，是歸功於 Cantor. Cantor 及 Dedekind 都是在 1872 年發表他們的建構方法的。

習題

除非明言其非，否則這些習題中所提到的所有數，都知道是實數。

1. 若r是有理數（$r\neq 0$）而x是無理數，試證 $r+x$ 及 rx 都是無理數。
2. 試證沒有一個有理數的平方會是 12。
3. 試證命題 15。
4. 令E為一有序集之非空子集；假設α是E的一個下界，β是E的一個上界，試證$\alpha\leq\beta$。
5. 令A為實數的非空集合，它在下有界。令$-A$為所有$-x$，$x\in A$ 的

集合。試證:

$$\inf A = -\sup(-A)$$

6. 固定 $b>1$.

(a) 若 m,n,p,q 爲整數， $n>0$，$q>0$ 且 $r=m/n=p/q$，試證

$$(b^m)^{1/n}=(b^p)^{1/q}$$

所以定義 $b^r=(b^m)^{1/n}$ 是有意思的。

(b) 若 r,s 是無理數，試證 $b^{r+s}=b^r b^s$.

(c) 若 x 是實數， 定義 $B(x)$ 爲所有數 b^t, t 有理數而 $t\leq x$，的集合。試證當 r 爲有理數時,

$$b^r=\sup B(r)$$

因此對每個實數 x，定義

$$b^x=\sup B(x)$$

是有意思的。

(d) 試證對所有實數 x 及 y，$b^{x+y}=b^x b^y$。

7, 固定 $b>1$， $y>0$，試完成以下脈絡以證明有唯一實數 x，使得 $b^x=y$，（這個 x 叫做以 b 爲底 y 的對數。）

(a) 對任意正整數 n，$b^n-1\geq n(b-1)$

(b) 故 $b-1\geq n(b^{1/n}-1)$

(c) 若 $t>1$ 且 $n>(b-1)/(t-1)$ 則 $b^{1/n}<t$.

(d) 若 w 是使得 $b^w<y$，則 $b^{w+(1/n)}<y$， 對足夠大的 n； 要了解這個，應用 (c) 並令 $t=y\cdot b^{-w}$

(e) 若 $b^w>y$，則對足夠大的 n，$b^{w-(1/n)}>y$。

(f) 令 A 爲所有 w 使得 $b^w<y$ 的集合，證明 $x=\sup A$ 滿足 $b^x=y$.

(g) 試證這個 x 是唯一的。

8. 試證在複數體中不能定義次序關係，以將之變爲有序體。
提示: -1 是個平方。

9, 設 $z=a+bi$, $w=c+di$。定義若 $a<c$， 及若 $a=c$ 但 $b<d$， 則 $z<w$。試證這將所有複數的集合變爲一個有序集。〔這種次序關係叫做字典式次序（dictionary order）或辭典編纂式次序（lexicographic order)，理由很顯然。〕這個有序集合具有最小上界的性質嗎?

10. 設 $z=a+bi$, $w=u+iv$，且

$$a=\left(\frac{|w|+u}{2}\right)^{1/2},\qquad b=\left(\frac{|w|-u}{2}\right)^{1/2}$$

試證若 $v\geq 0$ 則 $z^2=w$。若 $v\leq 0$，$(\bar{z})^2=w$，斷定每個複數（除了一個例外！）都有兩個複數平方根。

11. 若 z 是個複數，試證存在一個 $r\geq 0$ 及一個複數 w，而 $|w|=1$ 使得 $z=rw$。w 和 r 永遠由 z 所唯一決定嗎?

12. 若 $z_1,\cdots\cdots,z_n$ 爲複數，試證

$$|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+\cdots\cdots+|z_n|.$$

13. 若 x,y 爲複數，試證

$$||x|-|y||\leq|x-y|$$

14. 若 z 爲一複數且 $|z|=1$，卽 $z\bar{z}=1$，試計算

$$|1+z|^2+|1-z|^2$$

15. Schwarz 不等式的等號在何種情況下成立?

16. 假設 $k\geq 3$，$\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^k$，$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=d>0$，且 $r>0$ 試證:

(a) 若 $2r>d$ 則有無限多 $\mathbf{z}\in R^k$ 使得

$$|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=|\mathbf{z}-\mathbf{y}|=r$$

(b) 若$2r=d$，則恰有一個這樣的 $\mathbf{z}$。

(c) 若$2r<d$，則沒有這樣的 $\mathbf{z}$。

如果 k 爲 1 或 2，這敍述應如何修正?

17. 試證若 $\mathbf{x}\in R^k$ 且 $\mathbf{y}\in R^k$，

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|^2.$$

以幾何解釋之，用有關平行四邊形的敍述。

18. 若 $k\geq 2$ 且 $\mathbf{x}\in R^k$，試證存在 $\mathbf{y}\in R^k$ 而 $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$，但 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$，對 $k=1$ 這也同樣爲眞嗎?

19. 假設 $\mathbf{a}\in R^k$，$\mathbf{b}\in R^k$，試求 $\mathbf{c}\in R^k$ 且 $r>0$ 使得

$$|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=2|\mathbf{x}-\mathbf{b}|$$

若且唯若 $|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r$

（解答：$3\mathbf{c}=4\mathbf{b}-\mathbf{a},3r=2|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$）

20. 參考附錄，若性質（III）由斷切的定義中略去，維持原來的次序和加法的定義。試證所造成的有序集合具有最小上界性質，以及加法滿足公設（A1）到（A4）（用比較不一樣的零元素！）但（A5）不眞。

第二章

基本拓樸學

有限，可數，及不可數集合

我們以對函數觀念的定義做為這一節的開始。

2.1 定義 考慮兩集合 A 及 B，它們的元素可以是任何東西，並假設對每個 A 中元素 x，以某種方式賦予 B 中一個元素，我們記做 $f(x)$。則 f 叫做由 A 到 B 的一個函數（或由 A 到 B 的映射）。集合 A 叫做 f 的定義域（我們也說 f 定義在 A），而元素 $f(x)$ 叫做 f 的值。f 所有值的集合叫做 f 的值域。

2.2 定義 A 及 B 爲兩集合，並令 f 爲由 A 至 B 的一個映射。若 $E\subset A$, $f(E)$ 定義爲所有 $f(x)$ 的集合，$x\in E$。我們稱 $f(E)$ 爲 E 在 f 的像（image）。在這符號中，$f(A)$ 爲 f 的值域。很明顯 $f(A)\subset B$。若 $f(A)=B$，我們說 f 將 A 映成 B（注意，根據這個用法，映成較映至爲特別）。

若 $E\subset B$，$f^{-1}(E)$ 表示所有 $x\in A$ 而 $f(x)\in E$ 所成的集合。我們稱 $f^{-1}(E)$ 爲 E 在 f 下的逆像（inverse image）。若 $y\in B$, $f^{-1}(B)$ 爲所有 $x\in A$ 而 $f(x)=y$ 所成的集合。如果對

每個 $y \in B$, $f^{-1}(y)$ 最多包含 A 中一個元素，則 f 叫做由 A 至 B 的 1-1（一對一）映射。這也可以表示如下：如果 $x_1 \in A, x_2 \in A$，只要 $x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$，則 f 爲由 A 至 B 的一個 1-1 映射。

（記號 $x_1 \neq x_2$ 的意思是 x_1 和 x_2 爲相異元素；否則我們寫做 $x_1 = x_2$）。

2.3　定義　如果存在一個 1-1 映射將 A 映成 B，我們說 A 及 B 有 1-1 對應，或 A 與 B 具有相同基數（Cardinal Number），或約言之，A 與 B 等價，我們寫成 $A \sim B$。這種關係很明顯有下列性質：

它是反身性的（reflexive）：　$A \sim A$

它是對稱性的（symmetric）：如果 $A \sim B$，則 $B \sim A$。

它是遞移性的（transitive）：　若：$A \sim B$，且 $B \sim C$，則 $A \sim C$

任何具有這三個性質的關係，就叫做等價關係（equivalence relation）。

2.4　定義　對任意正整數 n，令 J_n 表元素爲整數 1, 2, ……n 所成之集合；令 J 表包含所有正整數之集合。對任意集合 A，我們說：

(a) A 是有限（finite），如果對某個 n，$A \sim J_n$。（空集合也考慮成有限）。

(b) A 是無限（infinite），如果 A 不是有限。

(c) A 是可數（countable），如果 $A \sim J$。

(d) A 是不可數（uncountable），如果 A 既非有限也非可數。

(e) A 是至多可數（at most countable），如果 A 是有限或可數。可數集合可時稱做（英文名）Enumerable 或 Denumerable

對兩個有限集合言，我們很明顯有 $A \sim B$ 若且唯若 A 及 B 包含相同個數的元素。然而，對無限集合言，「具有相同個數元素」的概念變得很模糊，而 1-1 對應的觀念仍保持其明晰性。

2.5　例子　令 A 爲所有整數的集合，則 A 爲可數。蓋考慮下列集合 A 與 J 之排列:

A:　$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\cdots$

J:　$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots\cdots$

在本例中，我們甚至可以將由 J 到 A 中 1-1 對應的函數 f，明白地給出一個式子:

$$f(n)=\begin{cases} \dfrac{n}{2} & (n\text{ 偶數}) \\ -\dfrac{n-1}{2} & (n\text{ 奇數}) \end{cases}$$

2.6　備註　一個有限集合是無法與其任一眞子集合等價的。然而，對無限集合這是可能的，可以由例 2.7 顯示出來，其中 J 是 A 的一個眞子集。

事實上，我們可以將定義 2.4 (b) 用這敍述取代: A 爲無限，如果 A 與其一個眞子集等價。

2.7　定義　所謂序列 (sequence)，我們的意思是定義在所有正整數的集合 J 上的一個函數 f。若對 $n \in J$，$f(n)=x_n$，習慣上是用符號 $\{x_n\}$ 表示 f，或有時用 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ f 的值，就是元素 x_n，叫做這序列的項。若 A 爲一集合且若對所有 $n \in J$，$x_n \in A$，則 $\{x_n\}$ 叫做 A 中一個序列，或一個 A 中元素的序列。

注意，一個序列中諸項 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, \cdots\cdots$ 並不需要互異。

由於每個可數集合都是定義在 J 上 1-1 函數的值域，我們可以將每個可數集合視做具相異項序列的值域。說得較鬆懈些，我們可以說任意可數集合的元素可以「排列成一序列」。

有時這樣會方便些，就是用非負整數所成的集合替代定義中

的 J，即由 0 而不由 1 開始。

2.8 定理 可數集合 A 的每個無限子集皆可序數。

證明: 假設 $E\subset A$，且 E 爲無限。把 A 中元素 x 排成一具相異項的序列 $\{x_n\}$。建構一個序列 $\{n_k\}$ 如下:

令 n_1 爲使 $x_{n_1}\in K$ 的最小正整數，取完了 $n_1, \cdots\cdots, n_{k-1}$ $(k=2,3,4,\cdots\cdots)$，令 n_k 爲比 n_{k-1} 大而使 $x_{n_k}\in E$ 的最小正整數。

令 $f(k)=x_{n_k}(k=1,2,3,\cdots\cdots)$ 我們得到 E 與 J 間一個 1-1 對應。這定理顯示，粗略地說，可數集合代表「最小的」無限: 沒有一個不可數集合會是一個可數集合的子集合。

2.9 定義 令 A 及 Ω 爲集合，並假設給了一個 A 中的 α，就有一個 Ω 的子集合，我們把它記作 E_α。

元素爲集合 E_α 的集合記作 $\{E_\alpha\}$。我們有時用集合組(Collection of sets) 或集合族 (family of sets) 來取代集合的集合的說法。

集合 E_α 的聯集定義爲集合 S，而 $x\in S$ 若且唯若對至少一個 $\alpha\in A$，$x\in E_\alpha$。我們用這個符號

(1) $$S=\bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha.$$

如果 A 包含整數 $1,2,\cdots\cdots,n$，我們通常寫成

(2) $$S=\bigcup_{m=1}^{n}E_m$$

或是

(3) $S=E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_n$.

如果 A 是所有正整數的集合，通常的符號是

(4) $$S=\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m.$$

(4) 中的記號∞只是表示是取可數集合組的聯集而已，而不應該與定義 1.29 中引入的記號$+\infty$, $-\infty$相混淆。

集合 E_α 的交集定義爲集合 P，而$x\in P$ 若且唯若對每個 $\alpha\in A$，$x\in E_\alpha$. 我們用這符號

(5)
$$P=\bigcap_{\alpha\in A}E_\alpha$$

或者

(6)
$$P=\bigcap_{m=1}^{n}E_m=E_1\cap E_2\cap\cdots\cdots\cap E_n.$$

或者

(7)
$$P=\bigcap_{m=1}^{\infty}E_m$$

就如對聯集所作的。如果$A\cap B$不是空集合，我們說A與B相交 (intersect)；否則，它們互斥 (disjoint).

2.10 例子　(a) 假設 E_1 包含 1, 2, 3. 而E_2包含 2, 3, 4. 則 $E_1\cup E_2$ 包含 1, 2, 3, 4, 而 $E_1\cap E_2$ 包含 2, 3.

(b) 令A所有$0<x\leq 1$ 的實數x的集合。對每個$x\in A$，令 E_x 爲所有$0<y<x$的實數y的集合，則

(i) $E_x\subset E_z$ 若且唯若$0<x\leq z\leq 1$；

(ii) $\bigcup_{x\in A}E_x=E_1$;

(iii) $\bigcap_{x\in A}E_x$ 爲空集合；

(i) 及 (ii) 很明顯。要證明 (iii)，我們注意對每個$y>0$，如果 $x<y$ 則$y\notin E_x$。因此$y\notin\bigcap_{x\in A}E_x$。

2.11 備註　聯集與交集的許多性質與作和及乘積非常類似；事實上，在這層關係下，有時也用和與積這兩個字，同時將

$\cap$及$\cup$用$\sum$及Π來代替。

交換律及結合律是顯然的:

(8) $$A\cup B=B\cup A;\ A\cap B=B\cap A.$$

(9) $$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

因此在 (3) 及 (6) 中的括號省略就證實了。

分配律也成立:

(10) $$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

要證明這個，令 (10) 的左邊及右邊分別記作E及F。

設$x\in E$。則$x\in A$且$x\in B\cup C$，卽$x\in B$或$x\in C$（可能兩者）。

因此$x\in A\cap B$或$x\in A\cap C$，因此$x\in F$，而$E\subset F$.

其次，設$x\in F$。則$x\in A\cap B$或$x\in A\cap C$。卽$x\in A$，且$x\in B\cup C$。因此$x\in A\cap(B\cup C)$，而$F\subset E$.

於是$E=F$。

我們再列出一些很容易證實的關係:

(11) $$A\subset A\cup B,$$

(12) $$A\cap B\subset A.$$

若 0 表示空集合，則

(13) $$A\cup 0=A;\qquad A\cap 0=0.$$

若$A\subset B$，則

(14) $$A\cup B=B;\qquad A\cap B=A.$$

2.12 定理 令$\{E_n\}$; $n=1,2,3,\cdots\cdots$，爲可數集合的序列，並令

(15) $$S=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

則S爲可數。

證明: 令每個集合E_n排列為一序列$\{x_{n_k}\}$，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots$，並考慮無窮序陣（Array）

$$
(16)\qquad
\begin{array}{ccccc}
X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} & \cdots\cdots \\
X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} & \cdots\cdots \\
X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} & \cdots\cdots \\
X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & \cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

其中 E_n 的元素組成第 n 列。這序陣包含了所有 S 的元素，如箭頭所示，這些元素可以排成一個序列

(17)　　　$x_{11}; x_{21}; x_{12}; x_{31}, x_{22}, x_{13}; x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}\cdots\cdots$

如果任意兩個集合 E_n 有相同元素，在（17）中這些會出現一次以上。因此所有正整數的集合中，有一個子集合 T，使得$S\sim T$，這顯示S是至多可數的（定理 2.8）。由於$E_1\subset S$且 E_1 為無限，故 S 為無限，因此為可數。

系。設 A 為至多可數，且對每個 $\alpha\in A$, B_α 為至多可數。令

$$T=\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha.$$

則T為至多可數。

蓋T與（15）的一個子集合等價。

2.13　定理　　令A為可數集合，B_n 為所有 n- 序位（a, $\cdots\cdots$, a_n）的集合，$a_k\in A$（$k=1, 2, \cdots\cdots n$），而元素 $a_1, \cdots\cdots, a_n$ 並不必要互異。則 B_n 為可數。

證明: B_1 爲可數是很顯然的，因爲 $B_1=A$。設 B_{n-1} 爲可數 ($n=2,3,4\cdots\cdots$). B_n 的元素就是這種型式

(18)　　(b,a)　　$(b\in B_{n-1}, a\in A)$.

對每個固定的 b，序對 (b,a) 的集合與 A 等價，因而可數。而 B_n 是可數個可數集合的聯集。由定理 2.12, B_n 爲可數。

定理由歸納法導得。

系。全部有理數的集合爲可數。

證明: 應用定理 2.13，取 $n=2$，留意每個有理數都是 b/a 的型式，a，b 爲整數。序對 (a,b) 的集合，因而也是所有分數 b/a 的集合，故爲可數。

事實上，所有代數數 (algebraic numbers) 的集合爲可數。(見習題 2)

然而，下面的定理顯示並非所有無限集合皆爲可數。

2.14　定理　令 A 爲所有其元素爲數字 0 及 1 的序列所成的集合。這個集合 A 爲不可數。

A 的元素是像 $1,0,0,1,0,1,1,1,\cdots\cdots$ 的序列。

證明: 令 E 爲 A 的一個可數子集，並令 E 包含序列 $s_1, s_2, s_3, \cdots\cdots$。我們建構一個序列 s 如下。如果 s_n 的第 n 位數是 1，我們讓 s 的第 n 位數爲 0，反之亦然。則序列 S 與 E 的每一元素至少有一位相異，所以 $s \notin E$。但顯然 $s\in A$，因此 E 是 A 的一個眞子集。

我們已證明了 A 的每個可數集合是 A 的一個眞子集。這就導得 A 是不可數 (否則 A 會是 A 的眞子集，是荒謬的。)

上面的證明的想法是 Cantor 首先用的，並稱之爲 Cantor 對角線法，蓋若將 $s_1, s_2, s_3\cdots\cdots$，擺成一個像 (16) 的序陣，在建構新的序列時，有關係的是對角線上的元素。

熟悉實數的二元表示法(以 2 爲底取代10)的讀者會留意到，定理 2.14 蘊涵了所有實數的集合爲不可數。在定理 2.43 中，

我們會對這件事再給第二個證明。

度量空間

2.15　定義　一集合X，它的元素我們稱爲點(Points)，叫做一個度量空間（metric space），如果給了X的任意兩個點p及q，就有一個實數$d(p.q)$，稱做由p到q的距離，使得

(a) $d(p.q)>0$　如果，$p\neq q$　; $d(p.p)=0$;

(b) $d(p.q)=d(q.p)$

(c) $d(p.q)\leq d(p.r)+d(r.q)$，對所有$r\in X$。

任何具有這三個條件的函數，都叫做距離函數(distance function)，或一個度量（metric）。

2.16　例子　由我們的觀點，度量空間最重要的例子就是歐氏空間R^k，特別是R^1（實數線）及R^2（複平面）；R^k中的距離定義爲

(19)　$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\qquad(\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^k).$$

由定理 1.37，定義 2.15 的條件可由（19）滿足。

重要的是，留意一個度量空間X的每個子集合Y，帶著同樣的距離函數，本身自成一個度量空間。蓋很明顯的如果對$p.q.r\in X$而言，定義 2.15 的條件（a）到（c）成立，如果我們限制p,q,r在Y中，它們也成立。

故每個歐氏空間的子集合是個度量空間。另外的例子有空間$\mathscr{C}(K)$及$\mathscr{L}^2(\mu)$，將分別在第 7 章及第 11 章中討論。

2.17　定義　所謂線段(a,b)，我們意指所有$a<x<b$的實數x的集合。

所謂區間$[a,b]$我們意指所有$a\leq x\leq b$的實數x的集合。

有時我們也會遇到「半開區間」$[a,b)$及$(a,b]$；第一個包含了所有$a\leq x<b$的x，第二個包含了所有$a<x\leq b$的x。

如果$a_i<b_i$對$i=1,\cdots\cdots,k$，則所有R^k中的點$\mathbf{x}=(x_1,\cdots\cdots$

x_k）它的座標滿足不等式 $a_i \leq x_i \leq b_i$ $(1 \leq i \leq k)$ 所成的集合稱為一個 k 維胞體（k-cell）。所以一個 1 維胞體是一個區間，一個 2 維胞體是個矩形……等等。

如果$\mathbf{x} \in R^k$且 $r > 0$，則中心在$\mathbf{x}$，半徑為 r 的開（或閉）球 B 的定義為所有 $\mathbf{y} \in R^k$ 而$|\mathbf{y}-\mathbf{x}| < r$（或$|\mathbf{y}-\mathbf{x}| \leq r$）所成的集合。

我們說一個集合 $E \subset R^k$ 為凸的 (convex)，如果只要 $\mathbf{x} \in E$，$\mathbf{y} \in E$ 且 $0 < \lambda < 1$，則。

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in E.$$

例如，球是凸的。蓋若$|\mathbf{y}-\mathbf{x}| < r$，$|\mathbf{z}-\mathbf{x}| < r$，且 $0 < \lambda < 1$，我們有

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z} - \mathbf{x}| &= |\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + (1-\lambda)(\mathbf{z}-\mathbf{x})| \\ &\leq \lambda|\mathbf{y}-\mathbf{x}| + (1-\lambda)|\mathbf{z}-\mathbf{x}| < \lambda r + (1-\lambda)r = r \end{aligned}$$

同樣的證明可用到閉球去，也很容易看出 k 維胞體是凸的。

2.18　定義　　令X為一度量空間。以下所提的所有點和集合，我們知道是X的元素及子集合。

(a) 點 p 的一個鄰域（neighborhood）是一個集合 $N_r(p)$包含所有點 q，而$d(p,q) < r$. r 稱為 $N_r(p)$ 的半徑。

(b) 點 p 為集合E的一個極限點（limit point），如果 p 的每個鄰域包含一點 $q \neq p$ 而 $q \in E$。

(c) 如果 $p \in E$，而 p 不是E的一個極限點，則 p 稱為E的孤立點（isolated point)。

(d) 如果E的每個極限點是E的一點，則E是閉集(closed)。

(e) 一點 p 是E的一個內點（interior point），如果有一個 p 的鄰域N，而$N \subset E$。

(f) 如果E的每個點都是E的內點，則E是開集（open)。

(g) E的補集（記作E^c）(complement) 是所有點 $p \in X$ 而 $p \notin E$所成的集合。

(h) E是完集 (perfect), 如果E是閉集合且若E的每個點都是E的極限點。

(i) E是有界 (bounded), 如果有一實數M及一點$q\in \mathbf{x}$使得對所有$p\in E, d(p,q)<M$。

(j) E在X中稠密 (dense in X), 如果X的每個點都是E的極限點，或E的一點（或兩者皆是）。

我們要留意，R^1 中隣域是線段，而 R^2 中隣域是圓的內部。

2.19 定理 每個隣域都是開集合。

證明: 考慮一隣域$E=N_r(p)$，並令q爲E的任意點，則有一正實數h，使得

$$d(p,q)=r-h.$$

對所有點s使得 $d(q,s)<h$，我們於是有

$$d(p,s)\leq d(p,q)+d(q,s)<r-h+h=r$$

故$s\in E$而q便是E的一個內點。

2.20 定理 如果p是集合E的一極限點，則p的每個隣域包含中E無限多點。

證明: 設有一p的隣域N它只包含 E 的有限個點。令$q_1,\cdots\cdots,q_n$ 爲$N\cap E$的這些點而與p相異，並令

$$r=\min_{1\leq m\leq n} d(p,q_m)$$

〔我們用這符號表示 $d(p,q_1),\cdots\cdots,d(p,q_n)$這些數的最小者〕。則諸正數的有限集合的極小值顯然爲正，故$r>0$。

隣域 $N_r(p)$ 不包含E中$q\neq p$的任何點q，故p不爲E的一極限點，這個矛盾便使得這個定理成立。

系。一個有限點集沒有極限點。

2.21 **例子** 我們考慮下列 R^2 的子集合:

(a) 所有$|z|<1$的複數z所成的集合。

(b) 所有$|z|\leq 1$的複數z所成的集合。

(c) 一有限集合。

(d) 所有整數的集合。

(e) 包含數字 $1/n(n=1,2,3\cdots\cdots)$ 的集合。我們留意這個集合E有一個極限（即 $z=0$），但沒有一個E的點會是E的極限點；我們希望強調有一個極限點與包含一個極限點之間的差別。

(f) 所有複數的集合 R^2。

(g) 線段 (a,b)。

我們注意 (d), (e), (g) 也可視作 R^1 的子集合。

這些集合的一些性質表列如下：

	閉集	開集	完集	有界
(a)	非	是	非	是
(b)	是	非	是	是
(c)	是	非	非	是
(d)	是	非	非	非
(e)	非	非	非	是
(f)	是	是	是	非
(g)	非		非	是

在 (g) 中，我們讓第二行空白。理由是線段 (a,b) 如果我們把它當做 R^2 的子集合則不是開集，但若當做 R^1 的子集合則它是開集。

2.22 定理 令$\{E_\alpha\}$為一（有限或無限）E_α 集合組，則

$$(\bigcup_\alpha E_\alpha)^c=\bigcap_\alpha (E^c{}_\alpha). \tag{20}$$

證明： 令A與B為(20)的左邊及右邊。若$x\in A$，則$x\notin\bigcup_\alpha E_\alpha$ 故對任何 α，$x\notin E_\alpha$，因此對每個 α，$x\in E_\alpha{}^c$，故 $x\in\bigcap_\alpha E_\alpha{}^c$，故$A\subset B$。

反之，若$x\in B$，則對每個α, $x\in E_\alpha{}^c$，故對任意α，$x\notin E_\alpha$，而$x\notin\bigcup_\alpha E_\alpha$，因此$x\in\bigcup_\alpha(E_\alpha)^c$，故$B\subset A$。

於是$A=B$.

2.23　定理　一集合爲開集若且唯若其補集爲閉集。

證明: 首先，假設 E^c 爲閉集，選取 $x\in E$。則 $x\notin E^c$, x 不爲 E^c 一極限點。因此存在一 x 的隣域 N，使得 $E^c\cap N$ 爲空集，卽 $N\subset E$，因此 x 爲 E 的一內點，E 爲開集。

其次，假設 E 爲開集，令 x 爲 E^c 的極限點，則每個 x 的隣域必包含 E^c 的一點，故 x 不爲 E 的一內點，因爲 E 是開集，這意指 $x\in E^c$。於是 E^c 爲閉集。

系。一集合 F 爲閉集若且唯若其補集爲閉集。

2.24　定理　(a) 對任意開集合組 $\{G_\alpha\}$, $\bigcup_\alpha G_\alpha$ 爲開集。

(b) 對任意閉集合組 $\{F_\alpha\}$, $\bigcap_\alpha F_\alpha$ 爲閉集。

(c) 對任意有限開集合組 $G_1,\cdots\cdots G_n$, $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ 爲開集。

(d) 對任意有限閉集合組 $F_1,\cdots\cdots,F_n$, $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ 爲閉集。

證明: 令 $G=\bigcup_\alpha G_\alpha$。若 $x\in G$，則對某個 α, $x\in G_\alpha$. 由於 x 是 G_α 的一內點，x 也是 G 的一內點，故 G 爲開集。這證明了(a)。

由定理 2.22,

$$(\bigcap_\alpha F_\alpha)^c=\bigcup_\alpha (F_\alpha{}^c), \tag{21}$$

而由定理 2.23 知 $F_\alpha{}^c$ 爲開集，故 (a) 蘊涵了 (21) 爲開集，故 $\bigcap_\alpha F_\alpha$ 爲閉集。

其次，令 $H=\bigcap_{i=1}^{n} G_i$. 對任意 $x\in H$，存在一 x 的隣域 N_i 半徑爲 r_i，使得 $N_i\subset G_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$. 令

$$r=\min(r_1, \cdots\cdots, r_n),$$

並令N爲半徑 r 的 x 隣域，則$N\subset G_i$對 $i=1, \cdots\cdots, n.$。故$N\subset H$，而H爲開集。

取補集，(d) 由 (c) 導得：

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n}(F_i{}^c).$$

2.25 例子 前面定理的 (c) 部分及 (d) 部分，集合的有限性是很要緊的。蓋令 G_n 爲線段 $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$. 則 G_n 是 R^1 的開子集。令$G=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. 則$G$包含一點（卽 $x=0$），因而不是 R^1 的開子集。

故開集合的無限交集並不一定是開集。同樣，閉集合的無限聯集也不一定是閉集。

2.26 定義 若X是度量空間，$E\subset X$，且若E'表示E在X中的有極限點所成的集合，則E的閉包 (closure) 是$\bar{E}=E\cup E'$ 這集合。

2.27 定理 若X是度量空間，而$E\subset X$，則

(a) $\overline{E}$是閉集合。

(b) $E=\overline{E}$若且唯若E是閉集合。

(c) 對每個$F\subset X$而$E\subset F$的閉集合F, $\overline{E}\subset F$

由 (a) 及 (c) 知，$\overline{E}$是X中包含E的最小閉子集。

證明：若 $p\in X$而 $p\notin\overline{E}$，則p既不是E中的點，也不是E的極限點。因此p有一隣域不與$\overline{E}$相交。故E的補集合是開集，所以$\overline{E}$是閉集合。

(b) 若$E=\overline{E}$, (a) 蘊涵是E閉集，若 E是閉集，則 $E'\subset E$〔由定義 2.18 (d) 及 2.26 可知〕，因此$\bar{E}=E$。

(c) 若F是閉集且$F\supset E$，則$F\supset F'$，因此$F\supset E'$。因而$F\supset \bar{E}$。

2.28　定理　令E爲實數的非空集合，它在上有界。令$y=\sup E$，則$y\in\bar{E}$。所以若E是閉集，$y\in E$。

將此與 1.9 節中的例子比較之。

證明: 若$y\in E$則$y\in\bar{E}$。假設$y\notin E$。對每個$h>0$，則存在一點$x\in E$使得$y-h<x<y$，蓋否則$y-h$就會是E的一個上界，因此y是E的一個極限點，所以$y\in\bar{E}$。

2.29　備註　設$E\subset Y\subset X$，X爲一度量空間。我們說E是X的一個開子集，意思是對每個點$p\in E$，就有一個正數r，使得$q\in X, d(p,q)<r$的條件蘊涵了$q\in E$。但我們早已看到（2.16 節）Y也是一度量空間，所以我們的定義同樣也可以在Y中做。爲了明晰起見，我們說E對Y言是開集（E is open relative to Y），如果對每個$p\in E$就有一個$r>0$使得只要$d(p,q)<r$且$q\in Y$，則$q\in E$。例 2.21 (g) 顯示一集合對Y言是開集而不一定是X的一個開子集，然而，這兩個觀念之間有一個簡單的關係，我們現在就敍述它。

2.30　定理　設$Y\subset X$，則Y的一子集合E對Y言是開集若且唯若對某個X中的開子集G，$E=Y\cap G$。

證明: 設E對Y言是開集，則對每個$p\in E$，有一正數r_p使得$q\in Y, d(p,q)<r_p$的條件蘊涵$q\in E$。令V_p爲所有$q\in X$而$d(p,q)<r_p$的集合，並定義

$$G=\bigcup_{p\in E}V_p$$

則G是X的一個開子集，由定理 2.19 及 2.24。

由於對所有$p\in E$，$p\in V_p$，則顯然$E\subset G\cap Y$。

由我們對V_p的選取，我們有對每個$p\in E, V_p\cap Y\subset E$，因此$G\cap Y\subset E$。所以$E=G\cap Y$，而這定理的一半已證明了。

反之，若G在X爲開集，而$E=G\cap Y$，每個$p\in E$都有一隣域$V_p\subset G$。則$V_p\cap Y\subset E$，所以E對Y言是開集。

緊緻集合

2.31　定義　所謂一個度量空間X中的集合E，它的開覆蓋（open covering），意思是X的開子集合組$\{G_\alpha\}$，而$E\subset\bigcup_\alpha G_\alpha$。

2.32　定義　我們說一個度量空間 X 的子集合 K 爲緊緻（compact），如果每個 K 的開覆蓋包含一個有限子覆蓋（finite subcover）。

更明白點說，要件是如果$\{G_\alpha\}$是K的一個開覆蓋，則有有限多指標 $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$ 使得

$$K\subset G_{\alpha_1}\cup\cdots\cdots\cup G_{\alpha_n}.$$

緊緻的觀念在分析學中極爲重要，特別是與連續性的關係（第 4 章）。

很明顯每個有限集合都是緊緻。在 R^1 中一大羣無限緊緻集合的存在性由定理 2.41 導得。

前面我們看到（2.29 節）若$E\subset Y\subset X$，則E可能對Y言是開集而對 X 言不是。所以開集的性質與E嵌在那個空間之內有關。閉集的性質也是一樣。

不過，緊緻性質要好些，我們現在就會看到，爲了敍述下一個定理，我們暫時說，如果定義 2.32 的條件符合的話，E對X言是緊緻。

2.33　定理　設$K\subset Y\subset X$。則K對X言是緊緻若且唯若K對Y言是緊緻。

由於這個定理，在許多場合，我們可以把緊緻集合本身就當做個別的度量空間，毋需理會所嵌入的空間。特別是，雖然說開

空間或閉空間沒甚麼意義（每個度量空間X是自己的開子集，也是自己的閉子集），但說緊緻度量空間卻的確是有意思的。

證明: 設K對X言爲緊緻，並令 $\{V_\alpha\}$ 爲一對Y言的開集合組，而$K\subset\bigcup_\alpha V_\alpha$。由定理 2.30 知，有集合 G_α，對X言爲開集，而對所有 α，$V_\alpha=Y\cap G_\alpha$；而由於K對X言爲緊緻，我們有，對某種選取的有限足碼 $\alpha_1\cdots\cdots\alpha_n$

$$K\subset G_{\alpha_1}\cup\cdots\cdots\cup G_{\alpha_n} \tag{22}$$

因爲$K\subset Y$，(22) 蘊涵了

$$K\subset V_{\alpha_1}\cup\cdots\cdots\cup V_{\alpha_n}. \tag{23}$$

這證明了K對Y言是緊緻。

反之，設K對Y言爲緊緻，令$\{G_\alpha\}$爲X的開子集合組且覆蓋，令$V_\alpha=Y\cap G_\alpha$。則 (23) 對某種選取的 $\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n$ 成立；且因$V_\alpha\subset G_\alpha$，(23) 蘊涵了 (22)。證畢。

2.34 定理　度量空間的緊緻子集合皆是閉集。

證明: 令K爲一度量空X間的緊緻子集合。我們要證明K的補集是X的一個開集合。

設$p\in X$，$p\notin K$。若$q\in K$，令 V_q 及 W_q 分別爲p及q的隣域其半徑小於$\frac{1}{2}d(p,q)$〔見定義 2.18 (a)〕。由於K爲緊緻，故在K中有有限多點$q_1,\cdots\cdots,q_n$，使得。

$$K\subset W_{q_1}\cup\cdots\cdots\cup W_{q_n}=W$$

若 $V=V_{q_1}\cap\cdots\cdots\cap V_{q_n}$，則$V$是$p$的一隣域，不與$W$相交。故$V\subset K^c$，而$p$是 K^c 的一內點。定理得證。

2.35 定理　緊緻集合的閉子集合爲緊緻。

證明: 設若 $F\subset K\subset X$，F 爲閉集（對X而言），而K是緊緻。令$\{V_\alpha\}$爲F的一開覆蓋。若 F^c 也加入$\{V_\alpha\}$，我們得到一個K的開覆蓋Ω。由於K是緊緻，故有一Ω的有限子集Φ，覆蓋K，也因此覆蓋F。若 F^c 是Φ的一元素，我們可以自Φ中移去

它而仍得F的開覆蓋，因此我們證明了 $\{V_\alpha\}$ 的一個有限子集也覆蓋F。

系。若F爲閉集，而K爲緊緻，則$F\cap K$爲緊緻。

證明: 定理 2.24 (b) 及 2.34 顯示$F\cap K$爲閉集；由於$F\cap K\subset K$，定理 2.35 顯示$F\cap K$爲緊緻。

2.36 定理 若 $\{K_\alpha\}$ 爲一度量空間X中的一組緊緻子集合，而且$\{K_\alpha\}$的每組有限個子集合的交集都是非空，則$\cap K_\alpha$爲非空。

證明: 固定 $\{K_\alpha\}$ 的一元素 K_1，並令 $G_\alpha=K_\alpha{}^c$。假設沒有一個 K_1 的點屬於所有 K_α。則諸集合 G_α 便形成 K_1 的一個開覆蓋，又因爲 K_1 爲緊緻，故有有限多足碼 $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$，使得$K_1\subset G_{\alpha_1}\cup\cdots\cdots\cup G_{\alpha_n}$。但這意味着

$$K_1\cap K_{\alpha_1}\cap\cdots\cdots\cap K_{\alpha_n}$$

爲空集合，與我們的假設相矛盾。

系。若$\{K_n\}$爲一非空緊緻集合序列，而 $K_n\supset K_{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$，則$\bigcap\limits_1^\infty K_n$ 爲非空。

2.37 定理 若E爲一緊緻集合E的無限子集，則E在K中有一極限點。

證明: 如果K中無一點爲E的極限點，則每個$q\in K$會有一隣域 V_q，它最多包含E的一個點（就是q，如果$q\in E$）。很明顯，沒有一個 $\{V_q\}$ 的有限子集合會覆蓋E；對K也一樣，蓋$E\subset K$。這與K的緊緻性矛盾。

2.38 定理 若 $\{I_n\}$ 爲 R^1 中一區間序列，且 $I_n\supset I_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$，則$\bigcap\limits_1^\infty I_n$ 爲非空。

證明: 若 $I_n=[a_n, b_n]$，令E爲所有 a_n 的集合。則E爲非空，且在上有界（被 b_1 界住）。令x爲E的 lub。若m及n爲

正整數，則

$$a_n \leq a_{m+n} \leq b_{m+n} \leq b_m,$$

故對每個m，$x \leq b_m$。很顯然 $a_m \leq x$，故我們知道對$m=1, 2, 3, \cdots\cdots$ $x \in I_m$。

2. 39　定理　　令 k 爲一正整數。若 $\{I_n\}$ 爲一 k 維胞體序列，而 $I_n \supset I_{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$，則$\bigcap_1^\infty I_n$ 爲非空。

證明: 令 I_n 包含所有點 $\mathbf{x}=(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ 而

$$a_{n,j} \leq x_j \leq b_{n,j}(1 \leq j \leq k; n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

並令 $I_{n,j}=[a_{n,j}, b_{n,j}]$。對每個 j，序列$\{I_{n,j}\}$滿足定理 2. 38 的假設，因此有實數 $x_j^*(1 \leq j \leq k)$ 使得

$$a_{n,j} \leq x_j^* \leq b_{n,j}\ (1 \leq j \leq k; n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

取 $\mathbf{x}^*=(x_1^*, \cdots\cdots, x_n^*)$，我們看出對 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots \mathbf{x}^* \in I_n$。定理得證。

2. 40　定理　　每個 k 維胞體都是緊緻。

證明: 令 I 爲一 k 維胞體，包含所有點 $\mathbf{x}=(x_1, \cdots\cdots, x_k)$ 而 $a_j \leq x_j \leq b_j(1 \leq j \leq k)$。令

$$\delta=\left\{\sum_1^k (b_j-a_j)^2\right\}^{1/2}$$

則若 $\mathbf{x} \in I, \mathbf{y} \in I, |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq \delta$

爲了得到一個矛盾，假設存在一個 I 的開覆蓋 $\{G_\alpha\}$，它不包含 I 的有限開覆蓋。令 $c_j=(a_j+b_j)/2$ 則區間 $[a_j, c_j]$ 及 $[c_j, b_j]$ 決定了 2^k個 k 維胞體，它們的聯集是 I，這些集合 Q_i 中，至少有一個，叫它爲 I_1，不可能被任何$\{G_\alpha\}$的有限子集合所覆蓋（否則 I 就可以這樣被覆蓋）。其次，我們將 I_1 分割再繼續這程序。則我們得到一序列$\{I_n\}$，具有下列性質:

(a)　$I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots\cdots;$

(b) I_n 不爲任何$\{G_\alpha\}$的有限子集合所覆蓋;

(c) 若 $\mathbf{x}\in I_n$ 且 $\mathbf{y}\in I_n$，則$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leq 2^{-n}\delta$。

由 (a) 及定理 2.39 知，有一個點 $\mathbf{x}^*$ 它在每個 I_n 中。對某個α, $\mathbf{x}^*\in G_\alpha$. 由於 G_α 是開集，存在 $r>0$，使得$|\mathbf{y}-\mathbf{x}^*|<r$ 蘊涵 $\mathbf{y}\in G_\alpha$. 若n大得使$2^{-n}\delta<r$（是有這樣的n的，否則對所有正整數n, $2^n\leq\delta/r$，這是很荒謬的），則 (c) 蘊涵了$I_n\subset G_\alpha$，這與 (b) 矛盾。

這便完成證明。

下面這定理中，(a) 與 (b) 的等價關係，名爲 Heine-Borel 定理。

2.41 定理 如果 R^k 中一集合E具有下列三條件之一，則具其它兩者:

(a) E爲閉集且有界。

(b) E爲緊緻。

(c) 每個E的無限子集，在E中必有一極限點。

證明: 若 (a) 成立，則對某個k維胞體I, $E\subset I$，而 (b) 由定理 2.40 及 2.35 導得。定理 2.37 顯示 (b) 蘊涵 (c)。剩下要證明的是 (c) 蘊涵 (a)。

若E不爲有界，則E包含一點 $\mathbf{x}_n$ 而

$$|\mathbf{x}_n|>n \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

包含這些點 $\mathbf{x}_n$ 的集合S爲無限，且顯然在 R^k 中沒有極限點，在E中也就沒有。故 (c) 蘊涵了E爲有界。

若E不爲閉集，則有一點 $\mathbf{x}_0\in R^k$，它是E的一個極限點但不是E中的點。對$n=1,2,3,\cdots\cdots$，有點$\mathbf{x}_n\in E$, $|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_0|<1/n$。令$S$爲這些點 $\mathbf{x}_n$ 的集合。則 S 爲無限（否則對無限多n，$|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_0|$就只有一個正常數值），且$S$以 $\mathbf{x}_0$ 爲極限點，S 在 R^k 中沒有其它極限點。蓋若 $\mathbf{y}\in R^k$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{x}_0$，則除了有限多$n$之外，

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}_n-\mathbf{y}| &\geq |\mathbf{x}_0-\mathbf{y}|-|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_0| \\ &\geq |\mathbf{x}_0-\mathbf{y}|-\frac{1}{n}\geq\frac{1}{2}|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}|\end{aligned}$$

這顯示 $\mathbf{y}$ 不是 S 的一極限點（定理 2.20）。

故 S 在 E 中沒有極限點；所以若 (c) 成立，E 必爲閉集。

此時，我們必須做一註解，(b) 及 (c) 在任何度量空間中都是等價的（習題 26）。但一般說來，(a) 並不蘊涵 (b) 及 (c)。習題 16 及將在第 11 章中所討論的 $\mathscr{L}^2$ 空間就提供了些例子。

2.42　定理 (**Weierstrass**)　每個 R^k 的有界無限子集在 R^k 中必有一極限點。

證明： 由於是有界，問題中的集合 E 是一 k 維胞體 $I\subset R^k$ 的一子集合。由定理 2.40，I 爲緊緻，因此由定理 2.37，E 在 I 中有一極限點。

完集

2.43　定理　令 P 爲 R^k 中一非空完集，則 P 爲不可數。

證明： 因 P 有極限點，故 P 必爲無限。假設 P 爲可數，同時將 P 中的點記作 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3\cdots\cdots$，我們要建構如下的鄰域序列 $\{V_n\}$。

令 V_1 爲 $\mathbf{x}_1$ 的任意鄰域，若 V_1 包含所有的 $\mathbf{y}\in R^k$，$|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1|<r$，相對應的閉鄰域 $\overline{V}_1$ 定義爲所有 $\mathbf{y}\in R^k$ 而 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}_1|\leq r$ 的集合。（正如定理 2.21，我們很容易證明 $\overline{V}_1$ 的補集是開集。因此閉鄰域是閉集。）

假設已建構了 V_n，使 $V_n\cap P$ 不爲空集合。因爲 P 的每個點都是 P 的一個極限點，故有一鄰域 V_{n+1} 使得 (i) $\overline{V}_{n+1}\subset V_n$，(ii) $\mathbf{x}_n\notin\overline{V}_{n+1}$，(iii) $\overline{V}_{n+1}\cap p$ 爲非空。由 (iii)，V_{n+1} 滿足我們的歸納性假設，而這種建構可以繼續做。

令 $K_n=\bar{V}_n\cap P$。因爲 $\bar{V}_n$ 爲閉集且有界，故 $\bar{V}_n$ 爲緊緻。又因爲 $\mathbf{x}_n\notin K_{n+1}$，故 P 中無一點位於 $\bigcap\limits_1^\infty K_n$ 中。由於 $K_n\subset P$，這蘊涵了 $\bigcap\limits_1^\infty K_n$ 爲空集合，但由 (iii)，每個 K_n 皆非空，且由 (i) 知 $K_n\supset K_{n+1}$；這與定理 2.36 的系矛盾。

系。每個區間 $[a,b]$ $(a<b)$ 是不可數。特別是所有實數的集合爲不可數。

2.44 Cantor 集合　我們現在要建構的集合，顯示在 R' 中存在一個完集，它不包含任何線段。

令 E_0 爲區間 $[0,1]$。將線段 $\left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right]$ 移去，令 E_1 爲區間

$$\left[0,\frac{1}{3}\right],\ \left[\frac{2}{3},1\right]$$

的聯集。將這些區間的中間三分之一移去，令 E_2 爲區間

$$\left[0,\frac{1}{9}\right],\ \left[\frac{2}{9},\ \frac{3}{9}\right],\ \left[\frac{6}{9},\ \frac{7}{9}\right],\ \left[\frac{8}{9},1\right]$$

的聯集。如此繼續下去，我們得到一緊緻集合序列 E_n，而

(a) $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots\cdots$

(b) E_n 是 2^n 區間的聯集，每個長度爲 3^{-n}。

集合

$$P=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$$

稱爲 Cantor 集合。P 很顯然是緊緻，且定理 2.36 顯示 P 爲非空。

沒有任何這樣的區間

$$\left(\frac{3k+1}{3^m},\ \frac{3k+2}{3^m}\right), \tag{24}$$

此處的 k 及 m 是正整數，與 P 會有共同點。因爲每個線段 (α, β) 都包含形如（24）的線段，而如果

$$3^{-m} < \frac{\beta - \alpha}{6},$$

P 就不包含線段。

要證明 P 是完集，只要證明 P 不包含孤立點就够了。令 $x \in P$，並令 S 爲包含 x 的任意線段。令 I_n 爲 E_n 中包含 x 的區間。選取足够大的 n，使得 $I_n \subset S$。令 x_n 爲 I_n 的端點，使得 $x_n \neq x$。

由我們對 P 的建構，可知 $x_n \in P$。故 x 是 P 的一極限點，而 P 是完集。

Cantor 集合的一個最有趣的性質是，它提供了一個不可數集合，其測度（measure）爲零（測度的概念將在 Chap. 11 討論）的一個例子。

連結集合

2.45 定義 度量空間 X 中的兩個子集 A 和 B，叫做分離（separated），如果 $A \cap \overline{B}$ 及 $\overline{A} \cap B$ 皆爲空集，即如果 A 中沒有任何點位於 B 的閉包中，而 B 中也沒有任何點位於 A 的閉包中。

一集合 $E \subset X$ 稱爲連結的（connected），如果 E 不是兩個分離集合的聯集。

2.46 備註 分離的集合當然是互斥，但互斥的集合並不必是分離的。例如，$[0, 1]$ 這區間與 $(1, 2)$ 這線段就不是分離的，蓋 1 是 $(1, 2)$ 的極限點。然而，$(0, 1)$ 線段與 $(1, 2)$ 就是分離的。

直線上的連結子集有着特別簡單的構造：

2.47 定理 直線 R^1 上的子集合 E 爲連結的，若且唯若它有如下性質：若 $x \in E$，$y \in E$，而 $x < z < y$，則 $z \in E$。

證明: 若存在有 $x\in E$, $y\in E$ 且 $z\in(x,y)$, 而 $z\notin E$, 則 $E=A_z\cup B_z$, 其中的

$$A_z=E\cap(-\infty,z),\qquad B_z=E\cap(z,\infty).$$

由於 $x\in A_z$, $y<B_z$, 故 A 與 B 都是非空。因爲 $A_z\subset(-\infty,z)$ 且 $B\subset(z,\infty)$, 所以它們是分離的。故 E 不爲連結。

欲證其逆，假設 E 不爲連結。則有二非空分離集合 A 和 B, 使得 $A\cup B=E$, 取 $x\in A$, $y\in B$, 並設（並不失其一般性）$x<y$。定義

$$z=\sup(A\cap[x,y]).$$

由定理 2.28 知, $z\in\bar{A}$; 因此 $z\notin B$, 特別是 $x\leq z<y$.

若 $z\notin A$, 則 $x<z<y$ 而 $z\notin E$。

若 $z\in A$, 則 $z\notin\overline{B}$, 故存在 z_1, 使得 $z<z_1<y$ 而 $z_1\notin B$。則 $x<z_1<y$, 而 $z_1\notin E$。

習題

1. 試證空集合是每個集合的子集合。
2. 複數 z 稱爲代數數 (algebraic), 如果有整數 $a_0,\cdots\cdots,a_n$, 不全爲零，使得

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

試證所有代數數的集合是可數的，提示: 對每個正整數 N, 只有有限多方程式使得

$$n+|a_0|+|a_1|+\cdots\cdots+|a_n|=N.$$

3. 證證存在有非代數數的實數。
4. 所有無理實數所成的集合是可數嗎?
5. 請建構一個有界的實數集合，它恰含有三個極限點。
6. 令 E' 表示所有 E 的極限點的集合，試證 E' 爲閉集，試證 E 及 $\overline{E}$ 具有相同的極限點。（要記得 $\overline{E}=E\cup E'$。）是否 E 及 E' 永遠具有相同的極限點？
7. 令 A_1,A_2,A_3 爲度量空間的子集合。

(a) 若 $B_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，試證$\overline{B_n}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$，當 $n=1,2,3,\cdots\cdots$.

(b) 若$B=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，試證$\overline{B}\supset\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$

舉例證明這個包含符號可能是純粹（proper）的。

8. 是否每個 $E\subset R^2$ 中的每個點都是E的極限點？試對 R^2 中的閉集合也回答同樣的問題。

9. 令 E^0 表示集合E的所有內點所成的集合。〔見定義 2.18 (e)；E^0 稱爲的內部（interior)〕

(a) 試證 E^0 永遠是開集。

(b) 試證E爲開集若且唯若$E=E^0$.

(c) 若$G\subset E$且G是開集，試證$G\subset E^0$。

(d) 試證 E^0 的補集就是E的補集的閉包。

(e) E和$\overline{E}$永遠具有相同的內部嗎?

(f) E和E^0永遠具有相同的閉包嗎?

10. 令X爲一無限集合，當 $p\in X$, $q\in X$，定義

$$d(p,q)=\begin{cases}1 & (\text{若 } p\neq q),\\ 0 & (\text{若 } p=q)。\end{cases}$$

試證這是一個度量，其所造成的度量空間，那些子集合是開集呢？那些是閉集呢？那些是緊緻呢?

11. 當 $x\in R^1$, $y\in R^1$，定義

$$d_1(x,y)=(x-y)^2,$$
$$d_2(x,y)=\sqrt{|x-y|},$$
$$d_3(x,y)=|x^2-y^2|,$$
$$d_4(x,y)=|x-2y)$$
$$d_5(x,y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

試逐一決定這些是否是個度量。

12. 令 $K\subset R^1$ 包含 0 及$\frac{1}{n}$, $n=1,2,3,\cdots\cdots$，這些數。試直接由定義證明K是緊緻（不要用 Heine-Borel 定理）。

13. 試建構一緊緻實數集合，它的極限點形成一可數集。
14. 舉一個線段 (0, 1) 的開覆蓋，它沒有有限子覆蓋的例子。
15. 試證如果在定理 2.36 及其系中，將『緊緻』一詞以『閉集』或『有界』取代的話，將不眞（例如在 R^1 中）。
16. 將 Q，所有有理數的集合，視爲度量空間，其 $d(p,q)=|p-q|$。令 E 爲所有 $p\in Q$ 而 $2<p^2<3$ 的集合，試證 E 在 Q 中是閉集且有界，但它不是緊緻。E 在 Q 中是開集嗎?
17. 令 E 爲所有 $x\in[0,1]$ 而其小數展開式只包含 4 和 7 的集合。E 是可數嗎? E 在 $[0,1]$ 中稠密嗎? E 是緊緻嗎? E 是完集嗎?
18. 在 R^1 中有非空完集，但它不包含任何有理點的嗎?
19. (a) 若 A 及 B 在某個度量空間 X 中是互斥閉集合，試證它們是分離的。
    (b) 對互斥開集合證明同樣的事。
    (c) 固定 $p\in X$, $\delta>0$，定義 A 爲所有 $q\in X$，而 $d(p,q)<\delta$ 的集合，並同樣定義 B，而以 $>$ 代替 $<$。試證 A, B 是分離的。
    (d) 試證，每個至少包含兩點的連結度量空間，是不可數的。
    提示：利用 (c)。
20. 連結集合的閉包及內部永遠都是連結的嗎?（觀察 R^2 的子集合）。
21. 令 A 及 B 爲某個 R^k 的分離子集，假設 $\mathbf{a}\in A$, $\mathbf{b}\in B$，並定義當 $t\in R^1$。

$$\mathbf{p}(t)=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}.$$

令 $A_0=\mathbf{p}^{-1}(A)$, $B_0=\mathbf{p}^{-1}(B)$。〔故若且唯若 $\mathbf{p}(t)\in A$，則 $t\in A_0$〕。
    (a) 試證 A_0 及 B_0 是 R^1 的分離子集。
    (b) 試證存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $\mathbf{p}(t_0)\notin A\cup B$.
    (c) 試證每個 R^k 的凸子集都是連接的。
22. 一度量空間稱爲可分(Separable)，如果它包含一個可數稠密子集。試證 R^k 爲可分。提示：考慮所有僅具有理座標的點集合。
23. 一組 X 的開子集 $\{V_\alpha\}$ 叫做 X 的一個基底(base)，如果下述爲眞：對每個 $x\in X$ 及每個開集合 $G\subset X$ 使得 $x\in G$，我們有，對某個 α, $x\in V_\alpha\subset G$。換言之，每個 X 中的開集合都是 $\{V_\alpha\}$ 某個子集合族的聯集。
    試證每個可分度空量間皆有一可數基底。
提示：取所有以在 X 某個可數稠密子集中的點爲中心，具有理半徑的鄰

域。

24. 令X爲一度量空間，其中每個無限子集都有一極限點。試證X爲可分。提示：固定 $\delta>0$，並取 $x_1\in X$，當取完 $x_1\cdots\cdots x_j\in X$後，若可能，則取 $x_{j+1}\in X$，使得對 $i=1,\cdots\cdots,j$，$d(x_i,x_{j+1})\geq\delta$，證明這種過程必得在有限步以後停止，並證明因此 X 可以被有限多半徑爲 δ 的隣域所覆蓋。取 $\delta=1/n(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ 並考慮所對應的隣域中心。

25. 試證每個緊緻度量空間 K，都具有可數基底，因此 K 也是可分的。

提示：對每個正整數 n，必有有限多以$\frac{1}{n}$爲半徑的隣域，其聯集會覆蓋 K。

26. 令X爲一度量空間，其中每個無限子集都有一極限點。試證X爲緊緻。提示：由習題 11 及 12，X有所可數基底。於是每個X的開覆蓋有一可數子覆蓋，$\{G_n\}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$，如果 $\{G_n\}$ 沒有有限子集合族覆蓋 X，則 $G_1\cup\cdots\cdots\cup G_n$ 的補集 F_n，對每個n言，都是非空，但 $\bigcap F_n$ 爲空集。若E是一集合，它包含由每個 F_n 取出的一點，考慮 E 的極限點，以得一矛盾。

27. 定義度量空間中一點p，爲集合$E\subset X$的凝結點(condensation point)，如果p的每個隣域都包含了E中不可數個點。

假設 $E\subset R^k$，E 不可數，並令 P 爲所有 E 的凝結點所成立之集合。試證P是完集，而且E中最多有可數個點不在P中，換言之，$P^c\cap E$是最多可數。提示：令$\{V_n\}$爲 R^k 的可數基底，令W爲所有那些V_n，而$E\cap V_n$爲最多可數者的聯集，證明$P=W^c$.

28. 試證在一可分度量空間中，每個閉集合都是一（可能是空的）完集與一最多爲可數集合的聯集。（系：R^k 中每個可數閉集合具有孤立點。）提示：利用習題 27。

29. 試證 R^1 中每個開集合都是最多可數個互斥線段組的聯集。提示：用習題 22。

30. 模仿定理 2.43 的證明以得下述結果：

若 $R^k=\bigcup_1^\infty F_n$，每個 F_n 都是 R^k 中閉集合，則至少有一個 F_n，它有非空內部。

等價敘述：對 $n=1,2,3,\cdots\cdots$，若 G_n 是 R^k 中一稠密開子集，則 $\bigcap\limits_{1}^{\infty} G_n$ 爲非空（事實上它在 R^k 中稠密）。

（這是 Bair's 定理的特例；一般情形見 Chap. 3，習題 22.）

第三章

數列及級數

正如標題所示，本章主要是處理複數的序列及級數。然而，有關收斂性的基本性質，在較一般性的架構中，也同樣可以簡單地予以解釋。因而，前面三節將討論在歐氏空間，甚至在度量空間中的序列。

收斂序列

3.1 定義　在度量空間X的序列 $\{p_n\}$ 稱之爲收斂（converge），如果有一點$p \in X$並具有下列性質：所予每個$\epsilon > 0$，有一整數N使得$n \geq N$蘊涵了$d(p_n, p) < \epsilon$。（這裏的d是表示X中的距離）。

在此情形，我們也說成$\{p_n\}$收斂到p，或說p是$\{p_n\}$的極限〔見定理 3.2(b)〕，我們並寫成$p_n \longrightarrow p$，或

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

如果$\{p_n\}$不收斂，則稱之爲發散（diverge）。

我們最好指出，我們對「收斂序列」的定義不只與 $\{p_n\}$ 有

關，也與X有關；例如，R^1 中序列$\{1/n\}$收斂（到 0），但在所有正實數的集合中〔$d(x, y)=|x-y|$〕則不收斂。在有混淆的可能時，我們可以更嚴密地指出「在X中收斂」，而不只說「收斂」。

我們記得所有點$p_n(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$的集合是$\{p_n\}$的值域。一序列的值域，可以是有限集合，也可能是無限集合。序列$\{p_n\}$若其值域是有界，則稱其爲有界。

例如，考慮下列複數（$X=R^2$）序列：

(a) 若$s_n=1/n$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=0$；值域爲無限，而序列爲有界。

(b) 若 $s_n=n^2$　序列$\{s_n\}$爲無界，發散，有無限值域。

(c) 若 $s_n=1+[(-1)^n/n]$，序列 $\{s_n\}$ 收斂到 1，有界，有無限值域。

(d) 若 $s_n=i^n$，序列 $\{s_n\}$ 發散，有界，有有限值域。

(e) 若 $s_n=1(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$，則$\{s_n\}$收斂到 1，有界，有有限值域。

我們現在歸納一些在度量空間中收斂序列的重要性質：

3.2　定理　令$\{p_n\}$爲度量空間X中一序列。

(a) $\{p_n\}$收斂到 $p\in X$，若且唯若每個 p 的隣域，都包含 但是 有限多項，$\{p_n\}$所有的項。

(b) 若 $p\in X$且$p'\in X$，且若 $\{p_n\}$ 收斂到 p 及 p'，則 $p=p'$。

(c) 若$\{p_n\}$收斂，則$\{p_n\}$爲有界。

(d) 若$E\subset X$且 p 爲E的一極限點，則E在中有一序列$\{p_n\}$使得 $p=\lim\limits_{n\to\infty} p_n$

證明：(a) 假設 $p_n\longrightarrow p$ 且令V爲 p 的一隣域。對某個 $\epsilon>0$ 而言，$d(p, q)<\epsilon$，$q\in X$的條件蘊涵了 $q\in V$。對應於這

個 ϵ，存在有 N 使得 $n \geq N$ 蘊涵了 $d(p_n, p) < \epsilon$。因此 $n \geq N$ 蘊涵了 $p_n \in V$。

反之，假設每個 p 的隣域包含除了有限多 p_n 項外的所有項。固定 $\epsilon > 0$，並令 V 爲所有 $q \in X$ 且 $d(p, q) < \epsilon$ 的集合。由假設，存在 N（對應於這個 V）使得若 $n \geq N$, $p_n \in V$。故若 $n \geq N, d(p_n, p) < \epsilon$ 所以 $p_n \longrightarrow p$。

(b) 令 $\epsilon > 0$ 已給，則存在整數 N, N' 使得

$$n \geq N \text{ 蘊涵了 } d(p_n, p) < \frac{\epsilon}{2},$$

$$n \geq N' \text{ 蘊涵了 } d(p_n, p') < \frac{\epsilon}{2}$$

因此若 $n \geq \max(N, N')$ 我們有

$$d(p, p') \leq d(p, p_n) + d(p_n, p') < \epsilon.$$

由於 ϵ 是任意的，我們歸結到 $d(p, p') = 0$。

(c) 假設 $p_n \longrightarrow p$，則有一整數 N，使得 $n > N$ 蘊涵了 $d(p_n, p) < K$。令 $\exists K>0$

$$r = \max\{K, d(p_1, p), \cdots\cdots, d(p_N, p)\}$$

則 $d(p_n, p) < r$，對 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$.

(d) 對每個正整數 n，有一點 $p_n \in E$，使得 $d(p_n, p) < 1/n$。給定 $\epsilon > 0$，選取 N 使得 $N\epsilon > 1$。若 $n > N$，得出 $d(p_n, p) < \epsilon$，故 $p_n \longrightarrow p$

這便完成證明。

對於在 R^k 中的序列，我們可以一方面對收斂性，一方面對代數運算兩者之間的關係做研究。我們首先考慮複數序列。

3.3 定理 假設 $\{s_n\}, \{t_n\}$ 爲複數序列，且 $\lim_{n \to \infty} s_n = s$，$\lim_{n \to \infty} t_n = t$。則

(a) $\lim_{n \to \infty} (s_n + t_n) = s + t$；

(b) 對任意數 c，$\lim\limits_{n\to\infty} cs_n=cs, \lim\limits_{n\to\infty}(c+s_n)= c+s.$；

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n=st.$

(d) 若 $s_n\neq 0(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ 且 $s\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{s_n}=\dfrac{1}{s}.$

證明: (a) 給定 $\epsilon>0$，存在整數 N_1, N_2 使得

$$n\geq N_1 \text{ 蘊涵了 } |s_n-s|<\frac{\epsilon}{2}$$

$$n\geq N_2 \text{ 蘊涵了 } |t_n-t|<\frac{\epsilon}{2}$$

若 $N=\max(N_1,N_2)$，則 $n\geq N$ 蘊涵了

$$|(s_n+t_n)-(s+t)|\leq|s_n-s|+|t_n-t|<\epsilon$$

這便證明了 (a),(b) 的證明是顯然的。

(c) 我們利用恒等式

(1) $$s_n t_n-st=(s_n-s)(t_n-t)+s(t_n-t)+t(s_n-s)$$

給定 $\epsilon>0$，有整數 N_1, N_2 使得

$$n\geq N_1 \text{ 蘊涵了 } |s_n-s|<\sqrt{\epsilon}$$

$$n\geq N_2 \text{ 蘊涵了 } |t_n-t|<\sqrt{\epsilon}.$$

若我們取 $N=\max(N_1,N_2)$, $n\geq N$ 蘊涵了

$$|(s_n-s)(t_n-t)|<\epsilon$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}(s_n-s)(t_n-t)=0$$

我們現在將 (a) 及 (b) 用到 (1)，便歸結到

$$\lim_{n\to\infty}(s_n t_n-st)=0$$

(d) 選取 m，使得若 $n\geq m$, $|s_n-s|<\frac{1}{2}|s|$，我們知道

$$|s_n|>\frac{1}{2}|s| \qquad (n\geq m)$$

給定 $\epsilon>0$，有一整數 $N>m$ 使得 $n\geq N$ 蘊涵了

$$|s_n-s|<\frac{1}{2}|s|^2\epsilon$$

因此，對 $n\geq N$

$$\left|\frac{1}{s_n}-\frac{1}{s}\right|=\left|\frac{s_n-s}{s_ns}\right|\leq\frac{2}{|s|^2}|s_n-s|<\epsilon.$$

3.4　定理　(a) 假設 $\mathbf{x}_n\in R^k(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ 且

$$\mathbf{x}_n=(\alpha_{1,n},\cdots\cdots,\alpha_{k,n}).$$

則$\{\mathbf{x}_n\}$收斂到 $\mathbf{x}=(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_k)$ 若且唯若

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{j,n}=\alpha_j \qquad (1\leq j\leq k).$$

(b) 假設 $\{\mathbf{x}_n\},\{\mathbf{y}_n\}$為 R^k 中序列，$\{\beta_n\}$ 為實數序列，且 $\mathbf{x}_n\longrightarrow\mathbf{x},\mathbf{y}_n\longrightarrow\mathbf{y},\beta_n\longrightarrow\beta$　則

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n+\mathbf{y}_n)=\mathbf{x}+\mathbf{y},\quad \lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n\cdot\mathbf{y}_n=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y},\quad \lim_{n\to\infty}\beta_n\mathbf{x}_n=\beta\mathbf{x}$$

證明：若 $\mathbf{x}_n\longrightarrow\mathbf{x}$，不等式

$$|\alpha_{j,n}-\alpha_j|\leq|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}|$$

可直接由 R^k 中範數的定義導得，這證明 (2) 成立。

反之，若 (2) 成立，則對每個 $\epsilon>0$ 對應有一整數N使得$n\geq N$蘊涵了

$$|\alpha_{j,n}-\alpha_j|<\frac{\epsilon}{\sqrt{k}} \qquad (1\leq j\leq k)$$

因此$n\geq N$蘊涵了

$$|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}|=\{\sum_{j=1}^{k}|\alpha_{j,n}-\alpha_j|^2\}^{1/2}<\epsilon,$$

所以 $\mathbf{x}_n\longrightarrow\mathbf{x}$這證明了 (a)。

(b) 部分由 (a) 及定理 3.3 可導得。

部份序列

3.5　定義　給定一序列$\{p_n\}$，考慮一正整數序列$\{n_k\}$，

使得 $n_1<n_2<n_3<\cdots\cdots$。則序列 $\{p_{n_i}\}$ 叫做 $\{p_n\}$ 的部分序列 (subsequences)。若$\{p_{n_i}\}$收斂，它的極限$\{p_n\}$叫做$\{p_n\}$的一個部分序列極限。

很明顯，$\{p_n\}$ 收斂到 p 若且唯若 $\{p_n\}$ 的每個部分列都收斂到 p。我們將這證明的細節留給讀者。

3.6 定理　(a) 若 $\{p_n\}$ 是緊緻度量空間 X 中的序列，則有某個$\{p_n\}$的部份序列會收斂到 X 的一點。

(b) R^k 中每個有界序列，都包含一個收斂部份列。

證明：(a) 令 E 爲$\{p_n\}$的值域。若 E 是有限，則有一個 $p\in E$ 及序列$\{n_i\}$, $n_1<n_2<n_3<\cdots\cdots$，使得

$$p_{n_1}=p_{n_2}=\cdots\cdots=p$$

這樣得到的部份序列$\{p_{n_i}\}$，顯然收斂到 p。

若 E 是無限，定理 2.37 顯示，E 有一極限點 $p\in X$，選取 n_1 使得 $d(p,p_{n_1})<1$，當選完了 $n_1,\cdots\cdots,n_{i-1}$，我們由定理 2.20 知，必有一整數 $n_i>n_{i-1}$ 使得 $d(p,p_{n_i})<1/i$。則 $\{p_{n_i}\}$ 收斂到 p。

(b) 這可由 (a) 得到，蓋定理 2.41 蘊涵了，R^k 中每個有界子集都在 R^k 的一個緊緻子集中。

3.7 定理　在度量空間 X 中，序列$\{p_n\}$的部份列極限，形成一閉集合。

證明：令 E^* 表示所有 $\{p_n\}$ 部份列極限所成的集合，令 q 爲 E^* 的一極限點，我們必須證明 $q\in E^*$。

選取 n_1 使得 $p_{n_1}\neq q$。(如果這樣的 n_1 不存在，則E^*只有一個點，也就沒什麼好證了。) 令 $\delta=d(q,p_{n_1})$。假設 $n_1,\cdots\cdots n_{i-1}$ 已選好了，由於 q 是 E^* 的極限點，故有 $x\in E^*$ 而 $d(x,q)<2^{-i}\delta$。因爲 $x\in E^*$，故有 $n_i>n_{i-1}$ 使得 $d(x,p_{n_i})<2^{-i}\delta$。因此當 $i=1,2,3,\cdots\cdots$

$$d(q,p_{n_i})\leq 2^{1-i}\delta$$

這就是說$\{p_{n_i}\}$收斂到q，因此$q\in E^*$

Cauchy 序列

3.8 定義 在度量空間X中一序列$\{p_n\}$稱爲Cauchy序列，如果對每個$\epsilon>0$，有一整數N使得若$n\geq N$且$m\geq N$，則$d(p_n,p_m)<\epsilon$.

在我們對 Cauchy 序列以及以後會出現的其它情況的討論中，下面的幾何概念是會有用的。

3.9 定義 令E爲度量空間X的一子集合，並令S爲所有$d(p,q)$這種型式的實數集合，其中$p\in E$且$q\in E$。則S的 sup 稱爲E的直徑 (diameter)。

若$\{p_n\}$是X中一序列且若E_N包含點$p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \cdots\cdots$，於是由前兩個定義很容易導得$\{p_n\}$是個 Cauchy 序列若且唯若

$$\lim_{N\to\infty}\operatorname{diam}E_N=0$$

3.10 定理 (a) 若$\bar{E}$是度量空間X中某集合E的閉包，則

$$\operatorname{diam}\bar{E}=\operatorname{diam}E.$$

(b) 若K_n是X中緊緻集合序列而$K_n\supset K_{n+1}(n=1,2,3,\cdots\cdots)$且若

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}K_n=0$$

則$\bigcap_1^\infty K_n$恰包含一個點。

證明: (a) 由於$E\subset\bar{E}$，故很明顯地

$$\operatorname{diam}E\leq\operatorname{diam}\bar{E}$$

固定$\epsilon>0$，並取$p\in\bar{E}$, $q\in\bar{E}$，由$\bar{E}$的定義，在E中有點p',q'使得$d(p,p')<\epsilon$, $d(q,q')<\epsilon$。因此

$$d(p,q)\leq d(p,p')+d(p',q')+d(q',q)$$
$$<2\varepsilon+d(p',q')\leq 2\epsilon+\operatorname{diam}E.$$

於是

$$\operatorname{diam}\bar{E}\leq 2\epsilon+\operatorname{diam}E$$

由於 ϵ 是任意的，(a) 得證。

(b) 令 $K=\bigcap_{1}^{\infty}K_n$。由定理 2.36 知，$K$ 爲非空。若 K 包含一點以上，則 $\operatorname{diam}K>0$，但對每個 n，$K_n\supset K$，故 $\operatorname{diam}K_n>\operatorname{diam}K$。這與假設 $\operatorname{diam}K_n\longrightarrow 0$ 相矛盾。

3.11 定理 (a) 度量空間 X 中，每個收斂序列都是 Cauchy 序列。

(b) 若 X 是個緊緻度量空間，且若 $\{p_n\}$ 是在 X 中的 Cauchy 序列，則 $\{p_n\}$ 會收斂到 X 的某個點。

(c) R^k 中每個 Cauchy 序列都收斂。

備註: 收斂定義與 Cauchy 序列的定義其間的差別在於前者中極限是很明白地介入了，而後者則否。因此，定理 3.11 (b) 可以使我們決定是否一所予序列收斂，而不須對於它可能會收斂到的那個極限有所了解。

(包含在定理 3.11 中) R^k 中一序列會收斂若且唯若它是個 Cauchy 序列，這個事實通常稱爲對收斂性的 Cauchy 準則。

證明: (a) 若 $p_n\longrightarrow p$，且 $\epsilon>0$，則有一整數 N 使得若 $n\geq N$，$d(p_n,p)<\epsilon$。因此，若 $n\geq N$ 且 $m\geq N$，我們有

$$d(p_n,p_m)\leq d(p_n,p)+d(p,p_m)<2\epsilon$$

則 $\{p_n\}$ 是個 Cauchy 序列。

(b) 令 $\{p_{nn}\}$ 爲緊緻空間 X 中的 Cauchy 序列。當 $N=1,2,3$ ……令 E_N 爲一集合，它包含 p_N,p_{N+1},p_{N+2}……，則由定義 3.9 及定理 3.10 (a) 知，

(3) $$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam} \bar{E}_N = 0$$

由於這是緊緻空間X中的閉子集，每個 $\bar{E}_N$ 都是緊緻（定理 2.35）。此外 $E_N \supset E_{N+1}$，所以 $\bar{E}_N \supset \bar{E}_{N+1}$.

由定理 3.10 (b) 知，有唯一 $p \in X$，它落在每個 $\bar{E}_N$ 中。

令 $\epsilon > 0$ 已給。由 (3) 知，有整數 N_0 使得 $\operatorname{diam} \bar{E}_N < \epsilon$，當$N \geq N_0$。由於 $p \in \bar{E}_N$，所以對每個 $q \in \bar{E}_N$, $d(p, q) < \epsilon$。因此對每個 $q \in E_N$, $q \in \bar{E}_N$。換言之，若 $n \geq N_0$, $d(p, p_n) < \epsilon$。這正就是說 $p_n \longrightarrow p$。

(c) 令$\{\mathbf{x}_n\}$爲 R^k 中的 Cauchy 序列。定義 E_N 如 (b) 中者，而以 $\mathbf{x}_i$ 取代 p_i。對某個 N, $\operatorname{diam} E_N < 1$. $\{\mathbf{x}_n\}$ 的值域是 E_N 及 $\{\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_{N-1}\}$ 這有限集合之聯集。因此$\{\mathbf{x}_n\}$是有界。由於 R^k 中每個有界子集，在 R^k 中都有緊緻閉包（定理2.41），(c) 由 (b) 可得。

3.12 定義 一度量空間X，若其中的每個 Cauchy 序列都收斂，就叫做完備的 (complete)。

因此，定理 3.11 說，所有緊緻度量空間及所有歐氏空間都是完備的。定理 3.11 也蘊涵了完備空間X的每個閉子集E，也是完備的。（每個E中的 Cauchy 序列也是 X 中的 Cauchy 序列，因此它收斂到某個$p \in X$，而事實上$q \in E$，蓋 E 是閉集合）。一度量空間它不是完備的例子，是所有有理數所成的空間，而 $d(x, y) = |x - y|$.

定理 3.2 (c) 及定義 3.1 的例 (d) 顯示了，收斂序列是有界，但 R^k 中的有界序列不必要收斂。不過，有一個很重要的情況，其中收斂性是與有界性等價的；這發生在 R^1 中的單調序列:

3.13 定義 一實數序列$\{s_n\}$叫做

(a) 單調漸增，如果 $s_n \leq s_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3 \cdots\cdots)$;

(b) 單調漸減，如果 $s_n \geq s_{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

單調序列集合包含了漸增及漸減序列。

3.14 定理　　設若$\{s_n\}$爲單調。則$\{s_n\}$爲收斂，若且唯若它是有界的。

證明：假設$s_n \leq s_{n+1}$（對另一種情形，證明是類似的）。令E爲$\{s_n\}$的值域。若$\{s_n\}$有界，令 s 爲E的最小上界。則

$$s_n \leq s \qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots).$$

對每個 $\epsilon > 0$ 有一整數N使得

$$s-\epsilon < s_N < s,$$

蓋若不然，$s-\epsilon$ 就會是E的一個上界。由於$\{s_n\}$是漸增，因此 $n \geq N$ 蘊涵了

$$s-\epsilon < s_n \leq s,$$

這證明了$\{s_n\}$收斂（到 s）。

其逆由定理 3.2 (c) 導得。

上極限與下極限

3.15 定義　　令$\{s_n\}$爲實數序列，具有下列性質：對每個實數M，有一整數N使得 $n \geq N$ 蘊涵 $s_n \geq M$。我們便寫成

$$s_n \longrightarrow +\infty$$

同樣，若對每個實數M，有一整數N使得 $n \geq N$ 蘊涵$s_n \overset{\leq}{\cancel{\geq}} M$，我們寫成

$$s_n \longrightarrow -\infty.$$

應加注意的是，對某類發散序列，也對收斂序列，我們現在都用$\longrightarrow$符號（在定義 3.1 中所引入者），但在定義 3.1 中所給的收斂及極限的定義，則絲毫未變。

3.16 定義　　令$\{s_n\}$爲實數序列。令E爲所有數 x（在擴充的實數系中）而對某個部分序列 $\{s_{n_k}\}$ 言，$s_{n_k} \longrightarrow x$，的集合。這個集合$E$包含了所有如定義 3.5 中所定義的部分序列極

限，加上可能是$+\infty$，$-\infty$這些數。

我們現在回到定義 1.8 及 1.23，令

$$s^*=\sup E$$

$$s_*=\inf E$$

數 s^* 及 s_* 叫做$\{s_n\}$的上極限及下極限；我們用符號

$$\lim_{n\to\infty}\sup s_n=s^*,\qquad \lim_{n\to\infty}\inf s_n=s_*$$

3.17 定理 令 $\{s_n\}$ 爲實數序列。E及 s^* 與定義 3.16 中的相同。則 s^* 有下列兩性質：

(a) $s^*\in E$

(b) 若 $x>s^*$，必有一整數N使得 $n\geq N$蘊涵$s_n<x$

更有甚者，s^* 是唯一具有性質 (a) 及 (b) 的數。

當然，對 s_*，類似的結果亦眞。

證明：(a) 若 $s^*=+\infty$，則E不爲在上有界；因此$\{s_n\}$不爲在上有界，故必有一部分序列$\{s_{n_k}\}$而$s_{n_k}\longrightarrow+\infty$。

若 s^* 是實數，則 E 爲在上有界，而至少有一部分序列極限存在，因此 (a) 由定理 3.7 及 2.28 導得。

若 $s^*=-\infty$，則E只包含一個元素，卽$-\infty$，而無部分序列極限。因此，對任意實數M，則有最多有限個n值，$s_n>M$，因此 $s_n\longrightarrow-\infty$

這便對所有情形證明了 (a)

(b) 假設有一數 $x>s^*$，而對無限多n值，$s_n\geq x$，這時，必有一數 $y\in E$，而 $y\geq x>s^*$，與 s^* 的定義矛盾。

因而 s^* 滿足 (a) 及 (b)

要證明唯一性。假設有兩個數p及q滿足 (a) 及 (b)，並設$p<q$。選取x使得$q<x<q$。由於p滿足 (b)，我們有對所有$n\geq N$，$s_n<x$。但這時q無法滿足 (a)。

3.18　例子　(a) 令$\{s_n\}$爲包含所有有理數的序列，則每個實數都是一部分序列極限，且

$$\limsup_{n\to\infty} s_n=+\infty,\qquad \liminf_{n\to\infty} s_n=-\infty.$$

(b) 令 $s_n=(-1)^n[1+(1/n)]$，則

$$\limsup_{n\to\infty} s_n=1,\qquad \liminf_{n\to\infty}=-1.$$

(c) 對一實值序列$\{s_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$ 若且唯若

$$\limsup_{n\to\infty} s_n=\liminf_{n\to\infty} s_n=s$$

我們以一個定理結束本節，它很有用，且它的證明也相當顯然:

3.19　定理　若對 $n\geq N$, N爲固定，$s_n\leq t_n$　則

$$\liminf_{n\to\infty} s_n\leq\liminf_{n\to\infty} t_n$$

$$\limsup_{n\to\infty} s_n\leq\limsup_{n\to\infty} t_n$$

一些特殊序列

我們現在要計算一些常常出現的序列，它們的極限。它們的證明都將基於下面的提示：若 $0\leq x_n\leq s_n$ 對 $n\geq N$，其中N是某個固定數，且若，$s_n\longrightarrow 0$，則$x_n\longrightarrow 0$

3.20　定理

(a) 若 $p>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p}=0$

(b) 若 $p>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

(d) 若 $p>0$ 且 α 爲實數，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{(1+p)^n}=0$

(e) 若 $|x|<1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$

證明: (a) 取 $n\ (1/\epsilon)^{1/p}$ （留意實數系中的阿基米德性質用在這裏。）

(b) 若 $p>1$， 取 $x_n=\sqrt[n]{p}-1$。則 $x_n>0$，且，由二項式定理，

$$1+nx_n\leq(1+x_n)^n=p,$$

故

$$0<x_n\leq\frac{p-1}{n}$$

所以$x_n\longrightarrow 0$。若 $p=1$ (b) 是顯然；若 $0<p<1$，則取倒數可得其結果。

(c) 取 $x_n=\sqrt[n]{n}-1$ 則$x_n\geq 0$，且由二項式定理，

$$n=(1+x_n)^n\geq\frac{n(n-1)}{2}x_n^2.$$

因此，

$$0\leq x_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}\qquad(n\geq 2)$$

(d) 令 k 爲一整數， $k>\alpha$，$k<0$。對 $n>2k$,

$$(1+p)^n>\binom{n}{k}p^k=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}p^k$$

$$>\frac{n^kp^k}{2^kk!}.$$

因此

$$0<\frac{n^\alpha}{(1+p)^n}<\frac{2^kk!}{p^k}n^{\alpha-k}\qquad(n>2k)$$

因爲 $\alpha-k<0$，$n^{\alpha-k}\longrightarrow 0$，由 (a)。

(e) 在 (d) 中取 $\alpha=0$

級數

本章的剩餘部份，除非明言其非，否則所有考慮的序列及級數都是複值的。下面某些定理的擴充，到在 R^k 中的級數上，則在習題 15 中提及。

3.21 定義　所予一序列 $\{a_n\}$，我們用符號

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \qquad (p\leq q)$$

表示 $a_p+a_{p+1}+\cdots\cdots+a_q$ 的和，對 $\{a_n\}$ 我們賦予一序列 $\{s_n\}$，而

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

對 $\{s_n\}$，我們也用符號表式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$$

或更簡潔些

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{4}$$

符號 (4) 我們稱之爲一無窮級數，或只是級數。s_n 這些數則稱爲這級數的部份和，若 s_n 收斂到 s，我們說這級數收斂，並記作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=s$$

s 這個數叫做這級數的和；但應該澈底了解的是，s 是諸和序列的極限，而不是只由加法就得到的。

若 $\{s_n\}$ 發散，這級數就說是發散。

有時爲了符號上的方便，我們將考慮這樣的級數。

(5) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

也有時，在不可能有歧義，或區別不甚重要時，我們只寫 $\sum a_n$ 以取代 (4) 或 (5)。

很明顯的，所有有關序列的定理都可以用級數來敍述，(取 ($a_1=s_1$，而對 $n>1, a_n=s_n-s_{n-1}$)，反之亦然。但是，同時考慮這兩個概念仍是有用的。

Cauchy 準則 (定理 3.11) 可以用下面的形式來重述:

3.22 定理 $\sum a_n$ 收斂若且唯若對每個 $\epsilon>0$，有一整數N使得若$m\geq n\geq N$，則

(6) $$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right|\leq\epsilon$$

特別是，若取$m=n$，(6) 變成了

$$|a_n|\leq\epsilon \qquad (n\geq N)$$

換言之，

3.23 定理 若 $\sum a_n$ 收斂，則 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

但是，$a_n\longrightarrow 0$ 的條件卻不足以保證 $\sum a_n$ 的收斂。例如級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

發散；其證明我們參考定理 3.28。

定理 3,14，有關單調序列者，在級數方面也馬上有個相應定理。

3.24 定理 一非負項[1]的級數收斂，若且唯若它的部分

(1) 「非負」這詞永遠指的是「實數」

和形成一有界序列。

我們現在轉到另一類的試斂法，所謂的「比較試斂法」。

3.25 定理 (a) 若 $|a_n|\le c_n$, 對 $n\ge N_0$, N_0 爲某個固定整數。且若 $\sum c_n$ 收斂，則 $\sum a_n$ 收斂。

(b) 若對 $n\ge N_0, a_n\ge d_n\ge 0$，則若 $\sum d_n$ 發散，$\sum a_n$ 發散。

注意 (b) 只對非負項 a_n 的級數才可用。

證明: 給定 $\epsilon>0$，由 Cauchy 準則知存在 $N\ge N_0$；使得 $m\ge n\ge N$ 蘊涵了

$$\sum_{k=n}^{m} c_k\le\epsilon$$

因此

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right|\le\sum_{k=n}^{m}|a_k|\le\sum_{k=n}^{m} c_k\le\epsilon,$$

這導得 (a)

其次，(b) 由 (a) 可得出，蓋若 $\sum a_n$ 收斂，$\sum d_n$ 也必然，〔注意 (b) 也可由定理 3.24 導出〕。

比較試斂法是很有用的一種方法；要有效地運用它，我們必須先熟悉一些非負項級數，而它們的斂散性已知。

非負項級數

所有最簡單的恐怕是幾何級數了。

3.26 定理 若 $0\le x<1$，則

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$$

若 $x\ge 1$，級數發散。

證明: 若 $x\neq 1$

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

如果我們令 $n\longrightarrow\infty$，便可得到結果。對 $x=1$，我們有

$$1+1+1+\cdots\cdots,$$

這很明顯是發散。

在應用上發生的許多情況中，級數的項都是單調漸減的。因此下面 Cauchy 的定理是特別有意思的。這定理最驚人的特點，就在於$\{a_n\}$的一組相當「薄」的部份序列決定了$\sum a_n$的斂散性。

3.27　定理　　設若$a_1\geq a_2\geq a_3\geq\cdots\cdots\geq 0$則級數 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂，若且唯若級數

(7)　　$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots\cdots$$

收斂

證明： 由定理 3.24，只須考慮部份和的有界性就够了。令

$$s_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$
$$t_k=a_1+2a_2+\cdots\cdots+2^k a_{2^k}$$

對 $n<2^k$,

$$\begin{aligned}s_n&\leq a_1+(a_2+a_3)+\cdots\cdots+(a_{2^k}+\cdots\cdots+a_{2^{k+1}-1})\\&\leq a_1+2a_2+\cdots\cdots+2^k a_{2^k}=t_k\end{aligned}$$

因此

(8)　　$s_n\leq t_k.$

另一方面，若 $n>2^k$,

$$\begin{aligned}s_n&\geq a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots\cdots+a_{2^k})\\&\geq\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots\cdots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{1}{2}t_k,\end{aligned}$$

因此

(9)　　$2s_n\geq t_k$

由 (8) 及 (9) 知，序列 $\{s_n\}$ 及 $\{t_k\}$ 要不都有界，要不就都無界。證畢。

3.28　定理　$\sum\frac{1}{n^p}$收斂如果 $p>1$，而發散如果 $p\le 1$。

證明: 若 $p\le 0$，由定理 3.23 可得出其發散性，若 $p>0$ 定理 3.27 可以運用，我們便導得這級數

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\frac{1}{2^{kp}}=\sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}.$$

現在，$2^{1-p}<1$ 若且唯若 $1-p<0$，則與幾何級數比較（在定理 3.26 中取 $x=2^{1-p}$）便得出結果。

作爲定理 3.27 的進一步應用，我們證明:

3.29　定理　若 $p>1$，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p} \tag{10}$$

收斂；若 $p\le 1$，此級數發散。

備註: "$\log n$" 表示 n 對於基底 e 的對數（與第一章習題 7 比較之）；e 這個數馬上就會定義（見定義 3.30）。我們令級數由 $n=2$ 開始，是因爲 $\log 1=0$。

證明: 對數函數的單調性（在第 8 章中會有較詳細的討論）蘊涵了 $\{\log n\}$ 漸增。因此 $\left\{\frac{1}{n\log n}\right\}$ 漸減，而我們可以將定理 3.27 用到 (10) 式；這使我們得到級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\cdot\frac{1}{2^k(\log 2^k)^p}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\log 2)^p}=\frac{1}{(\log 2)^p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}, \tag{11}$$

由定理 3.28 可導出定理 3.29

這個步驟顯然可以繼續下去。例如

$$(12)\qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n\log\log n}$$

發散，然而

$$(13)\qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log n(\log\log n)^2}$$

收斂。

現在我們可以觀察到級數（12）的項與（13）的項相差非常小。但是，一個發散，另一個收斂。如果我們繼續這由定理3.28導出定理 3.29 的步驟，再運用到 (12) 及（13)，我們會得到一對收斂及發散的級數，它們諸項間的差異甚至比（12）與（13）間的還要小。於是我們可能導入一個論斷，就是一定會有某種極限狀況，一種「邊界」使得所有收斂級數在一邊，所有發散級數在另一邊——至少在考慮具有單調係數的級數時。這「邊界」的觀念當然是相當模糊，但我們強調的要點是：不管我們如何使這觀念嚴密，這個論斷是不眞的。習題 11（b）及 12（b）可做爲例子。

我們不希望對這方面的收斂理論作更深入討論，而介紹讀者參考 Knopp 的 “Theory and Application of Infinite Series,” 第九章，特別是 §41。

e 這個數

3.30　定理　$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

這裏的 $n!=1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n$ 若 $n>1$，而 $0!=1$

由於

$$s_n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots\cdots n}$$
$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$$

這級數收斂，而定義有意義。事實上，這級數收斂得極快而讓我們能以極高精確率來計算 e。

有趣的是，留意 e 也可以由另外一個極限步驟來定義，其證明提供了一個對極限運算很好的例子:

3.31 定理　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

證明: 令

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\qquad t_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

由二項式定理，

$$t_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

因此 $t_n\le s_n$，所以由定理 3.19 知，

(14)　$$\limsup_{n\to\infty} t_n \le e$$

其次，若 $n\ge m$

$$t_n\ge 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

令 $n\longrightarrow\infty$, m 保持固定，我們得到

$$\liminf_{n\to\infty} t_n\ge 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{m!}$$

所以

$$s_m \leq \liminf_{n\to\infty} t_n$$

讓 $m \longrightarrow \infty$，我們最後得到

(15) $$e \leq \liminf_{n\to\infty} t_n$$

本定理則由 (14) 及 (15) 得出。

級數 $\sum \frac{1}{n!}$ 收歛的快速情形，可估計如下：若 s_n 具如上意義，我們有

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots\cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots\right) \\ &= \frac{1}{n!n} \end{aligned}$$

所以

(16) $$0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}.$$

故，例如 s_{10} 趨近 e， 其誤差小於 10^{-7}. (16) 這個不等式也有理論上的意義，蓋它讓我們很容易證明 e 的無理性：

3.32 定理 e 是無理數。

證明：假設 e 是有理數。則 $e = p/q$, p, q 皆整數。由 (16) 知，

(17) $$0 < q!\cdot(e - s_q) < \frac{1}{q}$$

由我們的假設，$q!\ e$ 是個整數。由於

$$q!s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

是個整數，我們知道 $q!(e - s_q)$ 是個整數。

因爲 $q \geq 1$，(17) 蘊涵了在 0 與 1 之間有一整數存在。我們因而得到一矛盾。

事實上，e 甚至還不是個代數數。要得一簡單證明，請參閱 Niven 的書 25 頁，或 Herstein 的第 176 頁，都記在書目中。

根式及比值試斂法

3.33　定理（根式試斂法）　所予 $\sum a_n$，令 $\alpha_n = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 則

(a) 若 $\alpha < 1$，$\sum a_n$ 收斂；

(*b*) 若 $\alpha > 1$，$\sum a_n$ 發散；

(c) 若 $\alpha = 1$，這試法無可奉告。

證明：若 $\alpha < 1$，我們可以取 β 使 $\alpha < \beta < 1$，且有一整數 N 使得對 $n \geq N$，〔由定理 3.17 (b) 知〕

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$$

卽，$n \geq N$ 蘊涵了

$$|a_n| < \beta^n$$

由於 $0 < \beta < 1$，$\sum \beta^n$ 收斂。於是由比較試斂法得出 $\sum a_n$ 收斂。

若 $\alpha > 1$，則再由定理 3.17 知，有一序列 $\{n_k\}$ 使得

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \longrightarrow \alpha$$

因此對無窮多個 n 值，$|a_n| > 1$，因此 $a_n \longrightarrow 0$ 的條件，是 $\sum a_n$ 收斂的必要條件，並不成立（定理 3.23）。

要證明 (c)，我們考慮級數

$$\sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n^2}.$$

對每個來說，$\alpha = 1$，但第一個發散，而第二個收斂。

3.34　定理（比值試斂法）　級數 $\sum a_n$

(a) 收斂，如果 $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$

(b) 發散，如果 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geq 1$ 對 $n\geq n_0$，而 n_0 爲某個固定整數。

證明: 若條件 (a) 成立，我們可找到 $\beta<1$，及一整數 N，使得對 $n\geq N$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\beta$$

特別是，

$$|a_{N+1}|<\beta|a_N|$$
$$|a_{N+2}|<\beta|a_{N+1}|<\beta^2|a_N|,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$|a_N+p|<\beta^p|a_N|.$$

卽，對 $n\geq N$

$$|a_n|<|a_N|\beta^{-N}\cdot\beta^n,$$

而由比較試斂法得到 (a)，因爲 $\sum\beta^n$ 收斂。

若 $|a_{n+1}|\geq|a_n|$，對 $n\geq n_0$，則很容易看出 $a_n\longrightarrow 0$ 不成立，得到 (b)。

備註: 知道了 $\lim a_{n+1}/a_n=1$，並不蘊涵任何有關 $\sum a_n$ 收斂的事。級數 $\sum 1/n$ 及 $\sum 1/n^2$ 證實了這個。

3.35 例子 (a) 考慮級數

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$$

對此，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}=\lim\sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$$

根式試斂法指出爲收斂；而比值試斂法無結論。

(b) 對這級數言也同樣爲眞：

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots\cdots,$$

其中

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$$

但是

$$\lim\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$$

3.36　備註　比值試斂法常較根式試斂法易於應用，因爲通常計算比值要 n 次方根來得容易些，但是，根式試斂法範圍較廣。更嚴格點說：只要比值試斂法顯示是收斂，根式試斂法亦然，而只要根式試斂法無結論，比值試斂法亦然。這是定理3.37的一個結論，舉例如上。

對發散性而言，這兩個方法都不困難，都是由當 $n\longrightarrow\infty$ 時 a_n 不趨於 0 這件事導出發散性的。

3.37　定理　對任意正數序列$\{c_n\}$而言，

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{c_{n+1}}{c_n}\le\lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{c_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{c_n}\le\lim_{n\to\infty}\sup\frac{c_{n+1}}{c_n}$$

證明： 我們將證明第二不等式；第一個的證明相當類似。令

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

若 $\alpha = +\infty$，就沒甚麼可證了，若 α 是有限，取 $\beta > \alpha$，則有一整數 N 使得對 $n \geq N$，

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \beta$$

特別是，對任意 $p > 0$，

$$c_{N+k+1} \leq \beta c_{N+k} \qquad (k=0, 1, \cdots\cdots, p-1)$$

將這些不等式乘起來，我們得到

$$c_{N+p} \leq \beta^p c_N,$$

或是，

$$c_n \leq c_N \beta^{-N} \cdot \beta^n \qquad (n \geq N)$$

因此，

$$\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n]{c_N \beta^{-N}} \cdot \beta$$

所以，由定理 3.20 (b) 知，

$$\limsup \sqrt[n]{c_n} \leq \beta \tag{18}$$

由於對每個 $\beta > \alpha$，(18) 皆眞，我們有

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leq \alpha$$

冪級數

3.38 定義 給定一複數序列 $\{c_n\}$，則級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{19}$$

叫做一個冪級數，c_n 這些數叫做這級數的係數；z 是一個複數。

一般而言，這級數會收斂還是發散，與 z 的選擇有關。更確切地說，對每個冪級數而言，都有一個圓，所謂的收斂圓，使得若 z 在這圓的內部則 (10) 收斂，若 z 在外部則發散（爲了遍及所有情況，我們必須將平面視爲一具無窮半徑之圓的內部，而一

點爲半徑是零的圓）。在收斂圓上之動態則頗多變化，不能如此簡單地描述。

3.39　定理　所予一冪級數$\sum c_n z^n$，令

$$\alpha=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|},\qquad R=\frac{1}{\alpha}.$$

（若 $\alpha=0, R=+\infty$，若 $\alpha=+\infty$，$R=0$.） 則若$|z|<R$，$\sum c_n z$收斂，若$|z|>R$，則發散。

證明：令 $a_n=c_n z^n$，應用根式試斂法：

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=|z|\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{z}{R}$$

註：R叫做$\sum c_n z^n$ 的收斂半徑。

3.40　例子　(a) 級數$\sum n^n z^n$ 的$R=0$

(b) 級數$\sum\frac{z^n}{n!}$的$R=+\infty$（在這情形，比值試斂法較根式試斂法易於應用）。

(c) 級數 $\sum z^n$ 的$R=1$，若 $|z|=1$，級數發散，蓋當$n\longrightarrow\infty$，$\{z^n\}$不趨於 0。

(d) 級數$\sum\frac{z^n}{n}$的$R=1$。在收斂圓上，在$z=1$處，級數發散；在其它所有$|z|=1$處皆收斂。（最後一斷語會在定理 3.44 中加以證明。）

(e) 級數$\sum\frac{z^n}{n^2}$的$R=1$。級數在所有圓$|z|=1$上的點也都收斂，由比較試斂法可知，蓋$\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$

部份作和

3.41　定理　給定序列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$。令，若$n\geq 0$

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k;$$

$A_{-1}=0$。則，若 $0\leq p\leq q$，我們有

$$\sum_{n=p}^{q}a_nb_n=\sum_{n=p}^{q-1}A_n(b_n-b_{n+1})+A_qb_q-A_{p-1}b_p. \tag{20}$$

證明:

$$\sum_{n=p}^{q}a_nb_n=\sum_{n=p}^{q}(A_n-A_{n-1})b_n=\sum_{n=p}^{q}A_nb_n-\sum_{n=p-1}^{q-1}A_n b_{n+1}$$

而上式右邊顯然等於（20）的右邊。

公式（20），所謂的「部分和公式」，對研究形如 $\sum a_nb_n$ 的級數很有用，特别是當爲$\{b_n\}$單調時。我們現在就給幾個它的應用。

3.42　定理　假設

(a) $\sum a_n$ 的部分和 A_n 形成一有界序列;

(b) $b_0\geq b_1\geq b_2\geq\cdots\cdots$;

(c) $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

則 $\sum a_nb_n$ 收斂。

證明: 選取M使得對所有n，$|A_n|\leq M$，給了 $\epsilon>0$，有一整數N使得 $b_N<(\epsilon/2M)$。對$N\leq p\leq q$，我們有

$$\left|\sum_{n=p}^{q}a_nb_n\right|=\left|\sum_{n=p}^{q-1}A_n(b_n-b_{n+1})+A_qb_q-A_{p-1}b_p\right|$$

$$\leq M\left|\sum_{n=p}^{q-1}(b_n-b_{n+1})+b_q+b_p\right|$$

$$=2Mb_p\leq 2Mb_N\leq\epsilon.$$

則收斂性由 Cauchy 準則導得，我們要留意上列中的第一個不

等式當然是與 $b_n-b_{n+1}\geq 0$ 這件事有關。

3.43 定理　　假設

(a) $|c_1|\geq|c_2|\geq|c_3|\geq\cdots\cdots$;

(b) $c_{2m-1}\geq, c_{2m}\leq 0, (m=1,2,3,\cdots\cdots)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$

則 $\sum c_n$ 收斂。

(b) 式成立的級數稱為「交錯級數」；這個定理 Leibnitz 是知道的。　　3.42

證明: 用定理 ~~3.24~~, 令 $a_n=(-1)^{n+1}, b_n=|c_n|$

3.44 定理　　假設 $\sum c_n z^n$ 的收斂半徑是 1，並假設 $c_0\geq c_1\geq c_2\geq\cdots\cdots, \lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$。則除了可能在 $z=1$ 之外，$\sum c_n z^n$ 在圓 $|z|=1$ 上的點都收斂。

證明: 令 $a_n=z^n, b_n=c_n$，則定理 3.42 的假設都滿足，由於，若 $|z|=1, z\neq 1$

$$|A_n|=\left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right|=\left|\frac{1-z^{m+1}}{1-z}\right|\leq\frac{2}{|1-z|}.$$

絕對收斂

如果級數 $\sum|a_n|$ 收斂，我們說 $\sum a_n$ 這級數是絕對收斂。

3.45 定理　　若 $\sum a_n$ 絕對收斂，則 $\sum a_n$ 收斂。

證明: 這句斷言可由不等式

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right|\leq\sum_{k=n}^{m}|a_k|$$

以及 Cauchy 準則而得。

3.46 備註　　對正項級數而言，絕對收斂就是收斂。

若 $\sum a_n$ 收斂，而 $\sum|a_n|$ 發散，我們 $\sum a_n$ 說非絕對收斂 (converge non-absolutely)。例如，級數

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

就是非絕對收斂（定理 3.43）。

比較試斂法，以及根式和比值試斂法，實際上是對絕對收斂的試法，因此對非絕對收斂級數，它們無法提供任何訊息，部分和法有時可以用來處理後者。特別是，冪級數在其收斂圓內部是絕對收斂的。

我們會看到我們可以像對有限和一樣地來對絕對收斂級數作運算。我們可以將它們逐項相乘，而且在做加法時，我們還可以改變次序而不影響級數的和。但對非絕對收斂級數，這些就不成立了，而在我們處理它們時，必須更加小心。

級數的加法和乘法

3.47 定理　若 $\sum a_n = A$，且 $\sum b_n = B$，則 $\sum (a_n + b_n) = A + B$ 而對任意固定的 c，$\sum c a_n = cA$。

證明：令

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

則

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k).$$

因為 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ 且 $\lim_{n\to\infty} B_n = B$，我們看出

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B$$

第二斷言的證明就更簡單了。

故兩個收斂級數可以逐項相加，所得的級數收斂到這兩個級數的和。在我們考慮兩級數相乘時，情況變得較為複雜了。首先

我們必須定義乘積，這可以有許多種方法來做；我們所要考慮的是所謂“Cauchy”「乘積」。

3.48 定義 所予$\sum a_n$ 及 $\sum b_n$，我們令

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

我們稱 $\sum c_n$ 為這兩個所予級數的乘積（product）。

這定義可以從如下著想。如果我們將兩個冪級數 $\sum a_n z^n$ 及 $\sum b_n z^n$，逐項相乘，並將具同樣 z 次數的項集起來，我們得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= (a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots)\\ &\quad (b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots\cdots)\\ &=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+(a_0b_2+\\ &\quad a_1b_1+a_1b_0)z^2+\cdots\cdots\\ &=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\cdots\end{aligned}$$

令 $z=1$，我們得到上面的定義。

3.49 例子 如果

$$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n=\sum_{k=0}^{n} c_k,$$

且$A_n \longrightarrow A$, $B_n \longrightarrow B$，則 $\{C_n\}$ 會收斂到 AB 是根本不明顯的事，因為我們並沒有$C_n=A_nB_n$. $\{C_n\}$與$\{A_n\}$及 $\{B_n\}$ 的關係是很複雜的（見定理 3.50 的證明）。我們現在要證明兩個收斂級數的乘積確實可能會發散。

級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots$$

收斂（定理 3.43）。我們建構一個這級數與自己的乘積，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$- \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \cdots$$

因此

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

由於

$$(n-k+1)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

我們有

$$|c_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2},$$

因此，$c_n \longrightarrow 0$ 的條件，即 $\sum c_n$ 收斂的必要條件，無法滿足。

由下面的定理，歸功於 Merten，看來，這裏我們所考慮的是兩個非絕對收斂級數的乘積。

3.50　定理　假設

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 絕對收斂，

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$,

(d) $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$　　　$(n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$.

則

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB.$$

這就是說，如果兩個級數至少有一個是絕對收斂，則這兩級數的乘積會收斂。

證明： 令

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

$$\beta_n = B_n - B.$$

則

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots\cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots\cdots \\ &\quad + a_n b_0) = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots\cdots + a_n B_0 \\ &= a_0(B+\beta_n) + a_1(B+\beta_{n-1}) + \cdots\cdots + a_n(B+\beta_0) \\ &= A_n B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots\cdots + a_n\beta_0. \end{aligned}$$

令

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \cdots\cdots + a_n\beta_0.$$

我們想要證明 $C_n \longrightarrow AB$. 因為 $A_n B \longrightarrow AB$，故證明

(21) $$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$$

就够了。令

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

〔就是在這裏，我們用了 (a)〕 令 $\epsilon > 0$ 已給，由 (c)，$\beta_n \longrightarrow 0$。因此，我們可選取$N$使得對 $n \geq N$, $|\beta_n| < \epsilon$ 此時

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \cdots\cdots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} \\ &\quad + \cdots\cdots + \beta_n a_0| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \cdots\cdots + \beta_N a_{n-N}| + \epsilon\,\alpha. \end{aligned}$$

保持N固定，令$n\longrightarrow\infty$，我們得到

$$\lim_{n\to\infty}\sup|\gamma_n|\leq\epsilon\,\alpha$$

蓋當$k\longrightarrow\infty$, $a_k\longrightarrow 0$。又因ϵ爲任意，故得出 (21)。

另一個可能會問的問題是，級數 $\sum c_n$ 若收斂，是否必得其和爲 AB. Abel 證明了答案是肯定的：

3.51　定理　　若級數 $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$ 收斂到 A, B, C, 且 $c_n=a_0b_n+\cdots\cdots+a_nb_0$，則$C=AB$.

在這裏並無任何有關絕對收斂的假設。而在定理 8.2 之後，我們會給一個簡單的證明（與冪級數的連續性有關）。

重組

3.52　定理　　令 $\{k_n\}$, $n=1,2,3,\cdots\cdots$，爲一序列，其中每個正整數恰出現一次（就是說，以定義 2.2 而言，$\{k_n\}$是由J到J的 1-1 函數）。令

$$a_n'=a_{k_n}(n=1,2,3\cdots\cdots)$$

我們便說 $\sum a_n'$ 是 $\sum a_n$ 的一個重組。

若$\{s_n\}$及$\{s_n'\}$是 $\sum a_n$ 及 $\sum a_n'$ 的部分和序列，一般來說，很容易看出這兩個序列包含了完全不同的數。我們因而引入了一個問題，就是要決定在何種情況下，一個收斂級數的所有重組都會收斂，且是否其和必都相同。

3.53　例子　　考慮收斂級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots \tag{22}$$

它的一個重組爲

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\cdots\cdots \tag{23}$$

其中兩個正項之後總是跟著一個負項。若 s 是 (22) 的和，則

$$s < 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

由於對 $k \geq 1$,

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}>0$$

我們看出 $s_3' < s_6' < s_9' < \cdots\cdots$, s_n' 爲 (23) 的 n 項部分和，故

$$\lim_{n\to\infty} \sup\ s_n' > s_3' = \frac{5}{6}$$

因此 (23) 當然不會收斂到 s 〔不過，我們留給讀者去證明 (23) 確實是收斂的〕。

這個例子例示了下面的定理，歸功於 Riemann。

3.54　定理　　令 $\sum a_n$ 爲實數級數，它收斂，但非絕對收斂，假設

$$-\infty \leq d \leq \beta \leq \infty$$

則存在重組 $\sum a_n'$，其和爲 s_n'，使得

$$\lim_{n\to\infty} \inf\ s_n' = d, \qquad \lim_{n\to\infty} \sup\ s_n' = \beta \tag{24}$$

證明：令

$$p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2}, \qquad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2} \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

則 $p_n-q_n=a_n$, $p_n+q_n=|a_n|$, $p_n \geq 0$, $q_n \geq 0$。級數 $\sum p_n$, $\sum q_n$ 必皆發散。

蓋若兩者皆收斂，則

$$\sum(p_n+q_n)=\sum|a_n|$$

就會收斂了，與假設相反。又因爲

$$\sum_{n=0}^{N} a_n=\sum_{n=0}^{N}(p_n-q_n)=\sum_{n=0}^{N} p_n-\sum_{n=0}^{N} q_n,$$

$\sum p_n$ 的發散性及 $\sum q_n$ 的收斂性（或反過來也是一樣）蘊涵了 $\sum a_n$ 發散，也與假設相反。

現在令 $P_1, P_2, P_3 \cdots\cdots$ 表示 $\sum a_n$ 非負項，按它們出現的次序排列，並令 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots\cdots$ 爲 $\sum a_n$ 諸負項的絕對值，也按它們適當的順序。

級數 $\sum P_n$ 及 $\sum Q_n$ 與 $\sum p_n$ 及 $\sum q_n$ 只差在含零的項，因而是發散。

我們要建構序列$\{m_n\}\{k_n\}$使得級數

(25) $$P_1+\cdots\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots\cdots-Q_{k_1}+P_{m_1+1}+\cdots\cdots+P_{m_2} \\ -Q_{k_1+1}-\cdots\cdots-Q_{k_2}+\cdots\cdots,$$

這顯然是 $\sum a_n$ 一個重組，滿足 (24)。

取實值序列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 使得 $\alpha_n \longrightarrow \alpha$，$\beta_n \longrightarrow \beta$，$\alpha_n < \beta_n$，$\beta_1 > 0$

令 m_1, k_1 爲使得

$$P_1+\cdots\cdots+P_{m_1} > \beta_1$$
$$P_1+\cdots\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots\cdots-Q_{k_1} < \alpha_1,$$

的最小整數；令 m_2, k_2 爲使得

$$P_1+\cdots\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots\cdots-Q_{k_1}+P_{m_1+1}+\cdots\cdots \\ +P_{m_2} > \beta_2$$
$$P_1+\cdots\cdots+P_{m_1}-Q_1-\cdots\cdots-Q_{k_1}+P_{m_1+1}+\cdots\cdots \\ +P_{m_2}-Q_{k_1+1}-\cdots\cdots-Q_{k_2} < \alpha_2,$$

的最小整數；並如此繼續下去。這是可能的，蓋 $\sum P_n$ 及 $\sum Q_n$ 發散

若 x_n, y_n 表示 (25) 的部分和其最末項爲 $P_{m_n}-Q_{k_n}$，則

$$|x_n-\beta_n| \leq P_{m_n}, \quad |y_n-\alpha_n| \leq Q_{k_n}$$

因爲當 $n \longrightarrow \infty$時，$P_n \longrightarrow 0$ 且 $Q_n \longrightarrow 0$，我們知道 $x_n \longrightarrow \beta$ 且 $y_n \longrightarrow \alpha$。

最後，很明顯沒有任何比 α 小或比 β 大的數可能是 (25) 的部分和的部份序列極限。

3.55 定理 若 $\sum a_n$ 是複數級數，它絕對收斂，則 $\sum a_n$

的每個重組都收斂，而且它們都收斂到同一和。

證明: 令 $\sum a_n'$ 爲一重組其部份和 s_n'。給定 $\epsilon > 0$，有整數N使得$m \geq n \geq N$蘊涵了

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \leq \epsilon . \tag{26}$$

現在選取 p，使得整數 $1, 2, \cdots\cdots, N$ 全部包含在 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_p$ 的集合中（我們用定義 3.52 中的符號）。則若 $n > p$, $a_1, \cdots\cdots a_N$ 這些數會在 $s_n - s_n'$ 的差中消掉，故由 (26) 知，$|s_n - s_n'| \leq \epsilon$。所以$\{s_n'\}$與$\{s_n\}$收斂到同一和。

習題

1. 試證$\{s_n\}$的收斂蘊涵了$\{|s_n|\}$的收斂，其逆爲眞乎?
2. 計算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$
3. 若$s_1=\sqrt{2}$且
$$s_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{s_n}} \qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$
試證$\{s_n\}$爲收斂，且對 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots, s_n < 2$
4. 試找出序列$\{s_n\}$的上下極限，其定義爲
$$s_1 = 0\,;\ s_{2m} = \frac{s_{2m-1}}{2}; \qquad s_{2m+1} = \frac{1}{2} + s_{2m}.$$
5. 對任意二實數序到$\{a_n\}$, $\{b_n\}$，我們有
$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$
6. 試研討Σa_n的動態（收斂或是發散），如果
   (a) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;
   (b) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$,
   (c) $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^n$
   (d) $a_n=\dfrac{1}{1+z^n}$　對 z 爲複値時。
7. 試證若 $a_n \geq 0$, Σa_n 的收斂會蘊涵

$$\sum\frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

收斂。

8. 若 $\sum a_n$ 收斂，且若$\{b_n\}$爲單調有界，則 $\sum a_nb_n$ 爲收斂。

9. 找出下列各冪級數之收斂半徑：

(a) $\sum n^3z^n$，　　(b) $\sum\frac{2^n}{n!}z^n$

(c) $\sum\frac{2^n}{n^2}z^n$，　　(d) $\sum\frac{n^3}{3^n}z^n$.

10. 假設冪級數 $\sum a_nz^n$ 的係數皆是整數，其中有無窮多不爲 0 。試證其收斂半徑至多爲 1 。

11. 假設 $\sum a_n$ 發散，$a_n>0$，且令 $s_n=a_1+\cdots\cdots+a_n$。試證以下：

(a) $\sum\frac{a_n}{1+a_n}$ 發散。

(b) 試證

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}}+\cdots\cdots+\frac{a_{N+k}}{s_{N+k}}\geq 1-\frac{s_N}{s_{N+k}}$$

並導證$\sum\frac{a_n}{s_n}$爲發散。

(c) 試證

$$\frac{a^n}{s_n^{\,2}}\leq\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}$$

並導證$\sum\frac{a_n}{s^2}$爲收斂。

(d) 我們對

$$\sum\frac{a_n}{1+na_n}\text{及}\sum\frac{a_n}{1+n^2a_n}$$

能說些什麼？

12. 假設 $a_n>0$ 且 $\sum a_n$ 收斂。令

$$r_n=\sum_{m=n}^{\infty}a_m$$

(a) 試證若$m<n$，則

$$\frac{a_m}{r_m}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{r_n}>1-\frac{r_n}{r_m}$$

並導證$\Sigma\frac{a_n}{r_n}$為發散

(b) 試證

$$\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}<2(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})$$

並導證$\Sigma\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$為收斂。

13. 試證兩個絕對收斂級數的 Cauchy 乘積為絕對收斂。

14. 若$\{S_n\}$是複數序列，定義其算術平均 σ_n 為

$$\sigma_n=\frac{s_0+s_1+\cdots\cdots+s_n}{n+1} \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

(a) 若 $\lim s_n=s$，試證 $\lim \sigma_n=s$

(b) 試建構一序列$\{s_n\}$，它不收斂，但 $\lim \sigma_n=0$

(c) 儘管 $\lim\sigma_n=0$， 有可能對所有 n, $s_n>0$ 而 $\lim\sup s_n=\infty$嗎?

(d) 令 $a_n=s_n-s_{n-1}$，當$n\geq 1$。試證

$$s_n-\sigma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}ka_k.$$

假設 $\lim(na_n)=0$ 且$\{\sigma_n\}$收斂，試證$\{s_n\}$收斂。〔這就給了 (a) 的逆敍述，但是是在 $na_n\longrightarrow 0$ 的額外假設之下的〕。

(e) 試由較弱的假設導出上面的結論: 假設$M<\infty$，且對所有n, $|na_n|\leq M$，而 $\lim\sigma_n=\sigma$，試完成以下要點以證明 $\lim s_n=\sigma$

若$m<n$，則

$$s_n-\sigma_n=\frac{m+1}{n-m}(\sigma_n-\sigma_m)+\frac{1}{n-m}\sum_{i=m+1}^{n}(s_n-s_i)$$

對這些 i

$$|s_n-s_i|\leq\frac{(n-i)M}{i+1}\leq\frac{(n-m-1)M}{m+2}$$

固定$\epsilon>0$並對每個n，給一個m，它滿足

$$m\leq\frac{n-\epsilon}{1+\epsilon}<m+1$$

則 $(m+1)/(n-m)<1/\epsilon$，而 $|s_n-s_i|<M\epsilon$，因此

$$\limsup|s_n-\sigma|\leq M\epsilon$$

由於 ϵ 是任意的，$\lim s_n=\sigma$

15. 定義 3.21 可以擴充到其中 a_k 在某個固定 R^k 中的情形，其絕對收斂定爲 $\Sigma|\mathbf{a}_n|$ 收斂，試證在這種更一般性的架構中，定理 3.22, 3.23, 3.25, 3.33, 3.34, 3.42, 3.45, 3.47, 3.56，及3.57皆眞。（在每個證明中，只須些許的修飾卽可）。

16. 固定一正數 α，選取 $x_1>\sqrt{\alpha}$，並由遞推公式（recurssion formula）

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\alpha}{x_n}\right)$$

定義 $x_2, x_3, x_4\cdots\cdots$

(a) 試證 $\{x_n\}$ 爲單調漸減，且 $\lim x_n=\sqrt{\alpha}$

(b) 令 $\epsilon_n=x_n-\sqrt{\alpha}$，試證

$$\epsilon_{n+1}=\frac{\epsilon_n{}^2}{2x_n}<\frac{\epsilon_n{}^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

因此，令 $\beta=2\sqrt{\alpha}$，則

$$\epsilon_{n+1}<\beta\left(\frac{\epsilon_1}{\beta}\right)^{2^n}\qquad (n=1,2,3\cdots\cdots)$$

(c) 這是計算平方根一個很好的算法，因爲遞推公式簡單而且收斂得極快。例如，若 $\alpha=3$，而 $x_1=2$，試證 $\epsilon_1/\beta<\frac{1}{10}$，而因此

$\epsilon_5<4\cdot10^{-16}, \epsilon_6<4\cdot10^{-32}$.

17. 固定 $\alpha>1$，取 $x_1>\sqrt{\alpha}$，並定義

$$x_{n+1}=\frac{\alpha+x_n}{1+x_n}=x_n+\frac{\alpha-x_n{}^2}{1+x_n}.$$

(a) 試證 $x_1>x_3>x_5>\cdots\cdots$

(b) 試證 $x_2<x_4<x_6<\cdots\cdots$

(c) 試證 $\lim x_n=\sqrt{\alpha}$.

(d) 將這方法與習題 16 中所描述的方法，比較其收斂的速度。

18. 將習題 16 中的遞推公式換爲

$$x_{n+1}=\frac{p-1}{p}x_n+\frac{\alpha}{p}x_n{}^{-p+1}$$

其中的 p 是個固定正整數，並描述所成序列的動態。

19. 若 α_n 為 0 或 2，對每個序列 $a=\{\alpha_n\}$，我們給一實數

$$x(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{3^n}$$

試證所有 $x(a)$ 所成的集合，正好是在 2.44 節中的 Cantor 集合。

20. 假設 $\{p_n\}$ 是在度量空間 X 中的 Cauchy 序列，而某個部份列 $\{p_{n_i}\}$ 收斂到一點 $p\in X$。試證整個序列 $\{p_n\}$ 也收斂到 p

21. 證明以下定理 3.10 (b) 的類題：若 $\{E_n\}$ 為一完備度量空間 X 中的有界閉集合序列，若 $E_n\supset E_{n+1}$，且若

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}E_n=0$$

則 $\bigcap_1^{\infty}E_n$ 恰包含一個點。

22. 假設 X 為一完備度量空間，且 $\{G_n\}$ 為 X 之稠密開集合序列。試證 Baire 定理，即，$\bigcap_1^{\infty}G_n$ 為非空。（事實上是在 X 中稠密）提示：找出一緊縮 (shrinking) 閉隣域序列 E_n，使得 $E_n\subset G_n$，並利用習題 21。

23. 假設 $\{p_n\}$ 及 $\{q_n\}$ 為度量空間 X 的 Cauchy 序列，試證 $\{d(p_n,q_n)\}$ 這序列收斂。 提示：對任意 m,n, $d(p_n,q_n)\leq d(p_n,p_m)+d(p_m,q_m)+d(q_m,q_n)$；於是，如果 m 及 n 很大的話，則

$$|d(p_n,q_n)-d(p_m,q_m)|$$

會很小。

24. 令 X 為一度量空間。

(a) 兩個 Cauchy 序列 $\{p_n\},\{q_n\}$，稱為等價 (equivalent)，如果

$$\lim_{n\to\infty}d(p_n,q_n)=0$$

試證這是一個等價關係。

(b) 令 X^* 為如此所得所有等價族的集合。若 $P\in X^*$, $Q\in X^*$, $\{p_n\}\in P$, $\{q_n\}\in Q$，定義

$$\triangle(P,Q)=\lim_{n\to\infty}d(p_n,q_n)$$

由習題 23 知，這極限存在，證明如果 $\{p_n\}$ 及 $\{q_n\}$ 換成等價序列，$\triangle(P,Q)$ 仍然不變，且因此 $\triangle$ 是 X^* 中的一個距離函數。

(c) 試證所造成的度量空間 X^* 爲完備的。

(d) 對每個 $p\in X$，有一 Cauchy 序列，它所有的項都是 p；令 P_p 表示 X^* 中包含這序列的一元素。試證對所有 $p,q\in X$

$$\triangle(P_p,P_q)=d(p,q)$$

換言之， φ 這個映射， 定義爲 $\varphi(p)=P_p$，是個由 X 映至 X^* 的等度量映射（isometry）（卽，一個保距映射。）

(e) 試證 $\varphi(X)$ 在 X^* 中稠密，且若 X 爲完備，$\varphi(X)=X^*$。

由（d)，我們可以將 X 與 $\varphi(X)$ 視爲同一， 並把 X 當做嵌入在完備度量空間 X^* 中。我們稱 X^* 爲 X 的完備化。

25. 令 X 爲度量空間，它的點是有理數，度量爲 $d(x,y)=|x-y|$。這空間的完備化爲何？（比較習題 24）

第四章

連續性

函數的概念及其相關術語，在定義 2.1 及 2.4 中介紹過了。儘管我們（在以後幾章中）主要關心的是實值或複值函數（即，其值爲實數或複數的函數），但我們也將討論向量值函數（即，其值在 R^k 中的函數）以及其值在任意度量空間的函數。我們在這一般性的建構中要討論的諸定理，並不會因爲如果我們限制在，例如，實值函數，而變得比較簡單，事實上，它反而使輪廓簡化及澄淸，並揚棄一些不必要的假設，而以一種適當的一般性的字句來陳述及證明這些定理。

我們函數的定義域也會是度量空間，而在各種情況中予以適當地特殊化。

函數的極限

4.1 定義 令 X 及 Y 爲度量空間；設 $E\subset X$，f 將 E 映至 Y，p 是 E 的一極限點，我們當 $x\longrightarrow p$ 時說 $f(x)\longrightarrow q$ 或

(1) $$\lim_{x\to p} f(x)=q$$

如果有一點 $q\in Y$，具有以下性質：對每個 $\epsilon>0$，存在一 $\delta>0$ 使得

(2) $$d_Y(f(x),q)<\epsilon$$

對所有 $x\in E$ 而

(3) $$0<d_X(x,p)<\delta.$$

符號 d_X 及 d_Y 分別指示在 X 與 Y 中的距離。

若 X 及/或 Y 以實數軸，複數平面，或某個歐氏空間 R^k 所取代，d_X, d_Y 這些距離，當然由絕對值，或某適當的範數（見定義 2.16）所取代。

應當留意的是，$p\in X$ 但 p 在上面的定義中不必要是 E 中的一個點，更有甚者，既使 $p\in E$，我們也很可以有 $f(p)\neq\lim\limits_{x\to p} f(x)$。

我們可以將這定義以序列的極限來重寫：

4.2 定理 令 X, Y, E, f, p 如定義 4.1 者。則

(4) $$\lim_{x\to p} f(x)=q$$

若且唯若對每個 E 中的序列 $\{p_n\}$，而

(5) $$p_n\neq p,\qquad \lim_{n\to\infty} p_n=p$$

而言，

(6) $$\lim_{n\to\infty} f(p_n)=q$$

證明：假設 (4) 成立，選取 E 中 $\{p_n\}$ 滿足 (5)，令 $\epsilon>0$ 已給。則存在一 $\delta>0$ 使得若 $x\in E$ 而 $0<d_X(x,p)<\delta$ 則 $d_Y(f(x),p)<\epsilon$。此外，存在 N 使得 $n>N$ 蘊涵了 $0<d_X(p_n,p)<\delta$。因此，對 $n>N$，我們有 $d_Y(f(p_n),q)<\epsilon$，這證明了 (6) 成立。

反之，假設 (4) 不眞，則存在一 $\epsilon>0$ 使得對每個 $\delta>0$ 必存在一點 $x\in E$（要看 δ 而定），使得 $d_Y(f(x),q)\geq\epsilon$ 而 d_X

$(x,p)<\delta$。取 $\delta_n=1/n(n=1,2,3,\cdots\cdots)$，我們因而得到 E 中一序列滿足 (5) 而 (6) 不眞。

系。若 f 在 p 點有極限，這極限是唯一的。

這可由定理 3.2 (b) 及 4.2 導得。

4.3 定義 假設我們有兩個複值函數，f 和 g，都定義在 E 上。所謂 $f+g$，我們指的是一函數，對每個 E 中的點 x，給它 $f(x)+g(x)$ 這個數。我們同樣定義二函數的差 $f-g$，乘積 fg，及商 f/g，而了解商只定義在那些 E 中的 x, $g(x)\neq 0$。若 f 對 E 中每個 x 都給它相同的值 c，則 f 叫做常數函數，簡稱常數，而我們寫作 $f=c$。若 f 和 g 是實值函數，且若對每個 $x\in E$, $f(x)\geq g(x)$，爲簡潔起見，我們有時會寫成 $f\geq g$。

同樣地，若 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 將 E 映至 R^k，我們定義 $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ 爲

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x),\ (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x);$$

且若 λ 爲一實數，$\lambda\mathbf{f}(x)=\lambda\mathbf{f}(x)$。

4.4 定理 假設 $E\subset X$，一個度量空間，p 是 E 的一極限點，f 和 g 是 E 上的複值函數，且

$$\lim_{x\to p} f(x)=A,\qquad \lim_{x\to p} g(x)=B$$

則

(a) $\lim\limits_{x\to p}(f+g)(x)=A+B$;

(b) $\lim\limits_{x\to p}(fg)(x)=AB$;

(c) $\lim\limits_{x\to p}(f/g)(x)=A/B,\quad B\neq 0$

證明：由定理 4.2 看來，這些論斷直接由序列的類似性質導得（定理 3.3）。

備註：若 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 將 E 映至 R^k，則 (a) 仍然爲眞，(b) 變爲

(b′) $\lim\limits_{x\to p}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

（比較定理 3.4）

連續函數

4.5　定義　假設X和Y是度量空間，$E\subset X$，$p\in E$，f將E映至Y。則f叫做在p連續，如果對每個$\epsilon>0$，存在一$\delta>0$使得對所有$x\in E$，$d_X(x,p)<\delta$

$$d_Y(f(x),f(p))<\epsilon$$

若f在E中每一點都連續，則f叫做在E上連續。

應該注意的是，爲了要在p連續，f必須在p點有定義（將此與定義 4.1 之後的備註比較之）。

若p是E的一孤立點，我們的定義蘊涵了任何以E爲定義域的函數f，在p點皆連續，蓋不論我們選什麼$\epsilon>0$，我們可取$\delta>0$使得唯一點$x\in E$而$d_X(x,p)<\delta$的是$x=p$；則

$$d_Y(f(x),f(p))=0<\epsilon$$

4.6　定理　在定義 4.5 所給的情況下，再假設p爲E的一極限點，則f在p點連續若且唯若$\lim\limits_{x\to p} f(x)=f(p)$.

證明：如果我們比較定義 4.1 及 4.5，這就很明顯。

我們現在轉向函數的合成。下面這定理簡單的說就是一連續函數的連續函數是連續的。

4.7　定理　假設X，Y，Z是度量空間，$E\subset X$，f將映E至Y，g將f的值域，$f(E)$，映至Z，而h是由E至Z的映射，定義爲

$$h(x)=g(f(x))\qquad (x\in E)$$

若f在一點$p\in E$連續，而g在$f(p)$點連續，則h在p連續。

證明：令$\epsilon>0$已給。因爲g在$f(p)$連續，故存在$\eta>0$使得

若$d_Y(y,f(p))<\eta$且$y\in f(E)$，則$d_Z(g(y),g(f(p)))<\epsilon$

又由於f在p連續，故存在$\delta>0$使得

若 $d_X(x, p) < \delta$ 且 $x \in E$，則 $d_Y(f(x), f(p)) < \eta$.
於是，若 $d_X(x, p) < \delta$ 而 $x \in E$，則

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \epsilon$$

因此，h 在 p 連續。

4.8 定理 一個由度量空間 X 到度量空間 Y 的映射 f 在 X 上連續，若且唯若對每個 Y 中的開集合 V，$f^{-1}(V)$ 在 X 中是開集。

（逆像定義在定義 2.2）這是對連續性非常有用的刻劃。

證明: 假設 f 在 X 上連續而 V 是 Y 中一開集合。我們必須證明每個 $f^{-1}(V)$ 的點是 $f^{-1}(V)$ 的一個內點。所以，假設 $p \in X$ 而 $f(p) \in V$。由於 V 是開集，故存在 $\epsilon > 0$ 使得若 $d_Y(f(p), y) < \epsilon$，則 $y \in V$，且由於 f 在 p 連續，故存在 $\delta > 0$ 使得若 $d_X(x, p) < \delta$，則 $d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$。故只要 $d_X(x, p) < \delta$，則 $x \in f^{-1}(V)$。

反之，設對每個 Y 中的開集合 V，$f^{-1}(V)$ 在 X 中爲開集。固定 $p \in X$ 且 $\epsilon > 0$，令 V 爲所有 $y \in Y$ 且 $d_Y(y, f(p)) < \epsilon$ 的集合。則 V 爲開集；故 $f^{-1}(V)$ 爲開集；因此存在 $\delta > 0$ 使得只要 $d_X(p, x) < \delta$ 則 $x \in f^{-1}(V)$。但如果 $x \in f^{-1}(V)$，則 $f(x) \in V$，故 $d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$.

這便完成了證明。

系。由度量空間 X 映至度量空間 Y 的映射 f 是連續，若且唯若對每個 Y 中的閉集合 C 而言，$f^{-1}(C)$ 在 X 中爲閉集。

這由定理導得，蓋集合爲閉集若且唯若其補集爲開集，而由於 $f^{-1}(E^c) = [f^{-1}(E)]^c$，對所有 $E \subset Y$。

我們現在轉向複值及向量值函數，以及定義在 R^k 子集合上的函數。

4.9 定理 令 f 和 g 爲度量空間 X 上的複值連續函數，則 $f+g$, fg，及 f/g 在 X 上皆連續。

在最後一種情形，我們當然必須假設對所有 $x \in X$, $g(x) \neq 0$。

證明: 在X的孤立點處，沒什麼可證。在極限點處，此敍述可由定理 4.4 及 4.6 可導得。

4.10 定理 (a) 令 $f_1, \cdots\cdots, f_k$ 爲在度量空間X上的實值函數，並令 $\mathbf{f}$ 爲由X映至 R^k 的映射，定義爲

(7) $$\mathbf{f}(x)=(f_1(x), \cdots\cdots, f_k(x)) \qquad (x \in X);$$

則 $\mathbf{f}$ 爲連續若且唯若每個函數 $f_1, \cdots\cdots, f_k$ 爲連續。

(b) 若 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 是由X映至 R^k 的連續映射，則 $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ 在X上連續。

函數$f_1, \cdots\cdots, f_k$ 稱爲 $\mathbf{f}$ 的分量。留意 $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ 是映至 R^k 的映射，而 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ 是X上的實值函數。

證明: (a) 部份由不等式，對 $j=1, \cdots\cdots, k$,

$$|f_j(x)-f_j(y)| \leq |\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}(y)| = \{\sum_{i=1}^{k} |f_i(x)-f_i(y)|^2\}^{1/2}$$

導得。(b) 部份則由 (a) 及定理 4.9 導得。

4.11 例子 若 $x_1, \cdots\cdots, x_k$ 是點 $\mathbf{x} \in R^k$ 的座標，而函數 ϕ_i 定義爲

(8) $$\phi_i(\mathbf{x})=x_i$$

在 R^k 上連續，因爲不等式

$$|\phi_i(\mathbf{x})-\phi_i(\mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

顯示在定義 4.5 中我們可取 $\delta=\epsilon$. ϕ_i 這些函數有時叫做座標函數 (Coordinate function)。

連續應用定理 4.9 則顯示每個單項式

(9) $$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots\cdots x_k^{n_k}$$

這裏的 $n_1, \cdots\cdots n_k$ 都是非負整數，都在 R^k 上連續。(9) 的常數

倍亦同樣爲眞，蓋常數顯然是連續。於是每個多項式P，定義爲

(10)　　$$P(\mathbf{x})=\sum c_{n_1\cdots n_k}x_1^{n_1}\cdots\cdots x_k^{n_k} \qquad (\mathbf{x}\in R^k)$$

在 R^k 上連續。這裏的係數 $c_{n_1\cdots n_k}$ 是複數，$n_1\cdots\cdots n_k$ 是非負整數，而 (10) 中的和是有限多項。

此外，每個 x_1，$\cdots\cdots x_k$ 的有理函數，就是，每兩個型如 (10) 的多項式的商，在 R^k 上是連續，只要分母不是零。

由三角不等式，我們很容易看出

(11)　　$$||\mathbf{x}|-|\mathbf{y}||\leq|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^k)$$

因此，$\mathbf{x}\longrightarrow|\mathbf{x}|$的映射在 R^k 上是個連續實值函數。

如果現在 $\mathbf{f}$ 是由度量空間X映至 R^k 的連續映射，且若 ϕ 在X上定義爲$\phi(p)=|\mathbf{f}(p)|$，則由定理 4.7 導得 ϕ 是X上的連續實值函數。

4.12 備註　我們曾對定義在度量空間X的子集合上的函數，定義了連續的觀念。然而，E在X中的補集在這定義裏不扮任何角色（留意對函數的極限，情況有些個不同）。因此，若拋棄f定義域的補集，對我們所關心的事物不會有任何損失。這意味着我們很可以只討論由一度量空間映至到另一個的連續映射，而不談子集合的映射。這便簡化了某些定理的敍述及證明。我們在定理 4.8 到定理 4.10 中早已利用這個（備註）了，而在有關緊緻性與連結性的章節中，還會繼續如此做。

連續性與緊緻性

4.13 定義　一由集合E映至 R^k 的映射 $\mathbf{f}$ 叫做有界，如果有一實數M使得對所有 $x\in E$, $|\mathbf{f}(x)|\leq M$。

4.14 定理　假設 f 是由一緊緻度量空間X映至度量空間Y的連續映射。則 $f(X)$ 是緊緻。

證明: 令 $\{V_\alpha\}$ 爲 $f(X)$ 的一開覆蓋。因爲f是連續，定理 4.8 顯示每個 $f^{-1}(V_\alpha)$ 的集合是開集。因爲X是緊緻，故

有有限多指標，說是 $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_n$ 吧，使得

(12) $$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots\cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n})$$

由於對每個 $E \subset Y$, $f(f^{-1}(E)) \subset E$, (12) 蘊涵了

(13) $$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \cdots\cdots \cup V_{\alpha_n}$$

這便完成了證明。

注意：我們用了 $f(f^{-1}(E)) \subset E$ 的關係，對 $E \subset Y$ 有效。若 $E \subset X$，我們只能斷言 $f^{-1}(f(E)) \supset E$；等式對兩者並不一定成立。

我們現在要推衍定理 4.14 的一些結論。

4.15　定理　若 $\mathbf{f}$ 是由緊緻度量空間 X 映至 R^k 的連續映射，則 $\mathbf{f}(X)$ 爲閉集且有界。故 $\mathbf{f}$ 是有界。

這由定理 2.41 導得。這個結果當 f 是實值時特別重要：

4.16　定理　假設 f 是在緊緻度量空間 X 上的連續實值函數，且

(14) $$M = \sup_{p \in X} f(p), \qquad m = \inf_{p \in X} f(p)$$

則存在點 $p, q \in X$ 使得 $f(p) = M$ 且 $f(q) = m$。

(14)式中的符號，意思是 M 爲所有 $f(p)$, p 在 X 中變化，這些數所成集合的最小上界，而 m 爲這個數集合的最大下界。

這個結論也可敍述如下：在 X 中存在點 p 及點 q 使得 $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$，對所有 $x \in X$；卽，f（在 p）達到它的極大值且（在 q）達到它的極小值。

證明：由定理 4.15 知，$f(X)$ 是實數的有界閉集合；因此由定理 2-28 知 $f(X)$ 包含

$$M = \sup f(X) \text{ 且 } m = \inf f(X)$$

4.17　定理　假設 f 是由緊緻度量空間 X 映成度量空間 Y 的連續 1-1 映射。則其定義在 Y 的逆映射 f^{-1}

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad (x \in X)$$

是個由 Y 映成 X 的連續映射。

證明: 將定理 4.8 用到 f^{-1} 以取代 f，我們知道，只要證明對每個X中開集合V，$f(V)$ 是Y中的開集合就够了。且固定這樣一個集合V。

V的補集 V^c 在X中爲閉集，故緊緻（定理 2.35）；因此 $f(V^c)$是Y中一緊緻子集合（定理 4.14）故在Y中爲閉集（定理 2.34）。由於f是一對一且映成，$f(V)$ 是 $f(V^c)$的補集。因此 $f(V)$ 爲開集。

4.18 定義 令f爲由度量空間 X 映至度量空間 Y 的映射。我們說f在X上爲均勻連續，如果對每個$\epsilon>0$存在$\delta>0$使得對所有X中的p及q而 $d_X(p,q)<\delta$，

(15) $$d_Y(f(p),f(q))<\epsilon。$$

且讓我們考慮連續及均勻連續兩觀念間的差異。首先，均勻連續是函數在一集合上的性質，而連續則可以定義在單一個點上。要問一函數在某個點是否是均勻連續是無意義的。其次，若f在X上爲連續，則對每個$\epsilon>0$及每個X中的點p，可能找到一個數$\delta>0$具有定義 4.5 所特定的性質。這個δ與ϵ及 p 有關。然而，若f在X上是均勻連續，則對每個$\epsilon>0$，可能找到一個數$\delta>0$，對所有X的p點都有效。

顯然，每個均勻連續函數是連續。在緊緻集合上，這兩個觀念是等價的，則由下一個定理可導得。

4.19 定理 令f爲由緊緻度量空間X映至度量空間Y的連續映射。則f在X上爲均勻連續。

證明: 令$\epsilon>0$已給。由於f爲連續，我們可以對每個點$p\in X$，給一個數 $\phi(p)$ 使得

(16) $$q\in X, d_X(p,q)<\phi(p) \text{ 蘊涵了 } d_Y(f(p),f(q))<\frac{\epsilon}{2}$$

令 $J(p)$ 爲所有 $p\in X$而

(17) $$d_X(p,q)<\frac{1}{2}\phi(p)$$

的集合。由於 $p\in J(p)$，所有集合 $J(p)$ 所成的族是X的一個開覆蓋；而因為X是緊緻，故在X中有有限個點 $p_1,\cdots\cdots,p_n$，使得

(18) $$X\subset J(p_1)\cup\cdots\cdots\cup J(p_n)$$

我們令

(19) $$\delta=\frac{1}{2}\min[\phi(p_1),\cdots\cdots,\phi(p_n)].$$

則 $\delta>0$（這就是覆蓋的有限性，由緊緻性的定義所承襲而來，重要的一點。一正數的有限集合其極小值為正，而正數的無窮集合其 inf 很可以是 0.）

現在令 q 及 p 為X的點，而 $d_X(p,q)<\delta$。由（18）知，有一整數 m, $1\leq m\leq n$，使得 $q\in J(p_m)$；因此

(20) $$d_X(p,p_m)<\frac{1}{2}\phi(p_m)$$

而我們也有

$$\begin{aligned}d_X(q,p_m)&\leq d_X(p,q)+d_X(p,p_m)<\delta+\frac{1}{2}\phi(q_m)\\&\leq\phi(p_m)\end{aligned}$$

最後，（16）因而顯示

$$\begin{aligned}d_Y(f(p),f(q))\leq d_Y(f(p),f(p_m))+d_Y(f(q),\\f(p_m))<\epsilon\end{aligned}$$

這便完成了證明。

另一個證明，會在習題 10 中描述。

我們現在要繼續證明，在定理 4.14, 4.15, 4.16 及 4.19 的假設中，緊緻性是很必要的。

4.20 定理 令E為 R^k 中一非緊緻集合，則

(a) 存在一個在E上連續的函數，它不是有界。

(b) 存在一個在E上連續且有界的函數，它無極大值。

此外，若E爲有界，則

(c) 存在一個在E上連續的函數，它不是均勻連續。

證明: 先假設E是有界，於是必存在E的一極限點 x_0 它不是E的一點。考慮

$$(21)\qquad f(x)=\frac{1}{x-x_0},\quad (x\in E)$$

這是E上的一連續函數（定理 4.9），但顯然無界。要證明 (21) 不是均勻連續，令$\epsilon>0$且$\delta>0$爲任意，並取一點$x\in E$使得$|x-x_0|<\delta$。又取t與x_0足够接近，儘管$|t-x_0|<\delta$，我們仍可以使$|f(t)-f(x)|$的差比ϵ大。而因爲這對所有$\delta>0$皆眞，f在E上不爲均勻連續。

定義爲

$$(22)\qquad g(x)=\frac{1}{1+(x-x_0)^2}\quad (x\in E)$$

的函數g在E上連續，且有界，蓋$0<g(x)<1$。很明顯

$$\sup_{x\in E} g(x)=1$$

但對所有$x\in E, g(x)<1$。故 $g(x)$ E在上無極大值。

當對有界集合E證完了這定理之後，我們現在假設E爲無界。則 $f(x)=x$ 確立了 (a)，而

$$(23)\qquad h(x)=\frac{x^2}{1+x^2}\quad (x\in E)$$

確立了 (b)，蓋

$$\sup_{x\in E} h(x)=1。$$

但對所有$x\in E, h(x)<1$。

若有界性在假設中除去，(c) 的斷言可能爲假。蓋，令E爲所有整數的集合，則每個定義在E上的函數都是均勻連續。要了

解這個，我們只須在定義 4.18 中取 $\delta<1$。

我們證明在定理 4.17 中，緊緻性也是必要的，以結束本節。

4.21 例子　令X爲實軸上半開區間 $[0,2\pi)$，並令 $\mathbf{f}$ 爲由X映成圓Y的一映射，圓Y包含所有與原點距離爲 1 的點，定義爲

(24)　　$\mathbf{f}(t)=(\cos t, \sin t)\quad (0\leq t<2\pi)$

三角函數正弦，餘弦的連續性及其週期性質，將在第 8 章中確立，假定有這結果，則很容易看出 $\mathbf{f}$ 是由X映成Y的連續 1-1 映射。

然而，其逆映射（它存在的，因爲 $\mathbf{f}$ 是一對一且映成）在點 $(1,0)=\mathbf{f}(0)$ 卻不爲連續。當然，本例中X不是緊緻的。（有趣的是，留意儘管Y確是緊緻，但 $\mathbf{f}^{-1}$ 不爲連續！）

連續性與連結性

4.22 定理　若f是由連結度量空間X映至度量空間Y的連續映射，則 $\mathbf{f}(X)$ 爲連結。

證明：假設相反地，$f(E)=A\cup B$，其中的A和B都是Y的非空分離子集合，令 $G=E\cap f^{-1}(A), H=E\cap f^{-1}(B)$

則$E=G\cup H$，而G及H兩者皆非空。

由於$A\subset\bar{A}$（A的閉包），我們有（$G\subset f^{-1}(\bar{A})$; $f^{-1}(\bar{A})$ 是個閉集合，因爲f是連續；所以$\bar{G}\subset f^{-1}(\bar{A})$。於是$f(\bar{G})\subset\bar{A}$。由於$f(H)=B$且$\bar{A}\cap B$爲空集，我們歸結得$\bar{G}\cap H$是空集。

同樣的論證顯示$G\cap\bar{H}$是空集，故G與H分離，但是若E是連結，這是不可能的。

4.23 定理　令f在區間 $[a,b]$ 上爲連續實值函數。若 $f(a)<f(b)$ 且若 c 爲使得 $f(a)<c<f(b)$ 的一數，則必存在一點 $x\in[a,b]$，使得 $f(x)=c$。

當然，若 $f(a)>f(b)$，類似結果也成立。粗略而言，這定理是說一連續實值函數取定 (assume) 一區間上所有的中間值。

證明： 由定理 2.47 知，$[a,b]$ 爲連結；故定理 4.22 顯示 $f([a,b]$ 是 R^1 的一連結子集，如果我們再用一次定理 2.47 就導得這結論。

4.24 備註 初視之下，可能覺得定理 4.23 有逆定理。就是，我們可能想到若對任意兩點 $x_1<x_2$ 及任意數 c 在 $f(x_1)$ 及 $f(x_2)$ 之間，有一點 x 在 (x_1,x_2) 之間使得 $f(x)=c$，則 f 必爲連續。

這不是這樣的，可由例 4.27(d) 歸結得到。

不連續點

若 x 是函數 f 定義域中之一點，f 於此不爲連續，我們便說 f 在 x 是不連續 (discontinuous)，或 f 在 x 有一不連續點。若 f 是定義在一區間或一線段上，通常將不連續點分成兩類。在分類之前，我們必須定義 f 在 x 的右邊及左邊極限，而我們把它們分別記作 $f(x+)$ 及 $f(x-)$。

4.25 定義。 令 f 定義在 (a,b) 上，考慮任意點 x，$a\leq x<b$，若對所有在 (x,b) 中的序列 $\{t_n\}$，$\longrightarrow x$，而當 $n\longrightarrow\infty$ 時 $f(t_n)\longrightarrow q$，則我們寫做

$$f(x+)=q.$$

對 $a<x\leq b$，要得到 $f(x-)$ 的定義，我們則限制自己在 (a,x) 中的序列 $\{t_n\}$ 上。

顯然，在 (a,b) 的任意點 x，$\lim\limits_{t\to x} f(t)$ 存在，若且唯若

$$f(x+)=f(x-)=\lim_{t\to x} f(t)$$

4.26 定義 令 f 定義在 (a,b) 上。若 f 在一點 x 不連續，且若 $f(x+)$ 及 $f(x-)$ 存在，則 f 叫做在 x 具有一個第

一類不連續點，或一個單不連續點 (simple discontinuity)。否則這不連續點叫做第二類的。

一個函數要有個單不連續點有兩種方式：要不 $f(x+)\neq f(x-)$〔這種情形下，$f(x)$ 的值是無關緊要的〕，要不就是 $f(x+)=f(x-)\neq f(x)$

4.27 例子 (a) 定義

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 有理數})，\\ 0 & (x\text{ 無理數})。\end{cases}$$

則 f 在每一點 x 都有一第二類不連續點，因為 $f(x+)$ 及 $f(x-)$ 都不存在。

(b) 定義

$$f(x)=\begin{cases}x & (x\text{ 有理數})，\\ 0 & (x\text{ 無理數})。\end{cases}$$

則 f 在 $x=0$ 處連續，而在所有其它點都有第二類不連續點。

(c) 定義

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (-3<x<-2),\\ -x-2 & (-2\leq x<0),\\ x+2 & (0\leq x<1)\end{cases}$$

則 f 在 $x=0$ 處有單不連續點，在 $(-3,1)$ 中所有其它點都是連續。

(d) 定義

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

因為 $f(0+)$ 及 $f(0-)$ 兩者都不存在，f 在 $x=0$ 處有第二類不連續者。我們尚未證明 $\sin x$ 是個連續函數，如果我們暫時假設這個結果，則定理 4.7 蘊涵了 f 在所有點 $x\neq 0$ 處都是

連續的。

單調函數

我們現在要研究那些在一所予線段上永不減少（或永不增加）的函數。

4.28 定義 令 f 在 (a,b) 上爲實值。如果 $a<x<y<b$ 蘊涵了 $f(x)\le f(y)$，則 f 在 (a,b) 上叫做單調漸增。若上面最後一個不等式反過來，我們便得到一個單調漸減函數的定義。單調函數類包含了漸增及漸減函數兩者。

4.29 定理 令 f 在 (a, b) 上爲單調漸增。則在 (a,b) 中每一點 x，$f(x+)$ 及 $f(x-)$ 都存在。更嚴格點說，

$$\sup_{a<t<x} f(t)=f(x-)\le f(x)\le f(x+)=\inf_{x<t<b} f(t) \tag{25}$$

此外，若 $a<x<y<b$，則

$$f(x+)\le f(y-) \tag{26}$$

顯然，對單調漸減函數類似的定理也成立。

證明: 由假設，當 $a<t<x$, $f(t)$ 這些數的集合被 $f(x)$ 在上所界，因此有一最小上界，我們把它記做 A。顯然 $A\le f(x)$。我們必須證明 $A=f(x-)$

令 $\epsilon>0$ 已給。於是由 A 是最小上界的定義，存在 $\delta>0$ 使得 $a<x-\delta<x$，而

$$A-\epsilon<f(x-\delta)\le A. \tag{27}$$

由於 f 爲單調，我們有

$$f(x-\delta)\le f(t)\le A \qquad (x-\delta<t<x). \tag{28}$$

(27) 及 (28) 式一起，我們看出

$$|f(t)-A|<\epsilon \qquad (x-\delta<t<x)$$

故 $f(x-)=A$

(25) 式的第二部分可以完全相同的方法證得，

其次，若 $a<x<y<b$，我們由 (25) 知道

$$f(x+)=\inf_{x<t<b} f(t)=\inf_{x<t<y} f(t) \tag{29}$$

這最後的等號是我們將 (25) 式用到 (a, y) 以取代 (a,b) 而得到的。同樣，

$$f(y-)=\sup_{a<t<y} f(t)=\sup_{x<t<y} f(t) \tag{30}$$

比較 (29) 及 (30) 便得到 (26)

系，單調函數沒有第二類不連續點。

這個系蘊涵了每個單調函數最多在可數的點集合上是不連續的。不必訴諸一般性的定理，其證明描述在習題 17 中，我們這裏給一個簡單的證明，對單調函數是適用的。

4.30　定理　令 f 在 (a,b) 上爲單調。則 f 在 (a,b) 中不連續的點所成的集合最多是可數。

證明: 爲了確定起見，假設 f 是漸增，並令 E 爲所有 f 不連續的點所成的集合。

對每個 E 的點 x，我們給一個有理數 $r(x)$ 使得

$$f(x-)<r(x)<f(x+)$$

因爲 $x_1<x_2$ 蘊涵了 $f(x_1+)\leq f(x_2-)$，我們知道若 $x_1\neq x_2$ 則 $r(x_1)\neq r(x_2)$

我們已建立了集合 E 與有理數的某子集合間的 1-1 對應。而後者，我們已知，是可數的。

4.31　備註　應該注意的是，一個單調函數的不連續點不必是孤立的。事實上，給定任意 (a,b) 的可數子集 E，它甚至可以是稠密的，我們可建構一函數 f，在 (a,b) 中單調，在 E 的每一點都不連續，而在 (a,b) 其它點則否。

要證明這個，令 E 的點排列成一序列 $\{x_n\}$, $n=1,2,3\cdots\cdots$，令 $\{c_n\}$ 爲一正整數序列，而 $\sum c_n$ 收斂。定義

$$(31)\qquad f(x)=\sum_{x_n<x} c_n \qquad (a<x<b)$$

這個和應作如下了解：對所有 $x_n<x$ 的指標 n 作和。若沒有點 x_n 在 x 左邊，這個和是空的 (empty)；而隨著一般習慣，我們定義它爲零。因爲 (31) 是絕對收斂，其諸項的排列次序是無關緊要的。

我們將以下 f 的性質的證明留給讀者：

(a) f 在 (a,b) 上是單調漸增；

(b) f 在 E 上每一點都不連續；事實上，

$$f(x_n+)-f(x_n-)=c_n.$$

(c) f 在 (a,b) 所有其它點都連續。

更有甚者，不難看出在 (a,b) 所有點，$f(x-)=f(x)$ 若一函數滿足這條件，我們說 f 由左邊連續。如果 (31) 中的作和是取所有 $x_n\leq x$ 的指標 n，則在 (a,b) 的每個點，我們會有 $f(x+)=f(x)$，即，f 會由右邊連續。

這一類的函數也可由另一種方法來定義；要找個例子，我們參考定理 6.16。

無窮極限及在無窮遠的極限

爲了使我們在擴充的實數系中運算，我們現在要將定義 4.1 的範圍擴大，以隣域來重新建構它。

對任意實數 x，我們早已定義了 x 的隣域爲任意線段 $(x-\delta, x+\delta)$。

4.32 定義 對任意實數 c，所有使得 $x>c$ 的實數 x 的集合叫做 $+\infty$ 的一個隣域並記成 $(c,+\infty)$。同樣，$(-\infty,c)$ 是 $-\infty$ 的一隣域。

4.33 定義 令 f 在 E 上定義，我們說

$$f(t)\longrightarrow A \quad \text{當 } t\longrightarrow x,$$

這裏的A及x都在擴充的實數系中，如果對每個A的隣域U，有一個x的隣域V使得$V\cap E$爲非空，且對所有$t\in V\cap E, t\neq x$, $f(t)\in U$。

略微考慮就會知道當A及x爲實數時，這與定義 4.1 是相合的。

定理 4.4 的類似命題仍然爲眞，證明也沒什麼新的，爲了完整起見，我們敍述它。

4.34 定理 令f和g在E上定義。假設

$$f(t)\longrightarrow A,\quad g(t)\longrightarrow B \quad \text{當 } t\longrightarrow x$$

則

(a) $f(t)\longrightarrow A'$ 蘊涵了 $A'=A$,

(b) $(f+g)(t)\longrightarrow A+B$,

(c) $(fg)(t)\longrightarrow AB$,

(d) $(f/g)(t)\longrightarrow A/B$,

只要 (b), (c), (d) 的右邊都有定義。

留意$\infty-\infty, 0\cdot\infty, \infty/\infty, A/0$ 都無定義（見定義 1.23）。

習題

1. 假設f是定義在 R^1 上的實值函數，滿足對每個$x\in R^1$

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x-h)]=0$$

這蘊涵了f是連續嗎?

2. 若f是由度量空間X映至度量空間Y的連續映射，試證

$$f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$$

對每個集合$E\subset X$。（$\overline{E}$表示 E 的閉包），舉例證明 $f(\overline{E})$ 可以是 $\overline{f(E)}$ 的眞子集。

3. 若f是度量空間X上的連續實值函數。令 $Z(f)$（f的零集合）爲所有$p\in X$而在該點 $f(p)=0$ 的集合，試證 $Z(f)$ 是閉集。

4. 令f和g是由度量空間X映至度量空間Y的連續映射，並令E爲X的一

個稠密子集合。試證$f(E)$稠密於 $f(X)$。若對所有$p\in E, g(p)=f(p)$，試證對所有$p\in X, g(p)=f(p)$。（換言之，一連續映射是由在其定義域中一稠密子集合上的值所決定。）

5. 若f是定義在閉集合$E\subset R^1$上的實值連續函數。試證在R^1上存在一實值連續函數g，使得對所有$x\in E, g(x)=f(x)$。(這樣的函數g叫做f由E到R^1的連續擴張）。試證若「閉集」這字省略，結果變得不眞。將這結果擴充到向量值函數去。 提示：令g的圖形在組成E的補集中的每個線段上是直線（與第 2 章，習題 15 比較）。若R^1被任何度量空間所取代，結果仍眞，但證明便不是如此簡單了。

6. 若f定義在E上，f的圖形是點$(x, f(x))$的集合，對所有$x\in E$。特別是，若E是實數集合，且f是實值的，則f的圖形是平面的子集合。

   假設E是緊緻，試證f在E上是連續，若且唯若它的圖形是緊緻。

7. 若$E\subset X$且若f是定義在X上的函數，f在E上的局限 (restriction)是函數g，其定義域是E，而對$p\in E, g(p)=f(p)$，在R^2上定義f和g爲：$f(0,0)=g(0,0)=0$ 若$(x,y)\neq(0,0), f(x,y)=xy^2/(x^2+y^4), g(x,y)=xy^2/(x^2+y^6)$ 試證f在R^2上有界，而g在每個$(0,0)$的隣域都無界，且f在$(0,0)$不爲連續；然而，f和g兩者在R^2中每一直線上的局限是連續!

8. 令f爲在R^1的有界集合E上的均匀連續函數。試證f在E上爲有界。試證若E的有界性在假設中去掉，結論爲假。

9. 試證在均匀連續定義中的條件可以重述如下，以集合的的直徑來講：對每個$\epsilon>0$存在一$\delta>0$使得對所有$E\subset X, \mathrm{diam}\,E<\delta$ 則 $\mathrm{diam}\,f(E)<\epsilon$。

10. 試完成下面對定理 4.19 另一種證明的細節：若f不是均匀連續，則對某個$\epsilon>0$，在X中有序列$\{p_n\},\{q_n\}$使得$d_X(p_n,q_n)\longrightarrow 0$ 但$d_Y(f(p_n), f(q_n))>\epsilon$。利用定理 2.37 以得出矛盾。

11. 假設f是由度量空間X映至度量空間Y的均匀連續映射，試證對每個X中的 Cauchy 序列$\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$是Y中的 Cauchy 序列。並利用這結果對習題 13 中所述之定理，給另外一種證明方法。

12. 均匀連續函數的均匀連續函數，是均匀連續。

將之做更嚴密的敍述，並證明之。

13. 令E爲度量空間X的稠密子集，而 f 是定義在 E 上的均勻連續實值函數。試證f有一由E到X的連續擴張（見習題5的術語）。（唯一性由習題4導得） 提示：對每個$p\in X$及每個正整數n，令 $V_n(p)$ 爲所有$q\in E$而 $d(p,q)<1/n$ 的集合。利用習題 16 證明集合 $f(V_1(p))$，$f(V_2(p))$……其閉包的交集包含 R^1 單一個點，令爲 $g(p)$。證明這樣定義在X上的函數g就是所要的f的擴張。

值域 R^1 可以用 R^k 取代嗎？任意緊緻度量空間呢？任意完備空間呢？任意度量空間呢？

14. 令$I=[0,1]$爲單位閉區間。假設f是由I映至I的連續映射。試證最少對一個$x\in I$，$f(x)=x$。

15. 稱一個由X映至Y的映射爲開的（open）如果只要V是X中的開集合，$f(V)$ 就是Y中的開集合。

試證每個由 R^1 映至 R^1 的連續開映射必是單調的。

16. 令 $[x]$ 表示包含在x中的最大整數，即 $[x]$ 爲使得$x-1<[x]\leq x$的整數；並令 $(x)=x-[x]$ 表示x的分數部分，函數 $[x]$ 及 (x) 有那些不連續點?

17. 令f爲定義在 (a,b) 上的實值函數。試證f具單不連續點的集合最多是可數。 提示：令E爲在其上 $f(x-)<f(x+)$ 的集合。對每個E的點x，給一個三重有理數 (p,q,r)，使得

(a) $f(x-)<p<f(x+)$，

(b) $a<q<t<x$ 蘊涵了 $f(t)<p$，

(c) $x<t<r<b$ 蘊涵了 $f(t)>p$。

所有這三重數的集合是可數。試證每一個三重數與E中最多一點有關。同樣處理單不連續點的另一種可能型式。

18. 每個有理數都可寫成$x=m/n$的型式，其中$n>0$，而m和n是沒有公因數的整數。當$x=0$，我們取$n=1$。考慮定義在 R^1 的函數f

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\text{ 無理數})，\\ \dfrac{1}{n} & \left(x=\dfrac{m}{n}\right)\end{cases}$$

試證f在每一無理點皆連續，而f在每個有理點處皆有單不連續點。

19. 假設f是實値函數，定義域爲 R^1，它具有中間值性質:
若 $f(a)< c <f(b)$，則對某個 a 和 b 之間的 x，$f(x)=c$。

此外假設，對每個有理數 r，使得 $f(x)=r$ 的所有 x 的集合是個閉集合。

試證 f 是連續。

提示：若 $x_n \longrightarrow x_0$，但對某個 r 及所有 n，$f(x_n)> r >f(x_0)$ 則對某個在 x_0 及 x_n 間的 $t_n, f(t_n)=r$；故 $t_n \longrightarrow x_0$ 試尋出矛盾 (N. J. Fine, Amer. Math. Monthly, vol. 73, 1966, p.7 82.)

20. 若E是度量空間X的非空子集，定義由 $x\in X$ 到 E 的距離爲

$$\rho_E(x)=\inf_{z\in E} d(x,z)$$

(a) 試證 $\rho_E(x)=0$ 若且唯若 $x\in\overline{E}$

(b) 試證 ρ_E 是X上的均勻連續函數，即證對所有 $x\in X, y\in X$。

$$|\rho_E(x)-\rho_E(y)|\leq d(x,y)$$

提示：$\rho_E(x_2)\leq d(x_2,z)\leq d(x_2,y)+d(y,z)$ 所以

$$\rho_E(x)\leq d(x,y)+\rho_E(y)。$$

21. 假設K及F是度量空間X中的互斥集合，K是緊緻，F是閉集。試證若 $p\in K$, $q\in F$，則存在 $\delta>0$ 使得 $d(p,q)>\delta$。 提示：ρ_F 是在K上的連續正函數。

試證對兩個互斥閉集合而無一爲緊緻者，這結論可能不成立。

22. 令A及B爲度量空間X中的互斥非空閉集合，並定義

$$f(p)=\frac{\rho_A(p)}{\rho_A(p)+\rho_B(p)} \qquad (p\in X)$$

試 f 證X是上的連續函數，其值域在 $[0,1]$ 中，而恰在A上 $f(p)=0$ 且恰在B上 $f(p)=1$，這便建立了習題 3 的逆敍述：每個閉集合 $A\subset X$ 是某個X上的連續實值函數 f 的 $Z(f)$，取

$$V=f^{-1}([0,\ \tfrac{1}{2})), \qquad W=f^{-1}((\tfrac{1}{2},1])$$

試證V及W爲開集且互斥，而且 $A\subset V, B\subset W$。（因此在度量空間中一組互斥閉集合可以被一組互斥開集合所覆蓋，這個度量空間的性質叫做正規性 (normality))。

23. 一個定義在 (a, b) 的實值函數 f 叫做凸的 (convex)，如果只要 $a<x$

$< b$，$a < y < b$，$0 < \lambda < 1$，則

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

試證每個凸函數都是連續的。並證明每個凸函數的漸增凸函數是凸的，（例如若f是凸的，則 e^f 也是。）

若f在 (a,b) 中是凸的，且若$a < s < t < u < b$。試證

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\leq\frac{f(u)-f(s)}{u-s}\leq\frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

24. 假設f是定義在 (a,b) 中的連續實值函數，而對所有$x,y\in(a,b)$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

試證f是凸的。

25. 若 $A\subset R^k$ 且$B\subset R^k$，定義$A+B$為所有$\mathbf{x}\in A,\mathbf{y}\in B$的 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ 之和所成的集合。

(a) 若在 R^k 中K是緊緻，而C是閉集合，試證$K+C$是閉集。

提示：取 $\mathbf{z}\notin K+C$，令$F=\mathbf{z}-C$，即所有 $\mathbf{y}\in C$的 $\mathbf{z}-\mathbf{y}$ 所成之集合。則K和F是互斥。如習題 21 中取 δ。試證以 $\mathbf{z}$ 為中心，半徑為 δ 的開球，不與$K+C$相交。

(b) 令α為無理實數，C_1 為所有整數的集合，C_2 為所有 $n\alpha$ 的集合，$n\in C_1$ 試證 C_1 及 C_2 都是 R^1 的閉子集，而其和 C_1+C_2 卻不是閉集，這可由證明 C_1+C_2 是 R^1 的可數稠密子集來證。

26 假設X,Y,Z皆是度量空間，Y是緊緻。令f將X映至Y，g是由Y映至Z的連續 1 對 1 映射，並取 $h(x)=g(f(x))$ 對所有$x\in X$。

試證若h是均勻連續，則f是均勻連續。

提示：g^{-1} 有緊緻定義域 $g(Y)$，而 $f(x)=g^{-1}(h(x))$。

試證若h是連續，則f是連續。

（將例 4.21 修改一下，或另尋他例）證明Y的緊緻性不能由假設中去掉，既使X和Z是緊緻。

第五章

微分學

本章中，我們將（除了在最後一節外）集中注意力於定義在區間或線段上的實值函數。這不只是簡便的問題，而是因爲當我們由實值函數轉爲向量值函數時，會有根本的差異。定義在 R^k 上函數的微分學，將在第 9 章討論。

實質函數的導數

5.1 定義 令 f 爲（實值且）定義在 $[a,b]$ 上。對任意 $x\in[a,b]$，做商

$$(1)\qquad \phi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\qquad (a<t<b,\ t\neq x),$$

並定義

$$(2)\qquad f'(x)=\lim_{t\to x}\phi(t),$$

如果按定義 4.1 而言這極限存在的話。

因此我們給函數 f 一個函數 f'，而它的定義域是，所有在該點極限 (2) 存在的點 x 所成的集合；f' 叫做 f 的導數。(derivative).

如果 f' 定義在點 x，我們說 f 在 x 可微 (differentiable)。如果 f' 在集合 $E\subset[a,b]$ 中每個點有定義，我們說 f 在 E 上可微。

在 (2) 中，考慮右方及左方極限是可能的；這導致了右方及左方導數的定義。特別是在端點，a 及 b 導數如果存在，則分別是右方及左方導數，不過我們將不再細談單邊導數。

如果 f 定義在線段 $[a,b]$ 上，且若 $a<x<b$，則 $f'(x)$ 由 (1) 及 (2) 定義如上，但在這情形下，$f'(a)$ 及 $f'(b)$ 都沒有定義。

5.2 定理　令 f 在 $[a,b]$ 上定義。如果 f 在一點 $x\in[a,b]$ 處可微，則 f 在 x 爲連續。

證明: 當 $t\longrightarrow x$，我們有，由定理 4.4,

$$f(t)-f(x)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\cdot(t-x)\longrightarrow f'(x)\cdot 0=0$$

這定理的逆敍述不眞，我們很容易建構一個連續函數它在孤立點上不能微分。在第 7 章中我們更會知道有一個函數在整條線上都連續，但在任何點上都不可微！

5.3 定理　設若 f 及 g 定義在 $[a,b]$ 上，並在一點 $x\in[a,b]$ 可微。則 $f+g, fg$，及 f/g 在 x 爲可微，且

(a) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$;

(b) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

在 (c) 中，我們當然假設 $g(x)\neq 0$

證明: (*a*) 很明顯，由定理 4.4 令 $h=fg$. 則

$$h(t)-h(x)=f(t)[g(t)-g(x)]+g(x)[f(t)-f(x)]$$

如果我們把這個除以 $t-x$ 並注意當 $t\longrightarrow x, f(t)\longrightarrow f(x)$。

（由定理 5.2），導得 (b)。其次，令 $h=f/g$ 則

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=\frac{1}{g(t)g(x)}\left[g(x)\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f(x)\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right]$$

讓 $t\longrightarrow x$，並應用定理 4.4 及 5.2，我們得到 (c)。

5.4 例子 任意常數的導數明顯地是零。如果 f 是由 $f(x)=x$ 所定義，則 $f'(x)=1$ 重複應用 (b) 及 (c) 顯示 x^n 爲可微，且其導數爲 nx^{n-1}，對任意整數 n（如 $n<0$，我們必須限制自己在 $x\neq 0$）。因此每個多項式皆可微，有理函數亦然，除了在那些分母爲零的點之外。

下一個定理通常名爲微分學中的『連鎖定理』(chain rule)。它是處理合成函數的，且可能是有關導數的最重要的定理。在第 9 章中，我們會遇到它的一般型式。

5.5 定理 設若 f 在 $[a,b]$ 連續，$f'(x)$ 在某個點 $x\in[a,b]$ 存在，g 定義在一個區間 I 上，它包含了 f 的値域，且 g 在點 $f(x)$ 處可微。如果，

$$h(t)=g(f(t))\qquad(a\leq t\leq b)$$

則 h 在 x 處可微，且

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)\tag{3}$$

證明：令 $y=f(x)$，由導數的定義，我們有

$$f(t)-f(x)=(t-x)[f'(x)+u(t)]\tag{4}$$

$$g(s)-g(y)=(s-y)[g'(x)+v(s)]\tag{5}$$

這裏的 $t\in[a,b]$，$s\in I$，且當 $t\longrightarrow x, u(t)\longrightarrow 0$，當 $s\longrightarrow y$，$v(s)\longrightarrow 0$。令 $s=f(t)$，先用 (5) 再用 (4)，我們得到

$$\begin{aligned}h(t)-h(x)&=g(f(t))-g(f(x))\\&=[f(t)-f(x)]\cdot[g'(y)+v(s)]\end{aligned}$$

$$=(t-x)\cdot[f'(x)+u(t)]\cdot[g'(y)+v(s)],$$

或者，如 $t\neq x$

$$\frac{h(t)-h(x)}{t-x}=[g'(y)+v(s)]\cdot[f'(x)+u(t)]. \tag{6}$$

令 $t\longrightarrow x$，我們看出 $s\longrightarrow y$，由 f 的連續性，因此 (6) 式右邊趨近到 $g'(y)f'(x)$，這給出了 (3)。

5.6 例子 (a) 令 f 定義爲

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0) \end{cases} \tag{7}$$

將 $\sin x$ 的導數爲 $\cos x$ 視爲眞，（我們將於第 8 章中討論三角函數），只要 $x\neq 0$，則我們可利用定理 5.3 及 5.5 得到

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \tag{8}$$

在 $x=0$，這些定理不再可用，因爲 $1/x$ 在那點未定義，而我們直接訴諸定義：對 $t\neq 0$

$$\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\sin\frac{1}{t}$$

在 $t\longrightarrow 0$，這並不趨近任何極限，因此 $f'(0)$ 並不存在。

(b) 令 f 定義爲

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases} \tag{9}$$

同上，我們得到

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0) \tag{10}$$

在 $x=0$，我們訴諸定義，得到

$$\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right|=\left|t\sin\frac{1}{t}\right|\leq|t| \qquad (t\neq 0);$$

令 $t \longrightarrow 0$，我們看出

(11) $$f'(0)=0$$

因此 f 在所有點 x 皆可微，但 f' 不是個連續函數，因爲 (10) 中的 $\cos(1/x)$ 在 $x\longrightarrow 0$ 時並不趨於一個極限。

均值定理

5.7 定義 令 f 爲定義在一度量空間 X 上的實值函數。我們說 f 在一點 $P\in X$ 有局部極大值 (local maximum)，如果存在 $\delta>0$，對所有 $q\in X, d(p,q)<\delta$，則 $f(q)\leq f(p)$。

局部極小值也可同樣地定義。

我們的下一個定理是微分學許多應用上的基礎。

5.8 定理 令 f 定義在 $[a,b]$ 上；若 f 在一點 $x\in(a,b)$ 有一局部極大值，且 $f'(x)$ 存在，則 $f'(x)=0$。

對局部極小值的類似敍述當然也眞。

證明：按照定義 5.7 選取 δ，使得

$$a<x-\delta<x<x+\delta<b$$

若 $x-\delta<t<x$，則

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\geq 0$$

令 $t\longrightarrow x$，我們看出 $f'(x)\geq 0$

若 $x<t<x+\delta$，則

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\leq 0$$

這顯示 $f'(x)\leq 0$。因此 $f'(x)=0$

5.9 定理 若 f 和 g 爲定義在 $[a,b]$ 上的連續實值函數，在 (a,b) 中皆可微，則有一個點 $x\in(a,b)$，使得

$$[f(b)-f(a)]g'(x)=[g(b)-g(a)]f'(x)$$

注意在端點處的可微性並不需要。

證明：令

$$h(t)=[f(b)-f(a)]g(t)-[g(b)-g(a)]f(t) \qquad (a\leq t\leq b)$$

則 h 在 $[a,b]$ 上連續，h 在 (a,b) 中可微，且

(12) $$h(a)=f(b)g(a)-f(a)g(b)=h(b)$$

要證明這定理，我們必須證明對某個 $x\in(a,b),h'(x)=0$

若 h 爲一常數，這對所有 $x\in(a,b)$ 都成立，若對某個 $t\in(a,b)$，$h(t)>h(a)$，令 x 爲 h 在 $[a,b]$ 中達其極大値的點（定理 4.16）。由 (12)，$x\in(a,b)$，且定理 5.8 顯示 $h'(x)=0$。若對某個 $t\in(a,b),h(t)<h(a)$，如果我們將 x 選爲 h 在 $[a,b]$ 上達其極小値的點，則可應用同樣的論證。

這個定理常稱做一般化的均值定理；下面的特別情況才是通常所謂的均值定理：

5.10 定理 若 f 爲在 $[a,b]$ 上的實値連續函數，在 (a,b) 中可微，則有一點 $x\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x)$$

證明：在定理 5.9 中，取 $g(x)=x$。

5.11 定理 設 f 在 (a,b) 中可微。

(a) 若對所有 $x\in(a,b),f'(x)\geq 0$，則 f 爲單調漸增。

(b) 若對所有 $x\in(a,b),f'(x)=0$，則 f 爲常數。

(c) 若對所有 $x\in(a,b),f'(x)\leq 0$，則 f 爲單調漸減。

證明：所有的結論都可由這方程式讀出來：

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(x)$$

對每一組 (a,b) 間的數 x_1,x_2，及『某一個』x_1 與 x_2 之間的數 x，這都爲眞。

導數的連續性

我們早已看過〔例 5.6(b)〕一個函數 f 可能有導數 f'，它在每一點都存在，但在某個點不連續。但是，並非每一個函數都是導數。特別是，一個在某區間中每一點皆存在的導數，具有與在某區間上連續函數同樣的重要性質：其中間值定理是成立的。（比較定理 4.23）。嚴格的敍述如下：

5.12 定理 設 f 爲在 $[a,b]$ 上的實値可微分函數，並設 $f'(a)<\lambda<f'(b)$。則有一個點 $x\in(a,b)$ 使得 $f'(x)=\lambda$。

若 $f'(a)>f'(b)$，類似的結果當然也成立。

證明：令 $g(t)=f(t)-\lambda t$。則 $g'(a)<0$，因此對某個 $t_1\in(a,b), g(t_1)<g(a)$，而 $g'(b)>0$，故對某個 $t_2\in(a,b), g(t_2)<g(b)$。因此在 $[a,b]$ 上的某個點 x，而 $a<x<b$，g 會達到其極小值（定理 4.16）。由定理 5.8 知，$g'(x)=0$。因此 $f'(x)=\lambda$。

系。若 f 在 $[a,b]$ 上連續，則 f' 在 $[a,b]$ 上不可能有單不連續點。

但是 f' 很可以有第二類不連續點。

L'Hospital 定律

下面這定理在極限的計算中，常是很有用的。

5.13 定理 設 f 和 g 在 (a,b) 上實値且可微，對所有 $x\in(a,b), g'(x)\neq 0$。這裏 $-\infty\leq a<b\leq+\infty$。設

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}\longrightarrow A \qquad \text{當 } x\longrightarrow a \tag{13}$$

若

$$f(x)\longrightarrow 0 \text{ 且 } g(x)\longrightarrow 0 \qquad \text{當 } x\longrightarrow a \tag{14}$$

或

(15)　　$g(x) \longrightarrow \infty$　　當 $x \longrightarrow a$，

則

(16)　　$\dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow A$　　當 $x \longrightarrow a$.

若 $x \longrightarrow b$，或在 (15) 中 $g(x) \longrightarrow -\infty$，類似的敍述當然也眞。要注意的是，我們現在所用的極限觀念是定義 4.33 中所指的擴展的意義。

證明：我們首先考慮 $-\infty \leq A < +\infty$ 的情形。選一實數 q 使得 $A < q$，然後選 r 使得 $A < r < q$。由 (13)，有一點 $c \in (a, b)$ 使得 $a < x < c$ 蘊涵了

(17)　　$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} < r$。

若 $a < x < y < c$，則定理 5.9 顯示存在一點 $t \in (x, y)$ 使得

(18)　　$\dfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \dfrac{f'(t)}{g'(t)} < r$。

假設 (14) 成立，在 (18) 中令 $x \longrightarrow a$，我們看出

(19)　　$\dfrac{f(y)}{g(y)} \leq r < q$　　$(a<y<c)$。

其次，設 (15) 成立，在 (18) 中讓 y 固定，我們可以選取一點 $c_1 \in (a, y)$，使得若 $a < x < c_1$，則 $g(x) > g(y)$，且 $g(x) > 0$。把 (18) 乘上 $[g(x)-g(y)]/g(x)$，我們得到

(20)　　$\dfrac{f(x)}{g(x)} < r - r\dfrac{g(y)}{g(x)} + \dfrac{f(y)}{g(x)}$　　$(a<x<c_1)$。

在 (20) 中若我們令 $x \longrightarrow a$，(15) 式顯示存在一點 $c_2 \in (a, c_1)$ 使得

(21)　　$\dfrac{f(x)}{g(x)} < q$　　$(a<x<c_2)$。

結論是，(19) 及 (21) 顯示對任何 q，只在 $A < q$ 的條件下，便存在一個 c_2 使得若 $a < x < c_2$, $f(x)/g(x) < q$。

以同樣的方式，若$-\infty < A \le +\infty$，選p使得$p < A$，我們可找到一點 c_3，使得

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (a < x < c_3) \tag{22}$$

而（16）式由這兩段敘述可以導得。

高階導數

5.14 定義 若f在某區間上有導數 f'，且若 f' 本身可微，我們把 f' 的導數設為 f'' 並稱 f'' 為f的二階導數。如是以往，我們得到諸函數

$$f, f', f'', f^{(3)}, \cdots\cdots, f^{(n)}$$

它們每一個都是前一個的導數，$f^{(n)}$ 叫做f的第n導數，或n階導數。

為了要使 $f^{(n)}(x)$ 在一點x存在，$f^{(n-1)}$ 必須在 x 的某隣域（若 x 是f所定義的區間的端點，則在一個單邊隣域內）存在，且 $f^{(n-1)}$ 必須在x可微。由於 $f^{(n-1)}$ 必須在x的一個隣域存在，$f^{(n-2)}$ 必須在該隣域可微。

Taylor's 定理

5.15 定理 設f在〔a, b〕上為一實值函數，n 為一正整數，$f^{(n-1)}$ 在〔a, b〕上連續，$f^{(n)}$ 對每個 $t \in (a, b)$ 皆存在。令 α, β 為〔a, b〕中二相異點，定義

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k \tag{23}$$

則在α及β之間存在一點x使得

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n \tag{24}$$

對 $n=1$，這正是均值定理。一般來說，這定理顯示 f 可以被次數爲 $n-1$ 的多項式所逼近；而如果我們知道 $|f^{(n)}(x)|$ 的界值（bound），(24) 可以讓我們估計誤差。

證明： 令 M 爲定義如下之一數

(25)　　$f(\beta)=P(\beta)+M(\beta-\alpha)^n$

並令

(26)　　$g(t)=f(t)-P(t)-M(t-\alpha)^n \qquad (a\le t\le b)$

我們必須證明對某個 α 與 β 之間的 x, $n!M=f^{(n)}(x)$。由 (23) 及 (26)

(27)　　$g^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)-n!M \qquad (a<t<b)$

因此若我們能證明對某個 α 與 β 之間的 x，$g^{(n)}(x)=0$，這證明就完成了。

由於 $P^{(k)}(\alpha)=f^{(k)}(\alpha)$ 當 $k=0,\cdots\cdots,n-1$，故我們有

(28)　　$g(\alpha)=g'(\alpha)=\cdots\cdots=g^{(n-1)}(\alpha)=0$

我們對 M 的選擇顯示 $g(\beta)=0$，因此由均值定理知，對某個 α 與 β 之間的 x_1, $g'(x_1)=0$。由於 $g'(\alpha)=0$，我們同樣歸結到對 α 與 x_1 之間某個 x_2，$g''(x_2)=0$。經過 n 次這種步驟之後，我們得到這個結論：對某個在 α 與 x_{n-1} 之間的 x_n，即在 α 與 β 之間，$g^{(n)}(x_n)=0$。

向量值函數的微分

5.16　備註　定義 5.1 可以原封不動地應用到定義在 $[a,b]$ 上的複數函數 f，且定理 5.2 及 5.3，以及它們的證明，仍然成立。如果 f_1 及 f_2 爲 f 的實部與虛部，即若

$$f(t)=f_1(t)+if_2(t)$$

$a\le t\le b$，其中的 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 都是實值的，則我們很顯然有

(29) $$f'(t)=f_1'(t)+if_2'(t)$$

此外，f 在 x 可微若且唯若 f_1 及 f_2 兩者在 x 都可微。

對一般的向量值函數，即，對函數 $\mathbf{f}$ 將 $[a, b]$ 映至某個 R^k，我們仍然可用定義 5.1 來定義 $\mathbf{f}'$。(1) 中的 $\phi(t)$ 項現在，對每個 t，是 R^k 中的一點，而 (2) 中的極限是對 R^k 的範數 (norm) 來取的。換言之，$\mathbf{f}'(x)$ 是 R^k 中的那一點（如果有這麼一點的話）使得

(30) $$\lim_{t\to x}\left|\frac{\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}(x)}{t-x}-\mathbf{f}'(x)\right|=0$$

而 $\mathbf{f}'$ 還是一個函數，其值在 R^k 中。

若 $f_1, \cdots\cdots, f_k$ 是 $\mathbf{f}$ 的分量，如定義在定理 4.10 中的，則

(31) $$\mathbf{f}'=(f_1', \cdots\cdots, f_k')$$

而 $\mathbf{f}$ 在一點 x 爲可微若且唯若每個函數 $f_1, \cdots\cdots, f_k$ 在 x 皆可微。

在這種意義下，定理 5.2 爲眞，若 fg 爲內積 $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ 所取代（見定義 4.3），則定理 5.3(a) 及 (b) 也眞。

然而，當我們轉向均值定理，以及它的一個結果，即 L'Hospital 定律時，情形不同了。下面兩個例子將顯示對複值函數，這些定理都不眞。

5.17 例子　對實數 x，定義

(32) $$f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

（上面這式子可以取爲複指數 e^{ix} 的定義；見第 8 章對這些函數有完整的討論）。則

(33) $$f(2\pi)-f(0)=1-1=0,$$

但是

(34) $$f'(x)=ie^{ix}$$

因而 $|f'(x)|=1$，對所有實數 x。

所以定理 5.10 在這情形不成立。

5.18 例子 在線段 $(0,1)$ 上，定義 $f(x)=x$，且

$$g(x)=x+x^2e^{i/x^2} \tag{35}$$

由於所有實數 t，$|e^{it}|=1$，我們知道

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \tag{36}$$

其次

$$g'(x)=1+\left\{2x-\frac{2i}{x}\right\}e^{i/x^2} \qquad (0<x<1) \tag{37}$$

因此

$$|g'(x)|\geq\left|2x-\frac{2i}{x}\right|-1\geq\frac{2}{x}-1 \tag{38}$$

所以

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|=\frac{1}{|g'(x)|}\leq\frac{x}{2-x} \tag{39}$$

因而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0. \tag{40}$$

由 (36) 及 (40)， L'Hospital 定律在這情形下不眞。也留意由 (38) 知在 $(0,1)$ 上 $g'(x)\neq 0$。

不過，就應用的目的而言，確有一個均值定理的結果，與定理 5.10 幾乎同樣有用，而且對向量值函數也爲眞：由定理 5.10，可得

$$|f(b)-f(a)|\leq(b-a)\sup_{a<x<b}|f'(x)| \tag{41}$$

5.19 定理 假設 $\mathbf{f}$ 是由 $[a,b]$ 映至 R^k 的連續映射，且 $\mathbf{f}$ 在 (a,b) 中爲可微。則存在 $x\in(a,b)$ 使得

$$|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)|\le(b-a)|\mathbf{f}'(x)|$$

證明[1]: 令 $\mathbf{z}=\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)$, 並定義

$$\varphi(t)=\mathbf{z}\cdot\mathbf{f}(t) \qquad (a\le t\le b)$$

則 φ 是 $[a,b]$ 上的實值連續函數, 在 (a,b) 中爲可微, 因而由均值定理知, 對某個 $x\in(a,b)$,

$$\varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(x)=(b-a)\mathbf{z}\cdot\mathbf{f}'(x)$$

另一方面,

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\mathbf{z}\cdot\mathbf{f}(b)-\mathbf{z}\cdot\mathbf{f}(a)=\mathbf{z}\cdot\mathbf{z}=|\mathbf{z}|^2$$

現在由 Schwarz 不等式得到

$$|\mathbf{z}|^2=(b-a)|\mathbf{z}\cdot\mathbf{f}'(x)|\le(b-a)|\mathbf{z}||\mathbf{f}'(x)|$$

因此 $|\mathbf{z}|\le(b-a)|\mathbf{f}'(x)|$, 這就是所要的結論。

習題

1. 令 f 對所有實數都有定義, 並假設對所有實數 x 和 y

$$|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$$

試證 f 是個常數。

2. 假設在 (a,b) 中 $f'(x)>0$。試證 f 在 (a,b) 中爲嚴格漸增。並令 g 爲其反函數。試證 g 爲可微, 且

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)} \qquad (a<x<b)$$

3. 假設 g 是 R^1 上實值函數, 具有界導數 (令 $|g'|\le M$ 好了!)。固定 $\epsilon>0$, 並定義 $f(x)=x+\epsilon g(x)$。試證如果 ϵ 足夠小, f 是 1 對 1。(適當的 ϵ 所成的集合可以僅由 M 來決定)。

4. 若

$$C_0+\frac{C_1}{2}+\cdots\cdots+\frac{C_{n-1}}{n}+\frac{C_n}{n+1}=0$$

這裏的 $C_0,\cdots\cdots,C_n$ 是實常數, 試證方程式

$$C_0+C_1x+\cdots\cdots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n=0$$

原註 [1] V.P. Havin 曾將本書譯為俄文, 並在原著中加上了這個証明。

在 0 與 1 之間至少有一實根。

5. 假設 f 對所有 $x>0$ 有定義且可微，且當 $x\longrightarrow+\infty, f'(x)\longrightarrow 0$。令 $g(x)=f(x+1)-f(x)$。試證當 $x\longrightarrow+\infty, g(x)\longrightarrow 0$

6. 假設

   (a) 對 $x\geq 0$，f 連續。

   (b) 對 $x>0$，$f'(x)$ 存在。

   (c. $f(0)=0$

   (d) f' 為單調漸增。

   令 $$g(x)=\frac{f(x)}{x}\qquad(x>0)$$

   試證 g 為單調漸增。

7. 假設 $f'(x), g'(x)$ 存在，$g'(x)\neq 0$ 且 $f(x)=g(x)=0$ 試證

   $$\lim_{t\to x}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

   （這對複值函數也成立）。

8. 假設 f' 在〔a,b〕上連續且 $\epsilon>0$。試證存在一個 $\delta>0$，使得只要 $0<|t-x|<\delta$，而 $a\leq x\leq b$，$a\leq t\leq b$，則

   $$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|<\epsilon$$

   〔這可以說成如果 f' 在〔a,b〕上連續，則 f 在〔a, b〕為均勻可微 (uniformly differentiable)〕。這對向量值函數也成立嗎?

9. 令 f 為 R^1 上連續實值函數，已知對所有 $x\neq 0$，$f'(x)$ 皆存在，而且當 $x\longrightarrow 0$ 時 $f'(x)\longrightarrow 3$，這可以得出 $f'(0)$ 存在嗎?

10. 假設 f 和 g 為定義在 (0, 1) 上的複值可微分函數，當 $x\longrightarrow 0$ 時，$f(x)\longrightarrow 0$，$g(x)\longrightarrow 0$，$f'(x)\longrightarrow A$，$g'(x)\longrightarrow B$，其中 A, B 皆為複數且 $B\neq 0$。試證

    $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$$

    並與例 5. 18 比較之。　提示:

    $$\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{f(x)}{x}-A\right\}\cdot\frac{x}{g(x)}+A\cdot\frac{x}{g(x)}.$$

將定理 5.13 用到 $f(x)/x$ 及 $g(x)/x$ 的實部和虛部去。

11. 假設 f 是定義在 x 的隣域中，並設 $f''(x)$ 存在。試證

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x)$$

並舉例證明，旣使 $f''(x)$ 不存在，這極限還是可能存在。 提示：利用定理 5.13。

12. 若 $f(x)=|x|^3$，試對所有 x 計算 $f'(x), f''(x)$，並證明 $f^{(3)}(0)$ 不存在。

13. 假設 a 和 c 是實數，$c>0$，而 f 在 $[-1,1]$ 上是定義爲

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin(x^{-c}) & (\text{若 } x\neq 0)\\ 0 & (\text{若 } x=0)。\end{cases}$$

試證以下諸敍述：

(a) f 是連續，若且唯若 $a>0$。

(b) $f'(0)$ 存在，若且唯若 $a>1$。

(c) f' 爲有界，若且唯若 $a\geq 1+c$。

(d) f' 是連續，若且唯若 $a>1+c$。

(e) $f''(0)$ 存在，若且唯若 $a>2+c$。

(f) f'' 爲有界，若 $a\geq 2+2c$，

(g) f'' 爲連續，若且唯若 $a>2+2c$

14. 令 f 爲定義在 (a,b) 中的可微分實值函數。試證，f 爲凸函數若且唯若 f' 是單調漸增。其次假設 f'' 對每個 $x\in(a,b)$ 皆存在，試證，f 爲凸函數若且唯若對所有 $x\in(a,b), f''(x)\geq 0$。

15. 假設 $a\in R^1$, f 是在 (a,∞) 上的二次可微實值函數，而 M_0, M_1, M_2 分別是 $|f(x)|, |f'(x)|, |f''(x)|$ 在 (a,∞) 上的最小上界。試證

$$M_1^2\leq 4M_0M_2$$

提示：若 $h>0$，由 Taylor 定理知，對某個 $\xi\in(x,x+2h)$

$$f'(x)=\frac{1}{2h}[f(x+2h)-f(x)]-hf''(\xi)$$

因此，

$$|f'(x)|\leq hM_2+\frac{M_0}{h}$$

要證明實際上可能得到$M_1^2=4M_0M_2$，取$a=-1$，定義

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-1 & (-1<x<0)\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & (0\leq x<\infty)\end{cases}$$

並證明$M_0=1$, $M_1=4$, $M_2=4$。

對向量值函數而言，$M_1^2\leq 4M_0M_1$ 也成立嗎?

16 假設f是在 $(0,\infty)$ 上的二次可微分函數，f'' 在 $(0,\infty)$ 上有界，且當$x\longrightarrow\infty$時，$f(x)\longrightarrow 0$。試證當$x\longrightarrow\infty$時，$f'(x)\longrightarrow 0$。

提示：在習題 15 中，令$a\longrightarrow\infty$.

17. 假設f是實值，在 $[-1,1]$ 上是三次可微分函數，而且

$$f(-1)=0,\quad f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad f'(0)=0$$

試證對某個$x\in(-1,1)$, $f^{(3)}\geq 3$

留意對$\frac{1}{2}(x^3+x^2)$，這等號會成立。

提示：利用定理 5.15，令$\alpha=0$而$\beta=\pm 1$，證明存在$s\in(0,1)$及$t\in(-1,0)$ 使得

$$f^{(3)}(s)+f^{(3)}(t)=6$$

18. 假設f是 $[a,b]$ 上的實值函數，n是個正整數，對每個 $t\in[a,b]$, $f^{(n-1)}$ 都存在。令 α,β 及 P 如在 Taylor 定理 (5.15) 中者。定義當 $t\in[a,b]$, $t\neq\beta$

$$Q(t)=\frac{f(t)-f(\beta)}{t-\beta},$$

在$t=\alpha$處，微分

$$f(t)-f(\beta)=(t-\beta)Q(t)$$

$n-1$次，並導出下面對 Taylor 定理的另種型式:

$$f(\beta)=P(\beta)+\frac{Q^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n$$

19. 假設f是定義在 $(-1,1)$ 而 $f'(0)$ 存在。假設$-1<\alpha_n<\beta_n<1$，而當$n\longrightarrow\infty$時，$\alpha_n\longrightarrow 0$, $\beta_n\longrightarrow 0$。定義差商

$$D_n=\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$$

試證下列諸敍述:

(a) 若$\alpha_n < 0 < \beta_n$，則 $\lim D_n = f'(0)$

(b) 若$0 < \alpha_n < \beta_n$ 且$\{\beta_n/(\beta_n - \alpha_n)\}$是有界，則 $\lim D_n = f'(0)$

(c) 若 f' 在 $(-1,1)$ 中連續，則 $\lim D_n = f'(0)$

舉個實例，使f在 $(-1,1)$ 中可微（但 f' 在0不連續），且讓 α_n, β_n 趨於零，使得雖 $\lim D_n$ 存在，但與 $f'(0)$ 不同。

20. 敍述並證明一個由 Taylor 定理所導出的不等式而對向量值函數仍然成立。

21. 令E為 R^1 的一個閉子集。我們曾在第 4 章習題 13 中看過有一 R^1 上實值連續函數它的零集合為E。那麼，對每個閉集合E，找一個這樣的函數而它在 R^1 上可微，或一個n次可微，或甚至在 R^1 上有所有階的導數，可能嗎?

22. 假設f是 $(-\infty,\infty)$ 上的實值函數，如果 $f(x)=x$，我們說是x是f的定點 (fixed point)。

(a) 若 t 可微，且對每個實數 t，$f'(t)\neq 1$，試證f最多只有一個定點。

(b) 試證，定義為

$$f(t)=t+(1+e^t)^{-1}$$

的函數f，儘管對所有實數 t，$0<f'(t)<1$，但它沒有定點。

(c) 然而，如果有一常數$A<1$，使得對所有實數 t，$|f'(t)|\leq A$，試證存在一個f的定點x，且$\lim x_n = x$，其中的 x_1 是任意實數，而當 $n=1,2,3,\cdots\cdots$

$$x_{n+1}=f(x_n)$$

(d) 試證 (c) 中所描述的步驟，可以看成鋸齒狀的路線

$$(x_1,x_1)\longrightarrow(x_2,x_2)\longrightarrow(x_2,x_3)\longrightarrow(x_3,x_3)\longrightarrow(x_3,x_4)\longrightarrow\cdots\cdots.$$

23. 定義為

$$f(x)=\frac{x^3+1}{3}$$

的函數f，有三個定點，說是 α,β,γ，其中

$$-2<\alpha<-1,\ 0<\beta<1,\ 1<\gamma<2.$$

對任意選取的 x_1，定義$\{x_n\}$為 $x_{n+1}=f(x_n)$。

(a) 若 $x_1<\alpha$，試證當 $n\longrightarrow\infty, x_n\longrightarrow-\infty$。

(b) 若 $\alpha<x_1<\gamma$，試證當 $n\longrightarrow\infty, x_n\longrightarrow\beta$。

(c) 若 $\gamma<x_1$，試證當 $n\longrightarrow\infty, x_n\longrightarrow+\infty$。

因此，β 可以用這方法確定位置，但 α 及 γ 則不能。

24. 習題 22 中 (c) 部份所描述的步驟，當然也可應用到由 $(0,\infty)$ 映至 $(0,\infty)$ 的函數上去。

固定 $\alpha<1$，且取

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\alpha}{x}\right),\ g(x)=\frac{\alpha+x}{1+x}.$$

f 與 g 兩者都是以 $\sqrt{\alpha}$ 爲其在 $(0,\infty)$ 中唯一的定點。試解釋，以函數 f 和 g 的性質爲基礎，何以第 3 章，習題 16 中的收斂要比在習題17中的快得多。（比較 f' 及 g'，畫出習題 22 中所提示的鋸齒狀圖。）

當 $0<\alpha<1$，試做同樣問題。

25 假設 f 在 $[a,b]$ 上是二次可微，$f(a)<0$，$f(b)>0$，且對所有 $x\in[a,b]$，$f'(x)\geq\delta>0$，$0\leq f''(x)\leq M$。令 ξ 爲 (a,b) 中唯一在該處使得 $f(\xi)=0$ 的點

試完成以下對計算 ξ 的 Newton 法要點中的細節。

(a) 取 $x_1\in(\xi,b)$，並定義 $\{x_n\}$ 爲

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

用 f 圖形的切線，以幾何解釋之。

(b) 試證 $x_{n+1}<x_n$，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi.$$

(c) 用 Tay lor 定理證明對某個 $t_n\in(\xi,x_n)$

$$x_{n+1}-\xi=\frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n-\xi)^2$$

(d) 若 $A=M/2\delta$，試導出

$$0\leq x_{n+1}-\xi\leq\frac{1}{A}[A(x_1-\xi)]^{2^n}$$

（與第 3 章，習題 16 及 18 比較之）

(e) 試證 Newton 方法就是要找定義爲

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

的函數 g，它的定點。

當 x 與 ξ 很近時，$g'(x)$ 的動態如何？

(f) 於 $(-\infty,\infty)$ 上取 $f(x)=x^{1/3}$，並用 Newton 方法，結果如何？

26. 假設 f 在 $[a,b]$ 上爲可微，$f(a)=0$，且在 $[a,b]$ 上有實數 A，使得 $|f'(x)|\le A|f(x)|$。試證對所有 $x\in[a,b]$, $f(x)=0$。　提示：固定 $x_0\in[a,b]$，令當 $a\le x\le x_0$,

$$M_0=\sup|f(x)|,\qquad M_1=\sup|f'(x)|.$$

對這樣的 x

$$|f(x)|\le M_1(x_0-a)\le A(x_0-a)M_0.$$

因此若 $A(x_0-a)<1$，則 $M_0=0$。卽在 $[a,x_0]$ 上 $f=0$。請繼續。

27. 令 ϕ 爲定義在平面上矩形 R 上的實值函數。矩形 R 爲 $a\le x\le b$，$\alpha\le y\le\beta$ 所給定。起始值問題

$$y'=\phi(x,y),\qquad y(a)=c,\ (\alpha\le c\le\beta)$$

的解 (solution) 定義是，一個在 $[a,b]$ 上可微分函數 f，使得 $f(a)=c$，且

$$f'(x)=\phi(x,f(x))\qquad (a\le x\le b)$$

試證，如果有一個常數 A，使得只要 $(x,y_1)\in R$ 且 $(x,y_2)\in R$

$$|\phi(x,y_2)-\phi(x,y_1)|\le A|y_2-y_1|$$

則這樣一個問題最多只有一解。

提示：將習題 26 用到對兩個解的差上。留意這個唯一定理對這起始值問題並不成立：

$y^1=y^{1/2},\qquad y_0(0)=0$

它有兩個解：$f(x)=0$ 及 $f(x)=x^2/4$。還有另外的解嗎？

28. 試對這樣形式的微分方程組

$$y_j'=\phi_j(x,y_1,\cdots\cdots,y_k),\qquad y_j(a)=c_j\,(j=1,\cdots\cdots,k).$$

敍述並證明類似的唯一定理。

留意這方程式組可以重寫爲

$$\mathbf{y}'=\boldsymbol{\phi}(x,\mathbf{y}),\qquad \mathbf{y}(a)=\mathbf{c}.$$

其中的 $\mathbf{y}=(y_1,\cdots\cdots,y_k)$ 在一個 k 胞體 (k-cell) 上取值。$\boldsymbol{\phi}$ 爲由

$(k+1)$ 胞體映至歐氏 k- 胞體的一個映射，它的分量爲函數$\phi_1, \cdots\cdots,$ ϕ_k，而 $\mathbf{c}$ 爲向量（$c_1, \cdots\cdots, c_k$）。利用習題 26，用向量值函數的型式。

29. 考慮方程式組

$$y_j' = y_{j+1} \qquad (j=1, \cdots\cdots, k-1)$$

$$y_k' = f(x) - \sum_{j=1}^{k} g_j(x) y_j$$

以將習題 28 特殊化。其中 $f, g_1, \cdots\cdots, g_k$ 爲〔a, b〕上連續實值函數，並對方程式

$$y^{(k)} + g_k(x) y^{(k-1)} + \cdots\cdots + g_2(x) y' + g_1(x) y = f(x),$$

在起始條件

$$y(a) = c_1, y'(a) = c_2, \cdots\cdots, y^{(k-1)}(a) = c_k$$

下，導出其解唯一的定理。

第六章

Riemann–Stieltjes 積分

本章是奠基於 Riemann 積分的定義上，它與實數軸的次序結構有很明顯的關係。因此，我們先討論實值函數在區間上的積分。在其後的幾節中，接著擴展到複值及向量值函數在區間上的積分。在區間以外的集合上作積分將在第 10 及第 11 章討論。

積分定義及存在性

6.1 定義 令 $[a, b]$ 爲一所予區間，所謂 $[a, b]$ 的一個分割 (Partition) P，我們的意思是指一有限點集合 $x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n$，而

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots\cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b\,.$$

我們令

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, \cdots\cdots, n)$$

現在假設 f 是定義在 $[a, b]$ 上的有界實值函數。對應於每個 $[a, b]$ 的分割 P，我們令

$$M_i = \sup f(x) \qquad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

$$m_i = \inf f(x) \qquad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\triangle x_i,$$

$$L(P,f)=\sum_{i=1}^{n}m_i\triangle x_i,$$

而最後

(1)　$$\overline{\int_a^b}f\,dx=\inf U(P,f)$$

(2)　$$\underline{\int_a^b}f\,dx=\sup L(P,f)$$

這裏的 inf 及 sup 是對〔a,b〕所有分割P來取的。(1) 及 (2) 的左邊分別稱爲f在〔a,b〕上的上，下 Riemann 積分。

若上下積分相等，我們說f在〔a,b〕上是 Riemann 可積。我們寫作$f\in\mathscr{R}$（即，$\mathscr{R}$表示 Riemann 可積函數的集合），且我們將 (1) 及 (2) 的共同值記作

(3)　$$\int_a^b f\,dx,$$

或是

(4)　$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

這就是f在〔a,b〕上的 Riemann 積分。由於f是有界，故存在二數m及M，使得

$$m\leq f(x)\leq M\qquad(a\leq x\leq b)$$

因此，對每個P，

$$m(b-a)\leq L(P,f)\leq U(P,f)\leq M(b-a)$$

因此 $L(P,f)$及$U(P,f)$ 這些數形成一有界集合。這顯示了上下積分對每個有界函數f都有定義。它們相等的問題，也就是f可積的問題是比較微妙的一個。且不個別對 Riemann 積分研究這問題，我們將立刻考慮較一般的情況。

6.2　定義　　令 α 爲〔a, b〕上一單調漸增函數（由於

$\alpha(a)$ 及 $\alpha(b)$ 都是有限，於是 α 在〔a, b〕上有界）。對應於每個〔a, b〕的分割 P，我們令

$$\triangle\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$$

很明顯 $\triangle\alpha_i\geq 0$，對任意在〔a, b〕上有界的實值函數 f，我們令

$$U(P, f, \alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i\triangle\alpha_i$$

$$L(P, f, \alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_i\triangle\alpha_i$$

這裏的 M_i 及 m_i 與定義 6.1 中者具相同意義，同時我們定義

(5) $$\overline{\int_a^b} f d\alpha=\inf U(P, f, \alpha),$$

(6) $$\underline{\int_a^b} f d\alpha=\sup L(P, f, \alpha)$$

這裏的 inf 及 sup 還是對所有分割來取。

若 (5) 及 (6) 的左邊相等，我們將其共同值記爲

(7) $$\int_a^b f d\alpha$$

或有時記爲

(8) $$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

這就是 f 在〔a, b〕上對於 α 的 Riemann-stieltjes 積分（或單說 Stieltjes 積分）。

若 (7) 存在，即，若 (5) 及 (6) 相等，我們說 f 以 Riemann 意味而言，對於 α 是可積，並寫作 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$。

若取 $\alpha(x)=x$，可看出 Riemann 積分是 Riemann-stieltjers 積分的一個特殊情形。不過，且讓我們明白指出，在一般情況下 α 還不一定要連續。

關於符號，必須說幾句話。我們較喜歡用 (7) 而非 (8)，

蓋因 (8) 中出現的字母 x，並沒有加強任何 (7) 的意義。我們用那個字母來代表所謂「積分變數」是無關緊要的。例如，(8) 與

$$\int_a^b f(y)d\alpha(y)$$

是完全一樣的。這積分與 f, α, a 及 b 有關，但與積分變數無關，它很可以略去。

積分變數所扮演的角色與作和的指標相當類似:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i, \qquad \sum_{k=1}^{n} c_k$$

這兩個符號是相同的，蓋兩者皆指 $c_1+c_2+\cdots\cdots+c_n$

當然，加上積分變數沒什麼害處，而在許多情形中，這樣做還眞的很方便。

我們現在要探究積分 (7) 的存在性。且不要每次都這麼說，f 是假設爲實値有界，α 在 $[a, b]$ 上單調漸增；而當不可能有誤會時，我們以 $\int$ 代替 $\int_a^b$。

6.3　定義　我們說 P^* 這個分割是 P 的一個細分 (refinement)，如果 $P^* \supset P$ (就是若 P 的每一點都是 P^* 的一點)。給定兩個分割 P_1 及 P_2，我們說 P^* 是它們共同細分，若 $P^* = P_1 \cup P_2$。

6.4　定理　若 P^* 是 P 的細分，則

(9)　$$L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha)$$

而且

(10)　$$U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

證明: 要證明 (9)，先假設 P^* 只比 P 多包含一個點。令這額外一點爲 x^*，並設 $x_{i-1} < x^* < x_i$，這裏的 x_{i-1} 及 x_i 爲 P 的兩個連續點。置

$$w_1=\inf f(x) \qquad (x_{i-1}\le x\le x^*)$$
$$w_2=\inf f(x) \qquad (x^*\le x\le x_i).$$

顯然，$w_1\ge m_i, w_2\ge m_i$ 此處，如前

$$m_i=\inf f(x) \qquad (x_{i-1}\le x\le x_i)$$

故

$$\begin{aligned}L(P,{}^*f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\\ &=w_1[\alpha(x^*)-\alpha(x_{i-1})]+w_2[\alpha(x_i)-\alpha(x^*)]-\\ &\quad m_i[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]\\ &=(w_1-m_i)[\alpha(x^*)-\alpha(x_{i-1})]+(w_2-m_i)[\alpha(x_i)\\ &\quad -\alpha(x^*)]\ge 0\end{aligned}$$

若 P^* 比 P 多包含 k 點，我們重複以上論證 k 次，便得到 (9)。(10) 的證明是類似的。

6.5 定理 $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha\le\overline{\int_a^b} f\,d\alpha$

證明: 令 P^* 爲 P_1 及 P_2 兩分割的共同細分。由定理 6.4

$$L(P_1,f,\alpha)\le L(P^*,f,\alpha)\le U(P^*,f,\alpha)\le U(P_2,f,\alpha)$$

因此，

(11) $$L(P_1,f,\alpha)\le U(P_2,f,\alpha)$$

保持 P_2 固定，對所有 P_1 取 sup, (11) 便得

(12) $$\underline{\int} f\,d\alpha\le U(P_2,f,\alpha)$$

再對 (12) 中所有 P_2 取 inf，這定理便導得了。

6.6 定理， 於 $[a,b]$ 上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 若且唯若對每個 $\epsilon>0$，存在一分割 P 使得

(13) $$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\epsilon$$

證明: 對每個 P，我們都有

$$L(P,f,\alpha)\le\underline{\int} f\,d\alpha\le\overline{\int} f\,d\alpha\le U(P,f,\alpha)$$

因此蘊涵了

$$0\leq\overline{\int}f\,d\alpha-\underline{\int}f\,d\alpha\leq\epsilon$$

故若 (13) 對每個 $\epsilon>0$ 都能滿足，我們必有

$$\overline{\int}f\,d\alpha=\underline{\int}f\,d\alpha,$$

卽，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$。

反之，假設 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，且 $\epsilon>0$ 已給。則必存在分割 P_1及 P_2 使得

$$L(P_2,f,\alpha)-\int f\,d\alpha<\frac{\epsilon}{2} \tag{14}$$

$$\int f\,d\alpha-L(P_1,f,\alpha)<\frac{\epsilon}{2} \tag{15}$$

我們選取P爲 P_1 及 P_2 的共同細分，則定理 6.4 以及 (14) 和 (15) 便顯示

$$\begin{aligned}U(P,f,\alpha)\leq U(P_2,f,\alpha)<\int f\,d\alpha+\frac{\epsilon}{2}<L(P_1,f,\alpha)\\ +\epsilon\\ \leq L(P,f,\alpha)+\epsilon\end{aligned}$$

因此對這個分割P，(13) 式成立。

定理 6.6 是對可積性一個很方便的判斷準則。在我們應用它以前，我們先敍述幾個有緊密關係的定理。

定理 6.7 (a) 若對某個 P 及 ϵ，(13) 式成立，則對P的每個細分，（用同樣的 ϵ）(13) 式也成立。

(b) 若對 $P=\{x_0,\cdots\cdots,x_1\}$, (13) 式成立，且若 s_i, t_i 是 $[x_{i-1},x_i]$ 中任意點，則

$$\sum_{i=1}^{n}|f(s_i)-f(t_i)|\triangle\alpha_i<\epsilon$$

(c) 若 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 且 (b) 中之假設成立，則

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta\alpha_i-\int_a^b f d\alpha\right|<\epsilon$$

證明: 定理 6.4 蘊涵了 (a)。在 (b) 中所做的假設之下，$f(s_i)$ 及 $f(t_i)$ 都會在 $[m_i, M_i]$ 之中，所以 $|f(s_i)-f(t_i)|\leq M_i-m_i$。

因而

$$\sum_{i=1}^{n}|f(s_i)-f(t_i)|\,\Delta\alpha_i\leq U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)$$

這便證明了 (b)。而

$$L(P,f,\alpha)\leq\sum f(t_i)\Delta\alpha_i<U(P,f,\alpha)$$

及

$$L(P,f,\alpha)\leq\int f d\alpha\leq U(P,f,\alpha)$$

這兩個顯然的不等式便證明了 (c)。

6.8 定理。 若 f 在 $[a,b]$ 上爲連續，則在 $[a,b]$ 上，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$。

證明: 令 $\epsilon>0$ 已給，選取 $\eta>0$，使得

$$[\alpha(b)-\alpha(a)]\,\eta<\epsilon$$

由於 f 在 $[a,b]$ 上是均勻連續（定理 4.19），故存在一 $\delta>0$ 使得若 $|x-t|<\delta$ 及 $x\in[a,b]$, $t\in[a,b]$,

(16) $$|f(x)-f(t)|<\eta$$

若 P 是 $[a,b]$ 上任意分割，且對所有 i，$\Delta\alpha_i<\delta$ 則 (16) 式蘊涵了

(17) $$M_i-m_i\leq\eta \qquad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

因此

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta\alpha_i\leq\eta\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i$$
$$=\eta[\alpha(b)-\alpha(a)]<\epsilon$$

由定理 6.6 知，$f \in \mathscr{R}(\alpha)$。

6.9　定理　若 f 在 $[a,b]$ 上為單調，且若 α 在 $[a,b]$ 上連續，則 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$。（當然，我們還是假設 α 為單調）

證明: 令 $\epsilon>0$ 已給。對任意正整數 n，選取一分割 P，使得

$$\triangle \alpha_i=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n} \qquad (i=1, \cdots\cdots, n)$$

這是可能的，蓋因 α 為連續（定理 4.23）。

我們假設 f 是單調漸增（在另一種情況，證明亦類同）。則

$$M_i=f(x_i), \qquad m_i=f(x_{i-1}) \qquad (i=1, \cdots\cdots, n)$$

因此，若 n 取得够大的話，

$$\begin{aligned} U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha) &= \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n} \sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})] \\ &= \frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}[f(b)-f(a)]<\epsilon \end{aligned}$$

由定理 6.6 知，$f \in \mathscr{R}(\alpha)$。

6.10　定理　假設 f 在 $[a,b]$ 上有界，且在 $[a,b]$ 上 f 只有有限多不連續點，而 α 在 f 的每個不連續點上都連續。則 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$。

證明: 令 $\epsilon>0$ 已給。取 $M=\sup|f(x)|$，令 E 為 f 的不連續點所成之集合。由於 E 是有限，而 α 在 E 的每一點都連續，故我們可以用有限多個互斥區間 $[u_j, v_j] \subset [a,b]$，將 E 覆蓋，並使得對應之差 $\alpha(v_j)-\alpha(u_j)$ 的總和小於 ϵ。此外，我們可以將這些區間，排列得使 $E \cap (a,b)$ 中每一點都在某個 $[u_j, v_j]$ 之內。

從 $[a,b]$ 中移去 (u_j, v_j) 這些線段。所餘下的集合 K 是緊緻的。因此 f 在 K 上是均勻連續，則存在 $\delta>0$，使得若 $s \in K$，$t \in K$，$|s-t|<\delta$，則 $|f(s)-f(t)|<\epsilon$.

現在，造一個 $[a, b]$ 的分割 $P=\{x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n\}$ 如下：每個都 u_j 在 P 中出現，每個 v_j 也在 P 中出現，任何線段 (u_j, v_j) 中的點都不在 P 中出現，若 x_{i-1} 不是 u_j 之一，則 $\Delta x_i<\delta$。

留意，對所有 i，$M_i-m_i\leq 2M$，且除非 x_{i-1} 是 u_j 之一，否則 $M_i-m_i\leq\varepsilon$。因此，就像在定理 6.8 的證明中，

$$U(P, f, \alpha)-L(P, f, \alpha)\leq[\alpha(b)-\alpha(a)]\epsilon+2M\epsilon.$$

由於 ϵ 是任意的，故定理 6.6 顯示了 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$。

備註：若 f 和 α 有共同不連續點，則 f 不一定是屬於 $\mathscr{R}(\alpha)$ 這由習題 3 可以知道。

6.11 定理 假設在 $[a, b]$ 上，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$, $m\leq f\leq M$, ϕ 在 $[m, M]$ 爲連續，且在 $[a, b]$ 上，$h(x)=\phi(f(x))$，則在 $[a, b]$ 上，$h\in\mathscr{R}(\alpha)$。

證明：選取 $\epsilon>0$，由於 ϕ 在 $[m, M]$ 上爲均勻連續，故存在 $\delta>0$ 使得 $\delta<\epsilon$ 且若 $|s-t|\leq\delta$ 而 $s, t\in[m, M]$, $|\phi(s)-\phi(t)|<\epsilon$。

因爲 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，故有一 $[a, b]$ 的分割 $P=\{x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n\}$，使得

$$U(P, f, \alpha)-L(P, f, \alpha)<\delta^2. \tag{18}$$

令 M_i, m_i 具與定義 6.1 中相同意義，並令 M_i^*, m_i^* 爲 h 的類似數字。將 $1, \cdots\cdots, n$ 這些數分爲兩類：若 $M_i-m_i<\delta$，$i\in A$，若 $M_i-m_i\geq\delta$，$i\in B$。

對 $i\in A$ 言，我們對 δ 的選擇顯示 $M_i^*-m_i^*\leq\epsilon$

對 $i\in B$ 言，$M_i^*-m_i^*\leq 2K$, $K=\sup|\phi(t)|$, $m\leq t\leq M$. 由 (18)，我們有

$$\delta\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i\leq\sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i<\delta^2 \tag{19}$$

故 $\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i<\delta$。於是

$$U(P,h,\alpha)-L(P,h,\alpha)=\sum_{i\in A}(M_i{}^*-m_i{}^*)\triangle\alpha_i+\sum_{i\in B}(M_i{}^*-m_i{}^*)\triangle\alpha_i\leq\epsilon[\alpha(b)-\alpha(a)]+2K\delta<\epsilon[\alpha(b)-\alpha(a)+2K].$$

因爲 ϵ 是任意的，定理 6.6 蘊涵了 $h\in\mathscr{R}(\alpha)$。

備註：這定理提供了這個問題：到底什麼函數是 Riemann 可積呢？定理 11.33(b) 則給了答案。

積分的性質

6.12 定理 (a) 若在 $[a,b]$ 上 $f_1\in\mathscr{R}(\alpha)$ 且 $f_2\in\mathscr{R}(\alpha)$，則

$$f_1+f_2\in\mathscr{R}(\alpha)$$

對每個常數 c，$cf\in\mathscr{R}(\alpha)$，且

$$\int_a^b(f_1+f_2)d\alpha=\int_a^b f_1d\alpha+\int_a^b f_2d\alpha$$

$$\int_a^b cf\,d\alpha=c\int_a^b f\,d\alpha.$$

(b) 若在 $[a,b]$ 上，$f_1(x)\leq f_2(x)$ 則

$$\int_a^b f_1d\alpha\leq\int_a^b f_2\,d\alpha$$

(c) 若在 $[a,b]$ 上，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 且若 $a<c<b$，則在 $[a,c]$ 上及 $[c,b]$ 上，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$，而且

$$\int_a^c f\,d\alpha+\int_c^b f\,d\alpha=\int_a^b f\,d\alpha.$$

(d) 若在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 且若在 $[a,b]$ 上 $|f(x)|\leq M$，則

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right|\leq M[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

(c) 若 $f\in\mathscr{R}(\alpha_1)$ 且 $f\in\mathscr{R}(\alpha_2)$，則 $f\in\mathscr{R}(\alpha_1+\alpha_2)$，且

$$\int_a^b f d(\alpha_1+\alpha_2)=\int_a^b f d\alpha_1+\int_a^b f\, d\alpha_2;$$

若 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 且 c 為一正常數，則 $f\in\mathscr{R}(c\alpha)$，且

$$\int_a^b f d(c\alpha)=c\int_a^b f d\alpha$$

證明：若 $f=f_1+f_2$ 而 P 是 $[a,b]$ 的任意分割，我們有

(20) $$L(P,f_1,\alpha)+L(P,f_2,\alpha)\le L(P,f,\alpha)\le U(P,f,\alpha)\le U(P,f_1,\alpha)+U(P,f_2,\alpha)$$

若 $f_1\in\mathscr{R}(\alpha)$ 且 $f_2\in\mathscr{R}(\alpha)$，令 $\epsilon>0$ 已給。則有分割 $P_j(j=1,2)$ 使得

$$U(P_j,f_j,\alpha)-L(P_j,f_j,\alpha)<\epsilon$$

若 P_1 及 P_2 以它們的共同細分 P 取代，這些不等式仍然成立。故 (20) 式蘊涵了

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<2\epsilon,$$

這便證明了 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$。

對這同樣的 P，我們有

$$U(P,f_j,\alpha)<\int f_j d\alpha+\epsilon \qquad (j=1,2)$$

因此 (20) 式蘊涵了

$$\int f d\alpha\le U(P,f,\alpha)<\int f_1 d\alpha+\int f_2 d\alpha+2\epsilon$$

因為 ϵ 是任意，我們歸結到

(21) $$\int f\, d\alpha\le\int f_1 d\alpha+\int f_2 d\alpha.$$

如果在 (21) 式中，我們以 $-f_1$ 及 $-f_2$ 取代 f_1 及 f_2，則不等式便反過來，而等式便得證。

定理 6.12 的其它斷言的證明都很類似，所以我們略去其細節。(c) 部份的重點是當（由轉向細分）逼近 $\int f d\alpha$ 時，我們可限制自己在包含點 c 的分割上。

6.13 定理 若在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ 且 $g \in \mathscr{R}(\alpha)$，則

(a) $fg \in \mathscr{R}(\alpha)$;

(b) $|f| \in \mathscr{R}(\alpha)$ 且 $\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\, d\alpha$

證明: 如果我們取 $\phi(t) = t^2$，定理 6.11 顯示如果 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$，則 $f^2 \in \mathscr{R}(\alpha)$，恒等式

$$4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$$

便完成了 (a) 的證明。

若我們取$\phi(t) = |t|$，定理 6.11 同理顯示$|f| \in \mathscr{R}(\alpha)$，選取 $c = \pm 1$，使得

$$c\int f d\alpha \geq 0.$$

則因 $cf \leq |f|$，

$$\left|\int f d\alpha\right| = c\int f\, d\alpha = \int cf d\alpha \leq \int |f|\, d\alpha.$$

6.14 定義 單位階梯函數（Unit step function）是定義爲

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

6.15 定理 若 $a < s < b$，f 在 [a, b] 上有界，f 在 s 連續，且 $\alpha(x) = I(x-s)$，則

$$\int_a^b f d\alpha = f(s)$$

證明: 考慮分割$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$，其中$x_0 = a$，$x_1 = s < x_2 < x_3 = b$。則

$$U(P, f, \alpha) = M_2 \qquad L(P, f, \alpha) = m_2$$

由於f在s連續，我們知道當$x_2 \longrightarrow s$時，M_2 及 m_2 收斂到 $f(s)$。

6.16 定理 當 $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$時設 $c_n \geq 0$，$\sum c_n$收斂，

$\{s_n\}$ 是 (a, b) 中相異點所成的序列，且

$$\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, I(x-s_n) \tag{22}$$

令 f 在 $[a, b]$ 上連續，則

$$\int_a^b f\, d\alpha=\sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n) \tag{23}$$

證明: 由比較試斂法知，對每個 x，級數 (22) 都收斂。其和 $\alpha(x)$ 顯然是單調，且 $\alpha(a)=0, \alpha(b)=\sum c_n$。（這就是出現在備註 4.31 中那類的函數）。

令 $\varepsilon>0$ 已知，選取 N 使得

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_n<\varepsilon$$

令

$$\alpha_1(x)=\sum_{n=1}^{N} c_n I(x-s_n), \quad \alpha_2(x)=\sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x-s_n)$$

由定理 6.12 及 6.15 知，

$$\int_a^b f d\alpha_1=\sum_{n=1}^{N} c_n f(s_n) \tag{24}$$

由於 $\alpha_2(b)-\alpha_2(a)<\varepsilon$，故

$$\left|\int_a^b f \alpha_2\right| \leq M\varepsilon, \tag{25}$$

其中的 $M=\sup|f(x)|$，由於 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，於是由 (24) 及 (25) 知

$$\left|\int_a^b f\, d\alpha-\sum_{n=1}^{N} c_n f(s_n)\right| \leq M\varepsilon. \tag{26}$$

如果我們讓 $N \longrightarrow \infty$，我們便得到 (23)。

6.17 定理 假設在〔a,b〕上，α 是單調漸增，而 $\alpha' \in \mathscr{R}$。令 f 是〔a,b〕上的有界實值函數。

則 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 若且唯若 $f\alpha'\in\mathscr{R}$。在這情況下，

$$\int_a^b f\,d\alpha=\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \tag{27}$$

證明： 令 $\varepsilon>0$ 已知，並對 α' 應用定理 6.6：有一個〔a,b〕的分割 $P=\{x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n\}$，使得

$$U(P,\alpha)-L(P,\alpha')<\varepsilon \tag{28}$$

由均值定理知，有點 $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ 使得對 $i=1,\cdots\cdots,n$，

$$\Delta\alpha_i=\alpha'(t_i)\Delta x_i。$$

若 $s_i\in[x_{i-1},x_i]$，則由（28）及定理 6.7(b) 知，

$$\sum_{i=1}^n |\alpha'(s_i)-\alpha'(t_i)|\Delta x_i<\varepsilon. \tag{29}$$

令 $M=\sup|f(x)|$，由於

$$\sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta\alpha_i=\sum_{i=1}^n f(s_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i,$$

由（29）知

$$\left|\sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta\alpha_i-\sum_{i=1}^n f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i\right|\le M\varepsilon \tag{30}$$

特別是，對所有 $s_i\in[x_{i-1},x_i]$

$$\sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta\alpha_i\le U(P,f\alpha')+M\varepsilon,$$

因此 $\qquad U(P,f,\alpha)\le U(P,f\alpha')+M\varepsilon$

由（30）式利用同樣論證，可導致

$$U(P,f\alpha')\le U(P,f,\alpha)+M\varepsilon$$

因此，

(31) $$|U(P,f,\alpha)-U(P,f\alpha')\leq M\varepsilon.$$

現在要注意，若 P 由任何細分所取代，(28) 式仍然爲眞。故 (31) 也仍眞。我們便歸結到

$$\left|\overline{\int_a^b} f\,d\alpha-\overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx\right|\leq M\varepsilon.$$

但 ε 是任意的。故任何有界的 f

(32) $$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha=\overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)dx,$$

對下積分的等式，用完全一樣的方法，可由 (30) 導得。定理得證。

6.18 備註 由前兩個定理，便例示了 Steiltjes 積分過程所本然具有的一般性和彈性。如果 α 是個純階梯函數〔這常是對 (22) 式中的函數型式所稱的名字〕，則積分便化簡爲有限或無窮級數了。如果 α 是個可積分導數，則積分便化爲普通的 Riemann 積分了。這使得我們可以在許多情形下，同時研究級數和積分，而不必分開來。

要例示這一點，試考慮一個物理學上的例子。一條單位長的直線，其慣性矩 (moment of inertia)，對通過某一端點而垂直該線的軸來取的，便是

(33) $$\int_0^1 x^2\,dm$$

其中 $m(x)$ 是包含在區間 $(0,x)$ 中的質量。若將該線視作具有連續密度 ρ，就是說，如果 $m'(x)=\rho(x)$，則 (33) 式變爲

(34) $$\int_0^1 x^2\rho(x)dx.$$

另一方面，若該線是由集中在 x_i 點上諸質量 m_i 所組成，(33) 式變爲

(35) $$\sum_i x_i^2\,m_i$$

因此，(33) 式包含了 (34) 及 (35) 爲特例，但它還包含了更多；例如，當m是連續但不是到處可微的情形。

6.19 定理（變數變換） 假設φ是個將區間$[A,B]$映成$[a,b]$的嚴格漸增連續函數。若α在$[a,b]$上是單調漸增，而在$[a,b]$上，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$。在$[A,B]$上定義β及g爲

$$\beta(y)=\alpha(\varphi(y)),\qquad g(y)=f(\varphi(y)) \tag{36}$$

則$g\in\mathscr{R}(\beta)$ 且

$$\int_A^B g\,d\beta=\int_a^b f\,d\alpha. \tag{37}$$

證明：對每個$[a,b]$的分割$P=\{x_0,x_1,\cdots\cdots,x_n\}$，都對應有$[A,B]$的分割$Q=\{y_0,\cdots\cdots y_n\}$，因此$x_i=\varphi(y_i)$。所有$[A,B]$的分割都是這樣得出的。由於$f$在$[x_{i-1},x_i]$上所取的值，和$g$在$[y_{i-1},y_i]$上所取的值完全一樣，我們便知

$$U(Q,g,\beta)=U(P,f,\alpha),L(Q,g,\beta)=L(P,f,\alpha) \tag{38}$$

由於$f\in\mathscr{R}(\alpha)$，故P可以選得使$U(P,f,\alpha)$ 及 $L(P,f,\alpha)$兩者皆與$\int f d\alpha$ 相近。因此，(38) 式與定理 6.6 合起來，便顯示了$g\in\mathscr{R}(\beta)$，而 (37) 成立。證畢。

我們且考慮以下的特殊情況：

取 $\alpha(x)=x$，則$\beta=\varphi$，假設在$[A,B]$上$\varphi'\in\mathscr{R}$，若將定理 6.17 用到 (37) 的左邊，我們便得到

$$\int_a^b f(x)dx=\int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)dy. \tag{39}$$

積分與微分

本節中，我們仍限制自己在實值函數上。我們要證明在某種意義下，積分與微分是反運算。

6.20 定理 令在$[a,b]$上，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$當$a\le x\le b$，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt.$$

則F在〔a,b〕上為連續；此外，若f在〔a,b〕上一點 x_0 為連續，則F在 x_0 為可微，且

$$F'(x_0)=f(x_0)$$

證明：由於$f\in\mathscr{R}$，故f有界。如果當$a\leq t\leq b$時，$|f(t)|\leq M$。如果 $a\leq x<y\leq b$，則由定理 6.12(c) 及 (d) 得，

$$|F(y)-F(x)|=\left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right|\leq M(y-x)$$

令 $\varepsilon>0$ 已知，我們知道，如果$|y-x|<\varepsilon/M$，則

$$|F(y)-F(x)|<\varepsilon。$$

這就證明了F的連續性（事實上，是均勻連續性。）

現在假設f在 x_0 處連續，若已知 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$ 使得如果 $|t-x_0|<\delta$，且 $a\leq t\leq b$，則

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon\ 。$$

因此，若

$x_0-\delta<s\leq x_0\leq t<x_0+\delta$ 且 $a\leq s<t\leq b$，由定理 6.12(d) 知，我們有

$$\left|\frac{F(t)-F(s)}{t-s}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{t-s}\int_s^t[f(u)-f(x_0)]du\right|<\epsilon$$

於是 $F'(x_0)=f(x_0)$。

6.21 微積分基本定理 若在〔a, b〕上，$f\in\mathscr{R}$。且若在〔a,b〕上有個可微分函數F，而 $F'=f$，則

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

證明：令 $\varepsilon>0$ 已給。選取〔a,b〕的分割 $P=\{x_0,\cdots\cdots,x_n\}$使得。$U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$。由均值定理知，有點$t_i\in[x_{i-1},x_i]$，使得當 $i=1,\cdots\cdots,n$.

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(t_i)\triangle x_i.$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\triangle x_i=F(b)-F(a)$$

現在，由定理 6.7(c) 知

$$\left|F(b)-F(a)-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

因爲這對所有 $\varepsilon>0$ 都成立，證畢。

6.22 定理（分部積分） 設若F和G都是〔a,b〕上的可微分函數，$F'=f\in\mathscr{R}$，且 $G'=g\in\mathscr{R}$，則

$$\int_a^b F(x)g(x)dx=F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b f(x)G(x)dx$$

證明: 取 $H(x)=F(x)G(x)$，並將定理 6.21 用到H及其導數上去，留意，由定理 6.13 知，$H\in\mathscr{R}$.

向量值函數的積分

6.23 定義 令 f_1, ……, f_k 爲〔a,b〕上的實值函數，並令 $\mathbf{f}=(f_1,\cdots\cdots,f_k)$ 爲所對應的由〔a,b〕映至 R^k 的映射。若α在〔a,b〕上單調漸增，我們說 $\mathbf{f}\in\mathscr{R}(\alpha)$ 意思是對 $j=1$, ……, k, $f_j\in\mathscr{R}(\alpha)$，如果是這種情況，我們定義

$$\int_a^b \mathbf{f}d\alpha=\left(\int_a^b f_1d\alpha,\cdots\cdots,\int_a^b f_kd\alpha\right)$$

換言之 $\int\mathbf{f}d\alpha$ 是 R^k 中一個點，它的第 j 座標是$\int f_jd\alpha$。

很明顯的，定理 6.12(a),(c) 及 (e) 對這向量值積分而言皆成立；我們只須將早先的結果用到各座標上。定理 6.17, 6.20 及 6.21 也同樣爲眞。例如，我們敍述定理 6.21 的類似命題:

6.24 定理 若 $\mathbf{f}$ 及 $\mathbf{F}$ 將 $[a, b]$ 映至 R^k，若在 $[a, b]$ 上 $\mathbf{f}\in\mathscr{R}$，且若 $\mathbf{F}'=\mathbf{f}$，則

$$\int_a^b \mathbf{f}(t)dt=\mathbf{F}(b)-\mathbf{F}(a).$$

然而，定理 6.13 (b) 的類似命題倒提供了一些新面貌，至少在其證明中是如此。

6.25 定理 若 $\mathbf{f}$ 將 $[a, b]$ 映至 R^k，且若對某個 $[a, b]$ 上單調增加函數 α 而言，$\mathbf{f}\in\mathscr{R}(\alpha)$，則 $|\mathbf{f}|\in\mathscr{R}(\alpha)$，且

$$\left|\int_a^b \mathbf{f}\,d\alpha\right|\leq\int_a^b |\mathbf{f}|\,d\alpha. \tag{40}$$

證明: 若 $f_1, \cdots\cdots, f_k$ 是 $\mathbf{f}$ 的分量，則

$$|\mathbf{f}|=(f_1^2+\cdots\cdots+f_k^2)^{1/2} \tag{41}$$

由定理 6.11 知，每個 f_j^2 的函數都屬於$\mathscr{R}(\alpha)$；因此，它們的和也一樣。由於 x^2 是x的連續函數，定理 4.17 顯示，對每個實數M，其平方根函數在 $[0, M]$ 上連續。如果我們再用一次定理 6.11，(41)式顯示$|\mathbf{f}|\in\mathscr{R}(\alpha)$。

要證明 (40)，令 $\mathbf{y}=(y_1, \cdots\cdots, y_k)$，其中 $y_j=\int f_j d\alpha$。則 $\mathbf{y}=\int \mathbf{f}\,d\alpha$，且

$$|\mathbf{y}|^2=\sum y_j^2=\sum y_j\int f_j d\alpha=\int\left(\sum y_j f_j\right)d\alpha.$$

由 Schwarz 不等式知，

$$\sum y_j f_j(t)\leq|\mathbf{y}|\,|\mathbf{f}(t)| \qquad (a\leq t\leq b) \tag{42}$$

因此，定理 6.12 便蘊涵了

$$|\mathbf{y}|^2\leq|\mathbf{y}|\int|\mathbf{f}|\,d\alpha. \tag{43}$$

若 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$,(40) 式顯然為眞。若 $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$，用$|\mathbf{y}|$除 (43) 便得出 (40)。

可度量曲線

我們以一個幾何方面的論題來結束本章，它提供了某些前述理論的應用。在 $k=2$ 的情形（即，平面曲線的情形），對研究單複變解析函數方面，是很重要的。

6.26 定義　由區間〔a, b〕映至 R^k 的連續映射 γ，叫做 R^k 中的曲線 (curve)。為了要強調這參數區間〔a, b〕，我們也可以說 γ 是〔a, b〕上的曲線。

若 γ 是 1 對 1，γ 叫做一個弧 (arc)。

若 $\gamma(a)=\gamma(b)$，γ 叫做一個封閉曲線 (closed curve)。

應加注意的是，我們定義曲線是個映射，而不是點集合。當然，對每個 R^k 中的曲線，在 R^k 中必隨之而有一子集合，即 γ 的值域，但不同的曲線可能有相同之值域。

我們對每個〔a, b〕的分割 $P=\{x_0, \cdots\cdots x_n\}$ 及〔a, b〕上每個曲線，都賦予一數

$$\Lambda(P, \gamma)=\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})$$

這和中的第 i 項，是點 $\gamma(x_{i-1})$ 與 $\gamma(x_i)$ 之間（在 R^k 中）的距離。因此，$\Lambda(P, \gamma)$ 是以頂點（依序）為 $\gamma(x_0), \gamma(x_1), \cdots\cdots, \gamma(x_n)$ 的多邊形路徑的長度。當我們的區分變得愈來愈細，這多邊形就愈來愈接近 γ 的值域。這便使得下面對 γ 長度的定義，看起來就合理了：

$$\Lambda(\gamma)=\sup\Lambda(P, \gamma)$$

這裏的 sup 是對所有〔a, b〕的分割來取的。

若 $\Lambda(\gamma)<\infty$，則我們說 γ 是可度量的 (rectifiable)。

在某些情形，$\Lambda(\gamma)$ 是由一個 Riemann 積分所定的。我們會對連續可微分曲線，即，對曲線 γ，其導數 γ' 是連續者，來證明這件事。

定理 6.27 若 γ' 在 $[a,b]$ 上連續，則 γ 是可度量的，而且

$$\Lambda(\gamma)=\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

證明: 若 $a\leq x_{i-1}<x_i\leq b$，則

$$|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\gamma'(t)\,dt\right|\leq\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\gamma'(t)|\,dt.$$

因此，對每個 $[a,b]$ 的分割 P，

$$\Lambda(P,\gamma)\leq\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

結果，

$$\Lambda(\gamma)\leq\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

要證明相反的不等式，令 $\varepsilon>0$ 已知。由於 γ' 在 $[a,b]$ 上是均匀收斂，故存在 $\delta>0$ 使得

若 $|s-t|<\delta$，則 $|\gamma'(s)-\gamma'(t)|<\varepsilon$。

令 $P=\{x_0,\cdots\cdots,x_n\}$ 爲 $[a,b]$ 的一分割，而對所有 i，$\Delta x_i<\delta$，若 $x_{i-1}\leq t\leq x$，則

$$|\gamma'(t)|\leq|\gamma'(x_i)|+\varepsilon.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\gamma'(t)|\,dt&\leq|\gamma'(x_i)|\Delta x_i+\varepsilon\Delta x_i\\&=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\gamma'(t)+\gamma'(x_i)-\gamma'(t)]\,dt\right|\\&\quad+\varepsilon\Delta x_i\\&\leq\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\gamma'(t)\,dt\right|+\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\gamma'(x_i)-\right.\\&\quad\left.\gamma'(t)]\,dt\right|+\varepsilon\Delta x_i\\&\leq|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|+2\varepsilon\Delta x_i.\end{aligned}$$

如果我們將這些不等式加起來，我們便得到

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \leq \Lambda(P,\gamma)+2\varepsilon(b-a)$$
$$\leq \Lambda(\gamma)+2\varepsilon(b-a)$$

由於 ε 是任意的，故

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \leq \Lambda(\gamma).$$

證畢。

習題

1. 假設 α 在 $[a,b]$ 上漸增，$a\leq x_0\leq b$，α 在 x_0 處連續，$f(x_0)=1$ 且若 $x\neq x_0$，　$f(x)=0$。試證 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 且 $\int f d\alpha=0$

2. 假設 $f\geq 0$，f 在 $[a,b]$ 上連續，且 $\int_a^b f(x)dx=0$　試證對所有 $x\in[a,b]$，$f(x)=0$。（將此與習題 1 比較之）

3. 定義三函數 β_1. β_2, β_3 如下：若 $x<0$，$\beta_j(x)=0$，若 $x>0$，$\beta_j(x)=1$，$j=1,2,3$ 而 $\beta_1(0)=0$，$\beta_2(0)=1$，$\beta_3(0)=\frac{1}{2}$。令 f 爲在 $[a,b]$ 上的有界函數。

   (a) 試證 $f\in\mathscr{R}(\beta_1)$ 若且唯若 $f(0+)=f(0)$，而在這情況下
   $$\int f d\beta_1=f(0).$$
   (b) 敍述並證明對 β_2 的類似結果。
   (c) 試證 $f\in\mathscr{R}(\beta_3)$ 若且唯若 f 在 0 處爲連續。
   (d) 若 f 在 0 處連續，試證
   $$\int f d\beta_1=\int f d\beta_2=\int f d\beta_3=f(0)$$

4. 若對所有無理數 x，$f(x)=0$，　而對所有有理數 x，$f(x)=1$。試證在 $[a,b]$ 上，對任意 $a<b$，$f\notin\mathscr{R}$.

5. 假設 f 是 $[a,b]$ 上的有界實值函數，且在 $[a,b]$ 上，$f^2\in\mathscr{R}$。則會有 $f\in\mathscr{R}$ 嗎？如果我們假設 $f^3\in\mathscr{R}$，答案會變嗎？

6. 令 P 爲在 2.44 節中所建構的 Cantor 集合。令 f 爲 $[0,1]$ 上的有界實值函數，它在 P 以外的每個點都連續。試證在 $[0,1]$ 上，$f\in\mathscr{R}$
提示：P 可以被有限多線段所覆蓋，其總長可以隨我們想要的小，再如定理 6.10 中進行。
7. 假設 f 是 $(0,1]$ 上的實值函數，對每個 $c>0$，在 $[c,1]$ 上 $f\in\mathscr{R}$。定義

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{c\to 0}\int_c^1 f(x)dx$$

如果這極限存在（且有限）的話。
(a) 若在 $[0,1]$ 上 $f\in\mathscr{R}$，試證這個積分的定義與舊的相合。
(b) 試建構一函數 f，使得以上極限存在，但是若以 $|f|$ 代替 f，則不存在。
8. 假設對 a 固定，而在所有 $b>a$ 的區間 $[a,b]$ 上，$f\in\mathscr{R}$。定義

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

如果極限存在（且有限）的話。在這情形，我們說左邊的積分收斂。如果 $|f|$ 以換置 f 之後，它仍收斂，就說它是絕對收斂。
假設在 $[1,\infty)$ 上：$f(x)\geq 0$ 且 f 單調漸減。試證

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

收斂若且唯若

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

收斂。
（這就是對級數試斂性的所謂「積分試斂法」。）
9. 試證，分部積分可以用到定義在習題 7 及 8 中的「瑕積分」（improper integral）上。（敍述出適當的假設，建構一個定理，並證明之。）例如，證明

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx=\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$$

也證明其中一個積分是絕對收斂，另一個則否。
10. 若 p 和 q 是正實數，且

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

試證下列敍述。

(a) 若 $u\geq 0$ 且 $v\geq 0$，則

$$uv\leq\frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

等號成立若且唯若 $u^p=v^q$,

(b) 若 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$, $g\in\mathscr{R}(\alpha)$, $f\geq 0$, $g\geq 0$ 且

$$\int_c^b f^b d\alpha=1=\int_a^b g^q d\alpha,$$

則

$$\int_a^b fg d\alpha\leq 1$$

(c) 若 f 和 g 是 $\mathscr{R}(\alpha)$ 中的複值函數，則

$$\left|\int_a^b fg d\alpha\right|\leq\left\{\int_a^b |f|^p d\alpha\right\}^{1/p}\left\{\int_a^b |g|^q d\alpha\right\}^{1/q}$$

這就是 Hölder 不等式。當 $p=q=2$，它通常叫做 Schwarz 不等式。（留意定理 1.35 是這個的非常特殊的情形。）

(d) 試證 Hölder 不等式對定義在習題 7 和 8 中的「瑕積分」也同樣成立。

11. 令 α 爲 $[a,b]$ 上固定的漸增函數。當 $u\in\mathscr{R}(\alpha)$，定義

$$\|u\|_2=\left\{\int_a^b |u|^2 d\alpha\right\}^{1/2}$$

假設 $f,g,h\in\mathscr{R}(\alpha)$，試證三角不等式

$$\|f-h\|_2\leq\|f-g\|_2+\|g-h\|_2$$

像在定理 1.37 的證明一樣，這是 Schwarz 不等式的結論。

12. 用習題 11 中的符號，假設 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$ 且 $\varepsilon>0$。試證在 $[a,b]$ 上存在連續函數 g，使得 $\|f-g\|_2<\varepsilon$

提示：令 $P=\{x_0,\cdots\cdots,x_n\}$ 爲 $[a,b]$ 的適當的分割，定義若 $x_{i-1}\leq t\leq x_i$

$$g(t)=\frac{x_i-t}{\triangle x_i}f(x_{i-1})+\frac{t-x_{i-1}}{\triangle x_i}f(x_i)$$

13. 定義

$$f(x)=\int_{x}^{x+1}\sin(t^2)dt.$$

(a) 若 $x>0$，試證 $|f(x)|<1/x$.

提示：令 $t^2=u$，分部積分，證明 $f(x)$ 等於

$$\frac{\cos(x^2)}{2x}-\frac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)}-\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{4u^{3/2}}du.$$

再用 -1 取代 $\cos u$.

(b) 試證

$$2xf(x)=\cos(x^2)-\cos[(x+1)^2]+r(x)$$

其中 $|r(x)|<c/x$，而 c 是個常數。

(c) 當 $x\longrightarrow\infty$，試求 $xf(x)$ 的上下極限。

(d) $\int_{0}^{\infty}\sin(t^2)dt$ 收斂嗎?

14. 同樣處理

$$f(x)=\int_{x}^{x+1}\sin(e^t)dt.$$

試證

$$e^x|f(x)|<2$$

以及

$$e^xf(x)=\cos(e^x)-e^{-1}\cos(e^{x+1})+r(x)$$

其中 $|r(x)|<Ce^{-x}$，對某個常數 C。

15. 假設 f 在 $[a,b]$ 上是實值，連續可微分函數，$f(a)=f(b)=0$ 而且

$$\int_{a}^{b}f^2(x)dx=1$$

試證

$$\int_{a}^{b}xf(x)f'(x)dx=-\frac{1}{2}$$

以及

$$\int_{a}^{b}[f'(x)]^2dx\cdot\int_{a}^{b}x^2f^2(x)dx>\frac{1}{4}.$$

16. 當 $1 < s < \infty$，定義

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

（這是 Riemann 的 zeta 函數，在研究質數的分佈時非常重要。）

試證

(a) $\zeta(s)=s\int_1^{\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\,dx$

以及

(b) $\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}dx.$

其中 $[x]$ 表示小於 x 的最大整數。

試證對所有 $s>0$，(b) 中的積分都收斂。

提示：要證明 (a)，試算出在 $[1,N]$ 上的積分，與由 $\zeta(s)$ 所定義的級數，其第 N 部份和之間的差。

17. 假設在 $[a,b]$ 上 α 是單調漸增，g 是連續，而當 $a\le x\le b$, $g(x)=G'(x)$。試證

$$\int_a^b\alpha(x)g(x)dx=G(b)\alpha(b)-G(a)\alpha(a)-\int_a^b G d\alpha.$$

提示：不失一般性地，可取 g 爲實值。若 $P=\{x_0,x_1,\cdots\cdots x_n\}$ 已知，選取 $t_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使得 $g(t_i)\triangle x_i=G(x_i)-G(x_i-1)$。試證

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha(x_i)g(t_i)\triangle x_i=G(b)\alpha(b)-G(a)\alpha(a)-\sum_{i=1}^{n}G(x_{i-1})\triangle\alpha_i$$

18. 令 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 爲複數平面上的曲線，在 $[0,2\pi]$ 的定義爲

$$\gamma_1(t)=e^{it},\qquad \gamma_2(t)=e^{2it},\qquad \gamma_3(t)=e^{2\pi i t\sin(1/t)}$$

試證這三條曲線具有相同值域，而 γ_1 及 γ_2 是可度量的，γ_1 的長度是 2π, γ_2 的長度是 4π，而 γ_3 是不可度量的。

19. 令 γ_1 爲 R^k 中曲線，定義在 $[a,b]$：令 ϕ 爲由 $[c,d]$ 映至 $[a,b]$ 的連續 1-1 函數，$\phi(c)=a$：並定義 $\gamma_2(s)=\gamma_1(\phi(s))$。試證 γ_2 爲一弧，一簡單封閉曲線，一可度量曲線若且唯若 γ_1 也是如此，並證明 γ_2 與 γ_1 有相同長度。

第七章

函數序列及級數

本章中，我們集中注意力於複值函數（當然，這包括實值函數），儘管以下有些定理可以毫無困難地引伸到向量值函數，甚至到映至一般度量空間的映射上去。我們選擇仍停留在這簡單的架構中，目的是將注意力集中在當極限過程互換時，所引起的問題中最重要的一部分

主要問題的研討

7.1 定義 設$\{f_n\}, n=1, 2, 3, \cdots\cdots$，爲定義在集合$E$上的函數序列，並假設數列$\{f_n(x)\}$對每個$x\in E$都收斂，於是我們可定義函數$f$爲

(1) $$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x) \qquad (x\in E)$$

在這些情況下，我們說$\{f_n\}$在E上收斂，而f爲$\{f_n\}$的極限或極限函數。有時我們會用一個比較具有描寫性的術語說是，如果 (1) 成立，則"$\{f_n\}$在E上逐點 (pointwise)[1] 收斂到f"。同

譯註[1]：我有時譯做點態收斂，這是做形容詞用，有時用逐點收斂，做副詞用。

樣地，若$\sum f_n(x)$ 對每個$x\in E$收斂，且若我們定義

$$(2)\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x\in E),$$

則函數f叫做級數$\sum f_n$的和。

所產生的主要問題是，要決定是否函數的重要性質在(1)及(2)的極限運作下，仍然保留著。例如，若函數 f_n 都是連續，或可微，或可積，則極限函數也同樣如此嗎？比如說，f_n' 及f'之間的關係是什麼？或 f_n 的積分與f的積分之間的關係呢？

要說f在x為連續是指

$$\lim_{t\to x} f(t)=f(x)$$

因此，要問是否連續函數序列的極限為連續，就等於是問是否

$$(3)\qquad \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t),$$

即，是否所施行的極限運作的次序是無關緊要的？在（3）的左邊，我們先讓$n\longrightarrow\infty$，然後$t\longrightarrow x$；在右邊，先$t\longrightarrow x$，再$n\longrightarrow\infty$。

我們現在要用幾個例子來證明，一般的極限運作不會是互換後而不影響其結果的。然後，我們會證明在某些情況下，所施行的極限運作，其次序是無關緊要的。

我們的第一個例子，也是簡單的一個，是關於「雙重序列」(double sequence) 的。

7.2 例子 對$m=1, 2, 3, \cdots\cdots$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ 令

$$s_{m,n}=\frac{m}{m+n}$$

則，對每個固定的n

$$\lim_{m\to\infty} s_{m,n}=1,$$

因此

（4） $$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} s_{m,n}=1,$$

另一方面，對每個固定的m

$$\lim_{n\to\infty} s_{m,n}=0$$

因此

（5） $$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{m,n}=0$$

7.3 例子 令

$$f_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n} \qquad (x\ \text{實數},\ n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

並考慮

（6） $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

因爲$f_n(0)=0$，故我們有 $f(0)=0$。當$x\neq 0$，(6) 中最後的級數是一收斂幾何級數，其和爲 $1+x^2$（定理 3.26）。因此

（7） $$f(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ 1+x^2 & (x\neq 0)\end{cases}$$

所以，一連續函數的收斂級數可能有一不連續的和。

7.4 例子 對$m=1,2,3,\cdots\cdots$，令

$$f_m(x)=\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}.$$

當$m!x$爲整數。$f_m(x)=1$對所有x的其它値，$f_m(x)=0$，現在令

$$f(x)=\lim_{m\to\infty} f_m(x)$$

對無理數的x，對每個 m, $f_m(x)=0$；因此$f(x)=0$，對有理數的x，如$x=p/q$, p及q皆整數，我們知道若 $m\geq q$, $m!x$爲整數，因此 $f(x)=1$ 故

（8） $$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\pi x)^{2n}=\begin{cases}0 & (x\ \text{無理數}),\\ 1 & (x\ \text{有理數})。\end{cases}$$

我們因而得到一個到處都不連續的極限函數，它不是 Riemann 可積（第 6 章，習題 4）。

7.5 例子 令

$$(9)\qquad f_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\qquad (x \text{ 實數 } n=1,2,3,\cdots\cdots),$$

且

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$$

則$f'(x)=0$，而

$$f_n'(x)=\sqrt{n}\cos nx,$$

所以$\{f_n'\}$並不收斂到 f'。例如，當$n\longrightarrow\infty$

$$f_n'(0)=\sqrt{n}\longrightarrow+\infty$$

而 $f'(0)=0$。

7.6 **例子** 令

$$(10)\qquad f_n(x)=n^2x(1-x^2)^n\quad (0\le x\le 1, n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

當$0<x\le 1$，由定理 3.20(d) 知，我們有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\text{。}$$

又因爲$f_n(0)=0$，我們知道

$$(11)\qquad \lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\qquad (0\le x\le 1)$$

由簡單的計算可知

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx=\frac{1}{2n+2}.$$

故，且不管 (11)，當$n\longrightarrow\infty$時，

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{n^2}{2n+2}\longrightarrow+\infty$$

若，在 (10) 中，我們以n取代 n^2, (11) 仍然成立，但我們現在有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}$$

但是，

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx=0$$

因此， 積分的極限並不必要等於極限的積分， 既使兩者皆是有限。

在這些例子，它們顯示了如果極限運作不小心地互換會造成什麼錯誤，之後，我們現在定義一個新的收斂模態，比定義在定義 7.1 中的點態收斂要強些，它會使我們得到正面的結果。

均勻收斂

7.7　定義　　我們說一函數序列 $\{f_n\}$，$n=1,2,3,\cdots\cdots$ 在 E 上均勻收斂到 f，如果對每個 $\epsilon>0$ 有一個正整 N 使得 $n\geq N$ 蘊涵了，對所有 $x\in E$

(12)　　　　$|f_n(x)-f(x)|\leq\epsilon$

很明顯，每個均勻收斂序列都是點態收斂。也很顯然，這兩觀念之間的差別是這樣的：若 $\{f_n\}$ 在 E 上逐點收斂，則存在一函數 f 使得，對每個 $\epsilon>0$，以及每個 $x\in E$，有一個整數 N，與 ϵ 及 x 都有關，使得若 $n\geq N$，則 (12) 成立；若 $\{f_n\}$ 在 E 上均勻收斂，則有可能，對每個 $\epsilon>0$，找到一個整數 N，對所有 $x\in E$ 都可用。

我們說級數 $\sum f_n(x)$ 在 E 上均勻收斂，如果部份和序列 $\{s_n\}$，其定義爲

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(x)=s_n(x),$$

在 E 上均勻收斂。

對均勻收斂的 Cauchy 準則如下:

7.8 定理　定義在E上的函數序列$\{f_n\}$，在 E 上爲均勻收斂，若且唯若對每個$\epsilon>0$，存在一整數N使得$m\geq N$, $n\geq N$, $x\in E$，蘊涵了

(13)　$|f_n(x)-f_m(x)|\leq\epsilon$

證明: 設$\{f_n\}$在E上均勻收斂，並令f爲其極限函數。則有一整數N使得$n\geq N$, $x\in E$蘊涵了

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\epsilon}{2}$$

因此，若$n\geq N$, $m\geq N$, $x\in E$,

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|\leq\epsilon$$

反之，假設 Cauchy 準則成立。由定理 3.11 知，對每個x，序列$\{f_n(x)\}$收斂到一極限，我們可以稱之爲$f(x)$。因此序列$\{f_n\}$在E上收斂到f。我們必須證明這收斂是均勻的。

令$\epsilon>0$已給，並選N使得 (13) 成立。固定n，並在(13)中讓$m\longrightarrow\infty$。因爲 $f_m(x)\longrightarrow f(x)$，當$m\longrightarrow\infty$，這就給了

(14)　$|f_n(x)-f(x)|\leq\epsilon$

對每個$n\geq N$及每個$x\in E$。這便完成了證明。

下面這準則，有時也有用:

7.9 定理　假設

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\qquad(x\in E)$$

令

$$M_n=\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|.$$

則在E上$f_n\longrightarrow f$均勻地，若且唯若當$n\longrightarrow\infty$時，$M_n\longrightarrow 0$

由於這是定義 7.7 的立即結論，我們就省略證明的細節了。

對級數而言，有一個非常簡便的均勻收斂試驗法，歸功於

Wierstrass:

7.10　定理　假設$\{f_n\}$爲定義在E上的函數序列，並設

$$|f_n(x)|\leq M_n \qquad (x\in E, n=1, 2, 3, \cdots\cdots).$$

則如果 $\sum M_n$ 收斂，則 $\sum f_n$ 在E上均勻收斂。

注意，我們並未斷言其逆（而事實上，它是不眞的）。

證明：若$\sum M_n$收斂，則對任意 $\epsilon>0$

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right|\leq \sum_{i=n}^{m} M_i\leq \epsilon \qquad (x\in E)$$

如果m及n够大的話，現在由定理 7.8 導得其均勻收斂性。

均勻收斂與連續性

7.11　定理　假設在度量空間中的集合 E上，$f_n\longrightarrow f$ 均勻地，令x爲E的一極限點，並設

(15)　$$\lim_{t\to x} f_n(t)=A_n \qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

則$\{A_n\}$收斂，且

(16)　$$\lim_{t\to x} f(t)=\lim_{n\to\infty} A_n$$

換言之，這結論是說

(17)　$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)$$

證明：令 $\epsilon>0$ 已給，由$\{f_n\}$的均勻收斂性知，存在N使得 $n\geq N, m\geq N$，$t\in E$蘊涵了

(18)　$$|f_n(t)-f_m(t)|\leq \epsilon.$$

(18)中讓 $t\longrightarrow x$，我們得到當$n\geq N, m\geq N$

$$|A_n-A_m|<\epsilon$$

因此$\{A_n\}$爲一 Cauchy 序列因而收斂，比如說到A。

其次，

(19)　$$|f(t)-A|\leq|f(t)-f_n(t)|+|f_n(t)-A_n|+|A_n$$

$-A|$.

我們先取 n 使得對所有 $t\in E$

(20) $$|f(t)-f_n(t)|\leq\frac{\epsilon}{3},$$

（由均匀收收斂性知這是可能的），並使得

(21) $$|A_n-A|\leq\frac{\epsilon}{3}$$

則，對這個 n，我們選取 x 的隣域 V 使得若 $t\in V\cap E$ 且 $t\neq x$

(22) $$|f_n(t)-A_n|\leq\frac{\epsilon}{3}$$

將(20) 到 (22) 的不等式代入 (19)，我們看出，假使 $t\in V\cap E$，$t\neq x$，

$$|f(t)-A|\leq\epsilon$$

這和 (16) 式是一樣的。

7.12 定理 若$\{f_n\}$是E上連續函數的序列，且若在E上 $f_n\longrightarrow f$ 均匀地，則 f 在E上爲連續。

這個極爲重要的結果，是定理 7.11 一個立卽的系理。

其逆敍述不眞：就是，雖然不是均匀收斂，一連續函數序列仍可能收斂到一連續函數。例 7.6 就屬於此類（要知道這個，利用定理 7.9）。但有一種情形下，我們可斷言其逆：

7.13 定理 假設K是緊緻，且

(a) $\{f_n\}$是K上連續函數的序列，

(b) $\{f_n\}$在K上逐點收斂到一連續函數 f，

(c) 對所有 $x\in K$，$n=1,2,3,\cdots\cdots f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$

則在K上 $f_n\longrightarrow f$ 均匀地。

證明： 取 $g_n=f_n-f$，則 g_n 是連續，$g_n\longrightarrow 0$ 點態地，且$g_n\geq g_{n+1}$，我們必須證明在K上，$g_n\longrightarrow 0$ 均匀地。

令 $\varepsilon>0$ 已知，而 K_n 爲所有 $x\in K$ 而 $g_n(x)\geq\varepsilon$ 的集合。因爲 g_n 是連續，故 K_n 是閉集（定理 4.8），因而是緊緻（定

理 2.35）。由於 $g_n \geq g_{n+1}$，所以我們有 $K_n \supset K_{n+1}$，固定 $x \in K$，因爲 $g_n(x) \longrightarrow 0$，我們知道，若 n 足够大的話，$x \notin K_n$，因此 $x \notin \cap K_n$。換言之，$\cap K_n$ 是空集，因此對某個 N, K_N 會是空集（定理 2.36）。於是對所有 $x \in K$ 及所有 $n \geq N$，$0 \leq g_n < \varepsilon$，這便證明了這定理。

我們且留意，緊緻性在此是的確需要的，例如，若

$$f(n)=\frac{1}{nx+1} \qquad (0<x<1, n=1,2,3\cdots\cdots)$$

則在 $(0,1)$ 中，$f_n(x) \longrightarrow 0$ 單調地，但這收斂卻不是均勻的。

7.14　定義　若 X 爲度量空間，$\mathscr{C}(X)$ 則表示所以以 X 爲定義域的複值，連續，有界函數的集合。

〔注意，若 X 是緊緻的，則有界性是多餘的（定理4.15）因此若 X 是緊緻，則 $\mathscr{C}(X)$ 包含所有 X 上的複值連續函數。〕

我們對每個 $f \in \mathscr{C}(X)$，我們給一個極大值範數（supremum norm）

$$\|f\|=\sup_{x \in X}|f(x)|$$

由於 f 是假設有界的，故 $\|f\|<\infty$，很明顯，要 $\|f\|=0$，唯有對所有 $X, f(x)=0$，即，唯有 $f=0$，若 $h=f+g$，則對所有 $x \in X$，

$$|h(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \|f\|+\|g\|;$$

因此

$$\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$$

如果我們定義 $f \in \mathscr{C}(X)$ 及 $g \in \mathscr{C}(X)$ 之間的距離爲 $\|f-g\|$，則對度量的公設 2.15 就都滿足了。

因此，我們已使得 $\mathscr{C}(X)$ 成爲一個度量空間了。

定理 7.9 可以重述如下：

序列 $\{f_n\}$ 對 $\mathscr{C}(X)$ 的度量來講，收斂到 f，若且唯若在 X 上 $f_n \longrightarrow f$ 均勻地。

從而，$\mathscr{C}(X)$ 的閉子集有時也稱爲均勻封閉，集合 $\mathscr{A}\subset\mathscr{C}(X)$ 的閉包，稱做均勻閉包，等等。

7.15 定理　以上的度量使得 $\mathscr{C}(X)$ 成爲一完備度量空間。

證明： 令 $\{f_n\}$ 爲 $\mathscr{C}(X)$ 中的 Cauchy 序列。這意思是，對每個 $\varepsilon>0$，對應一個 N，使得若 $n\geq N$, $m\geq N$，則 $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$。（由定理 7.8）則知有函數 f，其定義域爲 X，而 $\{f_n\}$ 均勻收斂至 f。又由定理 7.12 知，f 是連續，更有甚者，f 是有界，蓋必有一 n，使得對所有 $x\in X$, $|f(x)-f_n(x)|<1$，而 f_n 是有界的。

因此，$f\in\mathscr{C}(X)$. 又由於在 X 上 $f_n\longrightarrow f$ 均勻地，故當 $n\longrightarrow\infty$，我們有 $\|f-f_n\|\longrightarrow 0$。

均勻收斂與積分

7.16 定理　令 α 在 $[a, b]$ 上是單調漸增，假設在 $[a, b]$ 上，$f_n\in\mathscr{R}(\alpha)$, $n=1, 2, 3\cdots\cdots$ 並設在 $[a, b]$ 上 $f_n\longrightarrow f$ 均勻地，則在 $[a, b]$ 上，，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$，且

$$\int_a^b f\,d\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n d\alpha. \tag{23}$$

（極限的存在性也是結論的一部份）

證明： 對實值的 f_n 來證明就够了。取

$$\varepsilon_n=\sup|f_n(x)-f(x)|, \tag{24}$$

這 sup 是對 $a\leq x\leq b$ 來取的。則

$$f_n-\varepsilon_n\leq f\leq f_n+\varepsilon_n$$

所以 f 的上下積分（定義 6.2）便滿足

$$\int_a^b(f_n-\varepsilon_n)d\alpha\leq\underline{\int}f\,d\alpha\leq\overline{\int}f\,d\alpha\leq\int_a^b(f_n+\varepsilon_n)d\alpha. \tag{25}$$

因此，

$$0 \leq \overline{\int} f\,d\alpha - \underline{\int} f\,d\alpha \leq 2\varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)]$$

由於當 $n \longrightarrow \infty, \varepsilon_n \longrightarrow 0$（定理 7.9），故 f 的上下積分便相等。

所以 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$，再應用（25）式，現在便得到

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha - \int_a^b f_n\,d\alpha\right| \leq \varepsilon_n[\alpha(b)-\alpha(a)] \tag{26}$$

這蘊涵了（23）式

系．若在 $[a, b]$ 上，$f_n \in \mathscr{R}(\alpha)$，且若

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

這級數在 $[a, b]$ 上爲均匀收斂，則

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,d\alpha$$

換言之，這級數可以逐項積分。

均匀收斂與微分

在例 7.5 中，我們早已看到 $\{f_n\}$ 的均匀收斂性並不蘊涵任何關於$\{f_n'\}$序列的消息。因此若$f_n \longrightarrow f$，對 $f_n' \longrightarrow f'$的斷言需要更強的假設。

7.17　定理　假設 $\{f_n\}$ 爲函數序列，在 $[a, b]$ 上可微且對某個 $[a, b]$ 的點x_0，$\{f_n(x_0)\}$收斂，若在 $[a, b]$ 上$\{f_n'\}$均匀收斂，則$\{f_n\}$在 $[a, b]$ 上均匀收斂到一函數 f，且

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (a \leq x \leq b) \tag{27}$$

證明：令 $\epsilon > 0$ 已給，選取N使得 $n \geq N, m \geq N$蘊涵了

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{28}$$

且

(29)
$$|f_n'(t)-f'_m(t)|<\frac{\epsilon}{2(b-a)}\qquad (a\leq t\leq b)$$

如果我們將均值定理 5.19 用到函數 f_n-f_m 上，（29）式顯示，若 $n\geq N, m\geq N$，則對任意〔a, b〕上的 x 和 t，

(30)
$$|f_n(x)-f_m(x)-f_n(t)+f_m(t)|\leq\frac{|x-t|\epsilon}{2(b-a)}\leq\frac{\epsilon}{2}$$

又由（28）及（30）知，不等式

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x)-f_m(x)-f_n(x_0)+f_m(x_0)|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|$$

蘊涵了

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon\qquad (a\leq x\leq b, n\geq N, m\geq N)$$

所以$\{f_n\}$在〔a, b〕上是均匀收斂。令

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\qquad (a\leq x\leq b)$$

我們現在且固定〔a, b〕上一點 x，並定義當 $a\leq t\leq b$，$t\neq x$

(31)
$$\phi_n(t)=\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x},\quad \phi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

則

(32)
$$\lim_{t\to x}\phi_n(t)=f_n'(x)\qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

（30）式中第一個不等式顯示

$$|\phi_n(t)-\phi_m(t)|\leq\frac{\epsilon}{2(b-a)}\qquad (n\geq N, m\geq N),$$

因此當 $t\neq x$，$\{\phi_n\}$均匀收斂，由於$\{f_n\}$收斂到 f，由（31）我們便歸結到，對 $a\leq t\leq b$，$t\neq x$

(33)
$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\phi(t)$$

均匀地。

如果我們現在將定理 7.11 用到$\{\phi_n\}$去，(32) 及 (33) 顯示

$$\lim_{t\to x}\phi(t)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$$

而由 $\phi(t)$ 的定義，這就是 (27) 式。

備註：如果除了以上的假設之外，再加上 f_n' 諸函數連續性的假設，則 (27) 式可由定理 7.16 及微積分基本定理，而得到較此短捷得多的證明。

7.18 定理　在實軸上存在一個無處可微的實值函數。

證明： 定義

(34) $$\varphi(x)=|x| \qquad (-1\leq x\leq 1)$$

並經由定義

(35) $$\varphi(x+2)=\varphi(x)$$

而將 $\varphi(x)$ 的定義擴展到所有實數 x，

則對所有 s 和 t

(36) $$|\varphi(s)-\varphi(t)|\leq|s-t|$$

特別是，φ 在 R^1 上是連續的，定義

(37) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^n x)$$

由於 $0\leq\varphi\leq 1$，由定理 7.10 知，級數 (37) 在 R^1 上均勻收斂。由定理 7.12 知，f 在 R^1 上是連續。

現在固定實數 x，及正整數 m，取

(38) $$\delta_m=\pm\frac{1}{2}\cdot 4^{-m}$$

這裏的符號是取得，使在 $4^m x$ 及 $4^m(x+\delta_m)$ 之間不會有整數存在，這是可以做到的，蓋 $4^m|\delta_m|=\dfrac{1}{2}$　定義

(39) $$\gamma_n=\frac{\varphi(4^m(x+\delta_m)-\varphi(4^n x)}{\delta_m}$$

當 $n>m$，則 $4^n\delta_m$ 是個偶數，故 $\gamma_n=0$。當 $0\leq n\leq m$，

(36)式蘊涵了$|\gamma_n|\leq 4^n$

由於$|\gamma_m|=4^n$，我們便歸結到

$$\left|\frac{f(x+\delta_m)-f(x)}{\delta_m}\right|=\left|\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{3}{4}\right)^n\gamma_n\right|$$

$$\geq 3^m-\sum_{n=0}^{m-1}3^n$$

$$=\frac{1}{2}(3^m+1)$$

當$m\longrightarrow\infty$，$\delta_m\longrightarrow 0$，於是$f$在$x$不可微。

函數的等連續族

在定理 3. 6 中，我們看到每個複值有界序列必含有一收斂部份序列，而是否對函數序列言，某些類似的結論也成立的問題便產生了。爲了要使問題更確切起見，我們要定義兩種有界性的意義。

7.19　定義　令$\{f_n\}$爲定義在集合E上的函數序列。

我們說$\{f_n\}$在E上爲點態有界 (pointwise bounded)，如果$\{f_n(x)\}$這序列對每個點$x\in E$都有界，就是說，如果存在一個定義在E上的有限值函數使得

$$|f_n(x)|<\phi(x)\qquad (x\in E, n=1.\ 2.\ 3.\ \cdots\cdots)$$

我們說$\{f_n\}$在E上是均勻有界 (uniformly bounded)，如果存在一數M使得

$$|f_n(x)|<M\qquad (x\in E, n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

現在，如果$\{f_n\}$在E上是點態有界而E_1是E可數子集，則要找到部份序列$\{f_{nk}\}$，使得對每個$x\in E_1$，$\{f_{n_k}(x)\}$收斂，這是永遠可能的。這可以由在定理 7. 23 的證明中所用的對角線法 (diagonal process) 來做。

然而，既使$\{f_n\}$是在一個緊緻集合E上的均勻有界連續函數序列，卻並不一定存在部分序列，它在E上逐點收斂。在下面所給的例子中，如果用我們目前手邊所有的知識來證明這點，是很麻煩的，但是如果我們引用第 11 章的一個定理，證明就會很簡單了。

7.20　例子　　令

$$f_n(x)=\sin nx \qquad (0\leq x\leq 2\pi, n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

假使對每個$x\in[0,2\pi]$，存在一序列$\{n_k\}$使得$\{\sin n_k x\}$收斂，在那種情形我們一定有

$$\lim_{k\to\infty}(\sin n_k x-\sin n_{k+1}x)=0 \qquad (0\leq x\leq 2\pi)$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}(\sin n_k x-\sin n_{k+1}x)^2=0 \qquad (0\leq x\leq 2\pi) \tag{40}$$

由 Lebesgue 的關於有界收斂序列的積分定理（定理 11. 32）知，(40) 蘊涵了

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}(\sin n_k x-\sin n_{k+1}x)^2dx=0 \tag{41}$$

但是，簡單的計算顯示

$$\int_0^{2\pi}(\sin n_k x-\sin n_{k+1}x)^2dx=2\pi,$$

這與 (41) 式矛盾，

另外一個問題就是，是否每個收斂序列必包含一個均勻收斂的部份序列，我們下一個例子會顯示這並非一定如此，就算是這序列在一緊緻集合上是均勻有界。（例 7.6 顯示了一有界函數序列可能是收斂但不是均勻有界；但顯而易見的，有界函數序列的均勻收斂性則蘊涵了均勻有界。）

7.21　例子　　令

$$f_n(x)=\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2} (0\leq x\leq 1, n=1,2,3\cdots\cdots)$$

則 $|f_n(x)|\le 1$，故 $\{f_n\}$ 在〔0,1〕上是均勻有界。此外

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \qquad (0\le x\le 1),$$

但是

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1 \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

因此不會有部份序列在〔0,1〕上均勻收斂。

在這關鍵上所須的概念是等連續性 (equicontinuity)；由下面定義所定。

7.22 定義 定義在度量空間 X 中一集合 E 上的函數 f 所成的集合 $\mathscr{F}$，叫做在 E 上等連續 (equicontinuous)，如果對每個 $\epsilon>0$，存在一 $\delta>0$，使得只要 $d(x,y)<\delta$，$x\in E$，$y\in E$，且 $f\in\mathscr{F}$，則

$$|f(x)-f(y)|<\epsilon$$

d 表示 X 的度量。

很明顯，等連續族的每個元素都是均勻連續的。

例 7.21 的序列就不是等連續的。

在等連續方面與連續函數序列的均勻收斂性方面，其間有非常密切的關係，但我們先描述一個選擇程序，它與連續性毫無關係。

7.23 定理 若 $\{f_n\}$ 是可數集合 E 上的點態有界，複值函數序列，則 $\{f_n\}$ 有一部份列 $\{f_{n_k}\}$ 使得 $\{f_{n_k}(x)\}$ 對所有 $x\in E$ 都收斂。

證明： 令 $\{x_i\}$，$i=1,2,3,\cdots\cdots$，爲 E 的點，排列成一序列。由於 $\{f_n(x_1)\}$ 爲有界，故存在一部份序列，我們記作 $\{f_{1,k}\}$，使得 $\{f_{1,k}(x_1)\}$ 在 $k\longrightarrow\infty$ 時收斂。

我們現在考慮序列 $S_1, S_2, S_3\cdots\cdots$，我們可以用行列表示爲

$$S_1: f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}, f_{1,4}\cdots\cdots$$

$$S_2: f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}, f_{2,4} \cdots\cdots$$
$$S_3: f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, f_{3,4}, \cdots\cdots$$
$$\vdots$$

而它們具有下列性質：

(a) 對 $n=2,3,4,\cdots\cdots, S_n$ 是 S_{n-1} 的部份序列；

(b) $\{f_{n,k}(x_n)\}$ $k\longrightarrow\infty$在時收斂（$\{f_n\}$的有界性，使我們可以這樣選擇 S_n）。

(c) 在每個序列中，函數出現的次序是一樣的；即，若在S_1中某個函數在另一個之前，則在每個 S_n 中，它們也是有著同樣的關係，直到其中之一被剔去爲止。因此，在由上面一列到下一列，函數可能向左移，但永不可能向右移。

我們現在沿著行列的對角線走；即，我們考慮序列

$$S: f_{1,1}, f_{2,2}, f_{3,3}, f_{4,4}, \cdots\cdots$$

由 (c) 知，序列 S（除了可能它的前 $n-1$ 項之外）是 S_n 的部份序列，$n=1,2,3,\cdots\cdots$。因此，(c) 蘊涵了當 $n\longrightarrow\infty$，對每個$x_i\in E, \{f_{n,n}(x_i)\}$收斂。

7.24　定理　若 K 是緊緻度量空間，對 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ $f_n\in\mathscr{C}(K)$，且若$\{f_n\}$在K上均勻收斂，則 $\{f_n\}$ 在 K 上是等連續。

證明：令 $\varepsilon>0$ 已知，由於$\{f_n\}$均勻收斂，故有一整數N，使得

$$\|f_n-f_N\|<\varepsilon \qquad (n>N) \tag{42}$$

（見定義 7.14）由於連續函數在緊緻集合上是均勻連續，故有 $\delta>0$，使得若 $1\leq i\leq N$ 且 $d(x,y)<\delta$，則

$$|f_i(x)-f_i(y)|<\varepsilon \tag{43}$$

若 $n>N$ 且 $d(x,y)<\delta$，則得到

$|f_n(x)-f_n(y)|\leq|f_n(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N$

$(y)-f_n(y)|<3\varepsilon$. 和 (43) 合起來，便證得這定理。

7.25 定理 若 K 是緊緻，當 $n=1,2,3,\cdots\cdots$，$f_n\in\mathscr{C}(K)$，且若$\{f_n\}$在K上是點態有界及等連續，則

(a) $\{f_n\}$在K上是均勻有界，

(b) $\{f_n\}$包含一均勻收斂部份列。

證明: (a) 令 $\varepsilon>0$ 已知，並選取 $\delta>0$，以與定義 7.22 相合，因此對所有 n，只要 $d(x,y)<\delta$ 的話，

(44) $$|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$$

由於K是緊緻，故在 K 中有有限多點 $p_1,\cdots\cdots,p_r$，使得對每個 $x\in K$，都對應有至少一個 p_i 而$d(x,p_i)<\delta$。由於 $\{f_n\}$ 是點態有界，故存在 $M_i<\infty$，使得對所有 $|f_n(p_i)|<M_i$，若 $M=\max\{M_1,\cdots\cdots,M_r\}$，則對所有 $x\in K$, $|f(x)|<M+\varepsilon$。這就證明了 (a)。

(b) 令E爲K中的稠密可數子集。(這樣的集合E存在，見第2章，習題 25) 由定理 7.23 知，$\{f_n\}$有一部份列$\{f_{n_i}\}$，使得對所有 $x\in E$ $\{f_{n_i}(x)\}$收斂。

取$f_{n_i}=g_i$ 以簡化符號。我們要證明$\{g_i\}$在K上是均勻收斂。

令 $\varepsilon<0$，並取 $\delta>0$，就如證明開始時一樣，令$V(x,\delta)$爲所有 $y\in K$，而 $d(x,y)<\delta$ 的集合，由於E在K中稠密，且K爲緊緻，故在E中有有限多點x_1，$\cdots\cdots,x_m$，使得

(45) $$K\subset V(x_1,\delta)\cup\cdots\cdots\subset V(x_m,\delta).$$

由於對所有 $x\in E$, $\{g_i(x)\}$，都收斂，故有整數N，使得

(46) $$|g_i(x_s)-g_j(x_s)|<\varepsilon$$

只要 $i\geq N$, $j\geq N$, $1\leq s\leq m$。

若 $x\in K$，(45) 式顯示對某個 s, $x\in V(x_s,\delta)$，所以對所有 i

$$|g_i(x)-g_i(x_s)|<\varepsilon。$$

若 $i\geq N$且 $j\geq N$，由 (46) 式，得出

$|g_i(x)-g_j(x)|\leq|g_i(x)-g_i(x_s)|+|g_i(x_s)-g_j(x_s)|+|g_j(x_s)-g_j(x)|<3\varepsilon$. 證畢。

Stone-Weierstrass 定理

7.26　定理　若 f 是 $[a, b]$ 上連續複值函數，則存在一多項式 P_n 的序列，使得在 $[a,b]$ 上

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$$

均勻地。若 f 是實值，則 P_n 可以取代實值。

這就是由 Weierstrass 原先發現的定理的出現的型式。

證明: 不失一般性地，我們可以假設 $[a,b]=[0,1]$。我們也假設 $f(0)=f(1)=0$。蓋若定理對這情形證得了，則考慮

$$g(x)=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)]\quad(0\leq x\leq 1)$$

這裏的 $g(0)=g(1)=0$，且若 g 能由一個多項式的均勻收斂序列之極限得到，則很顯然對 f 而言也同樣爲眞，蓋 $f-g$ 一是個多項式。

此外，我們定義，對 $[0,1]$ 之外的 x, $f(x)=0$。則 f 在整條線上是均勻連續。

我們令

(47)　$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n\qquad(n=1,2,3,\cdots\cdots),$$

這裏的 c_n 是取得使

(48)　$$\int_{-1}^{1}Q_n(x)dx=1\quad(n=1,2,3\cdots\cdots)$$

我們還需要一些 c_n 大小的資料，由於

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=2\int_0^1(1-x^2)^n dx$$

$$\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nx^2)dx=\frac{4}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$$

於是由 (48) 得

(49)　$$c_n<\sqrt{n}$$

我們上面用到的不等式 $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$，很容易證明爲眞，考慮這函數

$$(1-x^2)^n - 1 + nx^2$$

在 $n=0$ 時它是零，而在 $(0,1)$ 中它的導數皆正。

對任意的 $\delta > 0$，(49) 蘊涵了

$$Q_n(x) \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \qquad (\delta \leq |x| \leq 1) \tag{50}$$

因此，在 $\delta \leq |x| \leq 1$ 中，$Q_n \longrightarrow 0$ 均勻地。

現在令

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\,dt \qquad (0 \leq x \leq 1) \tag{51}$$

經由簡單的變數變換，我們對 f 的假設顯示

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t) Q_n(t-x)\,dt,$$

而最後一個積分顯然是 x 的多項式。因此 $\{P_n\}$ 是多項式序列且若 f 爲實值，它也是實值。

給定 $\epsilon > 0$，我們選取 $\delta > 0$ 使得 $|y-x| < \delta$ 蘊涵了

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

令 $M = \sup|f(x)|$。利用 (48) 及 (50)，和 $Q_n(x) \geq 0$ 的事實，我們看出對 $0 \leq x \leq 1$，及所有够大的 n

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)] Q_n(t)\,dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\,dt \\
&\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\,dt + \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt \\
&\quad + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,dt \\
&\leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon
\end{aligned}$$

這就證明了這定理。

對少數 n 值畫出 Q_n 的圖是很有用的；此外，留意我們需要 f 的均勻連續性來導出$\{P_n\}$的均勻收斂。

在定理 7.32 的證明中，我們並不須要定理 7.26 的全部，而只是下面的特殊情形，我們將之敍述爲一個系。

7.27 系 對每個區間 $[-a, a]$，有一實值多項式序列P_n使得 $P_n(0)=0$ 而且在 $[-a, a]$ 上

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=|x|$$

均勻地。

證明：由定理 7.26 知，存在實值多項式序列 $\{P_n^*\}$，它在 $[-a, a]$ 上均勻收斂到$|x|$。特別是，當 $n\longrightarrow\infty, P_n^*(0)=0$。而多項式

$$P_n(x)=P_n^*(x)-P_n^*(0) \qquad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

便具有所要的性質。

我們現在要分析出那些使得 Weierstrass 定理成立的多項式的性質。

7.28 定義 定義在集合E上的複值函數族$\mathscr{A}$叫做一個代數 (algebra)，如果對$f\in\mathscr{A}$，$g\in\mathscr{A}$及所有複值常數 c 而言，(i) $f+g\in\mathscr{A}$，(ii) $fg\in\mathscr{A}$ (iii) $cf\in\mathscr{A}$且，即是，若$\mathscr{A}$在加法，乘法及數乘之下是封閉的。我們也須要考慮實值函數所成的代數；在這情況下，(iii) 當然只要求對所有實數 c 都成立就够了。

若$\mathscr{A}$還具有這樣的性質，就是只要$f_n\in\mathscr{A}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$且在$E$上$f_n\longrightarrow f$ 均勻地，則 $f\in\mathscr{A}$。那麼，$\mathscr{A}$就說成是均勻封閉的 (uniformly closed)。

令 $\mathscr{A}$ 中元素所成的所有均勻收斂序列，其極限函數所成的集合爲$\mathscr{B}$，則$\mathscr{B}$叫做$\mathscr{A}$的均勻閉包 (uniform closure)。(見定義 7.14)

例如，所有多項式的集合是個代數，而 Weierstrass 定理可以敍述爲，$[a, b]$ 上連續函數所成立集合，是 $[a, b]$ 上多項式

所成集合的均勻閉包。

7.29 定理 令$\mathscr{B}$爲有界函數所成之代數的均勻閉包，則$\mathscr{B}$是個均勻封閉代數。

證明: 如果$f\in\mathscr{B}$且$g\in\mathscr{B}$，則存在二均勻收斂序列$\{f_n\}$，$\{g_n\}$使得 $f_n\longrightarrow f, g_n\longrightarrow g$ 而 $f_n\in\mathscr{A}, g_n\in\mathscr{B}$。由於我們是處理有界函數，故很容易證明

$$f_n+g_n\longrightarrow f+g,\quad f_ng_n\longrightarrow fg, cf_n\longrightarrow cf,$$

這裏的 c 是任意常數，在每種情況中，收斂都是均勻的。

因此$f+g\in\mathscr{B}, fg\in\mathscr{B}$，且 $cf\in\mathscr{B}$，所以$\mathscr{B}$是個代數。

由定理 2.27 知，$\mathscr{B}$是（均勻）封閉的。

7.30 定義 令$\mathscr{A}$爲定義在E上的函數族，則我們說$\mathscr{A}$分離E上的點 (to separate points on E)，如果對每組相異點，$x_1, x_2\in E$，必對應一函數$f\in\mathscr{A}$使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 。

若對每個$x\in E$，對應有一函數$g\in\mathscr{A}$使得$g(x)\neq 0$，我們就說$\mathscr{A}$在E的任何點都不消失 (Vanish at no point of E)。

所有單變數的多項式代數數在 R^1 上就具有這些性質。一個不分離點的代數例子是所有如定義在 〔$-1, 1$〕 上的偶多項式的集合，蓋對每個偶函數f而言$f(-x)=f(x)$。

下面這定理會進一步例示這些觀念。

7.31 定理 假設$\mathscr{A}$是由定義在E上的函數所成之代數，$\mathscr{A}$分離E上的點，而$\mathscr{A}$在E的任何點都不消失。假使 x_1, x_2 是E的相異點，而 c_1, c_2 是常數 （若$\mathscr{A}$是實值代數，它們就是實數）。則$\mathscr{A}$包含一函數f使得

$$f(x_1)=c_1,\qquad f(x_2)=c_2.$$

證明: 由假設知，$\mathscr{A}$包含了函數 g, h 和 k，使得

$$g(x_1)\neq g(x_2),\qquad h(x_1)\neq 0\qquad k(x_2)\neq 0$$

取

$$u=gk-g(x_1)k,\qquad v=gh-g(x_2)h.$$

則$u\in\mathscr{A}$，$v\in\mathscr{A}, u(x_1)=v(x_2)=0, u(x_2)\neq 0$且 $v(x_1)\neq 0$

所以

$$f=\frac{c_1v}{v(x_1)}+\frac{c_2u}{u(x_2)}$$

具有所要的性質。

我們現在就有了所有那些 Stone 對 Weierstrass 定理一般化所須要的材料了:

7.32　定理　令 $\mathscr{A}$ 爲定義在緊緻集合 K 上的實值連續函數所成的代數。若 $\mathscr{A}$ 分離 K 上的點，且若 $\mathscr{A}$ 在 K 上任何點都不消失，則 $\mathscr{A}$ 的均勻閉包 $\mathscr{B}$ 包含了所有定義在 K 上的實值連續函數。

我們要將證明分爲四個步驟。

第 1 步: 若 $f\in\mathscr{B}$，則 $|f|\in\mathscr{B}$。

證明: 令

$$a=\sup|f(x)|\qquad (x\in K)\tag{52}$$

並令 $\epsilon>0$ 已給，由系 7.27 知，存在有實數 $c_1,\cdots\cdots,c_n$ 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}c_iy^i-|y|\right|<\epsilon\qquad (-a\leq y\leq a)\tag{53}$$

由於 $\mathscr{B}$ 是個代數，

$$g=\sum_{i=1}^{n}c_if^i$$

這個函數是 $\mathscr{B}$ 中的元素。由 (52) 及 (53)，我們有

$$\big|g(x)-|f(x)|\big|<\epsilon\qquad (x\in K)$$

又因爲 $\mathscr{B}$ 是均勻封閉的，這便顯示了 $|f|\in\mathscr{B}$。

第 2 步。若 $f\in\mathscr{B}$ 且 $g\in\mathscr{B}$，且 $\max(f,g)\in\mathscr{B}$ 且 $\min(f,g)\in\mathscr{B}$。所謂 $\max(f,g)$，我們的意思是定義如下的函數 h:

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & \text{如果 } f(x)\geq g(x)\\ g(x) & \text{如果 } g(x)\geq f(x)\end{cases}$$

而 $\min(f,g)$ 也同樣地定義。

證明: 這第二步可由第一步及

$$\max(f,g)=\frac{f+g}{2}+\frac{|f-g|}{2},$$

$$\min(f,g)=\frac{f+g}{2}-\frac{|f-g|}{2}$$

這兩個恒等式導得。

由疊代法 (iteration)，這結果當然可以擴展到任意有限個函數的集合：若$f_1,\cdots\cdots,f_n\in\mathscr{B}$，則$\max(f_1,\cdots\cdots,f_n)\in\mathscr{B}$且$\min(f_1,\cdots\cdots,f_n)\in\mathscr{B}$

第3步。所予一函數f，在K上連續，一點$x\in E$，及$\epsilon>0$，則存在一函數 $g_x\in\mathscr{B}$使得 $g_x(x)=f(x)$ 且

(54) $$g_x(t)>f(t)-\epsilon\ (t\in K).$$

證明: 由於$\mathscr{A}\subset\mathscr{B}$且$\mathscr{A}$滿足定理 7.31 的假設，則$\mathscr{B}$也一樣。因此對每個$y\in K$，我們可以找到一函數 $h_y\in\mathscr{B}$使得

(55) $$h_y(x)=f(x),\qquad h_y(y)=f(y)$$

由 h_y 的連續性知，存在一開集合 J_y，包含 y，並使得

(56) $$h_y(t)>f(t)-\epsilon\qquad (t\in J_y).$$

由於K是緊緻，故有有限點 $y_1,\cdots\cdots,y_n$ 之集合使得

(57) $$K\subset J_{y_1}\cup\cdots\cdots\cup J_{y_n}$$

令

$$g_x=\max(h_{y_1},\cdots\cdots h_{y_n})$$

由第2步知，$g_x\in\mathscr{B}$，而 (66) 到 (68) 的關係式顯示，g_x 具有另一個所需的性質。

第4步。所予一實值函數f，在K上連續，以及$\epsilon>0$，則存在一函數$h\in\mathscr{B}$使得

(58) $$|h(x)-f(x)|<\epsilon$$

由於是均勻封閉的，這段敍述就相當於本定理的結論了。

證明：對每個 $x\in K$，我們考慮如第 3 步中所建構的函數 g_x。由 g_x 的連續性知，存在包含 x 的開集合 V_x 使得

(59) $$g_x(t)<f(t)+\epsilon \qquad (t\in V_x)$$

因爲 K 是緊緻，故存在有限點集 $x_1,\cdots\cdots,x_m$ 使得

(60) $$K\subset V_{x_1}\cup\cdots\cdots\cup V_{x_m}$$

取

$$h=\min(g_{x_1},\cdots\cdots,g_{x_m})$$

由第 2 步知，$h\in\mathscr{B}$ 而 (54) 蘊涵了

(61) $$h(t)>f(t)-\epsilon \qquad (t\in K)$$

然而 (59) 及 (60) 又蘊涵了

$$h(t)<f(t)+\epsilon \qquad (t\in K)$$

結果，由 (61) 及 (62) 導得 (58)。

定理 7.32 對複值代數而言並不成立，在習題 21 中舉了一個反例。然而，如果對 $\mathscr{A}$ 再附加一個條件，即，$\mathscr{A}$ 爲自伴的 (self-adjoint)，則本定理之結論，既使是對複值代數，也確實成立。所謂自伴的意思是，對每個 $f\in\mathscr{A}$，它的共軛複數 $\bar{f}$ 必也屬於 $\mathscr{A}$；$\bar{f}$ 是定義爲 $\bar{f}(x)=\overline{f(x)}$。

7.33 定理　假設 $\mathscr{A}$ 是在緊緻集合 K 上的複值連續函數，所成的自伴代數，$\mathscr{A}$ 分離 K 上的點，且 $\mathscr{A}$ 不在 K 上任一點消失，則 $\mathscr{A}$ 的均勻閉包 $\mathscr{B}$，包含了所有 K 上的複值連續函數。換言之，$\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{C}(K)$ 中稠密。

證明：令 $\mathscr{A}_R$ 爲所有屬於 $\mathscr{A}$，且定義在 K 上的實值函數所成的集合，

若 $f\in\mathscr{A}$ 而 $f=u+iv$，其中的 u,v 是實值，則 $2u=f+\bar{f}$，又因爲 $\mathscr{A}$ 是自伴的，我們知道 $u\in\mathscr{A}_R$。若 $x_1\neq x_2$ 則存在 $f\in\mathscr{A}$ 使得 $f(x_1)=1$，$f(x_2)=0$；因此 $0=u(x_2)\neq u(x_1)=1$，這便顯示 $\mathscr{A}_R$ 分離了 K 上的點。若 $x\in K$，則對某個 $g\in\mathscr{A}$，$g(x)\neq 0$，於是有一複數 λ 使得 $\lambda g(x)>0$；如果 $f=\lambda g$，$f=$

$u+iv$便導得 $u(x)>0$；因此$\mathscr{A}_R$不在上K任何點消失。

故$\mathscr{A}_R$滿足 7.32 定理的假設。於是得到每個K上的實值連續函數都在$\mathscr{A}_R$的均勻閉包裏面，故也在$\mathscr{B}$裏面。如果f是K上的複值連續函數，$f=u+iv$，則 $u\in\mathscr{B}$，因此$f\in\mathscr{B}$。這便完成了證明。

習題

1. 試證每個由有界函數所成的均勻收斂序列是均勻有界。
2. 若$\{f_n\}$和$\{g_n\}$在E上均勻收斂，試證$\{f_n+g_n\}$在E上均勻收斂。此外，若$\{f_n\}$和$\{g_n\}$是有界函數序列，試證$\{f_ng_n\}$在E上均勻收斂。
3. 試建構序列$\{f_n\}$，$\{g_n\}$，它們在E上均勻收斂，但$\{f_ng_n\}$在E上不是均勻收斂（當然，$\{f_ng_n\}$ 在E上是收斂的）。
4. 考慮
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x}.$$
則對那些x值，這級數會絕對收斂？在那個區間它均勻收斂？在那些區間它不是均勻收斂？f在級數收斂的地方都連續嗎？f是有界嗎？
5. 令
$$f_n(x)=\begin{cases}0 & \left(x<\dfrac{1}{n+1}\right)\\ \sin^2\dfrac{\pi}{x} & \left(\dfrac{1}{n+1}\le x\le\dfrac{1}{n}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{1}{n}<x\right)\end{cases}$$
試證$\{f_n\}$收斂，但非均勻地，到一連續函數。利用級數 Σf_n 以證明，既使對所有x，（級數）絕對收斂，也不蘊涵均勻收斂。
6. 試證級數
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$$
在每個有界區間都是均勻收斂，但對任何x值都不是絕對收斂。
7. 對$n=1,2,3,\cdots\cdots$，x實數，令

$$f_n(x)=\frac{x}{1+nx^2}$$

試證 $\{f_n\}$ 均勻收斂到一函數 f，但方程式

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$$

當 $x\neq 0$ 則爲眞確，若 $x=0$ 則否。

8. 若

$$I(x)=\begin{cases}0 & (x\leq 0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$$

若$\{x_n\}$是(a,b)中相異點之序列，且若$\Sigma|c_n|$收斂，試證級數

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nI(x-x_n)\qquad (a\leq x\leq b)$$

均勻收斂，且對每個 $x\neq x_n$，f 爲連續。

9. 令 $\{f_n\}$ 爲連續函數序列，在集合 E 上均勻收斂到函數 f。試證，對每個 $x_n\in E$ 而 $x_n\longrightarrow x$，$x\in E$ 的序列，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x).$$

其逆亦眞嗎?

10. 令(x)表示實數 x 的小數部份（其定義見第 4 章習題 16），考慮函數

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}\qquad (x\text{ 實數})。$$

試求所有 f 的不連續點，並證明它們形成一個可數稠密集合。雖然，證明在每個有界區間上，f 是 Riemann 可積。

11. 假設，$\{f_n\}$，$\{g_n\}$定義在E上，且
   (a) Σf_n 具有均勻有界的部份和。
   (b) 在E上，$g_n\longrightarrow 0$ 均勻地。
   (c) $g_1(x)\geq g_2(x)\geq g_3(x)\geq\cdots\cdots$對每個$x\in E$。則 Σf_ng_n 在E上均勻收斂。提示：與定理 3.42 比較之。

12. 假設g和 $f_n(n=1,2,3\cdots\cdots)$ 都定義在 $(0,\infty)$ 上，且只要$0<t<T<\infty$，它們在 $[t,T]$ 上都是 Riemann 可積，而在 $(0,\infty)$ 中每個緊緻子集上$|f_n|\leq g_n$，$f_n\longrightarrow f$ 均勻地，且

$$\int_0^\infty g^\infty(x)dx<\infty$$

試證

$$\lim\int_0^\infty f_n(x)dx=\int_0^\infty f(x)dx.$$

（見第 6 章習題 7 及 8，以求其相關定義）。

這是 Lebesgue 制約收斂定理（定理 11.32）的一個相當弱的形式。既使是在 Riemann 積分系統裏，如果假設了 $f\in\mathscr{R}$，均勻收斂條件可以用點態收斂來取代，（見 F. Cunningham 的論文，在 Math. Mag., Vol. 40, 1967, pp. 179-186 以及，H. Kestelman, Amer. Math. Monthly, Vol. 77, 1970, pp. 182-187.）

13. 假設$\{f_n\}$是 R^1 上單調漸增函數的序列，且對所有 x 及所有 n，$0\leq f_n(x)\leq 1$，

(a) 試證存在一函數 f 及序列$\{n_k\}$，使得對所有 $x\in R^1$

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{nk}(x).$$

〔這樣一個逐點收斂部份列之存在，通常稱爲 Helly 選擇定理(Helly's selection theorem.)〕

(b) 此外，若 f 是連續，試證在 R^1 上 $f_{nk}\longrightarrow f$ 均勻地。

提示：（i）某個部份列$\{f_{nk}\}$在所有有理點 r 上收斂到，譬如說，$f(r)$。(ii)對任意 $x\in R^1$，定義 $f(x)$ 爲 $\sup f(r)$，這 sup 是對所有 $x\leq r$ 來取的。(iii) 證明在所有 f 的連續點 x 上，$f_{n_i}(x)\longrightarrow f(x)$（這就是充分用到單調性的地方。）(iv)有一$\{f_{n_i}\}$的部份列在每個 f 不連續的點上，都收斂，蓋這類點最多是可數。這就證明了 (a)。要證明 (b)，將你對 (iii) 的證明適當地修飾一下。

14. 令 f 爲 R^1 上的連續實值函數，具有下列性質：對每個 t，$0\leq f(t)\leq 1$，$f(t+2)=f(t)$ 且

$$f(t)=\begin{cases}0 & \left(0\leq t\leq\frac{1}{3}\right)\\ 1 & \left(\frac{2}{3}\leq t\leq 1\right)\end{cases}$$

取 $\Phi(t)=(x(t),y(t))$，其中

$$x(t)=\Sigma 2^{-n}f(3^{2n-1}t),\quad y(t)=\Sigma 2^{-n}f(3^{2n}t).$$

試證Φ是連續，且Φ將$I=[0,1]$映成單位正方形 $I^2\subset R^2$。事實上，證明Φ將 Cantor 集合映成 I^2。

提示：每個 $(x_0, y_0)\in I^2$ 都具有這種型式。

$$x_0=\sum 2^{-n}a_{2n-1},\quad y_0=\sum 2^{-n}a_{2n}.$$

其中的每個 a_i 都是 0 或 1 。若

$$t_0=\sum_{i=1}^{\infty}3^{-i-1}(2a_i)$$

試證 $f(3^kt)=a_k$，而因此得出 $x(t_0)=x_0, y(t_0)=y_0$.

(這個簡單的例是所謂的「塡滿空間的曲線」(Space-filling curve)，歸功於 I. J. Schoenberg, Bull. A. M. S., Vol. 44, 1938, pp. 519.)

15. 假設f是 R^1 上的實值連續函數，當 $n=1,2,3,\cdots\cdots, f_n(t)=f(nt)$，且$\{f_n\}$在$[0,1]$上是等連續。你能推出有關$f$的什麼結論來呢?

16. 假設$\{f_n\}$是緊緻集合K上函數的等連續序列，且 $\{f_n\}$ 在K上是點態收斂。試證$\{f_n\}$在K上是均勻收斂。

17. 試對映至任意度量空間的映射，定義均勻收斂及等連續的觀念。並證明定理 7.9 及 7.12 對映至任意度量空間的映射皆成立，定理 7.8 及 7.11 對映至任意完備度量空間的映射皆成立，定理 7.10, 7.16, 7.17, 7.24 及 7.25 對向量值函數，卽映至任意 R^k 的映射，皆成立。

18. 令$\{f_n\}$是均勻有界函數序列。在 $[a,b]$ 上，它們都是 Riemann 可積，並取

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt\qquad (a\le x\le b).$$

試證存在部份列$\{F_{n_k}\}$，在$[a,b]$上均勻收斂。

19. 令K爲緊緻度量空間，S爲$\mathscr{C}(K)$ 的子集合。試證S是緊緻(對於定義在 7.14 節中的度量而言的)若且唯若S是均勻封閉，點態有界，且等連續。(若S不是等連續，則S必包含一序列，它沒有等連續的部份列，因而也沒有部份到會在K上均勻收斂。)

20. 若f在 $[0,1]$ 上爲連續，且若

$$\int_0^1 f(x)x^n dx=0\qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots),$$

則在〔0, 1〕上 $f(x)=0$。提示：f 與任何多項式之乘積，其積分皆爲0。利用 Weierstrass 定理證明$\int_0^1 f^2(x)dx=0$.

21. 令K爲複數平面上之單位圓（即，所有z, $|z|=1$的集合），並令$\mathscr{A}$爲所有這種型式的函數所成的代數：

$$f(e^{i\theta})=\sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\theta} \qquad (\theta\text{ 實數})$$

則$\mathscr{A}$分離K上的點，而$\mathscr{A}$不在K上任何點消失，但是，儘管如此，在K上還是有連續函數不在$\mathscr{A}$的均勻閉包裏面。 提示：對每個$f\in\mathscr{A}$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta=0$$

而對每個$\mathscr{A}$的閉包中的函數f，這也眞。

22. 假設在〔a, b〕上$f\in\mathscr{R}(\alpha)$，試證，有多項式 P_n，使得

$$\lim\int_a^b |f-P_n|^2 d\alpha=0$$

（與第6章習題 12 比較之。）

23 令$P_0=0$，並當$n=0, 1, 2, \cdots\cdots$，定義

$$P_{n+1}(x)=P_n(x)+\frac{x^2-P_n^{\,2}(x)}{2}$$

試證在〔$-1, 1$〕上

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=|x|$$

均勻地。

（這使得我們可以不需要先證明定理 7.26，而證明 Stone-Weierstrass 定理。）

提示：利用恒等式

$$|x|-P_{n+1}(x)=[|x|-P_n(x)]\left[1-\frac{|x|+P_n(x)}{2}\right]$$

證明，若$|x|\leq 1$，則$0\leq P_n(x)\leq P_{n+1}(x)\leq |x|$，以及若$|x|\leq 1$

$$|x|-P_n(x)\leq |x|\left(1-\frac{|x|}{2}\right)^n<\frac{2}{n+1}$$

24. 令X爲度量空間，度量爲d，固定一點$x\in X$，對每個$p\in X$，我們定個函數 f_p 爲

$$f_p(x)=d(x,p)-d(x,a) \qquad (x\in X).$$

試證對所有 $x\in X$, $|f_p(x)|\leq d(a,p)$, 因而證明 $f_p\in\mathscr{C}(X)$。試證對所有 $p,q\in X$

$$\|f_p-f_q\|=d(p,q).$$

若$\Phi(p)=f_p$，則Φ是個等度量變換 (isometry)（卽保持距離關係的映射），它由X映成$\Phi(X)\subset\mathscr{C}(X)$

令Y為 $\Phi(X)$ 在 $\mathscr{C}(X)$ 中的閉包，試證Y是完備的。

結論：X與完備度量空間Y的一個稠密子集等距 (isometric).

（第 3 章，習題 24 包含了對這定理的另一種證明。）

25. 假設在ϕ定義為 $0\leq x\leq 1$，$-\infty<y<+\infty$ 的條帶 (strip) 上是個連續實值有界函數。試證

$$y'=\phi(x,y), \quad y(0)=c$$

這起始值問題有一解。（留意這個存在定理的假設，比所對應的唯一定理的假設，來得較弱些，見第 5 章，習題 27）

提示：固定n，對 $i=0,\cdots\cdots,n$，令 $x_i=i/n$。設 f_n 為 [0,1] 上的連續函數而 $f_n(0)=c$，

$$f_n'(t)=\phi(x_i,f_n(x_i)) \qquad \text{若 } x_i<t<x_{i+1}.$$

並取

$$\triangle_n(t)=f_n'(t)-\phi(t,f_n(t))$$

除了在 x_i 諸點之外，在該處$\triangle_n(t)=0$。則

$$f_n(x)=c+\int_0^x [\phi(t,f_n(t))+\triangle_n(t)]dt.$$

選取$M<\infty$使得$|\phi|<M$。證實以下的命題。

(a) 對所有n，$|f_n'|\leq M$，$|\triangle_n|\leq 2M$，$\triangle_n\in\mathscr{R}$，且 $|f_n|\leq|c|+M=M_1$，譬如說在 [0,1] 上吧。

(b) $\{f_n\}$ 在 [0,1] 上是等連續，蓋$|f_n'|\leq M$

(c) 在 [0,1] 上，某些$\{f_{n_k}\}$收斂到某個f，且是均勻地。

(d) 由於ϕ在矩形$0\leq x\leq 1$，$|y|\leq M_1$上是均勻連續，故在[0,1]上，

$$\phi(t,f_{n_k}(t))\longrightarrow\phi(t,f(t))$$

均勻地。

(e) 在 [0,1] 上，$\triangle_n(t)\longrightarrow 0$ 均勻地，蓋在 (x_i,x_{i+1})

$$\triangle_n(t)=\phi(x_i,f_n(x_i))-\phi(t,f_n(t))$$

(f) 因此

$$f(x)=c+\int_0^x\phi(t,f(t))dt.$$

這個 f 就是所予問題的解。

26. 試對

$$\mathbf{y}'=\boldsymbol{\Phi}(x,\mathbf{y})\qquad\qquad \mathbf{y}(0)=\mathbf{c}$$

這起始值問題，證明類似的存在性定理。

其中的 $\mathbf{c}\in R^k,\mathbf{y}\in R^k$，而 $\boldsymbol{\Phi}$ 是個由 R^{k+1} 中 $0\leq x\leq 1,\mathbf{y}\in R^k$ 這部份映至 R^k 的連續有界映射。（與第 5 章，習題 28 比較之。）提示：利用定理 7.25 的向量值型式。

第八章

一些特殊函數

冪級數

在本節中，我們要推導函數的一些性質，而這些函數是以冪級數來表示的，就是

(1) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

或更一般點說

(2) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

這種型式的函數。

這些叫做解析函數 (Analytic Functions)。

我們將限制在實值的 x，因此我們要處理的是收斂區間(interval of convergence) 而不是收斂圓 (circle of convergence, 見定理3. 39) 。

如果(1)對所有在$(-R, R)$中的 x 值收斂，$R>0$，(R可以是$+\infty$) 我們說 f 在 $x=0$ 點附近可以展開成冪級數。同樣地，若 (2) 對 $|x-a|<R$收斂，就說 f 在 $x=a$ 點附近可以展開成

冪級數。爲了方便起見，我們常在不失一般性情況下取 $a=0$.

8.1 定理　假若級數

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

對 $|x|<R$ 收斂，定義

(4) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (|x|<R)$$

則 (3) 在 $[-R+\epsilon, R-\epsilon]$ 上是均匀收斂，不管 $\epsilon>0$ 是怎麼選。函數 f 在 $(-R, R)$ 中連續且可微分，同時

(5) $$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \quad (|x|<R)$$

證明：令 $\epsilon>0$ 已給，對 $|x|\leq R-\epsilon$，我們有

$$|c_n x^n|\leq|c_n(R-\epsilon)^n|;$$

又因爲 $\sum c_n(R-\epsilon)^n$

是絕對收斂（由根式試斂法，每個冪級數在它的收斂區間內是絕對收斂的」，定理 7.10 顯示了 (3) 在 $[-R+\epsilon, R-\epsilon]$ 上是均匀收斂的。

因爲當 $n\longrightarrow\infty$ 時，$\sqrt[n]{n}\longrightarrow 1$，故我們有

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n},$$

所以級數 (4), (5) 具有相同的收斂區間。

因爲(5)是個冪級數，故對每個 $\epsilon>0$，它在 $[-R+\epsilon, R-\epsilon]$ 上是均匀收斂的，而我們可以利用定理 7.17(以級數代替序列)，得到，若 $|x|\leq R-\epsilon$，則 (5) 式成立。

但是，所予任一 x, $|x|<R$，我們可以找到 $\epsilon>0$，使得 $|x|<R-\epsilon$，這就證明了若 $|x|<R$，則 (5) 式成立。

f 的連續性可由 f' 的存在得到（定理 5.2）。

系・在定理 8.1 的假設下，f 在 $(-R, R)$ 中有任何階的導數，其型式是

(6) $$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)c_n x^{n-k}.$$

特别是,

(7) $$f^{(k)}(0)=k!c_k \qquad (k=0,1,2,\cdots\cdots).$$

(這裏的 $f^{(0)}$ 表示 f, $f^{(k)}$ 表示 f 的第 k 階導數, $k=1,2,3,\cdots\cdots$)。

證明: 如果我們對 $f,f',f'',\cdots\cdots$ 逐次應用定理 8.1, 就得到方程式 (6)。將 $x=0$ 代入 (6), 我們得到 (7)。

公式 (7) 很有意思, 一方面它是說, f 的冪級數展開式的係數是由 f 及它在單一個點的導數值所決定的。另一方面, 若這係數已知, 則 f 在斂區間中心點的導數值可以由冪級數馬上看出來。

然而, 要注意的是, 雖然一個函數 f 有任何階的導數, 級數 $\sum c_n x^n$, c_n 由 (7) 式來計算, 對任何 $x\neq 0$ 而言, 並不一定收斂到 $f(x)$。在這情形下, f 在 $x=0$ 附近不能展開成冪級數。蓋如果我們有 $f(x)=\sum a_n x^n$, 我們應得到。

$$n!a_n=f^{(n)}(0)$$

所以。$a_n=c_n$ 在習題 1 中, 我們會給一個這種情形的例子。

如果級數 (3) 在端點, 說是 $x=R$ 吧, 是收斂, 則 f 不只是在 $(-R,R)$ 中連續, 在 $x=R$ 處也連續。這可以由 Abel 定理得到 (爲了符號方便, 我們取 $R=1$):

8.2 定理 設若 $\sum c_n$ 收斂, 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n \qquad (-1<x<1)$$

則

(8) $$\lim_{x\to 1}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n.$$

證明: 令 $s_n=c_0+\cdots\cdots+c_n$, $s_{-1}=0$, 則

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} s_n x^n + s_m x^m.$$

對 $|x|<1$，我們讓 $m \longrightarrow \infty$，得到

$$(9) \qquad f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

設 $s = \lim_{n\to\infty} s_n$，$\epsilon > 0$ 已給，選取 N，使得若 $n > N$，蘊涵了

$$|s - s_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

則，因爲

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 \quad (|x|<1)$$

我們由 (9) 得到，對某個適當選取的 $\delta > 0$，若 $x > 1-\delta$，則

$$|f(x)-s| = |(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n| \leq (1-x) \sum_{n=0}^{N} |s_n - s| \, |x|^n + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

這便證明了 (8)。

我們證明定理 3.51 以爲一種應用。它是說：若 $\sum a_n$，$\sum b_n$ 及 $\sum c_n$ 收斂到 A, B, C。且若 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots\cdots + a_n b_0$，則 $C = AB$，我們會，對 $0 \leq x \leq 1$，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,\ h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

當 $x < 1$，這些級數是絕對收斂。因此可以根據定義3.48相乘。在施行乘法時，我們發現；

$$(10) \qquad f(x) \cdot g(x) = h(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

由定理 8.2 知，當 $x \longrightarrow 1$ 時

$$(11) \qquad f(x) \longrightarrow A,\ g(x) \longrightarrow B,\ h(x) \longrightarrow C$$

方程式 (10) 及 (11) 蘊涵了 $AB = C$。

我們現在需要一個有關作和次序互換的定理。(見習題2及3)

8.3 定理 所予一二重序列 $\{a_{ij}\}$，$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots$，$j =$

1, 2, 3……。設若

$$(12)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|=b_i \qquad (i=1,2,3,\cdots\cdots)$$

且 $\sum b_i$ 收斂，則

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}.$$

證明：我們可以用像在定理 3.55 中所用的直接方法，來證明 (13) 式（雖然會比較繁複）。不過，下面的方法似乎比較有意思。

令 E 爲一可數集，包含有點 $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots$，且設當 $n\longrightarrow\infty, x_n\longrightarrow x_0$。定義

$$(14)\qquad f_i(x_0)=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij} \qquad (i=1,2,3,\cdots\cdots),$$

$$(15)\qquad f_i(x_n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij} \qquad (i,n=1,2,3,\cdots\cdots),$$

$$(16)\qquad g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}f_j(x) \quad (x\in E)$$

現在，(14), (15) 及 (12) 顯示每個 f_i 在 x_0 是連續。因爲對 $x\in E$, $|f_i(x)|\leq b_i$，故 (16) 式爲均匀收斂，所以 g 在 x_0 連續（定理 7.11）。於是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}&=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x_0)=g(x_0)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}\end{aligned}$$

8.4　定理　　若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

這級數在 $|x|<R$ 中收斂，若 $-R<a<R$，則 f 在點 $x=a$ 附近可以展開爲冪級數。它在 $|x-a|<R-|a|$ 中收斂，且

$$(17)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (|x-a|<R-|a|)$$

這是定理 5.15 的一個擴展，且也叫做 Taylor 定理。

證明: 我們有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n[(x-a)+a]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^{n-m}(x-a)^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=m}^{\infty}\binom{n}{m}c_n a^{n-m}\right](x-a)^m$$

這就是在 $x=a$ 附近我們所要的展開式。要證明其有效性，我們必須對所做的作和次序變換予以證實。定理 8.3 顯示，如果

$$(18)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left|c_n\binom{n}{m}a^{n-m}(x-a)^m\right|$$

收斂，則這是可行的。但 (18) 式與

$$(19)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot(|x-a|+|a|)^n$$

完全相同，而 (19) 式在 $|x-a|+|a|<R$ 時收斂。

結果，(17) 式中係數的型式由 (7) 可得。

值得注意的是，(17) 式實際上可能在比所給的 $|x-a|<R-|a|$ 更大的區間內收斂。

若有兩個冪級數在 $(-R,R)$ 中收斂到相同的函數，則 (7) 顯示，這兩個級數一定是同一個，即，它們有相同的係數。有趣的是，這相同的結論可以由更弱的假設導出來。

8.5 定理 若級數 $\sum a_n x^n$ 及 $\sum b_n x^n$ 在同一線段 $s=$

$(-R, R)$ 中收斂。令 E 爲所有 $x\in S$ 且

(20) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

的點所成的集合。若 E 在 S 中有極限點，則對 $n=0, 1, 2, \cdots\cdots$，$a_n=b_n$。因此 (20) 對所有 $x\in S$ 皆成立。

證明：令 $c_n=a_n-b_n$，且

(21) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (x\in S)$$

則在 E 上，$f(x)=0$。

令 A 爲 E 在 S 中的極限點所成的集合，並令 B 爲 S 中所有其它點所成的集合。由「極限點」的定義，很明顯的，B 是開集合。假使我們能證明 A 是開集合。則 A 和 B 是互斥開集合。因此它們是分離的（定義 2.45）。由於 $S=A\cup B$，而 S 是連結的，A 和 B 有一個必是空集，由假設知，A 是非空。所以 B 是空集，而 $A=S$。由於 f 在 S 上連續，故 $A\subset E$。因此 $E=S$，而 (7) 式顯示，對 $n=0, 1, 2, \cdots\cdots$, $c_n=0$，這就是所要的結論。

所以我們必須要證明 A 是開集合。若 $x_0\in A$，定理 8.4 顯示

(22) $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n \qquad (|x-x_0|<R-|x_0|)$$

我們說，對所有 n, $d_n=0$。蓋否則，令 k 爲使 $d_k\neq 0$ 的最小非負整數，則

(23) $$f(x)=(x-x_0)^k g(x) \qquad (|x-x_0|<R-|x_0|)$$

這裏的

(24) $$g(x)=\sum_{m=0}^{\infty} d_{k+m}(x-x_0)^m.$$

因爲 g 在 x_0 連續，且

$$g(x_0)=d_k\neq 0,$$

故存在 $\delta>0$，使得若 $|x-x_0|<\delta$, $g(x)\neq 0$。由(23)導得，若 $0<|x-x_0|<\delta$，則 $f(x)\neq 0$。但這與 x_0 是 E 中一個極限

點相矛盾。

因此對所有 $n, d_n=0$。所以對所有使（22）式成立的 x，卽在 x_0 的一個隣域中，$f(x)=0$。這就顯示了 A 是開集合，而完成了證明。

指數與對數函數

我們定義

(25) $$E(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

比值試歛法顯示，對每個複數 z，此級數皆收斂。應用定理3.50有關絕對收斂級數乘積的定理，我們得到

$$E(z)E(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{w^m}{m!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^kw^{n-k}}{k!(n-k)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^kw^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+w)^n}{n!}$$

這就給了我們一個重要的加法公式

(26) $$E(z+w)=E(z)E(w) \qquad (z, w \text{ 複數})。$$

有一個結論是

(27) $$E(z)E(-z)=E(z-z)=E(0)=1 \qquad (z \text{ 複數})。$$

這顯示對所有 z，$E(z)\neq 0$。由（25）知，若 $x>0$，則 $E(x)>0$；因此（27）顯示對所有實數 x，$E(x)>0$。由（25）知，當 $x\longrightarrow+\infty$，$E(x)\longrightarrow+\infty$；因此（27）顯示，沿著實數軸，當 $x\longrightarrow-\infty$，$E(x)\longrightarrow 0$。又由（25）式，$0<x<y$ 蘊涵 $E(x)<E(y)$；由（27）式，導得 $E(-y)<E(-x)$；因此在整個實數軸上，E 是嚴格漸增。

加法公式顯示，

(28) $$\lim_{h\to 0}\frac{E(z-h)-E(z)}{h}=E(z)\lim_{h\to 0}\frac{E(h)-1}{h}=E(z)$$

最後一個等式由 (25) 直接可得。

重複 (26) 式，可得

(29) $$E(z_1+\cdots\cdots+z_n)=E(z_1)\cdots\cdots E(z_n)$$

我們取 $z_1=\cdots\cdots=z_n$。因為 $E(1)=e$, e 是在定義 3.30 中所定義的數，於是我們得到

(30) $$E(n)=e^n \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots).$$

若 $p=n/m$, n,m 為正整數，則

(31) $$[E(p)]^m=E(mp)=E(n)=e^n$$

因此，

(32) $$E(p)=e^p \qquad (p>0,\ p \text{ 有理數})。$$

於是，若 p 是正有理數，由 (27) 導得 $E(-p)=e^{-p}$。因此對所有有理數 p,(32) 式成立。

在第 1 章習題 6 中，我們曾提出定義，對任意實數 y 且 $x>1$，

(33) $$x^y=\sup x^p$$

這裏的 sup 是對所有有理數 p 而 $p<y$ 所取的。若我們由此，對任意實數 x，定義

(34) $$e^x=\sup e^p \qquad (p<x,\ p \text{ 有理數}),$$

由 E 的連續性及單調性，以及 (32)，顯示對所有實數 x，

(35) $$E(x)=e^x$$

方程式 (35) 說明了何以 E 要叫做指數函數。

事實上，我們很可以用 (35) 作為 e^x 的定義，而不用(34)；以 (35) 做為研究 e^x 諸性質的起點是好得多了。我們馬上會看到，(33) 式也可以用另一個較合適的定義來代替〔見(43)式〕。

我們現在回到常用的符號，e^x，以取代 $E(x)$，並總結我們至此所證明的東西。

8.6 定理　令 e^x 在 R^1 上由 (35) 及 (25) 所定義。則

(a) e^x 對所有 x 皆為連續且可微分。

(b) $(e^x)'=e^x$;

(c) e^x 是 x 的嚴格增加函數，且 $e^x>0$；

(d) $e^{x+y}=e^x e^y$;

(e) 當 $x\longrightarrow+\infty, e^x\longrightarrow+\infty$。當 $x\longrightarrow-\infty, e^x\longrightarrow 0$

(f) 對所有 n，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x}=0$.

我們早已證明了 (a) 到 (e)；(25) 顯示，對 $x>0$，

$$e^x>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

因此

$$x^n e^{-x}<\frac{(n+1)!}{x}$$

而得到 (f). (f) 部份顯示，當 $x\longrightarrow+\infty$，e^x 趨於 $+\infty$ 較 x 的任何次方爲「快」。

因爲 E 在 R^1 上是嚴格漸增且可微，故它有一個反函數 L，也是嚴格漸增且可微，而其定義域爲 $E(R^1)$，即所有正數的集合。L 是定義爲

(36) $$E(L(y))=y \qquad (y>0),$$

或，等價地，

(37) $$L(E(x))=x \qquad (x\text{ 實數})。$$

將 (37) 式微分，我們得到（與定理 5.5 比較之）

$$L'(E(x))\cdot E(x)=1$$

令 $y=E(x)$，這給了我們

(38) $$L'(y)=\frac{1}{y} \qquad (y>0)。$$

在 (37) 中取 $x=0$，我們看出 $L(1)=0$。因此 (38) 蘊涵了。

(39) $$L(y)=\int_1^y \frac{dx}{x}。$$

(39)式常常用做對數與指數函數理論的起點。令 $u=E(x)$，$v=$

$E(y)$，則 (26) 式給了我們，

$$L(uv)=L(E(x).E(y))=L(E(x+y))=x+y,$$

因此

$$(40)\qquad L(uv)=L(u)+L(u)\qquad (u>0, v>0).$$

這顯示了，L 具有使得對數成爲有用的計算工具的熟悉性質。$L(x)$ 的常用記號當然是 $\log x$。

至於當 $x \longrightarrow +\infty$ 及 $x \longrightarrow 0$ 時 $\log x$ 的動態，定理8.6(c) 顯示了

$$\log x \longrightarrow +\infty \qquad 當\ x \longrightarrow +\infty,$$
$$\log x \longrightarrow -\infty \qquad 當\ x \longrightarrow 0。$$

若 $x>0$ 且 n 是一整數，則很容易看出來，

$$(41)\qquad x^n=E(nL(x))$$

同樣地，若 m 是個正整數，我們有

$$(42)\qquad x^{\frac{1}{m}}=E\left(\frac{1}{m}L(x)\right)$$

蓋 (42) 式中每一項，在取 m 次方時，便導致 (37) 中的對應項。將 (41) 及 (42) 合起來，我們得到，對所有有理數 α，

$$(43)\qquad x^\alpha=E(\alpha L(x))=e^{\alpha\log x}.$$

我們現在對任意實數 α 及任意 $x>0$，用 (43) 式來定義 x^α。由 E 及 L 的連續性及單調性顯示，這個定義，可以導出我們前面所提的那個定義相同的結果。在第一章習題 6 所敍述的事實，都是 (43) 式顯而易見的結論。

若我們將 (43) 式微分，則由定理 5.5，我們得到

$$(44)\qquad (x^\alpha)'=E(\alpha L(x))\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

留意，我們曾經只對整數值的 α 用過 (44)，在那情形下，(44) 式很容易由定理 5.3(b) 導出，若 x^α 由 (33) 所定義，而 α 爲無理數，則要直接由導數的定義來證明 (44)，將極麻煩。

對 x^{α} 那有名的積分公式，當 $x \neq -1$ 時，可由 (44) 式導得，若 $\alpha = -1$，則由 (38) 式。我們想再證明一個 $\log x$ 的性質，就是對每個 $\alpha > 0$，

(45)
$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha}\log x = 0$$

這就是說，在 $x \longrightarrow +\infty$ 時，$\log x \longrightarrow +\infty$ 較 x 的任何次方來得「慢」。

蓋若 $0 < \epsilon < \alpha$，且 $x > 1$，則

$$x^{-\alpha}\log x = x^{-\alpha}\int_1^x t^{-1}dt < x^{-\alpha}\int_1^x t^{\epsilon-1}dt$$
$$= x^{-\alpha}\cdot\frac{x^{\epsilon}-1}{\epsilon} < \frac{x^{\epsilon-\alpha}}{\epsilon}$$

而得出 (45)。我們也可用定理 8.6(f) 來導衍 (45) 式。

三角函數

我們定義。

(46)
$$C(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)],$$
$$S(x) = \frac{1}{2i}[E(ix) - E(-ix)]$$

我們將證明 $C(x)$ 及 $S(x)$ 與函數 $\cos x$ 及 $\sin x$ 相合，而後者的定義通常是由幾何上來考慮的。由 (25) 式，$E(\bar{z}) = \overline{E(z)}$，因此，(46) 顯示，對實數 x。$C(x)$ 及 $S(x)$ 都是實數。此外，

(47)
$$E(ix) = C(x) + iS(x)$$

因此，若 x 為實數，$C(x)$ 及 $S(x)$ 分別是 $E(ix)$ 的實部與虛部。由 (27) 式，

$$|E(ix)|^2 = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(-ix) = 1,$$

所以

(48)
$$|E(ix)| = 1 \qquad (x \text{ 實數})。$$

由 (46) 我們可以看出 $C(0)=1, S(0)=0$，且 (28) 式顯示。

(49) $$C'(x)=-S(x),\quad S'(x)=C(x).$$

我們斷言存在有正數 x 使得 $C(x)=0$。蓋若不然，由於 $C(0)=1$，則導得對所有 $x>0, C(x)>0$，故由 (49) 知，$S'(x)>0$，所以 S 是嚴格漸增；且由於 $S(0)=0$，我們有，若 $x>0$，則 $S(x)>0$。故若 $0<x<y$，我們有

(50) $$S(x)(x-y)<\int_x^y S(t)\,dt=C(x)-C(y)\le 2$$

最後一個不等式是由 (48) 及 (47) 而來的。因爲 $S(x)>0$，故 (50) 在 y 很大時，不可能爲眞，於是我們有了一個矛盾。

令 x_0 爲使 $C(x)=0$ 之最小正數。這個數存在，因爲連續函數的零位所成的集合是個閉集合，且 $C(0)\neq 0$。我們定義 π 這個數爲

(51) $$\pi=2x_0.$$

則 $C(\pi/2)=0$，而 (48) 式顯示 $S(\pi/2)=\pm 1$。因爲在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中 $C(x)>0$，S 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中漸增；因此 $S(\pi/2)=1$。於是，

$$E\left(\frac{\pi i}{2}\right)=i,$$

而加法公式得出

(52) $$E(\pi i)=-1,\qquad E(2\pi i)=1;$$

因此，

(53) $$E(z+2\pi i)=E(z)\qquad (z\text{ 複數})。$$

8.7　定理　(a) 函數 E 是週期性的，其週期爲 $2\pi i$。

(b) 函數 C 及 S 是週期性的，其週期爲 2π。

(c) 若 $0<t<2\pi$，則 $E(it)\neq 1$。

(d) 若 z 爲複數，$|z|=1$，則在 $[0,2\pi)$ 中有唯一的 t，使

得 $E(it)=z$。

證明: 由 (53) 式知，(a) 成立; 而 (b) 則由 (a) 及 (46) 式可得。

若 $0<t<\frac{\pi}{2}$ 且 $E(it)=x+iy$, x, y 爲實數，則由前面我們所做的，顯示 $0<x<1$，$0<y<1$。注意

$$E(4it)=(x+iy)^4=x^4-6x^2y^2+y^4+4ixy(x^2-y^2)$$

若 $E(4it)$ 爲實數，則得 $x^2-y^2=0$；而因爲由(48) 知，$x^2+y^2=1$，故我們有 $x^2=y^2=\frac{1}{2}$，因此 $E(4it)=-1$，這證明了 (c)。

若 $0\leq t_1<t_2<2\pi$，則由 (c) 知

$$E(it_2)[E(it_1)]^{-1}=E(it_2-it_1)\neq 1$$

這就證明了 (d) 中唯一性的斷言。

要證明 (d) 中有關存在性的斷言，且固定 z 使 $|z|=1$。令 $z=x+iy$, x 及 y 都是實數。首先假設 $x\geq 0$ 且 $y\geq 0$。在 $[0,\pi/2]$ 上，C 由 1 減至 0。因此對某個 $t\in[0,\pi/2]$, $C(t)=x$ 由於 $C^2+S^2=1$ 且在 $[0,\pi/2]$ 上 $S\geq 0$，故 $z=E(it)$。

若 $x<0$，$y\geq 0$，$-iz$ 也會滿足前述條件。因此對某個 $t\in[0,\pi/2]$, $-iz=E(it)$，又因爲 $i=E(\pi i/2)$，我們得到 $z=E(i(t+\pi/2))$。最後，若 $y<0$，由前面兩種情形知，對某個 $t\in(0,\pi)$, $-z=E(it)$。因此 $z=-E(it)=E(i(t+\pi))$。

這就證明了 (d)，也因而證明了這定理。

由 (d) 及 (48) 得出，定義爲

$$\gamma(t)=E(it)\qquad(0\leq t\leq 2\pi)\tag{54}$$

的曲線 γ 是簡單閉曲線，其值域是平面上的單位圓。因爲 $\gamma'(t)=iE(it)$，由定理 6.27 知，γ 的長度爲

$$\int_0^{2\pi}|\gamma'(t)|\,dt=2\pi,$$

這當然是對半徑爲 1 的圓周所預期的結果；而且它顯示，由(51)所定義的 π 具有平常的幾何意義。

以同樣的方法，我們看出，當 t 由 0 增加到 t_0，點 $\gamma(t)$ 描繪了一個長爲 t_0 的圓弧。考慮頂點爲

$$z_1=0,\ z_2=\gamma(t_0),\ z_3=C(t_0)$$

的三角形，則顯示，$C(t)$ 及 $S(t)$ 確與 $\cos t$ 及 $\sin t$ 相同，如果後者是由平常的直角三角形諸邊所定義出來的話。

應該強調的是，我們由 (46) 及 (25) 所導出的三角函數的基本性質，絲毫不訴諸幾何上角的觀念。另外還有對這些函數的非幾何定義法。W. F. Eberlein (Amer. Math. Monthly, Vol. 74. 1967, pp. 1223-1225) 及 G. B. Robinson (Math. Mag. Vol. 41, 1968, pp. 66-70) 的論文，都是研討這個題目。

複數域的代數完備性

我們現在已經可以對複數域是代數完備 (Algebraically complete)，就是說，每一個複係數非常數多項式，必有一複根，的事給一個簡單的證明。

8.8 定理　若 $a_0\cdots\cdots,a_n$ 是複數，$n\geq 1, a_n\neq 0, P(z)=\sum_0^n a_k z^k$。則必對某個複數 z, $P(z)=0$

證明： 不失普遍性地，且假設 $a_n=1$。令

$$\mu=\inf|P(z)| \qquad (z\text{ 複數})。\tag{55}$$

若 $|z|=R$，則

$$|P(z)|\geq R^n[1-|a_{n-1}|R^{-1}-\cdots\cdots-|a_0|R^{-n}]\tag{56}$$

當 $R\longrightarrow\infty^n$, (56)式右邊趨於∞。因此存在 R_0 使得若 $|z|>R_0$，則 $|P(z)|>\mu$。又因爲 $|P|$ 在以 0 爲圓心，R_0 爲半徑的圓盤上是連續，故定理 4.16 顯示，對某個 z_0, $|P(z_0)|=\mu$。

我們斷言，$\mu=0$。

若不然，則令 $Q(z)=P(z+z_0)/P(z_0)$。則 Q 是一個非常數多項式，$Q(0)=1$，且對所有 z，$|Q(z)|\geq 1$。故有一最小整數 k，$1\leq k\leq n$，使得

$$Q(z)=1+b_k z^k+\cdots\cdots+b_n z^n,\ b_k\neq 0 \tag{57}$$

由定理 8.7(d) 知，有一實數 θ 使得

$$e^{ik\theta}b_k=-|b_k| \tag{58}$$

則，若 $r>0$，且 $r^k|b_k|<1$，則 (58) 式蘊涵了

$$|1+b_k r^k e^{ik\theta}|=1-r^k|b_k|$$

於是 $|Q(re^{i\theta})|\leq 1-r^k\{|b_k|-r|b_{k+1}|-\cdots\cdots-r^{n-k}|b_n|\}$;
對足够小的 r，括號內的式子為正；因此 $|Q(re^{i\theta})|<1$，矛盾。

所以，$\mu=0$，即 $p(z_0)=0$

習題 27 包含了較一般性的結果。

富氏級數

8.9 定義　一個三角級數是指這種型式的有限和:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=0}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad(x\text{ 實數})\text{，} \tag{59}$$

這裏的 $a_0,\cdots\cdots,a_N,b_1,\cdots\cdots b_N$ 部是複數。由於有 (46) 的恒等式，(59)也可以寫成這種型式，

$$f(x)=\sum_{-N}^{N}c_n e^{inx}\quad(x\text{ 實數}) \tag{60}$$

對大多數的應用而言，這是比較方便的。很明顯，每個三角函數都是週期性的，其週期為 2π。

若 n 是個非負整數，e^{inx} 是 e^{inx}/in，也有週期 2π，的導數。因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{inx}dx=\begin{cases}1 & \text{若 } n=0,\\ 0 & \text{若 } n=\pm1,\pm2,\cdots\cdots\end{cases} \tag{61}$$

我們用 e^{-imx} 乘以 (60)，m 為一整數；若我們將這乘積積分，(61)顯示，對 $|m|\leq N$,

(62) $$c_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-imx}dx.$$

若 $|m|>N$, (62) 的積分爲 0。

下面這結論，可由 (60) 及 (62) 得到: 由 (60) 所定義的三角多項式，是實值的，若且唯若對 $n=0, \cdots\cdots, N$, $c_{-n}=c_n$.

爲了與 (60) 式相符合，我們定義一個三角級數爲這樣的級數，

(63) $$\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx} \qquad (x\text{ 實數})；$$

(63) 式的第 N 部份和，定義爲 (60) 式的右邊。

若 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上是個可積分函數，對所有整數 m，由(62) 所定義的數 c_m，稱爲 f 的富氏係數 (Fourier Coefficients)，而由這些係數所形成的級數 (63)，是 f 的富氏級數。

現在很自然引起的問題是，是否 f 的富氏級數會收斂到 f，或更一般點說，是否 f 是由它的富氏級數所決定的。就是說，如果我們知道一個函數的富氏係數，我們能找到這個函數嗎? 如果可以，如何找?

對這級數，特別是對將一所予函數表示爲一個三角級數的問題，的研究，起源於物理問題，像振動理論及熱傳理論（富氏的 “Théorie analytique de la chaleur” 於 1822 年出版）。在這研究中所引出許多困難且細緻的問題，造成整個實變函數論完全的修正和重新建構。在許多有名的人物當中，Riemann, Cantor 及 Lebesgue 的名字，與這體系有很密切的關係。而這體系，在今日，它的一般理論及其分枝，很可以說在整個分析學上，佔了一個中心位置。

我們將只滿足於導衍一些基本定理，而且它們可以很容易由前面幾章所發展出來的方法導得。對於更完整的探討，Lebesgue 積分是一個自然且不可或缺的工具。

首先，我們要研究更一般的函數系統，這些函數具有類似(61)的性質：

8.10　定義　令 $\{\phi_n\}$，$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ 為 $[a, b]$ 上複值函數序列，而

$$(64)\qquad \int_a^b \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}dx=0 \qquad (n\neq m)$$

則 $\{\phi_n\}$ 叫做 $[a, b]$ 上函數的直交系統 (orthogonal system of functions)。此外，若對所有 n，

$$(65)\qquad \int_a^b |\phi_n(x)|^2 dx=1,$$

則 $\{\phi_n\}$ 叫做單直交 (orthonormal)。

例如，函數 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{inx}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上形成一單直交系統。實值函數

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\cdots\cdots$$

也是。

若 $\{\phi_n\}$ 在 $[a, b]$ 上是單直交，且若

$$(66)\qquad c_n=\int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}dt \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

則我們稱 c_n 為 f 對 $\{\phi_n\}$ 的第 n 個富氏係數。我們寫成

$$(67)\qquad f(x)\sim\sum_1^\infty c_n\phi_n(x)$$

並稱這級數為，f（對於 $\{\phi_n\}$）的富氏級數。

注意，在 (67) 中用的符號～，並不蘊涵任何有關這級數收斂的事；它只是說，該係數是由 (66) 所定義而已。

下面的定理顯示，f 的富氏級數，其部份和有某種極小性質。我們假設，在本章剩餘部份也是一樣，$f\in\mathscr{R}$，雖然這假設可以減弱。

8.11　定理　令 $\{\phi_n\}$ 在 $[a, b]$ 上為單直交。令

(68) $$s_n(x)=\sum_{m=1}^{n} c_m\phi_m(x)$$

為 f 的富氏級數的第 n 部份和，且假設

(69) $$t_n(x)=\sum_{m=1}^{n} \gamma_m\phi_m(x)$$

則

(70) $$\int_a^b |f-s_n|^2dx\leq\int_a^b |f-t_n|^2dx$$

其等號成立，若且唯若

(71) $$\gamma_m=c_m \qquad (m=1,2,\cdots\cdots,n)$$

這就是說，在所有函數 t_n 中，s_n 給了 f 最佳可能均方近似 (mean square approximation)。

證明: 令 $\int$ 表在 $[a,b]$ 上積分，$\sum$ 表示由 1 到 n 作和。則由 $\{c_m\}$ 之定義知,

$$\int f\bar{t}_n=\int f\sum\overline{\gamma_m\phi_m}=\sum c_m\overline{\gamma_m},$$

又因為 $\{\phi_n\}$ 是單直交，故

$$\int|t_n|^2=\int t_n\bar{t}_n=\int\sum\gamma_m\phi_m\sum\bar{\gamma}_k\bar{\phi}_k=\sum|\gamma_m|^2,$$

因此,

$$\begin{aligned}|f-t_n|^2&=\int|f|^2-\int f\bar{t}_n-\int\bar{f}t_n+\int|t_n|^2\\&=\int|f|^2-\sum c_m\bar{\gamma}_m-\sum\bar{c}_m\gamma_m+\sum\gamma_m\overline{\gamma_m}\\&=\int|f|^2-\sum|c_m|^2+\sum|\gamma_m-c_m|^2\end{aligned}$$

這很明顯可以極小化，若且唯若 $\gamma_m=c_m$。

在這計算中，令 $\gamma_m=c_m$，我們得到

(72) $$\int_a^b|s_n(x)|^2dx=\sum_1^n|c_m|^2\leq\int_a^b|f(x)|^2dx,$$

蓋 $\int|f-t_n|^2\geq 0$

8.12　定理　若 $\{\phi_n\}$ 在 $[a,b]$ 上是單直交，且若

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n(x),$$

則

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\leq\int_a^b|f(x)|^2dx. \tag{73}$$

特別是，

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0 \tag{74}$$

證明: 在 (72) 中令 $n\longrightarrow\infty$，我們便得到 (73)，所謂的 "Bessel 不等式"。

8.13　三角級數　從現在起，我們只討論三角系統。我們將只考慮函數 f，它具有週期 2π，而且在 $[-\pi,\pi]$ 上（也因而在所有有界區間上）是 Riemann 可積。則 f 的富氏級數就是級數 (63)，其係數由 (62) 的積分所定義，而

$$s_N(x)=s_N(f;x)=\sum_{-N}^{N}c_ne^{inx}. \tag{75}$$

是 f 的富氏級數的第 N 部份和。(72) 的不等式現在就是這種型式

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s_N(x)|^2dx=\sum_{-N}^{N}|c_n|^2\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx \tag{76}$$

爲了要得一個比 (75) 式好處理的 s_N 表示式，我們引入 Dirichlet 核 (Dirichlet kernel)

$$D_N(x)=\sum e^{inx}=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin(x/2)} \tag{77}$$

這第一個等式就是 $D_N(x)$ 的定義。第二個等式，則是當我們將恒等式

$$(e^{ix}-1)D_N(x)=e^{i(N+1)x}-e^{-iNx}$$

的兩邊都乘上 $e^{-ix/2}$，就可得出。

由 (62) 及 (75) 知，我們有

$$s_N(f;x)=\sum_{-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt\,e^{inx}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sum_{-N}^{N}e^{in(x-t)}dt$$

因此，

(78)
$$s_N(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)D_N(x-t)dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_N(t)dt.$$

所有有關的函數，其週期性顯示，我們在那個區間上積分是沒什麼關係的，只要它的長度是 2π，這就顯示 (78) 中的兩個積分相等。

我們將只證明一個有關富氏級數點態收斂的定理。

8.14 定理 如果，對某個 x，有常數 $\delta>0$ 及 $M<\infty$，使得對所有 $t\in(-\delta,\delta)$，

(79)
$$|f(x+t)-f(x)|\leq M|t|,$$

則

(80)
$$\lim_{N\to\infty}s_N(f;x)=f(x)$$

證明： 定義當 $0<|t|\leq\pi$

(81)
$$g(t)=\frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)}$$

並定 $g(0)=0$，由 (77) 的定義知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(x)dx=1$$

因此 (78) 式顯示

$$s_N(f;x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(t)\cos\frac{t}{2}\right]\sin Nt\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[g(t)\sin\frac{t}{2}\right]\cos Nt\,dt.$$

由（79）及（81）知，$g(t)\cos(t/2)$ 及 $g(t)\sin(t/2)$ 都是有界。故由（74）知，當$N\longrightarrow\infty$時，最後兩個積分會趨於 0 。這就證明了（80）。

系。若對某個線段J中的所有x, $f(x)=0$，則對每個 $x\in J$, $\lim s_N(f;x)=0$

對這個系，這裏還有另一種敍述：

若對x某個隣域中的所有t, $f(t)=g(t)$，則

$$s_N(f;x)-s_N(g;x)=s_N(f-g;x)\longrightarrow 0 \quad 當N\longrightarrow\infty。$$

這通常叫做局部化定理（localization theorem)。它顯示了，只要我們考慮到收斂性，則序列 $\{s_N(f;x)\}$ 的動態，就只和f在x的某個（任意小的）隣域有關。因而，兩個富氏級數可能在一個區間上，有相同動態，但在某個另外的區間上，則可能以完全不同的方式變化。在這裏我們就有了富氏級數和冪級數之間一個非常強烈的對比（定理 8.5）。

我們用另外兩個逼近定理做爲結束。

8.15　定理　若f是連續（並具週期2π），且若$\varepsilon>0$，則有一個三角級數P，使得對所有實數x，

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon$$

證明：如果我們將x和$x+2\pi$ 視爲同一，則經由 $x\longrightarrow e^{ix}$ 這映射，我們可以將 R^1 上的 2π- 週期函數，視爲單位圓 T 上的函數。三角多項式，即，形如（60）的函數，便形成一個自伴代數$\mathscr{A}$，它分離T上的點，且在T上任何點都不消失。由於T是緊緻，定理 7.33 告訴我們$\mathscr{A}$在 $\mathscr{C}(T)$ 中稠密。這就正是本定理所要斷言的。

本定理一個比較更嚴密的形式，是出現在習題 15 中。

8.16 Parseval 定理　假設f和 g 是 Riemann 可積函數，具有週期 2π，且

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},\quad g(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_ne^{inx}. \tag{82}$$

則

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-s_N(f;x)|^2dx=0 \tag{83}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n\overline{\gamma_n}, \tag{84}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \tag{85}$$

證明: 我們且用這符號

$$\|h\|_2=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|h(x)|^2dx\right\}^{1/2} \tag{86}$$

令 $\varepsilon>0$已知，由於 $f\in\mathscr{R}$且 $f(\pi)=f(-\pi)$，則在第 6 章習題 12 中所描述的建構法，便導得一個連續 2π- 週期的函數 h，而

$$\|f-h\|_2<\varepsilon. \tag{87}$$

由定理 8.15 知，有多項式P使得對所有 x，$|h(x)-P(x)|<\varepsilon$。因此 $\|h-P\|_2<\varepsilon$。若P有 N_0 次，則定理 8.11 顯示對所有$N\geq N_0$

$$\|h-s_N(h)\|_2\leq\|h-P\|_2<\varepsilon \tag{88}$$

由 (72) 式，將 $h-f$ 取代 f，

$$\|s_N(h)-s_N(f)\|_2=\|s_N(h-f)\|_2\leq\|h-f\|_2<\varepsilon \tag{89}$$

現在，三角不等式（第 6 章，習題11），以及 (87), (88) 及 (89) 合起來，便顯示

$$\|f-s_N(f)\|_2<3\varepsilon.\ (N\geq N_0). \tag{90}$$

這就證明了 (83)。其次，

$$(91)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N(f)\bar{g}\,dx = \sum_{-N}^{N} c_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{g(x)}\,dx = \sum_{-N}^{N} c_n\overline{\gamma_n}$$

而由 Schwarz 不等式知

$$(92)\qquad \left|\int f\bar{g}-\int s_N(f)\bar{g}\right| \le \int |f-s_N(f)|\,|g| \le \left\{\int|f-s_N|^2\int|g|^2\right\}^{1/2},$$

由 (83) 式知，當$N\longrightarrow\infty$，這會趨於 0，將 (91) 及 (92) 相比較，便得出 (84)。最後，(85) 式是 (84) 中$g=f$的一個特殊情形。

定理 8.16 的一個較一般的型式，在第 11 章中會出現。

Gamma 函數

這個函數與階乘很有關係，而且在分析學中許多料想不到的地方，會突然冒出來。它的起源，歷史，和發展，在 P. J. Davis 的一篇很有趣的文章 (Amer. Math. Monthly, Vol. 66. 1959, pp. 849-869) 中，有很好的描述。Artin 的書 (寫在書目中) 是另一本很好的基本引介的書。

我們的介紹是很簡潔的，在每個定理之後，只有一點註解。因而，這一節可以看做是個大習題，也當做一個將目前已呈示過的某些材料，加以應用的機會。

8.17　定理　　當 $0<x<\infty$

$$(93)\qquad \Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\,e^{-t}\,dt.$$

對這些x，這個積分存在。(當 $x<1$，在 0 和∞處都要檢查)

8.18　定理　　(a) 若 $0<x<\infty$，則函數方程式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

成立，

(b) 當 $n=1,2,3,\cdots\cdots$, $\Gamma(n+1)=n!$.

(c) 在 $(0,\infty)$ 上，$\log\Gamma$ 是凸的。

證明: 一次分部積分就證得 (a)。由於 $\Gamma(1)=1$，由歸納法 (a) 蘊涵了 (b)，若 $1<p<\infty$ 且 $(1/p)+(1/q)=1$，將 Hölder 不等式（第六章習題 10）用到 (93) 式，我們得到

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)\leq\Gamma(x)^{1/p}\Gamma(y)^{1/q}$$

這和 (c) 是等價的。

一件相當令人吃驚的事，由 Bohr 及 Mollerup 所發現的，是這三個條件將 Γ 完全刻劃出來了:

8.19 定理　若 f 在 $(0,\infty)$ 是個正值函數，使得

(a) $f(x+1)=xf(x)$,

(b) $f(1)=1$

(c) $\log f$ 是凸的。

則 $f(x)=\Gamma(x)$

證明: 由於 Γ 滿足 (a), (b) 和 (c)，故若證明對所有 $x>0$, $f(x)$ 是由 (a), (b), (c) 所唯一決定，就够了。由 (a) 知，只要對 $x\in(0,1)$ 來證就够了。

令 $\varphi=\log f$，則

$$\varphi(x+1)=\varphi(x)+\log x\quad(0<x<\infty)\tag{94}$$

$\varphi(1)=0$，且 φ 是凸的。假設 $0<x<1$，而 n 是正整數。由 (94) 知，$\varphi(n+1)=\log(n!)$。考慮 φ 在區間 $[n,n+1]$, $[n+1,n+1+x]$, $[n+1,n+2]$，上的差商 (difference quotients)。由於 φ 是凸的，

$$\log n\leq\frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x}\leq\log(n+1)$$

重複應用 (94) 式，便得出

$$\varphi(n+1+x)=\varphi(x)+\log[x(x+1)\cdots\cdots(x+n)].$$

因此

$$0 \leq \varphi(x) - \log\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}\right] \leq x\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

當 $n \longrightarrow \infty$，最後一個式子趨於 0。因此 $\varphi(x)$ 便決定了，證畢。

順便，我們也得到這個關係式

$$\Gamma(x) = \lim \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)} \tag{95}$$

至少當 $0 < x < 1$；由這一式，我們可導出對所有 $x > 0$，(95) 都成立，蓋 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$。

8.20　定理　若 $x > 0$ 且 $y > 0$，則

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{96}$$

這個積分是所謂的 Beta 函數 $B(x, y)$。

證明: 留意 $B(1, y) = 1/y$，且對固定的 y，由 Hölder 不等式，如在定理 8.18 中，可知 $\log B(x, y)$ 是 x 的凸函數，以及

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y) \tag{97}$$

要證明 (97) 式，我們對

$$B(x+1, y) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1} dt$$

作分部積分。

對每個 y，$B(x, y)$ 的這三個性質顯示，可以將定理 8.19 用到定義爲

$$f(x) = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} B(x, y)$$

的函數 f 上。因此 $f(x) = \Gamma(x)$。

8.21　一些結果　以 $t = \sin\theta$ 代換，(96) 式變爲

(98) $$2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

當 $x=y=\frac{1}{2}$ 的特殊狀況，則算出

(99) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

以 $t=s^2$ 代換，(93) 式變成為

(100) $$\Gamma(x)=2\int_0^{\infty}s^{2x-1}e^{-s^2}ds\,(0<x<\infty)$$

$x=\frac{1}{2}$ 的特殊情形便得出

(101) $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$$

由 (99) 式知，恒等式

(102) $$\Gamma(x)=\frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

可直接由定理 8.19 導得。

8.22 Stirling 公式　這個公式，當 x 很大時，對 $\Gamma(x+1)$ (因此也對 n 很大時的 $n!$) 提供了一個很簡單的近似表示法，公式是

(103) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{(x/e)^x\sqrt{2\pi x}}=1$$

證明在此，令 (93) 中的 $t=x(1+u)$，便得出

(104) $$\Gamma(x+1)=x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{\infty}[(1+u)e^{-u}]^x du$$

若 $-1<u<\infty$, $u\neq 0$，要決定 $h(u)$ 使得 $h(0)=1$，且

(105) $$(1+u)e^{-u}=\exp\left[-\frac{u^2}{2}h(u)\right]。$$

則

(106) $$h(u)=\frac{2}{u^2}[u-\log(1+u)]。$$

於是 h 是連續，而當 u 由 -1 漸增至 $\infty, h(u)$ 由∞單調漸減到 0。

以 $u=s\sqrt{2/x}$ 代換，(104) 變成爲

$$(107)\qquad \Gamma(x+1)=x^x e^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_x(s)ds,$$

其中的

$$\psi_x(s)=\begin{cases}\exp[-s^2h(s\sqrt{2/x})] & (-\sqrt{x/2}<s<\infty)\\ 0 & (s<-\sqrt{x/2}).\end{cases}$$

留意以下 $\psi_x(s)$ 的性質:

(a) 對每個 s，當 $x\longrightarrow\infty$時，$\psi_x(s)\longrightarrow e^{-s^2}$。

(b) (a) 中的收斂，對每個$A<\infty$，在 $[-A, A]$ 上是均勻的。

(c) 當 $s<0$，則 $0<\psi_x(s)<e^{-s^2}$。

(d) 當 $s>0$ 且 $x>1$，則 $0<\psi_x(s)<\psi_1(s)$

(e) $\int_0^{\infty}\psi_1(s)ds<\infty$

因此，在第 7 章習題 12 中所述的收斂定理，可以用到(107)這個積分上，由 (101) 式知，當 $x\longrightarrow\infty$ 時，這個積分收斂到 $\sqrt{\pi}$。這就證明了 (103)。

本定理的一個較詳盡的證明，可以在 R. C. Buck 的高等微積分 pp. 216–218 中找到。另有兩個，完全不同，的證明，見 W. Feller 的論文，在 Amer. Math Monthly, Vol. 74. 1967, pp. 1223–1225 (在 Vol. 75, 1968, p. 518 有更正)，以及 Artin 的書 pp. 20–24.

習題 20 對一個比較不嚴密的結果，給了簡單證明。

習題

1. 定義

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

試證 f 在 $x=0$ 處，有所有階的導數，且對 $n=1,2,3,\cdots\cdots$，$f^{(n)}(0)=0$。

2. 令 a_{ij} 爲行列

$$-1, 0, 0, 0, \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2}, -1, 0, 0, \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 0\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, \cdots\cdots$$

第 i 列第 j 行的數，而

$$a_{ij}=\begin{cases} 0 & (i<j), \\ -1 & (i=j) \\ 2^{j-i} & (i>j) \end{cases}$$

試證 $\sum\limits_i \sum\limits_j a_{ij}=-2$，　$\sum\limits_j \sum\limits_i a_{ij}=0$

3. 試證，若對所有 $i, j, a_{ij}\geq 0$，則

$$\sum_i \sum_j a_{ij}=\sum_j \sum_i a_{ij}$$

$(+\infty=+\infty$的情形可能發生$)$。

4. 試證以下的極限關係

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b^x-1}{x}=\log b$　　　　$(b>0)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=e^x.$

5. 試求以下極限。

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\log n}[n^{1/n}-1]$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x(1-\cos x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x-x}$

6. 若對所有實數 x 及 y, $f(x)f(y)=f(x+y)$。

(a) 設 f 是可微分，且不爲 0，試證

$$f(x)=e^{cx}$$

其中 c 爲一常數。

(b) 試證明同樣結論，但只假設 f 是連續。

7. 若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，試證

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$$

8. 對 $n=0,1,2,\cdots\cdots$，且 x 爲實數，試證

$$|\sin nx|\leq n|\sin x|$$

留意，這個不等式對其它 n 值可能不眞，例如

$$\left|\sin\frac{1}{2}\pi\right|>\frac{1}{2}|\sin\pi|$$

9. (a) 令 $s_N=1+\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{N}\right)$。試證

$$\lim_{N\to\infty}(s_N-\log N)$$

存在，(這個極限，通常記作 γ，是叫做 Euler 常數。其數值爲 0.5772……到底它是不是有理數還不知道)。

(b) m 必須大約爲多大，才使得 $N=10^m$ 滿足 $s_N>100$?

10. 試證 $\Sigma 1/p$ 發散，這和是對所有質數取的。

(這顯示了質數在正整數中，是個相當大的集合。)

提示：已知 N，令 $p_1,\cdots\cdots,p_k$，爲那些至少可以整除一個 $\leq N$ 的

整數的質數。則

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\leq\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{1}{p_j}+\frac{1}{p_j^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1}$$

$$\leq\exp\sum_{j=1}^{k}\frac{2}{p_j}$$

這最後一個不等式會成立，是因爲若 $0\leq x\leq\frac{1}{2}$，則

$$(1-x)^{-1}\leq e^{2x}$$

（這個結果，還有許多證明法，例如，見 I. Niven 在 Amer. Math. Monthly, Vol. 78, 1971, pp. 272–273 的論文，以及 R. Bellman 在 Amer. Math. Monthly, Vol. 50, 1943, pp. 318–319 的一篇。）

11. 假設對所有 $A<\infty$，在 $[0,A]$ 上，$f\in\mathscr{R}$，且當 $x\longrightarrow+\infty$ 時 $f(x)\longrightarrow 1$。試證

$$\lim_{t\to0}t\int_0^{\infty}e^{-tx}f(x)dx=1\qquad(t>0)$$

12. 假設 $0<\delta<\pi$。若 $|x|\leq\delta$，則 $f(x)=1$，若 $\delta<|x|\leq\pi$，則 $f(x)=0$，且對所有 $x, f(x+2\pi)=f(x)$.

(a) 試求 f 的富氏係數，

(b) 試證

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\delta)}{n}=\frac{\pi-\delta}{2}\qquad(0<\delta<\pi).$$

(c) 試由 Parseval 定理導出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n\delta)}{n^2\delta}=\frac{\pi-\delta}{2}$$

(d) 令 $\delta\longrightarrow0$，試證

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}$$

(e) 在 (c) 中取 $\delta=\pi/2$，你會得到什麼?

13. 若 $0\leq x<2\pi$，取 $f(x)=x$，並利用 Parseval 定理導出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

14. 若在 $[-\pi,\pi]$ 上，$f(x)=(\pi-|x|)^2$，試證

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx.$$

並導出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

（最近 E. L. Stark 的一篇論文，包含了很多有關形如 Σn^{-s} 的級數的參考文獻，其中 s 是個正整數。見 Math. Mag. Vol. 47, 1974, pp, 197-202.）

15. 若 D_n 定義如 (17) 式，令

$$K_N(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n(x)$$

試證

$$K_N(x)=\frac{1}{N+1}\cdot\frac{1-\cos(N+1)x}{1-\cos x}$$

以及

(a) $K_N\geq 0$

(b) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(x)dx=1$

(c) $K_N(x)\leq\frac{1}{N+1}\cdot\frac{2}{1-\cos\delta}$　　若 $0<\delta\leq|x|\leq\pi$.

若 $s_N=s_N(f;x)$ 是 f 的富氏級數第 N 部份和，考慮算術平均

$$\sigma_N=\frac{s_0+s_1+\cdots\cdots+s_N}{N+1}$$

試證

$$\sigma_N(f;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)K_N(t)dt,$$

而由此證明 Fejér 定理：

若 f 連續，週期爲 2π，則在 $[-\pi,\pi]$ 上，$\sigma_N(f;x)\longrightarrow f(x)$ 均匀地。

提示：利用 (a), (b), (c) 等性質，再如定理 7.26 中進行。

16. 試證 Fejér 定理的點態型式：

若 $f\in\mathscr{R}$，且對某個 x, $f(x+)$, $f(x-)$ 皆存在，則

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N(f;x)=\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$$

17. 假設 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上是有界且單調，並具有形如 (62) 的富氏係數 c_n
    (a) 利用第 6 章，習題 17 證明 $\{nc_n\}$ 是個有界序列。
    (b) 試將 (a) 及習題 16，及第 3 章習題 14(e) 合起來，導出對所有 x，
    $$\lim_{N\to\infty}s_N(f;x)=\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]$$
    (c) 若只假設在 $[-\pi,\pi]$ 上，$f\in\mathscr{R}$，以及 f 在某個線段 $(\alpha,\beta)\subset[-\pi,\pi]$ 上為單調，試證對每個 $x\in(\alpha,\beta)$，(b) 中的結論成立。(這是局部化定理的一個應用。)

18. 定義
    $$f(x)=x^3-\sin^2x\tan x.$$
    $$g(x)=2x^2-\sin^2x-x\tan x.$$
    試問對所有 $x\in(0,\pi/2)$，這兩個函數任何一個，到底是正還是負，或是否有變號？證明你的答案。

19. 假設 f 是 R^1 上的連續函數，$f(x+2\pi)=f(x)$，且 α/π 是無理數。試證對所有 x
    $$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x+n\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt.$$
    提示：先對 $f(x)=e^{ikx}$ 來證。

20 下面這簡單的計算，會導出對 Stirling 公式的一個相當好的近似值。當 $m=1,2,3,\cdots\cdots$，定義若 $m\le x\le m+1$，則
    $$f(x)=(m+1-x)\log m+(x-m)\log(m+1)$$
    而若 $m-\frac{1}{2}\le x<m+\frac{1}{2}$，則定義
    $$g(x)=\frac{x}{m}-1+\log m.$$
    試畫出 f 和 g 的圖形。留意若 $x\ge 1$，則 $f(x)\le\log x\le g(x)$，以及
    $$\int_1^n f(x)dx=\log(n!)-\frac{1}{2}\log n>-\frac{1}{8}+\int_1^n g(x)dx。$$
    試在 $[1,n]$ 上積分 $\log x$。導出當 $n=2,3,4\cdots\cdots$

$$\frac{7}{8}<\log(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n+n<1$$

（留意: $\log\sqrt{2\pi}\sim 0.918\cdots\cdots$），因此

$$e^{7/8}<\frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{n}}<e.$$

21. 令

$$L_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(t)|dt \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

試證存在常數 $C>0$，使得

$$L_n>C\log n \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

或，更嚴密點說，序列

$$\left\{L_n-\frac{4}{\pi}\log n\right\}$$

有界。

22. 若 α 是實數且 $-1<x<1$，試證 Newton 二項式定理

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

提示: 將右邊記作 $f(x)$，證明這級數收斂，再證明

$$(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$$

再解這微分方程式。

另外試證若 $-1<x<1$，$\alpha>0$，則

$$(1-x)^{-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}x^n.$$

23. 令 γ 爲複數平面上連續可微分封閉曲線，以 $[a,b]$ 爲參數區間，並假設對每個 $t\in[a,b]$，$\gamma(t)\neq 0$。定義 γ 的指數 (index) 爲

$$Ind(\gamma)=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt.$$

試證 $Ind(\gamma)$ 永遠是個整數。

提示：$[a,b]$ 上存在函數 φ, $\varphi'=\gamma'/\gamma$, $\varphi(a)=0$。因此 $\gamma\exp(-\varphi)$ 是個常數。由於 $\gamma(a)=\gamma(b)$，於是 $\exp\varphi(b)=\exp\varphi(a)=1$。留意 $\varphi(6)=2\pi i Ind(\gamma)$

當 $\gamma(t)=e^{int}$, $a=0$, $b=2\pi$, 試計算 $Ind(\gamma)$。

試解釋何以 $Ind(\gamma)$ 常稱爲 γ 繞著 0 的迴旋數(Winding Number)。

24. 若γ是如習題 23 中者，此外更假設γ的值域不與負實軸相交。試證，$Ind(\gamma)=0$。提示：當$0\leq c<\infty$, $Ind(\gamma+c)$是c的連續整數值函數。此外，當$c\longrightarrow 0$，$Ind(\gamma+c)\longrightarrow 0$。

25. 假設 γ_1 及 γ_2 是如習題 23 中的二曲線，且

$$|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|<|\gamma_1(t)| \qquad (a\leq t\leq b)$$

試證 $Ind(\gamma_2)=Ind(\gamma_2)$。

提示：取 $\gamma=\gamma_2/\gamma_1$，則 $|1-\gamma|<1$，因此由習題 24 知，$Ind(\gamma)=0$ 此外，

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=\frac{\gamma_2'}{\gamma_2}-\frac{\gamma_1'}{\gamma_1}.$$

26. 令γ爲複數平面上的封閉曲線(未必是可微分)，其參數區間爲$[0,2\pi]$，而對所有 $t\in[0,2\pi]$, $\gamma(t)\neq 0$.

選取δ使得對所有 $t\in[0,2\pi]$, $|\gamma(t)|>\delta$。若 P_1 及 P_2 是使得對所有 $t\in[0,2\pi]$ 而 $|P_j(t)-\gamma(t)|<\delta/4$ 的三角多項式，（其存在性由定理 8.15 可確定）試利用習題 25 證明

$$Ind(P_1)=Ind(P_2)$$

定義這共同的値爲 $Ind(\gamma)$ 。

試證習題 24 及 25 的敍述，若除去可微分性的假設，仍然成立。

27. 令f爲定義在複數平面上的連續複值函數，假設有正整數n，及複數$c\neq 0$，使得

$$\lim_{|z|\to\infty} z^{-n}f(z)=c$$

試證對至少一個複數z, $f(z)=0$

注意，這是定理 8.8 的一般型式。

提示：假設對所有z，$f(z)\neq 0$，定義當$0\leq r<\infty$, $0\leq t\leq 2\pi$,

$$\gamma_r(t)=f(re^{it}),$$

並證明以下有關 γ_r 這些曲線的敍述：

(a) $Ind(\gamma_0)=0$

(b) 對所有夠大的r, $Ind(\gamma_r)=n$

(c) 在 $[0,\infty)$ 上，$Ind(\gamma_r)$ 是r的連續函數。

[(b) 及 (c)，利用習題 26 的最後一部份。]

證明 (a),(b) 及 (c) 是矛盾對立命題，蓋$n>0$。

28. 令$\overline{D}$爲複數平面中封閉單位圓盤。(因此$z<\overline{D}$若且唯若 $|z|\leq 1$.) 令g爲由$\bar{D}$ 映至單位圓T的連續映射。(因此，對每個$z\in\bar{D}$, $|g(z)|=1$.)

試證對至少一個$z\in T, g(z)=-z$

提示：當$0\leq r\leq 1$, $0\leq t\leq 2\pi$, 令

$$\gamma_r(t)=g(re^{it}),$$

並令 $\phi(t)=e^{-it}\gamma_1(t)$, 若對每個 $z\in T, g(z)\neq -z$, 則對每個 $t\in[0,2\pi], \phi(t)\neq -1$，因此由習題 24 及 26, $Ind(\phi)=0$，於是$Ind(\gamma_1)=1$，但 $Ind(\gamma_0)=0$，像在習題 27 中，試導出一個矛盾。

29. 試證每個由$\bar{D}$映至D的連續映射，在$\bar{D}$中都有固定點。

(這是 Brouwer 定點定理的二維情形。)

提示：假設對每個 $z\in\bar{D}$, $f(z)\neq z$。對每個 $z\in\bar{D}$, 都給一點$g(z)\in T$，它在由以 $f(z)$ 爲起點，通過z的射線上。則g將 $\bar{D}$映至T且若$z\in T, g(z)=z$, $g(z)$ 爲連續，因爲

$$g(z)=z-s(z)[f(z)-z],$$

這裏的 $s(z)$，是某個二次方程式——其係數爲f及 z 的連續函數——唯一的非負根。用習題 28。

30. 用 Stirling 公式證明對每個實數常數c，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Gamma(x+c)}{x^c\Gamma(x)}=1$$

31. 在定理 7.26 的證明中，曾證明過當$n=1,2,3,\cdots\cdots$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx\geq\frac{4}{3\sqrt{n}}$$

試利用定理 8.20 及習題 30，證明更精確的結果

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=\sqrt{\pi}.$$

第九章
多變數函數論

線性變換

我們以對歐氏 n 維空間 R^n 中向量集合的討論，做為本章的開始。這裏所呈示的代數性質，可以拓展到佈於任何純量場的有限維向量空間上去，而不須任何改變。不過，就我們的目的言，我們仍停留在歐氏空間這熟悉的架構中，是足够了。

9.1 定義 (a) 一個集合 $X\subset R^n$。若對所有 $\mathbf{x}\in X$, $\mathbf{y}\in X$ 及所有純量 C, $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in X$ 且 $c\mathbf{x}\in X$。則 X 是一個向量空間(vector space)

(b) 若 $\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_k\in R^n$, $C_1, \cdots\cdots, C_k$ 是純量，則 $c_1\mathbf{x}_1+\cdots\cdots+c_k\mathbf{x}_k$ 這向量叫做 $\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_k$ 的線性組合。若 $S\subset R^n$ 且 E 是 S 中元素所有線性組合所成的集合，則我們說 S 展成 E，或 E 是 S 的展集 (Span)。

注意每個展集都是向量空間。

(c) 一個包含 $\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_k$ 的集合 (我們用 $\{\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_k\}$ 表示這個集合) 叫做獨立 (independent)，如果 $c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_k\mathbf{x}_k$

$=0$ 蘊涵了 $C_1=\cdots\cdots=C_k=0$。 否則 $\{\mathbf{x}_1,\cdots\cdots,\mathbf{x}_k\}$ 叫做相依 (dependent)。

(d) 若向量空間X包含一個有 r 個向量的獨立集合，卻不包含有 $r+1$ 個向量的獨立集合。則我們說X 有維度 (dimension) 爲 r，寫成 $\dim X=r$.

只包含 $\mathbf{0}$ 的集合是個向量空間，其維度爲 0

(e) 向量空間X的一個獨立子集若展成X，則稱之爲X的基底 (basis)

注意，若$B=\{\mathbf{x}_1,\cdots\cdots,\mathbf{x}_r\}$ 是X的一組基底，則每個 $\mathbf{x}\in X$ 有 $\mathbf{x}=\sum c_j\mathbf{x}_j$ 這種型式的唯一表現式 (representation)，這種表現式存在，是因爲B展成X，同時它的唯一的，蓋B是獨立的。$C_1,\cdots\cdots,C_r$ 這些數叫做 $\mathbf{x}$ 對於基底B的座標。

基底最熟悉的例子是 $\{\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_n\}$ 這集合，其中 $\mathbf{e}_j$ 是 R^n 中的向量，它的第 j 座標是 1，而其餘座標都是 0。 若 $\mathbf{x}\in R^n$, $\mathbf{x}=(x_1,\cdots\cdots,x_n)$， 則 $\mathbf{x}=\sum x_j\mathbf{e}_j$ 我們稱 $\{\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_n\}$ 爲 R^n 的標準基底。

9.2 定理　令 r 爲正整數，若向量空間X是由具有 r 個向量的集合它展成，則 $\dim X\leq r$。

證明: 假設這是錯誤的。則有一個向量空間X，它包含一個獨立集合 $Q=\{\mathbf{y}_1,\cdots\cdots,\mathbf{y}_{r+1}\}$，而且它是由包含 r 個向量的集合 S_0 所展成的。

設 $0\leq i<r$，且設已建構好了一個集合 S_i，它展成 X，而且它包含所有 $\mathbf{y}_j$, $1\leq j\leq i$，再加上某組 S_0 中的 $r-i$ 個元素，說是 $\mathbf{x}_1,\cdots\cdots,\mathbf{x}_{r-i}$ 吧。（換言之，S_i是以 Q 中的元素來替換 S_0 中 i 個元素所得到的，但不改變其展集。）因爲 S_i 展成X, $\mathbf{y}_{i+1}$ 是在 S_i 的展集中，所以有純量 $a_1,\cdots\cdots,a_{i+1}$, $b_1,\cdots\cdots,b_{r-i}$, $a_{i+1}=1$，使得

$$\sum_{j=1}^{i+1} a_j \mathbf{y}_j + \sum_{k=1}^{r-i} b_k \mathbf{x}_k = 0$$

若所有 b_k 都是 0, Q，獨立性會使得所有 a_j 爲 0，這是個矛盾。於是，必有某個 $\mathbf{x}_k \in S_i$ 是 $T_i = S_i \cup \{\mathbf{y}_{i+1}\}$ 中其它元素的線性組合。由 T_i 中移去 $\mathbf{x}_i$，而叫所餘的集合爲 S_{i+1}，則 S_{i+1} 展成與 T_i 一樣的集合，卽X。所以 S_{i+1} 具有與 S_i 所假定的同樣性質，而以 $i+1$ 代替了 i。

由 S_0 開始，我們因而建構了 $S_1, \cdots\cdots, S_r$ 等集合，這類集合的最後一個，則包含了 $\mathbf{y}_1, \cdots\cdots, \mathbf{y}_r$ 而在我們的建構中顯示它展成X。但Q是獨立的，因此 $\mathbf{y}_{r+1}$ 不在 S_r 的展集中，這個矛盾便證明了這定理。

系：$\dim R^n = n$

證明：因爲 $\{\mathbf{e}_1, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n\}$ 展成 R^n，定理證明了

$$\dim R^n \leqq n$$

又因爲 $\{\mathbf{e}_1, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n\}$ 是獨立的，$\dim R^n \geq n$

9.3　定理　若X是一向量空間，$\dim X = n$

(a) 包含X中n個向量的集合E可展成X，若且唯若E是獨立的。

(b) X有一組基底，同時每組基底包含有n個向量。

(c) 若 $1 \leq r \leq n$，$\{\mathbf{y}_1 \cdots\cdots, \mathbf{y}_r\}$ 是X中一個獨立集合，則X有一組基底包含 $\{\mathbf{y}_1, \cdots\cdots, \mathbf{y}_r\}$

證明：假設$E = \{\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n\}$。因爲 $\dim X = n$，故對每個 $\mathbf{y} \in X$而言，$\{\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}\}$ 這集合是相依的。若E是獨立，則$\mathbf{y}$是在E的展集中；所以E展成X。反之，若E是相依的，則其中的一個元素可以移去，而不改變E的展集，所以由定理 9.2 知，E不可能展成X。這證明了 (a)。

因爲 $\dim X = n$. X包含一組有n個向量的獨立集合。而(a)顯示了每個這種集合都是X的一組基底。(b) 則由 9.1(d) 及 9.2

導得。

要證明 (c)，令 $\{\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n\}$ 爲X的一組基底。集合

$$S=\{\mathbf{y}_1, \cdots\cdots \mathbf{y}_r; \mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n\}$$

展成X，而且相依，蓋它包含多過 n 個的向量。定理 9.2 證明中的論證，顯示了 $\mathbf{x}_i$ 中有一個是S中其它元素的線性組合。若我們由S中移去這個 $\mathbf{x}_i$，餘下來的集合仍然可以展成 X。由 (a) 知這個程序可以連續 r 次，而導致X的一組包含 $\{\mathbf{y}_1, \cdots\cdots, \mathbf{y}_r\}$的基底。

9.4 定義 由向量空間X映至向量空間 Y 的映射A，叫做一個線性變換 (linear transformation)，如果對所有 $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$及所有純量 c，

$$A(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=A\mathbf{x}_1+A\mathbf{x}_2, A(c\mathbf{x})=cA\mathbf{x}.$$

注意，若A是線性，我們常寫成 $A\mathbf{x}$ 而不寫成 $A(\mathbf{x})$

也注意，若A是線性，則 $A\mathbf{0}=\mathbf{0}$。且一個由X映至Y的線性變換 A，是由它在任何一個基底上的作用所完全決定的：如果 $\{\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n\}$ 是 X 的基底，則每個 $\mathbf{x}\in X$具有這種型式的唯一表式：

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}_i$$

而A的線性性質，使我們可以由 $A\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, A\mathbf{x}_n$ 以及座標 $c_1, \cdots\cdots, c_n$ 來計算A，公式爲

$$A\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n} c_iA\mathbf{x}_i$$

由X映至X的線性變換，通常叫做 X 上的線性算子 (linear operators)。若A是X上的線性算子，而它 (i) 是 1 對 1，(ii) 將X映成 (onto)X，則我們說A是可逆的 (invertible)。在這情形下，我們可以在 X 上定義一個算子 A^{-1}，要求對所有 $\mathbf{x}\in X$，$A^{-1}(A\mathbf{x})=\mathbf{x}$。要驗證我們也會有對所有 $\mathbf{x}\in X, A(A^{-1}\mathbf{x})=\mathbf{x}$ 而

A^{-1} 也是線性的，是太簡單了。

關於在有限維向量空間上的線性算子，有一個很重要的事實，就是，上面的條件 (i) 及 (ii) 中的每一個都蘊涵了另一個:

9.5 定理　在有限維空間 X 上的線性算子 A，若且唯若 A 的值域是所有 X，則它是 1 對 1 的。

證明: 令 $\{\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n\}$ 爲 X 的一組基底。A 的線性性質顯示了它的值域 $R(A)$ 是集合 $Q=\{A\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, A\mathbf{x}_n\}$ 的展集。因此我們由定理 9.3(c) 推論，若且唯若 Q 是獨立的，則 $R(A)=X$。我們必須證明若且唯若 A 是 1 對 1，這是對的。

設若 A 是 1 對 1，$\sum c_i A\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$，則 $A(\sum c_i\mathbf{x}_i)=0$。因此 $\sum c_i\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$，故而 $c_1=\cdots\cdots=c_n=0$，我們歸結到 Q 是獨立的。

反之，設若 Q 是獨立的，而 $A(\sum c_i\mathbf{x}_i)=\mathbf{0}$，則 $\sum c_i A\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$，因此 $c_1=\cdots\cdots=c_n=0$，而我們歸結到：若 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 則 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$。如果現在 $A\mathbf{x}=A\mathbf{y}$，則 $A(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\mathbf{0}$；所以 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$，而這就是說 A 是 1 對 1。

9.6 定義　(a) $L(X, Y)$ 表示所有由向量空間 X 映至向量空間 Y 的線性變換的集合。我們將只寫成 $L(X)$ 而不用 $L(X, X)$，如果 $A_1, A_2\in L(X, Y)$，而 $c_1 c_2$ 是純量，則定義 $c_1A_1+c_2A_2$ 爲

$$(c_1A_1+c_2A_2)\mathbf{x}=c_1A_1\mathbf{x}+c_2A_2\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x}\in X)$$

很明顯 $c_1A_1+c_2A_2\in L(X, Y)$

(b) 若 X, Y, Z 爲向量空間，$A\in L(X, Y)$, $B\in L(Y, Z)$，我們定義它們的乘積 BA 爲 A 及 B 的合成函數:

$$(BA)\mathbf{x}=B(A\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x}\in X).$$

則 $BA\in L(X, Z)$。

注意，既使是 $X=Y=Z$，BA 也不一定與 AB 相同。

(c) 對 $A\in L(R^n, R^m)$，定義 A 的範數 (norm) $\|A\|$ 爲所有 $|A\mathbf{x}|$ 這些數的 lub，這裏的 $\mathbf{x}$ 是在 R^n 中所有 $|\mathbf{x}|\leq 1$ 的向

sup

量裏變化。

注意，對所有 $\mathbf{x}\in R^n$，不等式

$$|A\mathbf{x}|\leq\|A\|\,|\mathbf{x}|$$

成立。此外，若 λ 是使得對所有 $\mathbf{x}\in R^n$，而 $|A\mathbf{x}|\leq\lambda|\mathbf{x}|$，則 $\|A\|\leq\lambda$。

9.7 定理 (a) 若 $A\in L(R^n,R^m)$，則 $\|A\|<\infty$，且 A 是一個由 R^n 映至 R^m 的均勻連續映射。

(b) 若 $A,B\in L(R^n,R^m)$ 而 c 是一個純量，則

$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|,\ \|cA\|=|c|\,\|A\|.$$

又若將 A 和 B 的距離定為 $\|A-B\|$，則 $L(R^n,R^m)$ 是個度量空間。

(c) 若 $A\in L(R^n,R^m)$, $B\in L(R^n,R^m)$，則

$$\|BA\|\leq\|B\|\|A\|$$

證明: (a) 令 $\{\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_n\}$ 為 R^n 中的標準基底。假設 $\mathbf{x}=\sum c_i\mathbf{e}_i$ 而 $|\mathbf{x}|\leq 1$。因此對所有 $i=1,2,\cdots\cdots,n$，$|c_i|\leq 1$，則

$$|A\mathbf{x}|=|\sum c_iA\mathbf{e}_i|\leq\sum|c_i|\,|A\mathbf{e}_i|\leq\sum|A\mathbf{e}_i|$$

所以

$$\|A\|\leq\sum_{i=1}^{n}|A\mathbf{e}_i|<\infty$$

又因為若 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^n$, $|A\mathbf{x}-A\mathbf{y}|\leq\|A\|\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$，我們知道 A 是均勻連續。

(b) (b) 中的不等式，可由

$$\begin{aligned}|(A+B)\mathbf{x}|&=|A\mathbf{x}+B\mathbf{x}|\leq|A\mathbf{x}|+|B\mathbf{x}|\\&\leq(\|A\|+\|B\|)\,|\mathbf{x}|\end{aligned}$$

證得。

(b) 的第二部份可以用同樣的方法證明。如果

$$A,B,C\in L(R^n,R^m)$$

我們有三角不等式

$$\|A-C\|=\|(A-B)+(B-C)\|\leq\|A-B\|+\|B-C\|$$

且我們很容易驗證 $\|A-B\|$ 具有度量的其它性質。(定義 2.15)

(c) 最後，(c) 可由

$$|(BA)\mathbf{x}|=|B(A\mathbf{x})|\leq\|B\|\,|A\mathbf{x}|\leq\|B\|\|A\|\,|\mathbf{x}|.$$

證得。

由於我們現在在 $L(R^n, R^m)$ 這些空間有了度量，所以，開集合，連續等等概念對這些空間就有意義了。我們下一個定理就要利用到這些概念:

9.8 定理　令 Ω 表示 R^n 上所有可逆線性算子的集合。

(a) 若 $A\in\Omega$, $B\in L(R^n)$，且

$$\|B-A\|\cdot\|A^{-1}\|<1$$

則 $B\in\Omega$.

(b) Ω 是 $L(R^n)$ 的一個開子集，$A\longrightarrow A^{-1}$ 這映射在 Ω 上是連續的。

(這映射顯然也是由 Ω 映成 Ω 的 1-1 映射，它是它自己的逆映射。)

證明: (a) 令 $\|A^{-1}\|=1/\alpha$, $\|B-A\|=\beta$。則 $\beta<\alpha$。對每個 $\mathbf{x}\in R^n$

$$\alpha|\mathbf{x}|=\alpha|A^{-1}A\mathbf{x}|\leq\alpha\|A^{-1}\|\cdot|A\mathbf{x}|$$
$$=|A\mathbf{x}|\leq|(A-B)\mathbf{x}|+|B\mathbf{x}|\leq\beta|\mathbf{x}|+|B\mathbf{x}|$$

因此

$$(1)\qquad (\alpha-\beta)|\mathbf{x}|\leq|B\mathbf{x}|\qquad(\mathbf{x}\in R^n)$$

由於 $\alpha-\beta>0$，由 (1) 知，若 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$，則 $B\mathbf{x}\neq0$。因此 B 是 1-1，由定理 9.5 知，$B\in\Omega$. 這對所有 B 而 $\|B-A\|<\alpha$ 都成立，所以我們得出 (a)，以及 Ω 是開集合。

(b) 其次，在 (1) 中以 $B^{-1}\mathbf{y}$ 代替 $\mathbf{x}$。所得到的不等式

(2) $$(\alpha-\beta)|B^{-1}\mathbf{y}|\leq|BB^{-1}\mathbf{y}|=|\mathbf{y}| \qquad (\mathbf{y}\in R^n),$$
顯示 $\|B^{-1}\|\leq(\alpha-\beta)^{-1}$。恒等式

$$B^{-1}-A^{-1}=B^{-1}(A-B)A^{-1}$$

與定理 9.7(c) 合起來，因而蘊涵了

$$\|B^{-1}-A^{-1}\|\leq\|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\|\leq\frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}$$

這就證得了在 (b) 中所做的連續性斷言，蓋當 $B\longrightarrow A$，$\beta\longrightarrow0$

9.9 矩陣 設若 $\{\mathbf{x}_1,\cdots\cdots,\mathbf{x}_n\}$ 及 $\{\mathbf{y}_1,\cdots\cdots,\mathbf{y}_m\}$ 分別爲向量空間 X 及 Y 的基底。則每個 $A\in L(X,Y)$ 便決定了一組數 a_{ij} 使得

(3) $$A\mathbf{x}_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\mathbf{y}_i \qquad (1\leq j\leq n)$$

若將這些數用 m 列 n 行的矩形排列來看較爲方便，稱之爲 $m\times n$ 矩陣

$$[A]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn}\end{pmatrix}$$

注意，向量 $A\mathbf{x}_j$ (對於基底$\{\mathbf{y}_1,\cdots\cdots,\mathbf{y}_m\}$) 的座標 a_{ij}，出現在 $[A]$ 的第 j 行。因此，向量 $A\mathbf{x}_j$ 也有時叫做 $[A]$ 的行向量 (column vectors)。因著這個定義，A 的值域是由 $[A]$ 的行向量所展成的。

若 $\mathbf{x}=\sum c_j\mathbf{x}_j$，由 A 的線性性質及 (3) 式，顯示

(4) $$A\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,c_j\right)\mathbf{y}_i.$$

因此 A 的座標是 $\sum a_{ij}c_j$。留意，在 (3) 中是對 a_{ij} 的第一指標作和；當計算座標時，我們對第二指標作和。

其次假設已給了一個 $m\times n$ 矩陣。元素 a_{ij} 爲實數。若 A 由

(4) 所定義，很明顯$A\in L(X, Y)$，而〔A〕就是所予的矩陣。因此在 $L(X, Y)$ 及所有$m\times n$的實矩陣集合間，有 1-1 對應。雖如此，我們要強調的是，〔A〕不只是與A有關，也與 X, Y中基底的選取有關。如果我們改變基底，則同樣的A可給出不同的矩陣，反之亦然。我們將不再進一步追究這個問題，因爲我們一般都處理固定基底(對這點的一些補充，可以在 9. 37 節中找到)。

若Z是第三個向量空間，有基底 $\{\mathbf{z}_1, \cdots\cdots, \mathbf{z}_p\}$，若 A 是由 (3) 所定，且若

$$B\mathbf{y}_i=\sum_k b_{ki}\mathbf{z}_k,\ (BA)\mathbf{x}_j=\sum_k c_{kj}\mathbf{z}_k,$$

則$A\in L(X, Y), B\in L(Y, Z), BA\in L(X, Z)$ 而因爲

$$\begin{aligned}B(A\mathbf{x}_j)&=B\sum_i a_{ij}\mathbf{y}_i=\sum_i a_{ij}B\mathbf{y}_i\\&=\sum_i a_{ij}\sum_k b_{ki}\mathbf{z}_k=\sum_k\Big(\sum_i b_{ki}a_{ij}\Big)\mathbf{z}_k\end{aligned}$$

$\{\mathbf{z}_1, \cdots\cdots, \mathbf{z}_p\}$ 的獨立性蘊涵了

(5) $$c_{kj}=\sum_i b_{ki}a_{ij}\qquad(1\le k\le p, 1\le j\le n)$$

這就說明了如何由〔B〕及〔A〕來計算〔BA〕。如果我們定義〔B〕〔A〕這乘積爲〔BA〕，則 (3) 所描述的就是普通的矩陣乘法。

最後，假設 $\{\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n\}$ 及 $\{\mathbf{y}_1, \cdots\cdots, \mathbf{y}_m\}$ 是 R^n 及 R^m 的標準基底，而A是由 (4) 所定者，則 Schwarz 不等式顯示

$$|A\mathbf{x}|^2=\sum_i\Big(\sum_j a_{ij}c_j\Big)^2\le\sum_i\Big(\sum_j a_{ij}{}^2\cdot\sum_j c_j{}^2\Big)=\sum a_{ij}{}^2|\mathbf{x}|^2.$$

因此，

(6) $$\|A\|\le\Big\{\sum_{i,j}a_{ij}{}^2\Big\}^{1/2}$$

如果我們利用 (6) 而以$B-A$替代A，這裏的$A, B\in L(R^n, R^m)$，我們發現，若 a_{ij} 是某個參數的連續函數，即A也是。更嚴密點說：

若S是度量空間，$a_{11}, \cdots\cdots, a_{mn}$ 是S上的實值連續函數，假

使對每個 $p\in S$，A_p 是由 R^n 映至 R^m 的線性變換，它的矩陣元素爲 $a_{ij}(p)$，則 $p\longrightarrow A_p$ 這映射是個由 S 映至 $L(R^n, R^m)$ 的連續映射。

微分學

9.10 前言　爲了要得到定義域是 R^n（或是 R^n 的開子集）的函數，它們導數的定義，且讓我們再觀察一下 $n=1$ 這熟悉的情形，看看我們如何以一種可以自然推廣到 $n>1$ 情形的方法，來解釋這個導數。

若 f 是個實值函數，定義域爲 $(a,b)\subset R^1$，且若 $x\in(a,b)$，則 $f'(x)$ 通常是定義爲這個實數

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{7}$$

當然是，假設這極限存在的話。因此

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+r(h), \tag{8}$$

式中的「餘留項」$r(h)$是很小，意思是

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0 \tag{9}$$

留意，(8) 式將 $f(x+h)-f(x)$ 這個差，表示爲將 h 映至 $f'(x)h$ 的線性函數，加上一個小的餘留項之和。

因此，我們可以將 f 在 x 處的導數，不視爲一個實數，而看成是在 R^1 上的線性算子，它將 h 映至 $f'(x)h$。

（要注意到，每個實數 α 都可造成一個 R^1 上的線性算子；現在所說的算子，就只是乘以 α。反之，每個將 R^1 映至 R^1 的線性函數，都是以某個實數相乘的乘法。就是這種 R^1 及 $L(R^1)$ 之間自然的 1-1 對應，促使我們做了上面的敍述。）

其次，我們考慮將 $(a,b)\subset R^1$ 映至 R^m 的函數 $\mathbf{f}$。在這種

情況，$\mathbf{f}'(x)$ 曾定義爲向量 $\mathbf{y}\in R^m$（如果有一個的話），使得

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x)}{h}-\mathbf{y}\right\}=\mathbf{0} \tag{10}$$

我們可以將這個再重寫爲這種型式

$$\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x)=h\mathbf{y}+\mathbf{r}(h) \tag{11}$$

其中，當 $h\longrightarrow 0$ 時，$\mathbf{r}(h)/h\longrightarrow\mathbf{0}$(11) 式右邊的主要項，又是個 h 的線性函數，每個 $\mathbf{y}\in R^m$ 都造成一個由 R^1 映至 R^m 的線性變換，就是對每個 $h\in R^1$，給它一個向量 $h\mathbf{y}\in R^m$。這種將R^m 視同於 $L(R^1,R^m)$ 的過程，使得我們可以將 $\mathbf{f}'(x)$ 看成是 $L(R^1, R^m)$ 的元素。

因此，若 $\mathbf{f}$ 是個由 $(a,b)\subset R^1$ 映至 R^m 的可微分映射，且若 $x\in(a,b)$，則 $\mathbf{f}'(x)$ 是個由 R^1 映至 R^m 的線性變換，它滿足

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}'(x)h}{h}=\mathbf{0} \tag{12}$$

或，同樣的，

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\mathbf{f}(x+h)-\mathbf{f}(x)-\mathbf{f}'(x)h|}{|h|}=0 \tag{13}$$

我們現在準備要處理 $n>1$ 的情形了。

9.11　定義　若 E 爲 R^n 中的開集合，$\mathbf{f}$ 將 E 映至 R^m，$\mathbf{x}\in E$，如果存在一個 R^n 映至 R^m 的線性變換 A，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|}=0 \tag{14}$$

則我們說 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 是可微分 (differentiable)，我們並寫成

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})=A \tag{15}$$

若 $\mathbf{f}$ 在所有 $\mathbf{x}\in E$ 皆可微分，則我們說 $\mathbf{x}$ 在 E 中可微分。

在 (14) 式中，我們當然了解 $\mathbf{h}\in R^n$，若 $|\mathbf{h}|$ 足够小，則

$\mathbf{x}+\mathbf{h}\in E$，蓋 E 爲開集合。所以 $\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})$ 有意義。$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})\in R^m$，同時因爲 $A\in L(R^n, R^m)$, $A\mathbf{h}\in R^m$，因此

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A\mathbf{h}\in R^m$$

(14)式中分子的範數是 R^m 中的範數。而分母中，我們有的是 $\mathbf{h}$ 的 R^n 範數。

在我們作進一步討論之前，有一個很明顯的唯一性問題，必須先解決。

9.12　定理　若 E 及 $\mathbf{f}$ 與定義 9.11 同，$\mathbf{x}\in E$ 而 (14) 式對 $A=A_1$ 及 $A=A_2$ 都成立，這裏的 $A_i\in L(R^n, R^m)(i=1,2)$ 則 $A_1=A_2$。

證明: 若 $B=A_1-A_2$，則不等式

$$|B\mathbf{h}|\leq|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A_1\mathbf{h}|+|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-A_2\mathbf{h}|$$

顯示了，當 $\mathbf{h}\longrightarrow\mathbf{0}$, $|B\mathbf{h}|/|\mathbf{h}|\longrightarrow 0$。對固定的 $\mathbf{h}\neq\mathbf{0}$，這便導致，當 $t\longrightarrow 0$

$$\frac{B(t\mathbf{h})}{|t\mathbf{h}|}\longrightarrow 0 \tag{16}$$

而 B 的線性性質顯示 (16) 式左邊與 t 無關。因此對所有 $\mathbf{h}\in R^n$, $B\mathbf{h}=\mathbf{0}$ 因此 $B=0$

9.13　備註　(a) 關係式 (14)，也可改寫成這種型式

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})=\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}+\mathbf{r}(\mathbf{h}) \tag{17}$$

這裏的剩餘項 $\mathbf{r}(\mathbf{h})$ 很小，這是在

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\mathbf{r}(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|}=0 \tag{18}$$

的意義下而言的，我們可以將 (17) 式解釋爲，正如定義9.11中所做的，對一個固定的 $\mathbf{x}$ 和很小的 $\mathbf{h}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

近似地等於 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}$，即等於一個線性變換在 $\mathbf{h}$ 處取值。

(b) 設若 $\mathbf{f}$ 及 E 與定義 9.11 同，而 $\mathbf{f}$ 在 E 中可微。則對每個 $\mathbf{x}\in E$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 是個函數，卽一個由 R^n 映至 R^m 的線性變換。但 $\mathbf{f}'$ 也是個函數: $\mathbf{f}'$ 將 E 映至 $L(R^n, R^m)$。

(c) 略微觀察 (17) 式，卽可看出 $\mathbf{f}$ 在每個 $\mathbf{f}$ 可微分的點上都是連續的。

(d) 由 (14) 式或 (17) 式所定義的導數，常稱爲 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 處的全導數，或 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 的微分 (differential)。

9.14 例子　我們已對由 R^n 映至 R^m 函數，定義其導數爲由 R^n 至 R^m 的線性變換。這樣一個線性變換的導數是什麼呢? 答案非常簡單。

若 $A\in L(R^n, R^m)$，且若 $\mathbf{x}\in R^n$，則

(19)　$$A'(\mathbf{x})=A$$

留意 $\mathbf{x}$ 在 (19) 式的左邊出現，但在右邊則否。(19) 式的兩邊都是 $L(R^n, R^m)$ 的元素，但是 $A\mathbf{x}\in R^m$。

(19) 式的證明是再簡單不過了。蓋由 A 的線性性質知，

(20)　$$A(\mathbf{x}+\mathbf{h})-A\mathbf{x}=A\mathbf{h}.$$

令 $\mathbf{f}(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$, (14)式的分子則對所有 $\mathbf{h}\in R^n$ 都是 0。(17) 式中 $\mathbf{r}(\mathbf{h})=\mathbf{0}$。

我們現在將連鎖定理 (定理 5.5) 擴展到目前的情形。

9.15 定理　若 E 是 R^n 中一開集合，$\mathbf{f}$ 將 E 映至 R^m，$\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}_0\in E$ 是可微分，$\mathbf{g}$ 將包含 $\mathbf{f}(E)$ 的開集合映至 R^k，而 $\mathbf{g}$ 在 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ 是可微分，則由

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

所定義的由 E 映至 R^k 的映射 $\mathbf{F}$，在 $\mathbf{x}_0$ 處是可微分。且

(21)　$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)=\mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$$

第 (21) 式的右邊，我們有兩個線性變換的乘積，其定義如 9.6 節。

證明: 令 $\mathbf{y}_0=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, $A=\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)$, $B=\mathbf{g}'(\mathbf{y}_0)$, 並定義

$$\mathbf{u}(\mathbf{h})=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)-A\mathbf{h},$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{k})=\mathbf{g}(\mathbf{y}_0+\mathbf{k})-\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)-B\mathbf{k},$$

這是對所有 $\mathbf{h}\in R^n$ 及 $\mathbf{k}\in R^m$，而 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})$ 及 $\mathbf{g}(\mathbf{y}_0+\mathbf{k})$ 有定義者。則

(22) $$|\mathbf{u}(\mathbf{h})|=\varepsilon(\mathbf{h})|\mathbf{h}|,\ |\mathbf{v}(\mathbf{k})|=\eta(\mathbf{k})|\mathbf{k}|,$$

其中當 $\mathbf{h}\longrightarrow\mathbf{0}$ 時 $\varepsilon(\mathbf{h})\longrightarrow 0$，當 $\mathbf{k}\longrightarrow\mathbf{0}$ 時，$\eta(\mathbf{k})\longrightarrow 0$

已知 $\mathbf{h}$，令 $\mathbf{k}=\mathbf{f}(\mathbf{k}_0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$，則

(23) $$|\mathbf{k}|=|A\mathbf{h}+\mathbf{u}(\mathbf{h})|\leq[\|A\|+\varepsilon(\mathbf{h})]|\mathbf{h}|,$$

且

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)-BA\mathbf{h}&=\mathbf{g}(\mathbf{y}_0+\mathbf{k})-\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)-BA\\&=B(\mathbf{k}-A\mathbf{h})+\mathbf{v}(\mathbf{k})\\&=B\mathbf{u}(\mathbf{h})+\mathbf{v}(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

因此，當 $\mathbf{h}\neq\mathbf{0}$，(22) 及 (23) 蘊涵了

$$\frac{|\mathbf{F}(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)-BA\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|}\leq\|B\|\varepsilon(\mathbf{h})+[\|A\|\varepsilon(\mathbf{h})]\eta(\mathbf{k})$$

令 $\mathbf{h}\longrightarrow\mathbf{0}$，則 $\varepsilon(\mathbf{h})\longrightarrow 0$。另外，由 (23) $\mathbf{k}\longrightarrow\mathbf{0}$，所以 $\eta(\mathbf{k})\longrightarrow 0$。於是 $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)=BA$，這就是 (21) 所斷言者。

9.16 偏導數 我們還是考慮由開集合 $E\subset R^n$ 映至 R^m 的函數 $\mathbf{f}$ 令 $\{\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_n\}$ 及 $\{\mathbf{u}_1\cdots\cdots,\mathbf{u}_m\}$ 為 R^n 及 R^m 的標準基底，$\mathbf{f}$ 的分量 (components) 是實值函數 $f_1,\cdots\cdots,f_m$，定義為

(24) $$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{m}f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i\qquad(\mathbf{x}\in E),$$

或，是一樣的，$f_i(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}_i$，$1\leq i\leq m$

當$\mathbf{x}\in E$，$1\leq i\leq m$，$1\leq j\leq n$ 我們定義

(25) $$(D_jf_i)(\mathbf{x})=\lim_{t\to 0}\frac{f_i(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-f_i(\mathbf{x})}{t}$$

如果這極限存在的話。將 $f_i(\mathbf{x})$ 寫成 $f_i(x_1,\cdots\cdots,x_n)$，我們看出 D_jf_i 是 f_i 對 x_j 的導數，而將其餘變數保持固定。因此，

(26) $$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

這符號常用以代替 D_jf_i，而 D_jf_i 叫做偏導數(Partial Derivative)

有許多情況，當處理單變數時，只需導數存在就够了，但在多變數函數中，是需要偏導數是連續，或至少是有界。例如，第 4 章習題 7 中所描述的函數 f 和 g，都不連續，但在 R^2 中每個點，其偏導數都存在。既使對連續函數而言，所有偏導數都存在，仍不足蘊涵在定義 9.11 意義下的可微分性；見習題 6 及14，和定理 9.21。

然而，若已知 $\mathbf{f}$ 在一點 $\mathbf{x}$ 可微，則其偏導數在 $\mathbf{x}$ 點存在，並且它們完全決定 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 這個線性變換:

9.17 定理 假設 $\mathbf{f}$ 將開集合 $E\subset R^n$ 映至 R^m，且 $\mathbf{f}$ 在一點 $\mathbf{x}\in E$ 處可微分，則偏導數 $(D_jf_i)(\mathbf{x})$ 都存在，且

(27) $$\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j=\sum_{i=1}^{m}(D_jf_i)(\mathbf{x})\mathbf{u}_i \quad (1\leq j\leq n)$$

正如 9.16 節中，這裏的 $\{\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_n\}$ 及 $\{\mathbf{u}_1,\cdots\cdots,\mathbf{u}_m\}$ 是 R^n 及 R^m 的標準基底。

證明: 固定 j，由於 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 是可微分，故

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}'(\mathbf{x})(t\mathbf{e}_j)+\mathbf{r}(t\mathbf{e}_j)$$

其中，當 $t\longrightarrow 0$ 時，$|\mathbf{r}(t\mathbf{e}_j)|/t\longrightarrow 0$ 因此，$\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 的線性性質顯示

(28) $$\lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-\mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j.$$

如果我們現在像在 (24) 中一樣，將 $\mathbf{f}$ 用它的分量來表示，則 (28) 式變成爲

(29) $$\lim_{t\to 0}\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_j)-f_i(\mathbf{x})}{t}\mathbf{u}_i=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$$

於是，當 $t\longrightarrow 0$，這個和中的每一個商，都有極限（見定理4.10)，因此每個 $(D_jf_i)(\mathbf{x})$ 都存在，則 (27) 由 (29) 導得。

這裏有幾個定理 9.17 的結論:

令〔$\mathbf{f}'(\mathbf{x})$〕表示 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 對於我們的標準基底的矩陣，如 9.9 節中者。

則 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$ 是〔$\mathbf{f}'(\mathbf{x})$〕的第 j 個行向量，而因此 (27) 顯示，$(D_jf_i)(\mathbf{x})$ 這個數佔着〔$\mathbf{f}'(\mathbf{x})$〕第 i 列第 j 行的位置。故

$$[\mathbf{f}'(\mathbf{x})]=\begin{bmatrix}(D_1f_1)(\mathbf{x})\cdots\cdots(D_nf_1)(\mathbf{x})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (D_1f_m)(\mathbf{x})\cdots\cdots(D_nf_m)(\mathbf{x})\end{bmatrix}$$

若 $\mathbf{h}=\sum h_j\mathbf{e}_j$ 是 R^n 中任意向量，則 (27) 式蘊涵了

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}=\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{j=1}^{n}(D_jf_i)(\mathbf{x})h_j\right\}\mathbf{u}_i \tag{30}$$

9.18 例子　令 γ 爲將線段 $(a,b)\subset R^1$ 映至開集合 $E\subset R^n$ 的可微分映射，換言之，γ 是 E 中的可微分曲線。令 f 爲實值可微分函數，其定義域爲 E。因此 f 是個由 E 映至 R^1 的可微分映射。定義

$$g(t)=f(\gamma(t))\qquad(a<t<b) \tag{31}$$

則連鎖定理斷言

$$g'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t)\qquad(a<t<b). \tag{32}$$

由於 $\gamma'(t)\in L(R^1,R^n)$ 而 $f'(\gamma(t))\in L(R^n,R^1)$, (32) 式定義了 $g'(t)$ 爲 R^1 上的線性算子。這與 g 將 (a,b) 映至 R^1 這件事是相合的。然而，$g'(t)$ 也可視爲一實數。（這點在 9.10 節中討論過了。）我們現在會看到，這個數可以由 f 的偏導數，和 γ 的分量的導數計算出來。

對 R^n 的標準基底 $\{\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_n\}$,〔$\gamma'(t)$〕是個 $n\times 1$ 矩陣（一個「行矩陣」），它以 $\gamma'_i(t)$ 爲第 i 列，其中 $\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_n$ 是 γ 的分量。對每個 $\mathbf{x}\in E$,〔$f'(\mathbf{x})$〕是個 $1\times n$ 矩陣（一個「列矩陣」），它以 $(D_jf)(\mathbf{x})$ 爲第 j 行，因此〔$g'(t)$〕是個 1×1 矩陣，其唯一的元素就是這個實數

(33)　　$g'(t)=\sum_{i=1}^{n}(D_if)(\gamma(t))\gamma_i'(t)$

這是常會遇到的，連鎖定理的特殊情形。它也可以用下列方式予以重述。

對每個 $\mathbf{x}\in E$，我們都給一個向量，所謂 f 在 $\mathbf{x}$ 的「梯度」，(gradient) 定義爲

(34)　　$(\nabla f)(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}(D_if)(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$

由於

(35)　　$\gamma'(t)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i'(t)\mathbf{e}_i$

故 (33) 式可以寫成這種型式

(36)　　$g'(t)=(\nabla f)(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$

就是向量 $(\nabla f)(\gamma(t))$ 與向量 $\gamma'(t)$ 的內積。

我們現在固定 $\mathbf{x}\in E$，並令 $\mathbf{u}\in R^n$ 爲單位向量（就是 $|\mathbf{u}|=1$），而將 γ 特別定爲

(37)　　$\gamma(t)=\mathbf{x}+t\mathbf{u}\qquad(-\infty<t<\infty)$

則對每個 $t,\gamma'(t)=\mathbf{u}$。因此 (36) 式顯示

(38)　　$g'(0)=(\nabla f)(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}$

另一方面，由 (37) 式知。

$$g(t)-g(0)=f(\mathbf{x}+t\mathbf{u})-f(\mathbf{x})$$

因此由 (38) 得出。

(39)　　$\lim_{t\to0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{u})-f(\mathbf{x})}{t}=(\nabla f)(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}$

(39) 式中的極限，通常叫做 f 在 $\mathbf{x}$ 沿單位向量 $\mathbf{u}$ 方向的方向導數 (directional derivative)，可以記作 $(D_uf)(\mathbf{x})$。

若 f 和 $\mathbf{x}$ 是固定，但 $\mathbf{u}$ 在變，則 (39) 式顯示 $(D_uf)(\mathbf{x})$ 在當 $\mathbf{u}$ 是 $(\nabla f)(\mathbf{x})$ 的正數倍時，達其極大值。〔$(\nabla f)(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ 的情形，在這裏必須除去。〕

若 $\mathbf{u}=\sum u_i\mathbf{e}_i$，則 (39) 式顯示，$(D_{\mathbf{u}}f)(\mathbf{x})$ 可以用 f 在 $\mathbf{x}$ 處的偏導數表示爲公式

(40)　　$$(D_{\mathbf{u}}f)(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}(D_if)(\mathbf{x})u_i.$$

這裏的某些觀念，在下面這定理中是會用到的。

9.19　定理　假設 $\mathbf{f}$ 將凸開集合 $E\subset R^n$ 映至 R^m，$\mathbf{f}$ 在 E 中可微分，並有一實數 M，使得對所有 $\mathbf{x}\in E$，

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x})\|\leq M$$

則對所有 $\mathbf{a}\in E,\mathbf{b}\in E$，

$$|\mathbf{f}(\mathbf{b})-\mathbf{f}(\mathbf{a})|\leq M|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$$

證明： 固定 $\mathbf{a}\in E,\mathbf{b}\in E$。定義，對所有 $t\in R^1$，

$$\gamma(t)=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

並使得 $\gamma(t)\in E$，由於 E 是凸的，故若 $0\leq t\leq 1$，則 $\gamma(t)\in E$。令

$$\mathbf{g}(t)=\mathbf{f}(\gamma(t)).$$

則

$$\mathbf{g}'(t)=\mathbf{f}'(\gamma(t))\gamma'(t)=\mathbf{f}'(\gamma(t))(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

因此，對所有 $t\in[0,1]$

$$|\mathbf{g}'(t)|\leq\|\mathbf{f}'(\gamma(t))\||\mathbf{b}-\mathbf{a}|\leq M(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

由定理 5.19 知，

$$|\mathbf{g}(1)-\mathbf{g}(0)|\leq M|\mathbf{b}-\mathbf{a}|.$$

但是，$\mathbf{g}(0)=\mathbf{f}(\mathbf{a})$ 而 $\mathbf{g}(1)=\mathbf{f}(\mathbf{b})$。證畢。

系。此外，若對所有 $\mathbf{x}\in E,\mathbf{f}'(\mathbf{x})=\mathbf{0}$，則 $\mathbf{f}$ 是個常數。

證明：要證明這個，留意本定理的假設，現在對 $M=0$ 成立。

9.20　定義　由開集合 $E\subset R^n$ 映至 R^m 的可微分映射 $\mathbf{f}$，若 $\mathbf{f}'$ 是由 E 映至 $L(R^n,R^m)$ 的連續映射，則稱之爲在 E 中連續可微分。

更明白點說，它是要求每個 $\mathbf{x}\in E$，及每個 $\epsilon>0$，存在

一 $\delta>0$，使得若 $\mathbf{y}\in E$，且 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<\delta$，則 $\|\mathbf{f}'(\mathbf{y})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\|<\epsilon$。

如果是這樣，我們也說成 $\mathbf{f}$ 是個在E中的$\mathscr{C}'$— 映射。或 $\mathbf{f}\in\mathscr{C}'(E)$。

9.21 定理 設 $\mathbf{f}$ 將開集合$E\subset R^n$映至 R^m，則 $\mathbf{f}\in\mathscr{C}'(E)$ 若且唯若對 $1\le i\le m$，$1\le j\le n$，D_jf_i 存在且在E上連續。

證明：首先假設 $\mathbf{f}\in\mathscr{C}'(E)$，由 (27) 式知對所有 i,j 及所有 $\mathbf{x}\in E$，

$$(D_jf_i)(\mathbf{x})=(\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{u}_i$$

因此，

$$(D_jf_i)(\mathbf{y})-(D_jf_i)(\mathbf{x})=\{[\mathbf{f}'(\mathbf{y})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})]\mathbf{e}_j\}\cdot\mathbf{u}_i$$

又由於 $|\mathbf{u}_i|=|\mathbf{e}_j|=1$，所以

$$\begin{aligned}|(D_jf_i)(\mathbf{y})-(D_jf_i)(\mathbf{x})|&\le|[\mathbf{f}'(\mathbf{y})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})]\mathbf{e}_j|\\&\le\|\mathbf{f}'(\mathbf{y})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\|.\end{aligned}$$

所以 D_jf_i 是連續。

欲證其逆，考慮$m=1$的情況足矣。（何故？）

固定 $\mathbf{x}\in E$ 及 $\epsilon>0$。因爲E是開集合，故存在一個開球 $S\subset E$，以 $\mathbf{x}$ 爲圓心，r 爲半徑，而函數 D_jf 的連續性顯示了 r 可以取得使

$$(41)\qquad |(D_jf)(\mathbf{y})-(D_jf)(\mathbf{x})|<\frac{\epsilon}{n}\quad(\mathbf{y}\in S,1\le j\le n)$$

假使 $\mathbf{h}=\sum h_j\mathbf{e}_j$, $|\mathbf{h}|<r$；令 $\mathbf{v}_0=\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_k=h_1\mathbf{e}_1+\cdots\cdots+h_k\mathbf{e}_k$, $1\le k\le n$，則

$$(42)\qquad f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n}[f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_j)-f(\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1})].$$

由於 $|\mathbf{v}_k|<r$，$1\le k\le n$，且 S 是個凸集合，故以 $\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1}$ 及 $\mathbf{x}+\mathbf{v}_j$ 爲端點的線段落在S裏面。又因爲 $\mathbf{v}_j=\mathbf{v}_{j-1}+h_j\mathbf{e}_j$

故均值定理 5.10 顯示 (42) 式中第 j 個和等於

$$h_j(D_jf)(\mathbf{x}+\mathbf{v}_{j-1}+\theta_jh_j\mathbf{e}_j)$$

對某個 $\theta_j\in(0,1)$。由 (41) 式知，這與 $h_j(D_jf)(\mathbf{x})$ 的差小於 $|h_j|\epsilon/n$。又由 (42)，我們得到，對所有 $\mathbf{h}$, $|\mathbf{h}|<r$ 而言，

$$\left|f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})-\sum_{j=1}^{n}h_j(D_jf)(\mathbf{x})\right|$$

$$\leq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|h_j|\,\epsilon\leq|\mathbf{h}|\epsilon.$$

這就是說 f 在 $\mathbf{X}$ 可微分，且 $f'(\mathbf{x})$ 是個線性函數，它把向量 $\mathbf{h}=\sum h_j\mathbf{e}_j$ 映至一個數 $\sum h_j(D_jf)(\mathbf{x})$。矩陣 $[f'(\mathbf{x})]$ 包含了 $(D_1f)(\mathbf{x}),\cdots\cdots,(D_nf)(\mathbf{x})$ 這些行；而由於 $D_1f,\cdots\cdots,D_nf$ 在 E 是連續函數，故 9.9 節末了的備註顯示 $f\in\mathscr{C}'(E)$.

收縮原理

現在，我們且中斷一下我們對微分學的討論，而插入一個定點定理，它在任意完備度量空間中都成立。它會用在反函數定理的證明裏。

9.22 定義 令 X 爲度量空間，度量爲 d，若 φ 將 X 映至 X，且若有個數 $c<1$ 使得對所有 $x,y\in X$，

(43) $$d(\varphi(x),\varphi(y))\leq cd(x,y),$$

則 φ 稱爲是由 X 映至 X 的一個收縮映射 (Contraction)。

9.23 定理 若 X 是完備度量空間，且若 φ 是由 X 映至 X 的一個收縮映射，則存在一個且僅有一個 $x\in X$，使得 $\varphi(x)=x$.

換言之，φ 有唯一的定點 (fixed point)。唯一性是顯而易見的，蓋若 $\varphi(x)=x$ 且 $\varphi(y)=y$，則由 (43) 式得出 $d(x,y)\leq c\,d(x,y)$ 這只有在 $d(x,y)=0$ 時才會發生。

φ 的定點，其存在性 (existence) 是本定理的重要部份。事實上，這證明是以找出這定點的建構性方法(constructive method)

來做的。

證明：任取 $x_0\in X$，並以廻歸定義$\{x_n\}$爲

(44) $$x_{n+1}=\varphi(x_n)\quad (n=0,1,2,\cdots\cdots).$$

選取 $c<1$ 使得 (43) 式成立。當 $n\geq 1$，則我們有

$$d(x_{n+1},x_n)=d(\varphi(x_n),\varphi(x_{n-1}))\leq cd(x_n,x_{n-1}).$$

故，由歸納法可得

(45) $$d(x_{n+1},x_n)\leq c^n d(x_1,x_0)\quad (n=0,1,2,\cdots\cdots),$$

若 $n<m$，於是

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m)&\leq\sum_{i=n+1}^{m}d(x_i,x_{i-1}).\\ &\leq(c^n+c^{n+1}+\cdots\cdots+c^{m-1})d(x_1,x_0)\\ &\leq[(1-c)^{-1}d(x_1,x_0)]c^n. \end{aligned}$$

因此$\{x_n\}$是個 Cauchy序列。由於X是完備的，故 $\lim x_n=x$，對某$x\in X$。

因爲φ是個收縮映射，故φ在X上是連續（事實上，是均匀連續）。因此。

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

反函數定理

粗略而言，反函數定理是說，一個連續可微分映射 $\mathbf{f}$，在任何那些使得線性變換 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 是可逆的點 $\mathbf{x}$ 附近，是可逆的：

9.24　定理　設若 $\mathbf{f}$ 是個將開集合 $E\subset R^n$ 映至 R^n 的 $\mathscr{C}'$— 映射，對某個 $\mathbf{a}\in E$, $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ 是可逆的，而 $\mathbf{b}=\mathbf{f}(\mathbf{a})$，則

(a) 在 R^n 中存在兩個開集合U及V，使得 $\mathbf{a}\in U,\mathbf{b}\in V$，而 $\mathbf{f}$ 在U上是1對1，且 $\mathbf{f}(U)=V$.

(b) 若 $\mathbf{g}$ 是 $\mathbf{f}$ 的反函數〔由 (a) 知它存在〕，在V中定義爲

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))=\mathbf{x}\qquad(\mathbf{x}\in U)$$

則 $\mathbf{g}\in\mathscr{C}'(V)$。

將方程式 $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 寫成分量型式，我們得到以下對這定理結論的解釋：n 個方程式組

$$y_i=f_i(x_1,\cdots\cdots,x_n)\qquad(1\leq i\leq n).$$

如果我們將 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 限制在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 足够小的隣域中，則可用 $y_1,\cdots\cdots,y_n$ 解出 $x_1,\cdots\cdots,x_n$；這些解是唯一的而且是連續可微分的。

證明：(a) 令 $\mathbf{f}'(\mathbf{a})=A$，並選取 λ，使得

(46) $$2\lambda\|A^{-1}\|=1$$

由於 $\mathbf{f}'$ 在 $\mathbf{a}$ 是連續，故有一開球 $U\subset E$，以 $\mathbf{a}$ 為球心，使得

(47) $$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x})-A\|<\lambda\qquad(\mathbf{x}\in U).$$

我們對每個 $\mathbf{y}\in R^n$，都給一個函數 φ，定義為

(48) $$\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{x}+A^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{f}(\mathbf{x}))\qquad(\mathbf{x}\in E).$$

注意，$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}$，若且唯若 $\mathbf{x}$ 是 φ 的定點。

由於 $\varphi'(\mathbf{x})=I-A^{-1}\mathbf{f}'(\mathbf{x})=A^{-1}(A-\mathbf{f}'(\mathbf{x}))$，故 (46) 及 (47) 蘊涵了。

(49) $$\|\varphi'(\mathbf{x})\|<\frac{1}{2}\qquad(\mathbf{x}\in U)$$

因此，由定理 9.19 知，

(50) $$|\varphi(\mathbf{x}_1)-\varphi(\mathbf{x}_2)|\leq\frac{1}{2}|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|\qquad(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in U)$$

於是，φ 在 U 中最多只有一個定點，所以對最多一個 $\mathbf{x}\in U$，$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}$。

因此 $\mathbf{f}$ 在 U 中是 $1-1$.

其次，令 $V=\mathbf{f}(U)$，並取 $\mathbf{y}_0\in V$。則對某個 $\mathbf{x}_0\in U$，$\mathbf{y}_0=\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$，令 B 為某個以 $\mathbf{x}_0$ 為中心，$r>0$ 為半徑的開球，小得使閉包 $\bar{B}$ 落在 U 中。我們要證明只要 $|\mathbf{y}-\mathbf{y}_0|<\lambda r$，則 $\mathbf{y}\in V$。當然，這就證明了 V 是開集。

固定 $\mathbf{y}, |\mathbf{y}-\mathbf{y}_0|<\lambda r$。若 φ 是如 (48) 中者，則

$$|\varphi(\mathbf{x})-\mathbf{x}_0|=|A^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)|<\|A^{-1}\|\lambda r=\frac{r}{2}.$$

若 $\mathbf{x}\in\bar{B}$，則由 (50) 式導得

$$\begin{aligned}|\varphi(\mathbf{x})-\mathbf{x}_0|&\le|\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{x}_0)|+|\varphi(\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}_0|\\&<\frac{1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|+\frac{r}{2}\le r;\end{aligned}$$

因此 $\varphi(\mathbf{x})\in B$。留意若 $\mathbf{x}_1\in\bar{B}, \mathbf{x}_2\in\bar{B}$，則 (50) 式成立。

因此 φ 是由 $\bar{B}$ 映至 $\bar{B}$ 的收縮映射。由於 $\bar{B}$ 是 R^n 的閉子集，故爲完備，定理 9.23 因而蘊涵了 φ 有一個定點 $\mathbf{x}\in\bar{B}$。對這個 $\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{y}$。因此 $\mathbf{y}\in\mathbf{f}(\bar{B})\subset\mathbf{f}(U)=V$。

這就證得了定理的 (a) 部份。

(b) 取 $\mathbf{y}\in V, \mathbf{y}+\mathbf{k}\in V$。則存在 $\mathbf{x}\in U, \mathbf{x}+\mathbf{h}\in U$，使得 $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{y}+\mathbf{k}=f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$ 若 φ 是如 (48) 中者，則

$$\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{h}+A^{-1}[\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})]=\mathbf{h}-A^{-1}\mathbf{k}$$

由 (50) 知，$|\mathbf{h}-A^{-1}\mathbf{k}|\le\frac{1}{2}|\mathbf{h}|$。因此 $|A^{-1}\mathbf{k}|\ge\frac{1}{2}|\mathbf{h}|$，且

(51) $$|\mathbf{h}|\le2\|A^{-1}\|\,|\mathbf{k}|=\lambda^{-1}|\mathbf{k}|.$$

由 (46) 式，(47) 式及定理 9.8 知，$\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 有反函數，令爲 T，由於

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}+\mathbf{k})-\mathbf{g}(\mathbf{y})-T\mathbf{k}=\mathbf{h}-T\mathbf{k}=-T[\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}],$$

故 (51) 式蘊涵了

$$\frac{|\mathbf{g}(\mathbf{y}+\mathbf{k})-\mathbf{g}(\mathbf{y})-T\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|}\le\frac{\|T\|}{\lambda}\cdot\frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|}$$

當 $\mathbf{k}\longrightarrow\mathbf{0}$，(51)顯示 $\mathbf{h}\longrightarrow\mathbf{0}$。因而上面不等式的右邊也趨於 0。因此左邊亦然。我們於是證明了 $\mathbf{g}'(\mathbf{y})=T$。但 T 選的是 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})=\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))$ 的反函數。所以

(52) $$\mathbf{g}'(\mathbf{y})=\{\mathbf{f}'(\mathbf{g}(\mathbf{y}))\}^{-1}\qquad(\mathbf{y}\in V).$$

最後，留意 $\mathbf{g}$ 是由 V 映成 U 的連續映射（蓋 $\mathbf{g}$ 是可微），

以及 $\mathbf{f}'$ 是由V映至Ω的連續映射，Ω 是所有 $L(R^n)$ 中可逆元素的集合，還有由定理 9.8 知，其反函數是由Ω映成Ω的連續映射，如果我們把這些與(52)式合起來，我們便看出 $\mathbf{g}\in\mathscr{C}'(V)$。

證畢。

備註: $\mathbf{f}\in\mathscr{C}'(E)$ 這麼強的假設，只是用在上述證明的最後一段。所有其他部份，直到方程式 (52)，都是由 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 對所有 $\mathbf{x}\in E$的存在性，$\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ 的可逆性，以及 $\mathbf{f}'$ 只要在一點 $\mathbf{a}$ 的連續性，即可導得。在這層關係上，我們可參考 A. Nijenhuis 在 Amer. Math. Monthly vol. 81, 1974, pp. 969-980 上的論文。

下面是反函數定理 (a) 部份的立即結果:

9.25 定理 若 $\mathbf{f}$ 是將開集合$E\subset R^n$ 映至 R^n 的 $\mathscr{C}'$ 映射，且若 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 對每個 $\mathbf{x}\in E$ 都可逆，則對每個開集合 $W\subset E$, $\mathbf{f}(W)$ 都是 R^n 開子集。

換言之，$\mathbf{f}$ 是個由E 映至 R^n 的開映射 (open mapping),

這定理所做的假設，便保證在每個 $\mathbf{x}\in E$都會有一隣域，而 $\mathbf{f}$ 在其中是 1-1。這也可說成 $\mathbf{f}$ 在E中是局部一對一。但在這種情況下，$\mathbf{f}$ 在E中並不必是 1-1。要找例子，見習題 17。

隱函數定理

若f是在平面上的連續可微分實値函數，則在任何點(a,b). 而 $f(a,b)=0$ 且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$，的隣域中，$f(x,y)=0$這方程式，可以用$x$解出$y$來，同樣的，若在 (a,b) 處 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\neq 0$，則可在 (a,b) 附近，用y解得 x，爲了例示 $\partial f/\partial y\neq 0$ 這假設的必要性，考慮一個簡單的例子 $f(x,y)=x^2+y^2-1$

上面這不太正式的敍述，是所謂「隱函數定理」最簡單的情況（即定理 9.28 中$m=n=1$的情況），它的證明充分利用了一個性質，就是連續可微分函數的局部動態，非常像它的導數。

因此，我們先證明定理 9.27，它是定理 9.28 的線性型式。

9.26 符號 若 $\mathbf{x}=(x_1, \cdots\cdots, x_n)\in R^n$ 而 $\mathbf{y}=(y_1, \cdots\cdots, y_m)\in R^m$，我們寫 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 以表示一點（或一向量）

$$(x_1, \cdots\cdots, x_n, y_1, \cdots\cdots, y_m)\in R^{n+m}.$$

以後，$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 或類似的符號中，第一行總是表示 R^n 中的向量，第二行 R^m 中的向量。

每個 $A\in L(R^{n+m}, R^n)$ 都可以分成兩個線性變換 A_x 及 A_y，定義爲，對任意 $\mathbf{h}\in R^n, \mathbf{k}\in R^m$，

(53) $$A_x\mathbf{h}=A(\mathbf{h},, \mathbf{0}) \qquad A_y\mathbf{k}=A(\mathbf{0}, \mathbf{k})$$

則 $A_x\in L(R^n), A_y\in L(R^m, R^n)$，且

(54) $$A(\mathbf{h}, \mathbf{k})=A_x\mathbf{h}+A_y\mathbf{k}.$$

隱函數定理的線性型式，現在幾乎是很明顯了。

9.27 定理 若 $A\in L(R^{n+m}. R^n)$，且若 A_x 是可逆，則對每個 $\mathbf{k}\in R^m$，都對應唯一的 $\mathbf{h}\in R^n$，使得 $A(\mathbf{h}, \mathbf{k})=\mathbf{0}$。這個 $\mathbf{h}$ 可以用 $\mathbf{k}$ 算出來，利用公式

(55) $$\mathbf{h}=-(A_x)^{-1}A_y\mathbf{k}.$$

證明：由 (54) 式知，$A(\mathbf{h}, \mathbf{k})=\mathbf{0}$，若且唯若

$$A_x\mathbf{h}+A_y\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

而當 A_x 是可逆時，這與 (55) 式是一樣的。

換言之，定理 9.27 的結論是，若 $\mathbf{k}$ 已知，則 $A(\mathbf{h}, \mathbf{k})=\mathbf{0}$ 這方程式可以唯一解得 $\mathbf{h}$，而 $\mathbf{h}$ 這個解是 $\mathbf{k}$ 的線性函數。對線性代數有些認識的讀者，會認出這是與有關線性方程式組非常類似的敍述。

9.28 定理 若 $\mathbf{f}$ 是由開集合 $E\subset R^{n+m}$ 映至 R^n 的 $\mathscr{C}'$ 映射，而對某個 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\in E, \mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b})=\mathbf{0}$。

令 $A=\mathbf{f}'(\mathbf{a}, \mathbf{b})$，並假設 A_x 是可逆。

則存在開集合 $U\subset R^{n+m}$ 及 $W\subset R^m$，使得 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\in U$ 且 $\mathbf{b}\in W$，並具有下列性質：

對每個 $\mathbf{y}\in W$，都對應唯一的 $\mathbf{x}$，使得。

(56)　　$(\mathbf{x},\mathbf{y})\in U$ 且 $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$

若這個 $\mathbf{x}$ 是定義爲 $\mathbf{g}(\mathbf{y})$，則 $\mathbf{g}$ 是由W映至 R^n 的 $\mathscr{C}'$- 映射，$\mathbf{g}(\mathbf{b})=\mathbf{a}$,

(57)　　$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})=\mathbf{0}\qquad(\mathbf{y}\in W)$,

且

(58)　　$\mathbf{g}'(\mathbf{b})=-(A_x)^{-1}A_y.$

函數 $\mathbf{g}$ 是由 (57) 隱現地定義，故定理得此名。

方程式 $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ 可以寫成 $n+m$ 個變數的 n 個方程式組:

(59)
$$f_1(x_1,\cdots\cdots,x_n,y^1,\cdots\cdots,y_m)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x_1,\cdots\cdots,x_n,y_1,\cdots\cdots,y_n)=0$$

所謂 A_x 是可逆的假設，意思是，

$$\begin{bmatrix} D_1f_1,\cdots\cdots D_nf_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_1f_n\cdots\cdots D_nf_n \end{bmatrix}$$

這矩陣，在 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 取值時，定義了 R^n 中的一個可逆線性算子；換言之，其行向量必須獨立，或，同等地，其行列式必須$\neq 0$。(見定理 9.36) 此外，若當 $\mathbf{x}=\mathbf{a},\mathbf{y}=\mathbf{b}$ 時，(59) 式成立，則這定理的結論是說，對每個 $\mathbf{b}$ 附近的 $\mathbf{y}$，我們可以用 $y_1,\cdots\cdots,y_m$ 解出 (59) 中 $x_1,\cdots\cdots,x_n$，而這些解是 $\mathbf{y}$ 的連續可微分函數。

證明: 定義 $\mathbf{F}$ 爲。

(60)　　$\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y}),((\mathbf{x},\mathbf{y})\in E).$

則 $\mathbf{F}$ 是個由E映至 R^{n+m} 的$\mathscr{C}'$— 映射，我們斷言 $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是 $L(R^{n+m})$ 的可逆元素:

因爲 $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{0}$，故我們有

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h},\mathbf{b}+\mathbf{k})=A(\mathbf{h},\mathbf{k})+\mathbf{r}(\mathbf{h},\mathbf{k}),$$

其中 $\mathbf{r}$ 是在 $\mathbf{f}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 的定義中出現的餘留項。由於

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}+\mathbf{h},\mathbf{b}+\mathbf{k})-\mathbf{F}(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h},\mathbf{b}+\mathbf{k}),\mathbf{k})$$
$$=(A(\mathbf{h},\mathbf{k}),\mathbf{k})+(\mathbf{r}(\mathbf{h},\mathbf{k}),\mathbf{0})$$

故得出 $\mathbf{F}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是將 $(\mathbf{h},\mathbf{k})$ 映至 $(A(\mathbf{h},\mathbf{k}),\mathbf{k})$ 的 R^{n+m} 上一個線性算子，若其像向量 (image vector) 是 $\mathbf{0}$，則 $A(\mathbf{h},\mathbf{k})=\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{k}=\mathbf{0}$，因此 $A(\mathbf{h},\mathbf{0})=\mathbf{0}$，而定理 9.27 又蘊涵了 $\mathbf{h}=\mathbf{0}$。於是 $\mathbf{F}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是 1-1；因此是可逆（定理 9 5）。

所以可將反函數定理用到 $\mathbf{F}$。於是在 R^{n+m} 中存在開集合 U 和 V，而 $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in U,(\mathbf{0},\mathbf{b})\in V$，使得 $\mathbf{F}$ 是由 U 映成 V 的 1-1 映射。

我們令 W 爲所有 $\mathbf{y}\in R^m$ 而 $(\mathbf{0},\mathbf{y})\in V$ 的集合，注意到 $\mathbf{b}\in W$。

很顯然 W 是個開集合，因爲 V 是開集。

若 $\mathbf{y}\in W$，則對某個 $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in U,(\mathbf{0},\mathbf{y})=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})$。由(60)知，對這個 $\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$。

假設，對同樣的 $\mathbf{y}$，而 $(\mathbf{x}',\mathbf{y})\in U$ 且 $\mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{y})=\mathbf{0}$。則

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}',\mathbf{y})=(\mathbf{f}(\mathbf{x}',\mathbf{y}),\mathbf{y})=(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y})=\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

由於 $\mathbf{F}$ 在 U 中是 1-1，故得 $\mathbf{x}'=\mathbf{x}$。

這就證明了本定理的第一部份。

要證第二部份，當 $\mathbf{y}\in W$，定義 $\mathbf{g}(\mathbf{y})$，使得 $(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})\in U$ 而(57)成立。則

(61) $$\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})=(\mathbf{0},\mathbf{y})\qquad(\mathbf{y}\in W)$$

若 $\mathbf{G}$ 是由 V 映成 U 的映射，它逆反 $\mathbf{F}$，則反函數定理知，$\mathbf{G}\in\mathscr{C}'$ 而 (61) 給出了

(62) $$(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})=\mathbf{G}(\mathbf{0},\mathbf{y})\qquad(\mathbf{y}\in W)$$

由於 $\mathbf{G}\in\mathscr{C}'$，故由 (62) 知，$\mathbf{g}\in\mathscr{C}'$.

最後，要計算 $\mathbf{g}'(\mathbf{b})$；令 $(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})=\Phi(\mathbf{y})$，則

(63) $$\Phi'(\mathbf{y})\mathbf{k}=(\mathbf{g}'(\mathbf{y})\mathbf{k},\mathbf{k}),\qquad(\mathbf{y}\in W,\mathbf{k}\in R^m).$$

由 (57) 知，在 W 中 $\mathbf{f}(\Phi(\mathbf{y}))=\mathbf{0}$。所以由連鎖定理知

$$\mathbf{f}'(\Phi(\mathbf{y}))\Phi'(\mathbf{y})=0$$

當 $\mathbf{y}=\mathbf{b}$，則 $\Phi(\mathbf{y})=(\mathbf{a},\mathbf{b})$，且 $\mathbf{f}'(\Phi(\mathbf{y}))=A$。因而

$$A\Phi'(\mathbf{b})=0 \tag{64}$$

現在由 (64), (63) 及 (54) 得到，對每個 $\mathbf{k}\in R^m$，

$$A_x\mathbf{g}'(\mathbf{b})\mathbf{k}+A_y\mathbf{k}=A\,(\mathbf{g}'(\mathbf{b})\mathbf{k},\mathbf{k})=A\Phi'(\mathbf{b})\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

因此，

$$A_x\mathbf{g}'(\mathbf{b})+A_y=0 \tag{65}$$

這與 (58) 式是等價的，證畢。

備註。若用 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 的分量來表示，則 (65) 式變成

$$\sum_{j=1}^{n}(D_jf_i)(\mathbf{a},\mathbf{b})(D_kg_j)(\mathbf{b})=-(D_{n+k}f_i)(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

或是

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial g_j}{\partial y_k}\right)=-\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)$$

其中 $1\leq i\leq n$，$1\leq k\leq m$。

對每個 k，這是 n 個線性方程組，其中 $\partial g_j/\partial y_k(1\leq j\leq n)$ 這些導數是未知數。

9.29 例子 取 $n=2$，$m=3$，並考慮由 R^5 映至 R^2 的映射 $\mathbf{f}=(f_1,f_2)$，定義為

$$f_1(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)=2e^{x_1}+x_2y_1-4y_2+3$$
$$f_2(x_1,x_2,y_1,x_2,y_3)=x_2\cos x_1-6x_1+2y_1-y_3$$

若 $\mathbf{a}=(0,1)$ 且 $\mathbf{b}=(3,2,7)$，則 $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{0}$。

對於標準基底而言，$A=\mathbf{f}'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 這變換的矩陣為

$$[A]=\begin{bmatrix}2&3&1&-4&0\\-6&1&2&0&-1\end{bmatrix}$$

因此。

$$[A_x]=\begin{bmatrix}2&3\\-6&1\end{bmatrix},\quad [A_y]=\begin{bmatrix}1&-4&0\\2&0&-1\end{bmatrix}$$

我們看到 $[A_x]$ 的行向量是獨立的。因此 A_x 是可逆，而隱函數定理則斷言，存在 $\mathscr{C}'$- 映射 $\mathbf{g}$，定義在 $(3,2,7)$ 的隣域中，使得 $\mathbf{g}(3,2,7)=(0,1)$ 且 $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}),\mathbf{y})=\mathbf{0}$。

我們可以用 (58) 式來計算 $\mathbf{g}'(3,2,7)$：由於，

$$[(A_x)^{-1}]=[A_x]^{-1}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 6 & 2\end{bmatrix};$$

故由 (58) 式得

$$[\mathbf{g}'(3,2,7)]=-\frac{1}{20}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 6 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{20}\\ -\frac{1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}$$

用偏導數來說，結論是，在點 $(3,2,7)$ 處，

$$D_1g_1=\frac{1}{4},\quad D_2g_1=\frac{1}{5},\quad D_3g_1=-\frac{3}{20},$$

$$D_1g_2=-\frac{1}{2},\quad D_2g_2=\frac{6}{5},\quad D_3g_2=\frac{1}{10}$$

秩階定理

儘管這個定理並不如反函數定理，或隱數定理那麼重要，但我們仍包含它，以做爲一個普遍性原則的有趣例示，這原則就是，一個連續可微分映射 $\mathbf{F}$ 在點 $\mathbf{x}$ 附近的局部動態，與 $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ 這線性變換相類似。

在敍述它以前，我們還需要一些有關線性變換的性質。

9.30　定義　假設 X 和 Y 是向量空間，$A\in L(X,Y)$，像在定義 9.6 中者。A 的零空間 (null space)，$\mathscr{N}(A)$，是所有 $\mathbf{x}\in X$，而在該處 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的集合。很顯然，$\mathscr{N}(A)$ 是 X 中的向量空間。

同樣，A 的值域 (Range)，$\mathscr{R}(A)$ 也是 Y 中的向量空間。

A的秩階 (Rank)，是定義爲 $\mathscr{R}(A)$ 的維數。

例如，$L(R^n)$ 中的可逆元素，正是那些秩階爲 n 的元素。這可由定理 9.5 導得。

若 $A\in L(X,Y)$ 且 A 的秩階爲 0，則對所有 $\mathbf{x}\in X$, $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$，故 $\mathscr{N}(A)=X$。關於這點，見習題 25。

9.31 投影 令 X 爲向量空間。一線性算子 $P\in L(X)$，若 $P^2=P$，則稱之爲 X 中的投影 (projection in X)。

更明白些說，要求的條件是，對每個 $\mathbf{x}\in X$, $P(P\mathbf{x})=P\mathbf{x}$。換言之，$P$ 固定住每個在其值域 $\mathscr{R}(P)$ 中的向量。

這裏是一些投影的基本性質:

(a) 若 P 是 X 中的投影，則每個 $\mathbf{x}\in X$，都有這種型式的唯一表現:

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,$$

其中 $\mathbf{x}_1\in\mathscr{R}(P)$ 而 $\mathbf{x}_2\in\mathscr{N}(P)$。

要得到這個表現式，令 $\mathbf{x}_1=P\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}-\mathbf{x}_1$，則 $P\mathbf{x}_2=P\mathbf{x}-P\mathbf{x}_1=P\mathbf{x}-P^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$。至於唯一性，將 P 作用到 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ 上去。由於 $\mathbf{x}_1\in\mathscr{R}(P)$，故 $P\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_1$；因爲 $P\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$，故得 $\mathbf{x}_1=P\mathbf{x}$。

(b) 若 X 是有限維向空間，且若 X_1 是 X 中的一個向量空間，則有 X 中一投影 P，使得 $\mathscr{R}(P)=X_1$。

如果 X_1 只包含 $\mathbf{0}$，這是顯而易見的: 取 $P\mathbf{x}=\mathbf{0}$，對所有 $\mathbf{x}\in X$。

假使 $\dim X_1=k>0$。由定理 9.3 知，X 會有一個基底 $\{\mathbf{u}_1,\cdots\cdots,\mathbf{u}_n\}$ 使得 $\{\mathbf{u}_1,\cdots\cdots,\mathbf{u}_k\}$ 是 X_1 的基底。定義對任意純量 $c_1,\cdots\cdots c_n$,

$$P(c_1\mathbf{u}_1,+\cdots\cdots+c_n\mathbf{u}_n)=c_1\mathbf{u}_1+\cdots\cdots+c_k\mathbf{u}_k.$$

則對每個 $\mathbf{x}\in X_1$, $P\mathbf{x}=\mathbf{x}$，而 $X_1=\mathscr{R}(P)$。

留意 $\{\mathbf{u}_{k+1},\cdots\cdots,\mathbf{u}_n\}$ 是 $\mathscr{N}(P)$ 的基底。也留意到，若 $0<$

$\dim X_1<\dim X$，則在X中有無窮多投影，其值域都是 X_1。

9.32 定理 假設 m, n, r 是非負整數，$m\geq r$，$n\geq r$，$\mathbf{F}$ 是將開集合 $E\subset R^n$ 映至 R^m 的 $\mathscr{C}'$- 映射，而對每個 $\mathbf{x}\in E$，$\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ 都具有秩階 r。

固定 $\mathbf{a}\in E$，令 $A=\mathbf{F}'(\mathbf{a})$，且 Y_1 爲 A 的值域，並令P爲 R^m 中一投影，其值域爲 Y_1。令 Y_2 爲P的零空間。

則在 R^n 中有開集合 U及V，$\mathbf{a}\in U$，$U\subset E$，且有一由V映成U的 1-1$\mathscr{C}'$- 映射 $\mathbf{H}$（其逆也屬於 $\mathscr{C}'$），使得，

(66) $$\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))=A\mathbf{x}+\varphi(A\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}\in V)$$

其中φ是個由開集合 $A(V)\subset Y_1$ 映至 Y_2 的 $\mathscr{C}'$- 映射。

在證明之後，我們會對 (66) 式所包含的意義，給一個比較幾何性的描述。

證明: 若 $r=0$，定理 9.19 顯示，$\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 在 $\mathbf{a}$ 的隣域U中是個常數，而 (66) 式顯然存在，其$V=U$，$\mathbf{H}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$，$\varphi(\mathbf{0})=\mathbf{F}(\mathbf{a})$。

從現在起，我們假設 $r>0$。由於 $\dim Y_1=r$，故 Y_1 有一基底 $\{\mathbf{y}_1, \cdots\cdots, \mathbf{y}_r\}$。選取 $\mathbf{z}_i\in R^n$ 使得 $A\mathbf{z}_i=\mathbf{y}_i (1\leq i\leq r)$，並定義由 Y_1 映至 R^n 的線性映射S爲，對所有純量 $c_1, \cdots\cdots, c_r$

(67) $$S(c_1\mathbf{y}_1+\cdots\cdots+c_r\mathbf{y}_r)=c_1\mathbf{z}_1+\cdots\cdots+c_r\mathbf{z}_r.$$

則 $AS\mathbf{y}_i=A\mathbf{z}_i=\mathbf{y}_i$，當 $1\leq i\leq r$。因此

(68) $$AS\mathbf{y}=\mathbf{y}. \quad (\mathbf{y}\in Y_1)$$

定義由E映射 R^n 的映射 $\mathbf{G}$ 爲

(69) $$\mathbf{G}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+SP[\mathbf{F}(\mathbf{x})-A\mathbf{x}] \quad (\mathbf{x}\in E)$$

由於 $\mathbf{F}'(\mathbf{a})=A$，微分 (69) 式，得 $\mathbf{G}'(\mathbf{a})=I$，$R^n$ 上的恒等算子，由反函數定理知，在 R^n 中有開集合U及V，而 $\mathbf{a}\in U$，使得 $\mathbf{G}$ 是由U映成V的 1-1 映射，其逆 $\mathbf{H}$ 也是屬於 $\mathscr{C}'$。此外，將U及V縮小，如果需要的話，我們可以使得V爲凸的，且 $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ 對每個 $\mathbf{x}\in V$ 都是可逆的。

注意到，$ASPA=A$，蓋因 $PA=A$且（68）式成立。因此由（69）式得。

(70)　　$A\mathbf{G}(\mathbf{x})=P\mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}\in E)$

特別是，當 $\mathbf{x}\in U$ 時，(70) 成立。如果我們用 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ 代替 $\mathbf{x}$，我們就得到

(71)　　$P\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))=A\mathbf{x} \quad (\mathbf{x}\in V)$

定義

(72)　　$\psi(\mathbf{x})=\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))-A\mathbf{x} \quad (\mathbf{x}\in V)$

由於 $PA=A$，故 (71) 式蘊涵了對所有 $\mathbf{x}\in V, P\psi(\mathbf{x})=\mathbf{0}$。因此 ψ 是個由V映至 Y_2 的 $\mathscr{C}'$- 映射。

因爲V是開集，故很明顯的，$A(V)$ 是其值域 $\mathscr{R}(A)=Y_1$ 的開子集。

要完成這個證明，就是要由（72）式到（66）式，我們必須證明有一個由 $A(V)$ 映至 Y_2 的 $\mathscr{C}'$- 映射φ，它滿足

(73)　　$\varphi(A\mathbf{x})=\psi(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x}\in V).$

作爲走向 (72) 式的一步，我們要先證明若 $\mathbf{x}_1\in V, \mathbf{x}_2\in V$, $A\mathbf{x}_1=A\mathbf{x}_2$，則

(74)　　$\psi(\mathbf{x}_1)=\psi(\mathbf{x}_2)$

當 $\mathbf{x}\in V$，令$\Phi(\mathbf{x})=\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$. 由於 $\mathbf{H}'(\mathbf{x})$ 對每個 $\mathbf{x}\in V$，都具有秩階爲n，而 $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ 對每個 $\mathbf{x}\in U$，都具有秩階爲 r，故得

(75)　　$\operatorname{rank}\Phi'(\mathbf{x})=\operatorname{rank}\mathbf{F}'(\mathbf{H}(\mathbf{x}))\mathbf{H}'(\mathbf{x})=r \quad (\mathbf{x}\in V)$

固定 $\mathbf{x}\in V$。令M爲 $\Phi'(\mathbf{x})$ 的值域。則 $M\subset R^m, \dim M=r$。由（71）式知

(76)　　$P\Phi'(\mathbf{x})=A.$

故P將M映成 $\mathscr{R}(A)=Y_1$。由於 M 及 Y_1 具有相同維度，故得P（當局限於M時）是 1-1。

現在假使 $A\mathbf{h}=\mathbf{0}$。則由 (76) 式知，$P\Phi'(\mathbf{x})\mathbf{h}=\mathbf{0}$。但 $\Phi'(\mathbf{x})$

$\mathbf{h}\in M$，且P在M上是 1-1。因此 $\Phi'(\mathbf{x})\mathbf{h}=\mathbf{0}$。稍微看一下（72）式，便知，我們現在已證明了下面的事:

如果 $\mathbf{x}\in V$ 且 $A\mathbf{h}=\mathbf{0}$，則 $\psi'(\mathbf{x})\mathbf{h}=\mathbf{0}$。

我們現在可以證明（74）式了。假設 $\mathbf{x}_1\in V, \mathbf{x}_2\in V, A\mathbf{x}_1=A\mathbf{x}_2$。令 $\mathbf{h}=\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1$，並定義

(77) $$\mathbf{g}(t)=\psi(\mathbf{x}_1+t\mathbf{h}) \qquad (0\leq t\leq 1)$$

由V的凸性知，對這些 $t, \mathbf{x}_1+t\mathbf{h}\in V$。因此

(78) $$\mathbf{g}'(t)=\psi'(\mathbf{x}_1+t\mathbf{h})\mathbf{h}=\mathbf{0} \qquad (0\leq t\leq 1)$$

所以 $\mathbf{g}(1)=\mathbf{g}(0)$。但 $\mathbf{g}(1)=\psi(\mathbf{x}_2)$ 而 $\mathbf{g}(0)=\psi(\mathbf{x}_1)$，這就證明了（74）式。

由（74）式知，當 $\mathbf{x}\in V, \psi(\mathbf{x})$ 只與 $A\mathbf{x}$ 有關。因此（73）式在 $A(V)$ 中定義的φ，是毫無歧義的，剩下來要證的，就只是$\varphi\in\mathscr{C}'$。

固定 $\mathbf{y}_0\in A(V)$，也固定 $\mathbf{x}_0\in V$ 使得 $A\mathbf{x}_0=\mathbf{y}_0$。由於$V$是開集，故 $\mathbf{y}_0$ 在 Y_1 中有一鄰域W，使得向量

(79) $$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+S(\mathbf{y}-\mathbf{y}_0)$$

對所有 $\mathbf{y}\in W$，都位於V中。由（68）式得，

$$A\mathbf{x}=A\mathbf{x}_0+\mathbf{y}-\mathbf{y}_0=\mathbf{y}$$

因此由（73）及（79）式得。

(80) $$\varphi(\mathbf{y})=\psi(\mathbf{x}_0-S\mathbf{y}_0+S\mathbf{y}) \quad (\mathbf{y}\in W).$$

由於 $\mathbf{y}_0$ 在 $A(V)$ 中是任意選的，故這個式子顯示在W中，也因而在 $A(V)$ 中，$\varphi\in\mathscr{C}'$。證畢。

這裏是本定理告訴我們，有關 $\mathbf{F}$ 這映射的幾何性質。

若 $\mathbf{y}\in\mathbf{F}(U)$，則對某個 $\mathbf{x}\in V, \mathbf{y}=\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$，而由（66）式知，$P\mathbf{y}=A\mathbf{x}$。因此。

(81) $$\mathbf{y}=P\mathbf{y}+\varphi(P\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y}\in\mathbf{F}(U))$$

這就顯示了 $\mathbf{y}$ 是由其投影 $P\mathbf{y}$ 所決定，而 P，當局限在 $\mathbf{F}(U)$ 時，是個由 $\mathbf{F}(U)$ 映成 $A(V)$ 的 1-1 映射，因此 $\mathbf{F}(U)$

是個 “r 維曲面”，比 $A(V)$ 中每個點都恰好「多」一個點。我們也可將 $\mathbf{F}(U)$ 看成是 φ 的圖形。

若 $\Phi(\mathbf{x})=\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x}))$，如在證明中者，則 Φ 的等值集合(level sets)（這就是 Φ 在其上達已知值的集合）恰就是 A 在 V 中的等值集合。因爲它們都是向量空間 $\mathscr{N}(A)$ 的平移與 V 的交集，所以這些都是「平的」(flat)。要留意 $\dim\mathscr{N}(A)=n-r$（習題 25）。

$\mathbf{F}$ 在 U 中的等值集合是 Φ 在 V 中等值集合，在 $\mathbf{H}$ 作用下的像。因此它們是 U 中的 “$(n-r)$ 維曲面”。

行列式

行列式是與方陣 (square matrix)，也就與由這種方陣所表示的算子，有關的數。它們是 0，若且唯若所對應的算子不是可逆的。因此，它們可以用來決定前面某些定理的假設是否滿足。在第 10 章中，它們還會扮演更重要的角色。

9.33 定義 若 $(j_1,\cdots,j_n)$ 是整數的有序 n 元組 (n-tuple) 定義

$$s(j_1,\cdots\cdots,j_n)=\prod_{p<q}\operatorname{sgn}(j_q-j_p),\tag{82}$$

如果 $x>0$，這裏的 sgn$=1$，若 $x<0$，$\operatorname{sgn}x=-1$，若 $x=0$，$\operatorname{sgn}x=0$。則 $S(j_1,\cdots\cdots,j_n)=1,-1$，或 0，而且若任兩個 j 互換，它就變號。

令$[A]$爲在 R^n 上的線性算子對標準基底 $\{\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_n\}$ 的矩陣，在第 j 列第 i 行的元素是 $a(i,j)$. $[A]$ 的行列式是定義爲

$$\det[A]=\sum s(j_1,\cdots\cdots,j_n)a(1,j_1)a(1,j_2)\cdots\cdots a(n,j_n)\tag{83}$$

這個數。

在 (83) 式中的和是擴展到所有整數的有序 n 元組 $(j_1,\cdots\cdots,j_n)$，

$1 \le j_r \le n$.

〔A〕的行向量 $\mathbf{x}_j$ 是

$$(84) \qquad \mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^{n} a(i, j)\mathbf{e}_i \qquad (1 \le j \le n).$$

我們將 det〔A〕想成是〔A〕的行向量的函數會比較方便。若我們寫成

$$\det(\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n) = \det[A].$$

則 det〔A〕現在就是一個實值函數，定義在 R^n 中所有向量的有序 n 元組的集合上。

9.34 定理 (a) 若 I 是 R^n 上的恒等算子，則

$$\det[I] = \det[\mathbf{e}_1, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n] = 1.$$

(b) 如果其它行向量保持固定，則 det 是每個行向量 $\mathbf{x}_j$ 的線性函數。

(c) 若〔A〕$_1$ 是由〔A〕經過兩行交換而得者，則 $\det[A]_1 = -\det[A]$.

(d) 若〔A〕有兩行相等，則 $\det[A] = 0$.

證明: 若 $A = I$，則 $a(i, i) = 1$，且若 $i \ne j$，$a(i, j) = 0$。故

$$\det[I] = s(1, 2, \cdots\cdots, n) = 1,$$

這便證明了 (a)。由 (82) 式知，若任何相個 j 相等，$s(j_1, \cdots\cdots, j_n) = 0$. (83) 式中所餘的 n! 個乘積中，每個都恰包含每一行中的一個因數，這便證明了 (b). (c) 部份是這個事實的直接推論：即若任兩個 j 互換，則 $s(j_1, \cdots\cdots, j_n)$ 變號，而 (d) 又是 (c) 的一個推論結果。

9.35 定理 若〔A〕及〔B〕都是 $n \times n$ 矩陣，則

$$\det([B][A]) = \det[B]\det[A]$$

證明: 若 $\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n$ 是〔A〕的諸行，定義

$$(85) \qquad \Delta_B(\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n) = \Delta_B[A] = \det([B][A])$$

〔B〕〔A〕的諸行是向量 $B\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, B\mathbf{x}_n$. 因此

(86) $$\triangle_B(\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n) = \det(B\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, B\mathbf{x}_n)$$

由 (86) 及定理 9.34 知，$\triangle_B$ 也具有 9.34(b) 到 (d) 諸性質。由 (b) 及 (84) 式，

$$\begin{aligned}\triangle_B[A] &= \triangle_B(\sum_i a(i,1)\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n)\\ &= \sum_i a(i,1)\triangle_B(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}_2, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n)\end{aligned}$$

對 $\mathbf{x}_2, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n$ 反覆此程序，我們得到

(87) $$\begin{aligned}\triangle_B[A] = \sum a(i,1)a(i,2)\cdots\cdots a(i,n)\\ \triangle_B(\mathbf{e}_{i_1}, \cdots\cdots, \mathbf{e}_{i_n}),\end{aligned}$$

這和是擴展到所有 $1 \le i_r \le n$ 的有序 n 元組 $(i_1, \cdots\cdots i_r)$。由 (c) 及 (d) 知，

(88) $$\triangle_B(\mathbf{e}_{i_1}, \cdots\cdots, \mathbf{e}_{i_n}) = t(i_1, \cdots\cdots, i_n)\triangle_B(\mathbf{e}_1, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n),$$

這裏的 $t = 1, 0$, 或 -1，且由於〔B〕〔I〕=〔B〕，(85) 式顯示

(89) $$\triangle_B(\mathbf{e}_1, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n) = \det[B]$$

將 (89) 及 (88) 代入 (87)，我們得到，對所有 $n \times n$ 矩陣〔A〕及〔B〕而言，

$$\det[B][A] = \{\sum a(i_1, 1)\cdots\cdots a(i_n, n)t(i_1, \cdots\cdots, i_n)\}\det[B]$$

取 $B = I$，我們看出上面括號內的和是 $\det[A]$，這就證明了這定理。

9.36 定理 一個 R^n 上的線性算子是可逆的，若且唯若 $\det[A] \ne 0$。

證明: 若 A 是可逆，定理 9.24 顯示

$$\det[A]\det[A^{-1}] = \det[AA^{-1}] = \det[I] = 1,$$

因此，$\det[A] \ne 0$。

若 A 不是可逆的，〔A〕的諸行 $\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_n$ 是相依的（定理 9.5），所以必有一個，令爲 $\mathbf{x}_k$，使得對某些個純量 c_j 而言

(90) $$\mathbf{x}_k + \sum_{j \ne k} c_j\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$$

由 9.34(b) 及 (d) 知，如果 $j \neq k, \mathbf{x}_k$ 可以由 $\mathbf{x}_k + c_j\mathbf{x}_j$ 取代而不改變其行列式。一再反覆，我們知道 $\mathbf{x}_k$ 可以被 (62) 式左邊，即 $\mathbf{0}$，所取代，而不改變行列式。但一個有 $\mathbf{0}$ 作為一行的矩陣，其行列式為 0，因此 $\det[A]=0$

9.37　備註　若 $\{\mathbf{e}_1, \cdots\cdots, \mathbf{e}_n\}$ 及 $\{\mathbf{u}_1, \cdots\cdots, \mathbf{u}_n\}$ 是 R^n 中兩組基底，每個 R^n 上的線性算子 A 決定了矩陣 $[A]$ 及 $[A]_u$，其元素 a_{ij} 及 α_{ij} 定義為

$$A\mathbf{e}_j = \sum_i a_{ij}\mathbf{e}_i,\ A\mathbf{u}_j = \sum_i \alpha_{ij}\mathbf{u}_i.$$

若 $\mathbf{u}_j = B\mathbf{e}_j = \sum_i b_{ij}\mathbf{e}_i$，則 $A\mathbf{u}_j$ 等於

$$\sum_k \alpha_{kj}B\mathbf{e}_k = \sum_k \alpha_{kj}\sum_i b_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_i (\sum_k b_{ik}\alpha_{kj})\mathbf{e}_i$$

也等於　$$AB\mathbf{e}_i = A\sum_k b_{kj}\mathbf{e}_k = \sum_i (\sum_k a_{ik}b_{kj})\mathbf{e}_i$$

因此 $\sum b_{ik}\alpha_{kj} = \sum_j a_{ik}b_{kj}$，或

(91)　$$[B][A]_U = [A][B].$$

因為 B 是可逆的，$\det[B] \neq 0$。所以由 (91)，再加上定理 9.35 顯示

(92)　$$\det[A]_U = \det[A]$$

因此，一個線性算子的矩陣，其行列式與用以建構這矩陣的基底無關，所以我們說，一個線性算子的行列式，是有意義的，不必想到基底。

9.38　Jacobians　若 $\mathbf{f}$ 將開集合 $E \subset R^n$ 映至 R^n，且若 $\mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{x} \in E$ 是可微分，線性算子 $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ 的行列式叫做 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{x}$ 點的 Jacobian，寫成符號是，

(93)　$$J_f(\mathbf{x}) = \det \mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

我們也會用

(94)　$$\frac{\partial(y_1, \cdots\cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots\cdots, x_n)}$$

這符號來代替 $J_f(\mathbf{x})$，如果 $(y_1, \cdots\cdots, y_n)=\mathbf{f}(x_1, \cdots\cdots, x_n)$

用 Jacobian來說，在反函數定理中的關鍵假設，就是 $J_f(\mathbf{a})\neq 0$（比較定理 9.36），若隱函數定理用函數（59）來敍述的話，對A所做的假設就等於

$$\frac{\partial(f_1, \cdots\cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots\cdots, x_n)}\neq 0\,.$$

高階導數

9.39　定義　假設f是定義在開集合 $E\subset R^n$ 中的實值函數，其偏導數爲 $D_1f, \cdots\cdots, D_nf$。如果 D_jf 這些函數，本身也是可微分，則f的二階偏導數是定義做

$$D_{ij}f=D_iD_jf \qquad (i, j=1, \cdots\cdots, n)$$

如果所有 $D_{ij}f$ 這些函數，在E中都連續，我們就說f在E中是屬於 $\mathscr{C}''$，或 $f\in\mathscr{C}''(E)$.

由E映至 R^n 的映射 $\mathbf{f}$，如果 $\mathbf{f}$ 的每個分量都屬於 $\mathscr{C}''$，則稱之爲屬於 $\mathscr{C}''$。

也有可能 $D_{ij}f\neq D_{ji}f$，儘管兩個導數都存在（見習題 27)。然而,我們在下面會發現,只要這些導數都連續,則 $D_{ij}f=D_{ji}f$.

爲了簡單起見（而也不失其一般性），我們只對兩個變數的實值函數來敍述下兩個定理。第一個是均值定理。

9.40　定理　設若f是定義在開集合 $E\subset R^2$ 中，而 D_1f 及 $D_{21}f$ 在E中每一點皆存在。又設$Q\subset E$是個封閉矩形，其邊與座標軸平行，以 (a, b) 及 $(a+h, b+k)$ 爲反對位置的兩頂點 $(h\neq 0, k\neq 0)$。令

$$\begin{aligned}\triangle(f, Q)=f(a+h, b+k)-f(a+h, b)-f(a, b+k)\\+f(a, b)\end{aligned}$$

則在Q的內部會有一點 (x, y) 使得

$$\triangle(f, Q)=hk(D_{21}f)(x, y) \tag{95}$$

要注意到（95）式與定理 5.10 之類似性；Q的面積是 hk.

證明：取 $u(t)=f(t,a+h)-f(t,b)$。用兩次定理 5.10 可知，在 a 及 $a+h$ 之間有個 x, b 與 $b+k$ 之間有個 y，使得

$$\begin{aligned}\triangle(f,Q)&=u(a+h)-u(a)\\&=hu'(x)\\&=h[(D,f)(x,b+k)-(D_1f)(x,b)]\\&=hk(D_{21}f)(x,y)\end{aligned}$$

9.41　定理　　假設 f 是定義在開集合 $E\subset R^2$ 中，並設 D_1f, $D_{21}f$ 及 D_2f 在 E 中每一點皆存在，且 $D_{21}f$ 在某個點 $(a,b)\in E$ 是連續。

則 D_2f 在 (a_1b) 存在，且

$$(D_{12}f)(a,b)=(D_{21}f)(a,b) \tag{96}$$

系。若 $f\in\mathscr{C}''(E)$，則 $D_{21}f=D_{12}f$

證明：令 $A=(D_{21}f)(a,b)$。選取 $\varepsilon>0$。若 Q 是個矩形，如在定理 9.40 中者，且若 h 和 k 足够小，則對所有 $(x,y)\in Q$ 我們有

$$|A-(D_{21}f)(x,y)|<\varepsilon$$

因此，由（95）式知，

$$\left|\frac{\triangle(f,Q)}{hk}-A\right|<\varepsilon.$$

固定 h 並令 $k\longrightarrow 0$，由於在 E 中 D_2f 存在，故上面的不等式蘊涵了

$$\left|\frac{(D_2f)(a+h,b)-(D_2f)(a,b)}{h}-A\right|\leq\varepsilon. \tag{97}$$

因爲 ε 是任意的，且對所有足够小的 $h\neq 0$，（97）式都成立，所以 $(D_{12}f)(a,b)=A$。得出（96）。

積分的微分

假設φ是兩個變數的函數，它可對其中一個作積分，對另一個作微分。如某這兩個極限過程以相反次序施行時，在何種情況下，會得到同樣結果？將這問題更精確地敍述如下：對φ要有何種條件，我們才能證明

$$(98)\qquad \frac{d}{dt}\int_a^b \varphi(x,t)dx=\int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)dx$$

這方程式爲眞？（習題 28 提供了一反例。）

最好是用這個符號

$$(99)\qquad \varphi^t(x)=\varphi(x,t)$$

所以對每個t，φ^t 是單變數函數。

9.42 定理 假設

(a) $\varphi(x,t)$ 對$a\leq x\leq b$，$c\leq t\leq d$有定義；

(b) α是〔a,b〕上的漸增函數；

(c) 對每個$t\in[c,d]$, $\varphi^t\in\mathscr{R}(\alpha)$;

(d) $c<s<d$，而對每個$\varepsilon>0$，都對應一個$\delta>0$，使得對所有$x\in[a,b]$ 及所有$t\in(s-\delta,s+\delta)$,

$$|(D_2\varphi)(x,t)-(D_2\varphi)(x,s)|<\varepsilon.$$

定義

$$(100)\qquad f(t)=\int_a^b \varphi(x,t)d\alpha(x)\qquad (c\leq t\leq d).$$

則 $(D_2\varphi)^s\in\mathscr{R}(\alpha)$, $f'(s)$ 存在，且

$$(101)\qquad f'(s)=\int_a^b (D_2\varphi)(x,s)d\alpha(x)$$

留意，(c) 只是斷言說 (100) 這積分對所有$t\in[c,d]$ 皆存在。也要注意到，只要 $D_2\varphi$ 在φ 有定義的矩形上，是連續，則 (d) 當然成立。

證明： 當$0<|t-s|<\delta$，考慮差商

$$\psi(x,t)=\frac{\varphi(x,t)-\varphi(x,s)}{t-s}$$

由定理 5. 10 知，對每個 (x, t)，都對應一個 s 和 t 之間的 u，使得

$$\psi(x, t)=(D_2\varphi)(x, u)$$

因此 (d) 蘊涵了

$$|\psi(x, t)-(D_2\varphi)(x, s)|<\varepsilon \quad (a\leq x\leq b, 0<|t-s|<\delta). \tag{102}$$

留意

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=\int_a^b \psi(x, t)d\alpha(x) \tag{103}$$

由 (102)，當 $t \longrightarrow s$，則在 $[a, b]$ 上，$\psi^t \longrightarrow (D_2\varphi)^s$ 均匀地。由於每個 $\psi^t\in\mathscr{R}(\alpha)$，所要的結論便由 (103) 及定理 7. 16 導得。

9. 43　例子　我們當然可以證明，當以 $(-\infty, \infty)$ 取代 (a, b) 時，定理 9. 42 的類似命題。我們不這麼做，而只看看一個例子。定義，當 $-\infty< t <\infty$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(xt)dx, \tag{104}$$

及

$$g(t)=-\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\sin(xt)dx. \tag{105}$$

這兩個積分皆存在（它們都是絕對收斂），蓋其積分底的絕對值，分別最多是 $\exp(-x^2)$ 及 $|x|\exp(-x^2)$。

注意，g 是由 f 對其積分底 t 作微分而得來的。我們說 f 會是可微，且

$$f'(t)=g(t) \qquad (-\infty<t<\infty) \tag{106}$$

要證明這個，我們首先察看一下 $\cos x$ 的差商：若 $\beta > 0$，則

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha}{\beta}+\sin\alpha \tag{107}$$

$$=\frac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\alpha+\beta}(\sin\alpha-\sin t)\,dt,$$

由於 $|\sin\alpha-\sin t|\leq|t-\alpha|$，故（107）的右邊，其絕對值最多是 $\beta/2$; $\beta<0$ 的情形，可同樣處理。因此，對所有 β

$$\left|\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha}{\beta}+\sin\alpha\right|\leq|\beta| \tag{108}$$

（如果當 $\beta=0$，我們將左邊解釋爲 0。）

現在，固定 t，並固定 $h\neq 0$。利用（108），令 $\alpha=xt$，$\beta=xh$; 則由（104）及（105）導得

$$\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}-g(t)\right|\leq|h|\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx.$$

當 $h\longrightarrow 0$，我們因而得出（106）

我們現在再做一步：對（104）做分部積分，顯示

$$f(t)=2\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}\frac{\sin(xt)}{t}dx. \tag{109}$$

因此 $tf(t)=-2g(t)$，而（106）式現在蘊涵了，f 滿足微分方程式

$$2f'(t)+tf(t)=0 \tag{110}$$

如果我們解這微分方程式，並利用 $f(0)=\sqrt{\pi}$（見 8.21 節），則我們發現

$$f(t)=\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) \tag{111}$$

因此，（104）這個積分便明確地定出來了。

習題

1. 若 S 是向量空間 X 的非空子集，試證（如在 9.1 節中所斷言的），S 的展集是個向量空間。
2. 試證（如在 9.6 節中所斷言的）若 A 及 B 都是線性變換，則 BA 是線性的。

又再證 A^{-1} 是線性且可逆。

3. 假使$A\in L(X,Y)$ 且只當 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 時，$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$。試證A便是 1-1
4. 試證（如 9-30 節中所斷言的），線性變換的零空間及值域是向量空間。
5. 試證對每個$A\in L(R^n,R^1)$，都對應唯一的 $\mathbf{y}\in R^n$，使得 $A\mathbf{x}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$。並證明 $||A||=|\mathbf{y}|$

   提示：在某些條件下，Schwarz 不等式中的等號成立。
6. 若 $f(0,0)=0$，且若 $(x,y)\neq(0,0)$，則

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

   試證儘管f在 (0,0) 不是連續， 但在 R^2 中每一點，$(D_1f)(x,y)$ 及 $(D_2f)(x,y)$ 都存在。
7. 假設f是定義在開集合 $E\subset R^n$ 中的實值函數，而其偏導數 $D_1f,\cdots\cdots,D_nf$ 在E中皆有界。試證f在E中爲連續。

   提示：如定理 9.21 中進行。
8. 假設f是開集合 $E\subset R^n$ 上的可微分實值函數，且f 在點 $\mathbf{x}\in E$ 處有局部極大值。試證 $f'(\mathbf{x})=0$
9. 若 $\mathbf{f}$ 是由連結開集合 $E\subset R^n$ 映至 R^m 的可微分映射，且若對每個 $\mathbf{x}\in E$, $\mathbf{f}'(\mathbf{x})=0$，試證 $\mathbf{f}$ 在E上是常數。
10. 若f是定義在凸開集合 $E\subset R^n$ 中的實值函數，而對每個 $\mathbf{x}\in E$, $(D_1f)(\mathbf{x})=0$，試證 $f(\mathbf{x})$ 只與 $x_2,\cdots\cdots,x_n$ 有關。

    試證 E 的凸性可以用較弱的條件取代， 但某些條件是需要的。 例如，若$n=2$，而E則形如馬蹄，則敍述可能爲假。
11. 若f和g是 R^n 中可微分實值函數，試證

$$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f,$$

    且只要$f\neq 0$, $\nabla(1/f)=-f^{-2}\nabla f$
12. 固定二實數a及 $b, 0<a<b$。定義由 R^2 映至 R^3 的映射 $\mathbf{f}$ 爲

$$f_1(s,t)=(b+a\cos s)\cos t$$
$$f_2(s,t)=(b+a\cos s)\sin t$$
$$f_3(s,t)=a\sin s$$

    試描述 $\mathbf{f}$ 的值域K。（它是 R^3 中某個緊緻子集合。）

    (a) 試證恰有 4 個點 $\mathbf{p}\in K$，使得

$$(\nabla f_1)(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p}))=\mathbf{0}.$$

並找出這幾個點。

(*b*) 試找出所有 $\mathbf{q}\in K$ 而使得

$$(\nabla f_3)(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{q}))=\mathbf{0}$$

的集合。

(c) 試證 (a) 部份中找到的 $\mathbf{p}$，其中一個點，對應了 f_1 的局部極大值，另一個點對應了局部極小值，而另外兩個，兩種都不是（它們稱爲「鞍點」）。

在 (b) 部份中找出的 $\mathbf{q}$，那個是對應極大或極小?

(d) 令 λ 爲一無理實數，並定義 $\mathbf{g}(t)=\mathbf{f}(t, \lambda t)$。試證 $\mathbf{g}$ 是由 R' 映成 K 中緊緻子集的 1-1 映射。試證

$$|\mathbf{g}'(t)|^2=a^2+\lambda^2(b+a\cos t)^2.$$

13. 設若 $\mathbf{f}$ 是由 R^1 映至 R^3 的可微分映射，且 $|\mathbf{f}(t)|=1$，對每個 t。試證 $\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}(t)=0$.

將這結果用幾何解釋之。

14. 定義 $f(0,0)=0$，且當 $(x,y)\neq(0,0)$ 時

$$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$$

(a) 試證 D_1f 及 D_2f 是 R^2 中的有界函數。（因此 f 是連續。）

(b) 令 $\mathbf{u}$ 爲 R^2 中任意單位向量，試證方向導數 $(D_{\mathbf{u}}f)(0,0)$ 存在，且其絕對值最多是 1。

(c) 令 γ 爲 R^1 映至 R^2 的可微分映射（換言之，γ 是 R^2 中的曲線）$\gamma(0)=(0,0)$，且 $|\gamma'(0)|>0$。令 $g(t)=f(\gamma(t))$ 並證明對每個 $t\in R^1$, g 是可微分。

若 $\gamma\in\mathscr{C}'$，試證 $g\in\mathscr{C}'$

(d) 縱使如此，試證 f 在 $(0,0)$ 不可微。

提示：公式 (40) 不成立。

15. 定義 $f(0,0)=0$，並令當 $(x,y)\neq(0,0)$ 時

$$f(x,y)=x^2+y^2-2x^2y-\frac{4x^6y^2}{(x^4+y^2)^2}$$

(a) 對所有 $(x,y)\in R^2$，試證　　$f'(x, y)$

$$4x^4y^2 \leq (x^4+y^2)^2$$

並推證 f 爲連續。

(b) 當 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\infty < t < \infty$, 定義

$$g_\theta(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta).$$

試證 $g_\theta(0)=0$, $g_\theta'(0)=0$, $g_\theta''(0)=2$。因此每個 g_θ 都在 $t=0$ 處有一個嚴格局部極小值

換言之，f 在通過 (0,0) 的每條直線上的局限，都在 (0,0) 處有嚴格局部極小值。

16. 試證，旣使在 $n=1$ 的情形，反函數定理中，$\mathbf{f}'$ 在點 $\mathbf{a}$ 的連續性還是需要的：如果當 $t \neq 0$

$$f(t) = t + 2t^2\sin\left(\frac{1}{t}\right)$$

而 $f(0)=0$，則 $f'(0)=1$, f' 在 $(-1,1)$ 中有界，但 f 在 0 的任何隣域中都不是一對一。

17. 令 $\mathbf{f}=(f_1, f_2)$ 爲由 R^2 映至 R^2 的映射，定義爲

$$f_1(x,y) = e^x\cos y, \quad f_2(x,y) = e^x\sin y$$

(a) $\mathbf{f}$ 之値域爲何?

(b) 試證在任何 R^2 的點，$\mathbf{f}$ 的 Jacobian 都不爲 0。因此 R^2 中每個點都有一隣域，而 $\mathbf{f}$ 在其中是一對一。但是，$\mathbf{f}$ 在 R^2 上不是一對一。

(c) 令 $\mathbf{b}=(0,\pi/3)$, $\mathbf{a}=\mathbf{f}(\mathbf{b})$，令 $\mathbf{g}$ 爲 $\mathbf{f}$ 的連續反函數，定義在 $\mathbf{b}$ 的一個隣域上，使得 $\mathbf{g}(\mathbf{b})=\mathbf{a}$。試找一個 $\mathbf{g}$ 的明確表示式，並算出 $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ 及 $\mathbf{g}'(\mathbf{b})$，以驗證 (52) 這公式。

(d) 平行於座標軸的線，在 $\mathbf{f}$ 下之像如何?

18. 對定義爲

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

的映射，回答類似的問題。

19. 試證，方程式組

$$3x + y - z + u^2 = 0$$
$$x - y + 2z + u = 0$$
$$2x + 2y - 3z + 2u = 0$$

可以用 z 解出x, y, u; 用 y 解出 x, z, u; 用 x 解出 y, z, u; 但卻不能用 u 解出 x, y, z。

20. 在隱函數定理中，取 $n=m=1$，並以圖形解釋該定理（及其證明）。

21. 在 R^2 中定義 f 爲

$$f(x,y)=2x^3-3x^2+2y^3+3y^2.$$

(a) 試找出在 R^2 中，f 的梯度在該點爲 0 的四個點。試證 f 在 R^2 中恰有一個局部極大値，及一個局部極小値。

(b) 令 S 爲所有 $(x,y)\in R^2$，而在該處 $f(x,y)=0$ 的集合。

試在 S 中，找出那些使得方程式 $f(x,y)=0$ 在任何該點的鄰域，都無法以 x 解出 y（或以 y 解出 x）的點。儘你可能的精確地描述 S。

22. 對

$$f(x,y)=2x^3+6xy^2-3x^2+3y^2$$

做類似的討論。

23. 在 R^3 中定義 f 爲

$$f(x,y_1,y_2)=x^2y_1+e^x+y_2.$$

試證 $f(0,1,-1)=0, D_1f(0,1,-1)\neq 0$，而因此在 R^2 中某個$(1,-1)$的鄰域中，存在一可微分函數 g，使得 $g(1,-1)=0$，且

$$f(g(y_1,y_2),y_1,y_2)=0.$$

試求 $(D_1g)(1,-1)$ 及 $(D_2g)(1,-1)$.

24. 當 $(x,y)\neq(0,0)$ 時，定義 $\mathbf{f}=(f_1,f_2)$ 爲

$$f_1(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad f_2(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

試算出 $\mathbf{f}(x,y)$ 的秩階，並求出 $\mathbf{f}$ 的值域。

25. 假設$A\in L(R^n,R^m)$，令A的秩階爲 r。

(a) 如在定理 9.32 中一般，定義S。試證 SA 是 R^n 中的投影，其零空間爲 $\mathscr{N}(A)$，而其值域爲 $\mathscr{R}(S)$。提示：由(68)知 $SASA=SA$

(b) 利用 (a) 證明

$$\dim\mathscr{N}(A)+\dim\mathscr{R}(A)=n.$$

26. 試證 $D_{12}f$ 的存在性(甚至連續性)都無法蘊涵 D_1f 的存在性。例如，令 $f(x,y)=g(x)$，其中 $g(x)$ 是到處都不可微分的。

27. 令 $f(0,0)=0$，且當 $(x,y)\neq(0,0)$ 時

$$f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

試證

(a) f, D_1f, D_2f 在 R^2 中都連續。

(b) $D_{12}f$ 及 $D_{21}f$ 在 R^2 中每個點都存在，而除了在 $(0,0)$ 一點外都連續。

(c) $(D_{12}f)(0,0)=1,(D_{21}f)(0,0)=-1.$

28. 當 $t\geq 0$，令

$$\varphi(x,t)=\begin{cases} x & (0\leq x\leq\sqrt{t}) \\ -x+2\sqrt{t} & (\sqrt{t}\leq x\leq 2\sqrt{t}) \\ 0 & (\text{其餘}) \end{cases}$$

若 $t<0$，則令 $\varphi(x,t)=-\varphi(x,|t|)$

試證 φ 在 R^2 上連續，且對所有 x

$$(D_2\varphi)(x,0)=0$$

定義

$$f(t)=\int_{-1}^{1}\varphi(x,t)dx.$$

試證若 $|t|<\frac{1}{4}$，則 $f(t)=t$。因此

$$f'(0)\neq\int_{-1}^{1}(D_2\varphi)(x,0)dx$$

29. 令 E 為 R^2 中開集合，$\mathscr{C}'(E)$ 及 $\mathscr{C}''(E)$ 這兩種集合定義在課文中。由歸納法，對所有正整數 k, $\mathscr{C}^{(k)}(E)$ 可以定義如下：我們說 $f\in\mathscr{C}^{(k)}(E)$ 意思是指偏導數 $D_1f,\cdots\cdots,D_nf$ 是屬於 $\mathscr{C}^{(k-1)}(E)$

假使 $f\in\mathscr{C}^{(k)}(E)$，試證（由重複使用定理 9.41）第 k 階導數

$$D_{i_1i_2\ldots i_k}f=D_{i_1}D_{i_2}\cdots\cdots D_{i_k}f,$$

若下標 $i_1,\cdots\cdots,i_k$ 互換，其值不變。

例如，當 $n\geq 0$，則對所有 $f\in\mathscr{C}^{(4)}$

$$D_{1213}f=D_{3112}f$$

30. 令 $f\in\mathscr{C}^{(m)}(E)$，其中 E 是 R^n 的開集合。固定 $\mathbf{a}\in E$，並假設 $\mathbf{x}\in R^n$ 與 $\mathbf{0}$ 十分接近，使得點

$$\mathbf{p}(t)=\mathbf{a}+t\mathbf{x}$$

只要$0\leq t\leq 1$，則位在E中。對所有 $t\in R^1$ 而 $\mathbf{p}(t)\in E$，定義

$$h(t)=f(\mathbf{p}(t))$$

(a) 當$1\leq k\leq m$，（由重複使用連鎖定理）證明

$$h^{(k)}(t)=\sum(D_{i_1\cdots i_k}f)(\mathbf{p}(t))x_{i_1}\cdots\cdots x_{i_k}.$$

這個和是對所有有序 k 元組 $(i_1,\cdots\cdots,i_k)$ 來取的，其中的 i_j 是 $1,\cdots\cdots,n$ 這些整數之一。

(b) 由 Taylor 定理（5.15）知，對某個 $t\in(0,1)$

$$h(1)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}+\frac{h^{(m)}(t)}{m!}$$

利用這個證明 n 變數的 Taylor 定理，先證明公式

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{x})=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\sum(D_{i_1\cdots i_k}f)(\mathbf{a})x_{i_1}\cdots\cdots x_{i_k}+r(\mathbf{x})$$

將 $f(\mathbf{a}+\mathbf{x})$ 表爲它的所謂「$m-1$ 次的 Taylor 多項式」再加上一個餘留項，它滿足

$$\lim\frac{r(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|^{m-1}}=0$$

每一個內部的作和項都對所有有序 k 元組 $(i_1,\cdots\cdots,i_k)$ 來取，就像在 (a) 部份中一樣；如往常一樣，f 的零階導數就只是 f，所以 f 在 $\mathbf{a}$ 的 Taylor 多項式中的常數項，就是 $f(\mathbf{a})$。

(c) 習題 29 顯示，在 (b) 部份寫的 Taylor 多項式，會有重複。例如，D_{113} 會出現 3 次，$D_{113}, D_{131}, D_{311}$。所對應三項的和，可以寫成這種型式

$$3(D_1^2D_3f)(\mathbf{a})x_1^2x_3.$$

試（由計算每個導數出現 n 次）證明，(b) 中的 Taylor 多項式可以寫成這種型式

$$\sum\frac{(D_1^{s_1}\cdots\cdots D_n^{s_n}f)(\mathbf{a})}{s_1!\cdots\cdots s_n!}x_1^{s_1}\cdots\cdots x_n^{s_n}$$

這裏的和，是對所有有序 k 元組 $(s_1,\cdots\cdots,s_n)$ 取的，每個 s_i 都是非負整數，且 $s_1+\cdots\cdots+s_n\leq m-1$。

31. 假設在某個點$\mathbf{a}\in R^3$ 的鄰域中，$f\in\mathscr{C}^{(3)}f$ 在 $\mathbf{a}$ 點的梯度是 $\mathbf{0}$，但並非所有 f 在 $\mathbf{a}$ 的二階導數都是 0。試說明我們如何由 f 在 $\mathbf{a}$ 的 Taylor 多項式（2 次的），以決定在點 $\mathbf{a}$，f 是有局部極大値，還是局部極小値，或兩者都不是？將之擴展到 R^n，以取代 R^2。

第十章

微分型式之積分

積分學可以在許多層面上來研究，在第 6 章中，曾將這理論對定義在實數線的子區間上，變化相當好 (well-behaved)函數，加以闡述。在第11章中，我們還會遇到一種發展得很好的積分理論，可以應用到範圍較廣的函數上，它們的定義域多多少少是有點任意的，並不必是 R^n 的子集合。目前這一章，則專注於與歐氏空間的幾何性質，有密切關係的積分理論，像是變數變換公式，線積分，以及微分型式的構造，這會用在 n 維型式的微積分基本定理——即 Stokes 定理——的敍述及證明中。

積分學

10.1 定義 設 I^k 是 R^k 中的 k 維胞體(k-cell)，包含所有

$$\mathbf{x}=(x_1, \cdots\cdots x_k)$$

而

$$(1) \qquad a_i \leq x_i \leq b_i \qquad (i=1, \cdots\cdots, k),$$

I^j 是 R^j 中的 j 維胞體，由(1)式的前 j 個不等式所定義，而 f 是 I^k 上的實值連續函數。

令 $f=f_k$，且在 I^{k-1} 上定義 f_{k-1} 為

$$f_{k-1}(x_1, \cdots\cdots, x_{k-1})=\int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \cdots\cdots, x_k)dx_k.$$

f_k 在 I^k 上的均勻連續性顯示 f_{k-1} 在I^{k-1} 上是連續的。因此我們可以重複這個步驟而得到函數 f_j，它在 I^j 上連續，且使 f_{j-1} 為 f_j 對 x_j 在 $[a_j, b_j]$ 上的積分。經過 k 個步驟以後，我們得到一個數 f_0，我們稱之為 f 在 I^k 上的積分；我們把它寫成

(2) $$\int_{I^k} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \qquad \text{或} \quad \int_{I^k} f.$$

首先，這個積分的定義與所施行 k 次積分的次序有關，然而，這種相關性只是表面的，要證明這個，我們暫是引入$L(f)$ 這符號，表示 (2) 式中的積分，而 $L'(f)$ 表示以另外某種次序施行這 k 次積分所得的結果。

10.2 定理 對每個 $f\in C(I^k)$ 而言，$L(f)=L'(f)$，

證明： 若 $h(\mathbf{x})=h_1(x_1)\cdots\cdots h_n(x_n), h_j\in C([a_j, b_j])$ 則

$$L(h)=\prod_{i=1}^{k}\int_{a_i}^{b_i} h_i(x_i)dx_i=L'(h).$$

若 $\mathscr{A}$ 為這種函數 h 的所有有限項和所成的集合，則可得，對所有 $g\in\mathscr{A}$, $L(g)=L'(g)$，此外，$\mathscr{A}$ 是 I^k 上函數的一個代數，於是可以應用 Stone-Weierstrass 定理。

令 $V=\prod_1^k(b_i-a_i)$。若 $f\in\mathscr{C}(I^k)$且$\epsilon>0$，則存在 $g\in\mathscr{A}$，

使得 $\|f-g\|<\epsilon/V$，這裏的 $\|f\|$ 定義為 $\max|f(\mathbf{x})|$, $(\mathbf{x}\in I^k)$. 則 $|L(f-g)|<\epsilon$, $|L'(f-g)|<\epsilon$，且由於

$$L(f)-L'(f)=L(f-g)+L'(g-f),$$

我們歸結到 $|L(f)-L'(f)|>2\epsilon$.

就這定理而言，習題 2 是很重要的。

10.3 定義 在 R^k 上一個（實值或複值）函數的擔臺[1]

(support) 是指 R^k 中使得 $f(\mathbf{x})\neq 0$ 的所有點 $\mathbf{x}$ 所成集合的閉包。若 f 是具有緊緻擔臺的連續函數，令 I^k 爲任何包含 f 擔臺的 k 維胞體，並定義

$$\int_{R^k} f=\int_{I^k} f. \tag{3}$$

這樣定義的積分很明顯的與 I^k 的選擇無關，只要 I^k 包含 f 的擔臺。

現在想要將 R^k 上積分的定義，擴展到具有緊緻擔臺的連續函數（在某種意義下）的極限函數上去。我們不打算討論在何種情況下可以這麼做；這個問題放在 Lebesgue 積分論中較適當。我們將只描述一個非常簡單的例子，會在 Stokes 定理的證明中用到。

10.4 例子 令 Q^k 爲 k 維單體(k-simplex)，它包含所有 R^k 中的點 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots\cdots,x_k)$ 而 $x_1+\cdots\cdots+x_k\leq 1$，且對 $i=1,\cdots\cdots,k$ 而言 $x_i\geq 0$。例如，若 $k=3$，Q^k 是個四面體，頂點在 $\mathbf{0}$，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$。若 $f\in\mathscr{C}(Q^k)$，由令在 Q^k 之外的 $f(\mathbf{x})=0$ 將 f 擴展到 I^k 上的函數，並定義

$$\int_{Q^k} f=\int_{I^k} f. \tag{4}$$

這裏的 I^k 是『單位方體』(unit cube)，定義爲

$$0\leq x_i\leq 1 \qquad (1\leq i\leq k).$$

由於 f 在 I^k 上可能是不連續，(69)式右邊積分的存在性須要證明。我們也希望證明這個積分與 k 個單積分施行之次序無關。

要證明這個，假設 $0<\delta<1$，令

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & (t\leq 1-\delta)\\ \dfrac{(1-t)}{\delta} & (1-\delta<t\leq 1)\\ 0 & (1<t),\end{cases} \tag{5}$$

譯注[1]：採用楊維哲先生之譯名，見「泛函分析導論」

並定義

(6) $$F(\mathbf{x})=\varphi(x_1+\cdots\cdots+x_k)f(\mathbf{x}),\ (\mathbf{x}\in I^k).$$

則$F\in\mathscr{C}(I^k)$.

令 $\mathbf{y}=(x_1,\cdots\cdots,x_{k-1})$, $\mathbf{x}=(\mathbf{y},x_k)$。對每個 $\mathbf{y}\in I^{k-1}$而言，所有使得 $F(\mathbf{y};x_k)\neq f(\mathbf{y};x_k)$ 的 x_k 所成的集合，不是空集合就是一線段，而其長不超過 δ。由於 $0\leq\varphi\leq 1$，所以

(7) $$|F_{k-1}(\mathbf{y})-f_{k-1}(\mathbf{y})|\leq\delta\|f\| \qquad (\mathbf{y}\in I^{k-1}),$$

其中 $\|f\|$ 具有與定理 10.2 證明中相同的意義，而 F_{k-1}, f_{k-1} 是如定義 10.1 中者，

當 $\delta\to 0$, (7) 式顯示 f_{k-1} 是連續函數序列的均勻極限。因此 $f_{k-1}\in\mathscr{C}(I^{k-1})$，而進一步積分不會有問題。

這就證明了積分 (4) 的存在性。此外，(7) 式顯示

(8) $$\left|\int_{I^k}F(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\int_{I^k}f(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right|\leq\delta\|f\|.$$

注意，(8)式爲眞，不管 k 個單一積分所施行之次序如何。由於 $F\in\mathscr{C}(I^k)$, $\int F$不會因任何次序的改變而受影響，因此由(8)知，對$\int f$而言也同樣爲眞。

證畢。

我們的下一個目標，就是定理 10.9 所敍述的變數變換的公式。爲了要使簡明起見，我們先討論所謂的素朴映射 (Primitive Mapping)，以及單位分割 (Partition of Unity)。素朴映射，會使我們對一個具有可逆導數的$\mathscr{C}'$-映射，它的局部動態，有一個明晰的印象，而單位分割，則在當我們運用局部性資料，來處理整體的問題時，是很有用的工具。

素朴映射

10.5 定義 若$\mathbf{G}$ 將開集合 $E\subset R^n$ 映至 R^n，且若有一整數m及一實值函數 g，其定義域爲 E，使得

(9) $$\mathbf{G}(\mathbf{x})=\sum_{i\neq m}x_i\mathbf{e}_i+g(\mathbf{x})\mathbf{e}_m \qquad (\mathbf{x}\in E),$$

則我們說G 是素朴的 (Primitive)。因此，一個素朴映射，就是最多只變換一個座標的映射。要注意 (9) 式也可寫成這種型式

(10) $$\mathbf{G}(\mathbf{x})=\mathbf{x}+[g(\mathbf{x})-x_m]\mathbf{e}_m.$$

如果 g 在某一點 $\mathbf{a}\in E$ 處可微分，則 $\mathbf{G}$ 亦然，$\mathbf{G}'(\mathbf{a})$ 這算子的矩陣 $[\alpha_{ij}]$，其第 m 列為

(11) $$(D_1g)(\mathbf{a}),\cdots\cdots,(D_mg)(\mathbf{a}),\cdots\cdots(D_ng)(\mathbf{a}).$$

當 $j\neq m$，我們得到 $\alpha_{jj}=1$，而若 $i\neq j$，則 $\alpha_{ij}=0$. $\mathbf{G}$ 在 $\mathbf{a}$ 的 Jacobian 因而定為

(12) $$J_G(\mathbf{a})=\det[\mathbf{G}'(\mathbf{a})]=(D_mg)(\mathbf{a}),$$

而我們（由定理 9.36）知道，$\mathbf{G}'(\mathbf{a})$ 為可逆，若且唯若 $(D_mg)(\mathbf{a})\neq 0$.

10.6　定義　一個在 R^n 上的線性算子 B，它使得標準基底的某一對互換，其餘皆不變，則稱之為跳換映射 (flip)。

例如，R^4 上交換 $\mathbf{e}_2$ 及 $\mathbf{e}_4$ 的跳換映射 B，是這種型式

(13) $$B(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3+x_4\mathbf{e}_4)=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_4+x_3\mathbf{e}_3+x_4\mathbf{e}_2,$$

或，同樣的，

(14) $$B(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3+x_4\mathbf{e}_4)=x_1\mathbf{e}_1+x_4\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3+x_2\mathbf{e}_4$$

因此 B 也可以想成是兩個座標的互換，這比看成是兩個基底向量的互換要好些。

在下面的證明裏，我們會用到 R^n 中的投影 $P_0,\cdots\cdots,P_n$, 定義為 $P_0\mathbf{x}=\mathbf{0}$，而當 $1\leq m\leq n$ 時，

(15) $$P_m\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots\cdots+x_m\mathbf{e}_m$$

所以 P_m 是個投影，其值域與零域分別以 $\{\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_m\}$ 及 $\{\mathbf{e}_{m+1},\cdots\cdots\mathbf{e}_n\}$ 展開。

10.7　定理　假設 $\mathbf{F}$ 是個將開集合 $E\subset R^n$ 映至 R^n 的 $\mathscr{C}'$-映射，$\mathbf{0}\in E$，$\mathbf{F}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，且 $\mathbf{F}'(\mathbf{0})$ 是可逆。

則在 R^n 中，有個 $\mathbf{0}$ 的隣域，而在其中

(16) $$\mathbf{F}(\mathbf{x})=B_1\cdots\cdots B_{n-1}\mathbf{G}_n\circ\cdots\cdots\circ\mathbf{G}_1(\mathbf{x})$$

這表現式成立。

在 (16) 式中，每個 $\mathbf{G}_i$ 都在某個 $\mathbf{0}$ 的隣域中，是個素朴$\mathscr{C}'$-映射；$\mathbf{G}_i(\mathbf{0})=\mathbf{0}, \mathbf{G}_i'(\mathbf{0})$ 爲可逆，且每個 B_i 要不就是個跳換映射，要不就是個恒等映射。

簡言之，(16)式將$\mathbf{F}$ 局部地表示爲素朴映射及跳換映射之合成關係。

證明: 令 $\mathbf{F}=\mathbf{F}_1$。假使 $1\leq m\leq n-1$，並作以下歸納性假設（它對 $m=1$ 顯然成立）:

V_m 是 $\mathbf{0}$ 的隣域，$\mathbf{F}_m\in\mathscr{C}'(V_m), \mathbf{F}_m(\mathbf{0})=\mathbf{0}, \mathbf{F}_m'(\mathbf{0})$是可逆，而且

$$P_{m-1}\mathbf{F}_m(\mathbf{x})=P_{m-1}\mathbf{x} \qquad (\mathbf{x}\in V_m). \tag{17}$$

由 (17) 式知，我們有

$$\mathbf{F}_m(\mathbf{x})=P_{m-1}\mathbf{x}+\sum_{i=m}^{n}\alpha_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i, \tag{18}$$

其中的 $\alpha_m, \cdots\cdots, \alpha_n$ 是 V_m 中的實值$\mathscr{C}'$-映射，因此

$$\mathbf{F}'_m(\mathbf{0})\mathbf{e}_m=\sum_{i=m}^{n}(D_m\alpha_i)(\mathbf{0})\mathbf{e}_i. \tag{19}$$

由於 $\mathbf{F}'_m(\mathbf{0})$ 是可逆，故 (19) 式的左邊不爲 $\mathbf{0}$，因此有一個 k，使得$m\leq k\leq n$ 且$(D_m\alpha_k)(\mathbf{0})\neq 0$。

令 B_m 爲交換m及這個 k 的跳換映射（若 $k=m$，則B_m就是恒等映射），並定義

$$\mathbf{G}_m(\mathbf{x})=\mathbf{x}+[\alpha_k(\mathbf{x})-x_m]\mathbf{e}_m \qquad (\mathbf{x}\in V_m). \tag{20}$$

則 $\mathbf{G}_m\in\mathscr{C}'(V_m), \mathbf{G}_m$ 是素朴的，且 $\mathbf{G}'_m(\mathbf{0})$ 爲可逆，蓋因 $(D_m\alpha_k)(\mathbf{0})\neq 0$.。

於是，反函數定理顯示，有一開集合 $U_m, \mathbf{0}\in U_m\subset V_m$，使得 $\mathbf{G}_m$ 是個將 U_m 映成 $\mathbf{0}$ 的一個隣域V_{m+1} 的 1-1 映射，而$\mathbf{G}_m^{-1}$ 在 V_{m+1} 中是連續可微分。定義 $\mathbf{F}_{m+1}$ 爲

(21) $$\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{y})=B_m\mathbf{F}_m\circ\mathbf{G}_m^{-1}(\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y}\in V_{m+1}).$$

則 $\mathbf{F}_{m+1}\in\mathscr{C}'(V_{m+1}), \mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，且 $\mathbf{F}'_{m+1}(\mathbf{0})$ 爲可逆（由連鎖定理知）。此外，當 $\mathbf{x}\in U_m$，

(22) $$\begin{aligned}P_m\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}_m(\mathbf{x}))&=P_mB_m\mathbf{F}_m(\mathbf{x})\\&=P_m[P_{m-1}\mathbf{x}+\alpha_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_m+\cdots\cdots]\\&=P_{m-1}\mathbf{x}+\alpha_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_m\\&=P_m\mathbf{G}_m(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

所以

(23) $$P_m\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{y})=P_m\mathbf{y} \qquad (\mathbf{y}\in V_{m+1}).$$

因此我們的歸納性假設，當以 $m+1$ 代替 m 時，也成立。

〔在 (22) 式中，我們先用了 (21) 式，再用 (18) 式及 B_m 的定義，然後是 P_m 的定義，最後用 (20)。〕

由於 $B_mB_m=I$，故 (21) 式，用 $\mathbf{y}=\mathbf{G}_m(\mathbf{x})$，就等於

(24) $$\mathbf{F}_m(\mathbf{x})=B_m\mathbf{F}_{m+1}(\mathbf{G}_m(\mathbf{x})) \qquad (\mathbf{x}\in U_m).$$

如果我們用 $m=1,\cdots\cdots,n-1$，我們逐項得到，在某個 $\mathbf{0}$ 的隣域中，

$$\begin{aligned}\mathbf{F}=\mathbf{F}_1&=B_1\mathbf{F}_2\circ\mathbf{G}_1\\&=B_1B_2\mathbf{F}_3\circ\mathbf{G}_2\circ\mathbf{G}_1\\&=B_1\cdots\cdots B_{n-1}\mathbf{F}_n\circ\mathbf{G}_{n-1}\circ\cdots\cdots\circ\mathbf{G}_1.\end{aligned}$$

又由 (17) 式知，$\mathbf{F}_n$ 是素朴的。這就證得了定理。

單位分割

10.8　定理　假設 K 是 R^n 的緊緻子集合，且 $\{V_\alpha\}$ 是 K 的一個開覆蓋。則存在函數 $\psi_1,\cdots\cdots,\psi_s\in\mathscr{C}'(R^n)$，使得

(a) $0\leq\psi_i\leq 1$，$1\leq i\leq s$；

(b) 每個 ψ_i 的擔臺 (Support) 會在某個 V_α 中，而且

(c) $\psi_1(\mathbf{x})+\cdots\cdots+\psi_s(\mathbf{x})=1$，對所有 $\mathbf{x}\in K$。

就因爲 (c) 式，$\{\psi_\alpha\}$ 稱爲一個單位分割(Partition of unity)，

而 (b) 式有時則說成 $\{\psi_i\}$ 附屬於這覆蓋下 (Subordiuate to the cover $\{V_\alpha\}$).

系。若 $f\in\mathscr{C}(R^n)$ 且 f 的擔臺是在 K 中，則

$$(25)\qquad f=\sum_{i=1}^{s}\psi_i f.$$

每個 $\psi_i f$ 的擔臺是在某個 V_α 中。

(25) 式的要點是，它是將 f 表成具有『微小』擔臺的連續函數 $\psi_i f$ 之和的一種表示法。

證明：對每個 $\mathbf{x}\in K$，給一個指標 $\alpha(\mathbf{x})$ 使得 $\mathbf{x}\in V_{\alpha(x)}$. 則有兩個開球 $B(\mathbf{x})$ 及 $W(\mathbf{x})$，以 $\mathbf{x}$ 爲中心，且

$$(26)\qquad \overline{B(\mathbf{x})}\subset W(\mathbf{x})\subset\overline{W(\mathbf{x})}\subset V_{\alpha(x)}.$$

由於 K 是緊緻，故在 K 中有點 $\mathbf{x}_1,\cdots\cdots,\mathbf{x}_s$ 使得

$$(27)\qquad K\subset B(\mathbf{x}_1)\cup\cdots\cdots\cup B(\mathbf{x}_s).$$

由 (26) 知，有函數 $\varphi_1,\cdots\cdots,\varphi_s\in\mathscr{C}(R^n)$， 使得在 $B(\mathbf{x}_i)$ 上，$\varphi_i(\mathbf{x})=1$，在 $W(\mathbf{x}_i)$ 外部，$\varphi_i(\mathbf{x})=0$，而在 R^n 上 $0\leq\varphi_i(\mathbf{x})\leq 1$。定義 $\psi_1=\varphi_1$ 而當 $i=1,\cdots\cdots,s-1$ 時

$$(28)\qquad \psi_{i+1}=(1-\varphi_1)\cdots\cdots(1-\varphi_i)\varphi_{i+1}.$$

性質 (a) 及 (b) 很明顯。對 $i=1$ 而言

$$(29)\qquad \psi_1+\cdots\cdots+\psi_i=1-(1-\varphi_1)\cdots\cdots(1-\varphi_i)$$

這關係也是極明顯的。若(29)式對某個 $i<s$ 成立，則將(28)及(29)，相加得到一個以 $i+1$ 代替 i 的 (29) 式。於是

$$(30)\qquad \sum_{i=1}^{s}\psi_i(\mathbf{x})=1-\prod_{i=1}^{s}[1-\varphi_i(\mathbf{x})]\quad(\mathbf{x}\in R^n).$$

若 $\mathbf{x}\in K$，則對某個 i，$\mathbf{x}\in B(\mathbf{x}_i)$，因此 $\varphi_i(\mathbf{x})=1$，而 (30) 式中的乘積是 0。這就證明了(c)。

變數變換

我們現在可以描述，變數變換對多重積分的影響了。為簡單起見，這裏我們限制自己在具緊緻擔臺的連續函數上，雖然這樣做。在許多應用上是太受限制了點。這由習題 9 到 13 可例示出來。

10.9 定理 若T是將開集合$E\subset R^k$ 映至 R^k 的1-1 $\mathscr{C}'$ 映射，而對所有$\mathbf{x}\in E$, $J_T(\mathbf{x})\neq 0$。若f是R^k上的連續函數。它的擔臺是緊緻的，而且在 $T(E)$ 中。則

$$\int_{R^k} f(\mathbf{y})d\mathbf{y}=\int_{R^k} f(T(\mathbf{x}))\,|J_T(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}. \tag{31}$$

我們記得 J_T 是T的 Jacobian。 假設 $J_T(\mathbf{x})\neq 0$ 蘊涵了，由反函數定理，T^{-1} 在 $T(E)$ 上是連續的。而這又保證了(72)式右邊的積分底 (integrand) 在E中有緊緻擔臺 (定理 4.14)。

(31) 式中出現 $J_T(\mathbf{x})$ 的絕對值，須要做一番說明。取 $k=1$ 的情形，同時假設T是由R^1映至R^1 的1-1$\mathscr{C}'$-映射。則$J_T(x)=T'(x)$；且如果T是漸增的，則由定理 6.19 及 6.17 知，對所有具緊緻擔臺的連續f而言，我們有

$$\int_{R^1} f(y)dy=\int_{R^1} f(T(x))T'(x)dx, \tag{32}$$

但如果T是漸減，則$T'(x)<0$；而如果f在它的擔臺內點 (interior) 是正的，則 (32) 式左邊是正的而右邊是負的， 如果在 (32) 中以 $|T'|$ 代替 T'，便可得到正確的方程式。

要點是，我們現在考慮的積分是 R^k 的子集合上函數的積分，而我們並未給這些子集合任何方向(direction)或定向(orientaion)的關係。當我們遇到微分型式 (differential forms) 在曲面上作積分時，我們將採用另一不同的觀點。

證明: 由剛才所做的註解可導得，若 T 是個素朴的$\mathscr{C}'$-映射，則 (31) 式為眞 (見定義 10.5) ，且定理 10.2 也顯示，若T是個只變換兩個座標的線性變換，則 (31) 式為眞。

若這定理對變換P及Q為眞，且若 $S(\mathbf{x})=P(Q(\mathbf{x}))$，則

$$\int f(\mathbf{z})d\mathbf{z}=\int f(P(\mathbf{y}))|J_P(\mathbf{y})|d\mathbf{y}$$
$$=\int f(P(Q(\mathbf{x})))|J_R(Q(\mathbf{x}))||J_Q(\mathbf{x})|d\mathbf{x}$$
$$=\int f(S(\mathbf{x}))|J_S(\mathbf{x})|d\mathbf{x},$$

因爲由行列式的乘法定理及連鎖定理知，

$$J_P(Q(\mathbf{x}))J_Q(\mathbf{x})=\det P'(Q(\mathbf{x}))\det Q'(\mathbf{x})$$
$$=\det P'(Q(\mathbf{x})Q'(\mathbf{x})=\det S'(\mathbf{x})=J_S(\mathbf{x}).$$

故這定理對 S 亦眞。

每個點 $\mathbf{a}\in E$ 都有一鄰域 $U\subset E$，且在其中

(33) $$T(\mathbf{x})=T(\mathbf{a})+B_1\cdots\cdots B_{k-1}\mathbf{G}_k\circ\mathbf{G}_{k-1}\circ\cdots\cdots\circ\mathbf{G}_1(\mathbf{x}-\mathbf{a})$$

這裏的 $\mathbf{G}_i, B_i$ 就是定理 10.7 中者。令 $V=T(U)$，則得，若 f 的擔臺在 V 中，(31) 式便會成立。因此:

每個點 $\mathbf{y}\in T(E)$ 都位於一開集合 $V_{\mathbf{y}}\in T(E)$ 中，使得對所有其擔臺在 $V_{\mathbf{y}}$ 中的連續函數，(31) 式都成立。

現在令 f 爲連續函數，其緊緻擔臺 $K\subset T(E)$。由於 $\{V_y\}$ 覆蓋了 K，故由定理 10.8 的系知，$f=\sum\psi_i f$，其中每個 ψ_i 都是連續，且每個 ψ_i 其擔臺都會在某個 $V_{\mathbf{y}}$ 中。故 (31) 式對每個 $\psi_i f$ 都成立，也因而對其和 f 也成立。

微分型式

我們現在要發展一些機元（machinery），在通常所謂的 Stokes定理，卽微積分基本定理的 n 維型式中，會用得到。Stokes定理的原始型式，是起源於向量分析對電磁學的應用，而且是用向量場的渦度來敍述的。Green 定理及散度定理（divergence Theorem）是另外的特殊型式。在本章末尾，會對這些論題有簡潔的討論。

Stokes 定理的一個奇異特性就是，它唯一的困難之處，在於定理敍述中所需的定義，它們精密的結構。這些定義是有關微分

型式，它們的導數，邊界，及定向 (orientation)。一旦了解了這些觀念，這定理的敍述就很簡潔了，而其證明也幾乎沒什麼難處。

到目前爲止，我們只考慮了定義在開集合中多變數函數的導數。這只是爲了方便，以使我們避開了可能發生在邊界點上的麻煩。然而，現在則討論在緊緻集合上的可微分函數，會方便些。因此我們採用下面的規約：說到 $\mathbf{f}$ 是由緊緻集合 $D \subset R^k$ 映 R^n 至的一個 $\mathscr{C}'$-映射（或 $\mathscr{C}''$-映射），意思是，有一個 $\mathscr{C}'$-映射（或 $\mathscr{C}''$-映射）$\mathbf{g}$ 將開集合 $W \subset R^k$ 映至 R^n，使得 $D \subset W$，且對所有 $\mathbf{x} \in D$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

10.10　定義　若 E 是 R^n 中的開集合。所謂 E 中的一個 k 維曲面 (k-surface)，就是由緊緻集合 $D \subset R^k$ 映至 E 的一個 $\mathscr{C}'$-映射 Φ。

D 叫做 Φ 的參數定義域 (Parameter Domain)。D 中的點是記做 $\mathbf{u} = (u_1, \cdots\cdots, u_k)$.。

我們將限制自己在簡單的情況，其中的 D 要不就是一個 k 維胞體，要不就是在例 10.4 中所描述的 k 維單體 Q^k。如此做的理由是，我們需要在 D 上做積分，而我們至今尚未發展出在 R^k 中較複雜的集合上的一套積分理論。我們會發現，這種局限在 D 上的討論（此後我們將心照不宣地做此限制），在以後微分型式的理論中，並不會造成嚴重地失去一般性的結果。

我們要強調的是，E 中的 k 維曲面是定義爲映至 E 的映射 (mapping)，不是 E 的子集合。這與我們早先對曲線的定義（6.26 定義）相合。事實上，1 維曲面恰正是連續可微分曲線。

10:11　定義　設 E 爲 R^n 中的開集合。所謂 E 中的 k 階微分型式，$k \geq 1$〔簡言之，E 中的 k-型(k-form)〕，是一個函數 ω，以符號表示爲

$$\omega = \sum a_{i_1 \cdots\cdots i_k}(\mathbf{x})\, dx_{i_1} \wedge \cdots\cdots \wedge dx_{i_k} \tag{34}$$

這個和，（指標 $i_1, \cdots\cdots i_k$ 各別地由 1 到 n 變動），它對每個 E 中的 k 維曲 Φ 面賦予一個數 $\omega(\Phi)=\int_{\Phi}\omega$，按着

$$(35)\qquad \int_{\Phi}\omega=\int_{D}\sum a_{i_1\cdots\cdots i_k}(\Phi(\mathbf{u}))\frac{\partial(x_{i_1},\cdots\cdots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\ \cdots\cdots,u_k)}d\mathbf{u}$$

的規則，這裏的 D 是 Φ 的參數定義域。

諸函數 $a_{i_1}, \cdots\cdots i_k$ 均假設在 E 中是實值且連續，若 $\phi_1, \cdots\cdots, \phi_n$ 是 Φ 的分量，(35) 式中的 Jacobian 是指由映射

$$(u_1, \cdots\cdots, u_k)\to(\phi_{i1}(\mathbf{u}), \cdots\cdots, \phi_{i_k}(\mathbf{u}))$$

所決定的 Jacobian。

注意，(35) 式右邊是 D 上的一個積分，定義如定義 10.1（或例 10.4）中者，而 (35) 式是這符號 $\int_{\Phi}\omega$ 的定義。

如果 (34) 式中的諸函數 $a_{i_1}\cdots\cdots a_{i_k}$ 全部屬於 $\mathscr{C}'$ 或 $\mathscr{C}''$，則一個 k-型 ω 就稱為屬於 $\mathscr{C}'$ 或 $\mathscr{C}''$。

E 中的一個 0-型是定義為 E 中的一個連續函數。

10.12 例子　(a) 令 γ 為 R^3 中-1 維曲面（屬於 $\mathscr{C}'$ 的曲線，有參數定義域為 $[0, 1]$. 。

以 (x, y, z) 取代 (x_1, x_2, x_3)，並令

$$\omega=xdy+ydx.$$

則

$$\int_{\gamma}\omega=\int_0^1[\gamma_1(t)\gamma_2'(t)+\gamma_2(t)\gamma_1'(t)]dt=\gamma_1(1)\gamma_2(1)-\gamma_1(0)\gamma_2(0)$$

留意，在本例中 $\int_{\gamma}\omega$ 只與 γ 的起始點 $\gamma(0)$ 及終點 $\gamma(1)$ 有關。特別是對每個封閉曲線 γ 而言，$\int_{\gamma}\omega=0$。（我們以後會知道，這對每個正合的 (exact) 1-型 ω，這都為眞。）

1-型的積分通常稱為線積分 (line integral)。

(b) 固定 $a>0$，$b>0$，並定義

$$\gamma(t)=(a\cos t,\ b\sin t)\qquad(0\leq t\leq 2\pi),$$

因此 γ 是 R^2 中的閉曲線。（其值域爲一橢圓。）則

$$\int_\gamma x\,dy=\int_0^{2\pi}ab\cos^2 t\,dt=\pi ab,$$

但是

$$\int_\gamma y\,dx=-\int_0^{2\pi}ab\sin^2 t\,dt=-\pi ab.$$

留意，$\int_\gamma x\,dy$ 是由 γ 所界定區域的面積，這是 Green 定理的一個特例。

(c) 令 D 爲 3 維胞體，定義爲

$$0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq\pi,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi.$$

定義 $(r,\ \theta,\ \varphi)=(x,y,z)$，其中

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=r\cos\theta.$$

則

$$J_\Phi(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta.$$

因此

$$\int_\Phi dx\wedge dy\wedge dz=\int_D J_\Phi=\frac{4\pi}{3}. \tag{36}$$

注意 Φ 將 D 映成爲 R^3 中的閉單位球，而且這映射在 D 之內部是 1-1（但某些邊界點是由 Φ 定爲相同），還有(36)式的積分等於 $\Phi(D)$ 的體積。

10.13 基本性質　令 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 爲 E 中的 k- 型，若且唯若對在 E 中所有的 k 維曲面 Φ 而言，$\omega_1(\Phi)=\omega_2(\Phi)$，則我們寫成 $\omega_1=\omega_2$; 特別是 $\omega=0$ 意指着對所有 E 中的 k 維曲面 Φ, $\omega(\Phi)=0$。若 c 是個實數，則 $c\omega$ 是由

$$\int_\Phi c\omega=c\int_\Phi\omega \tag{37}$$

所定義的 k- 型。

而 $\omega=\omega_1+\omega_2$ 的意思是對每個 E 中的 k 維曲面 Φ,

(38) $$\int_\Phi \omega=\int_\Phi \omega_1+\int_\Phi \omega_2$$

留意（37）式的一個特例，$-\omega$是定義得使

(39) $$\int_\Phi(-\omega)=-\int_\Phi \omega.$$

考慮-k-型

(40) $$\omega=a(\mathbf{x})dx_i\wedge\cdots\cdots\wedge dx_k,$$

並令$\overline{\omega}$爲經由變換(40)中某對指標所得的k-型。若將(35)和(39)，以及如果行列式的二列互換，其值變號的性質合起來，我們知道

(41) $$\overline{\omega}=-\omega.$$

做爲一種特例，且留意反交換律

(42) $$dx_i\wedge dx_j=-dx_j\wedge dx_j$$

對所有 i 及 j 都成立。特別是，

(43) $$dx_i\wedge dx_i=0 \quad (i=1,\cdots\cdots n)$$

更一般點，我們且轉向（40)，假設對某個 $r\neq s$，$i_r=i_s$。如果這兩個指標互換，則$\overline{\omega}=\omega$，由(41)知，因此 $\omega=0$.。

換言之，若 ω 由(40)所定，則除非所有指標 $i_1,\cdots\cdots,i_k$ 都互異，否則 $\omega=0$.

若 ω 是如 (34) 中者，則具有重複指標的作和底 (summand) 可以略去，而不會影響 ω。

於是，若 $k>n$，則在 R^n 的任何開集合中，0 是唯一的 k-型。

由（42）式所表示的反交換律，就是何以我們在研究微分型式時要特別注意負號的原因。

10.14 基本k-型 若 $i_1,\cdots\cdots,i_k$ 是整數而且 $1\leq i_1<i_2<\cdots\cdots<i_k\leq n$，如果 I 是有序k-元組 $\{i_1,\cdots\cdots,i_k\}$，則我們稱 I 爲漸增 k 元指標(increasing k-index)，而我們用較簡潔的符號

(44)　　$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots\cdots \wedge dx_{i_k}$.

dx_I 這些型式，就是所謂 R^n 中的基本 k-型。

在 R^n 中恰好有 $n!/k!\,(n-k)!$ 個基本 k-型，這並不難證明；不過，我們不會用到這性質。

比較重要的事是每個k-型都可以用基本k-型表示出來。要看出這點，留意每個包含相異整數的 k 元組 $\{j_1, \cdots\cdots, j_k\}$，都可以經由有限次成對互換，變成爲一漸增 k 元指標 J；像我們在10.13節中看到的，每一次這種互換就只乘-1；因此

(45)　　$dx_{j_1} \wedge \cdots\cdots \wedge dx_{j_k} = \varepsilon(j_1, \cdots\cdots, j_k) dx_J$.

其中 $\varepsilon(j_1, \cdots\cdots, j_k)$ 是 1 或-1，要看所需要互換的次數而定。事實上，很容易看出來

(46)　　$\varepsilon(j_1, \cdots\cdots, j_k) = s(j_1, \cdots\cdots, j_k)$

這裏的 s 是如定義 9.33 中者。

例如，

$$dx_1 \wedge dx_5 \wedge dx_3 \wedge dx_2 = -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_5$$

而

$$dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

如果 (34) 中每個 k 元組都變爲一個漸增 k 元指標，則我們得到所謂 ω 的標準表示法 (standard representat of ω):

(47)　　$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x}) dx_I$

(47)式中的和是對所有漸增 k 元指標 I 來取的。〔當然，每個漸增 k 元指標，都是由許多（嚴格說，是由 $k!$ 個）k 元組所形成的。(47)中的每個 b_I，因而可能是由幾個出現在 (34) 式中的係數，所成之和。〕

例如，

$$x_1 dx_2 \wedge dx_1 - x_2 dx_3 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_2$$

是 R^3 中的2-型，其標準表示法爲

$$(1-x_1)dx_1\wedge dx_2+(x_2+x_3)dx_2\wedge dx_3$$

下面這唯一性定理，就是引入k-型標準表示法的主因之一。

10.15　定理　假設

$$\omega=\sum_I b_I(\mathbf{x})dx_I \tag{48}$$

是在開集合$E\subset R^n$ 中的 k-型ω，它的標準表示法，如果在E中$\omega=0$，則對每個漸增k元指標I及每個 $\mathbf{x}\in E, b_I(\mathbf{x})=0$. 留意，對形如 (34) 式的和而言，類似的敍述不眞，蓋，如

$$dx_1\wedge dx_2+dx_2\wedge dx_1=0$$

證明: 爲了得出一個矛盾，假設對某個 $\mathbf{v}\in E$ 及某個漸增k元指標 $J=\{j_1\cdots\cdots j_k\}$, $b_J(\mathbf{v})>0$。由於 b_J 是連續，故存在$h>0$，使得對所有 $\mathbf{x}\in R^n$，而其座標滿足$|x_i-v_i|\leq h, b_J(\mathbf{x})>0$。令$D$爲 R^k 中的k維胞體，使得 $\mathbf{u}\in D$若且唯若當$r=1, \cdots\cdots, k, |u_r|\leq h$。定義

$$\Phi(\mathbf{u})=\mathbf{v}+\sum_{r=1}^{k}u_r\mathbf{e}_{j_r}\qquad(\mathbf{u}\in D). \tag{49}$$

則Φ是E中的k維曲面，其參數域爲D，且對每個 $\mathbf{u}\in D$而言，$b_J(\Phi(\mathbf{u}))>0$.

我們說

$$\int_\Phi\omega=\int_D b_J(\Phi(\mathbf{u}))d\mathbf{u}. \tag{50}$$

蓋因(50)式的右邊爲正，故知$\omega(\Phi)\neq 0$，所以(50)式便給了我們矛盾。

要證明 (50)，將 (35) 式用到 (48) 的表現式去。更精確點說，計算出現在 (35) 式的 Jacobian. 由 (49) 知，

$$\frac{\partial(x_{j_1},\cdots\cdots,x_{j_k})}{\partial(u_1,\cdots\cdots,u_k)}=1$$

對任何其它漸增k元指標$I\neq J$，這個 Jacobian 是0，蓋它是

具有至少一列爲 0 的矩陣的行列式。

10.16 基本k-型的乘積 假設

(51) $$I=\{i_1, \cdots\cdots, i_p\} \qquad J=\{j_1, \cdots\cdots, j_q\},$$

其中 $1\leq i_1<\cdots\cdots<i_p\leq n$, $1\leq j_1<\cdots\cdots<j_q\leq n$。則所對應 R^n 中的基本型式 dx_I 及 dx_J，其乘積是個 R^n 中的 $(p+q)$-型，記作 $dx_I\wedge dx_J$ 這種符號，定義爲

(52) $$dx_I\wedge dx_J=dx_{i_1}\wedge\cdots\cdots dx_{i_p}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\cdots\wedge dx_{j_q}.$$

如果 I 和 J 有共同元素，則由10.13節的討論知，$dx_I\wedge dx_J=0$.

如果 I 和 J 沒有共同元素，我們以 $[I, J]$ 表示漸增 $(p+q)$ 元指標，它是由將 $I\cup J$ 中的元素以漸增次序排列所得到的。則 $dx_{[I, J]}$是個基本 $(p+q)$-一型。我們說

(53) $$dx_I\wedge dx_J=(-1)^\alpha dx_{[I, J]}$$

其中的 α，是其差 j_t-i_s 爲負的個數。（其差爲正的個數也就是 $pq-\alpha$.）

要證明 (53) 式，對

$$i_1, \cdots\cdots, i_q;\ \ j_1, \cdots\cdots, j_q$$

這些數，進行以下之運算，逐步地將 i_p 移到右邊，直到其左鄰小於 i_p。這步數就是 $i_p<j_t$ 的指標數 t。（注意，0 步數是另一種可能。）然後對 $i_{p-1}, \cdots\cdots, i_1$ 同樣做。所得的全部步數爲 α，最後所得的排列就是 $[I, J]$。當我們用到 (52) 式，這每一步都將 $dx_I\wedge dx_J$ 乘上-1。故 (53) 式成立。

注意 (53) 式的右邊，就是 $dx_I\wedge dx_J$ 的標準表示法。

其次，令 $K=(k_1, \cdots\cdots, k_r)$ 爲 $(1, \cdots\cdots, n)$ 中一個漸增 r 元指標。我們要利用 (53) 來證明

(55) $$(dx_I\wedge dx_J)\wedge dx_K=dx_I\wedge(dx_J\wedge dx_K).$$

如果 I, J, K集合任意兩個具有共同元素，則 (55) 式兩邊都是 0，所以它們相等。

故我們假設 I, J, K 都是成對互斥。令 $[I, J, K]$ 爲由其聯集所得之漸增 $(p+q+r)$ 元指標。就像在(53)中對 (I, J) 給個 α 一樣，我們給有序對 (J, K) 一個 β。有序對 (I, K) 一個 γ. 則 (55) 式的左邊成爲，利用二次 (53) 式

$$(-1)^{\alpha} dx_{[I, J]} \wedge dx_K = (-1)^{\alpha}(-1)^{\beta+\gamma} dx_{[I, J, K]},$$

而 (55) 式的右邊爲

$$(-1)^{\beta} dx_I \wedge dx_{[J, K]} = (-1)^{\beta}(-1)^{\alpha+\gamma} dx_{[I, J, K]}.$$

因此(55)爲眞。

10.17 乘法　　假設 ω 及 λ 分別是某個開集合 $E \subset R^n$ 中的 p-及q-型，其標準表示法爲

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{x}) dx_I, \qquad \lambda = \sum_J c_J(\mathbf{x}) dx_J \tag{56}$$

其中 I 和 J 是在由集合 $\{1, \cdots\cdots, n\}$ 中所取的，所有漸增 p 元指標，及所有漸增 q 元指標上變動。

它們的乘積，記作 $\omega \wedge \lambda$ 這符號，是定義爲

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{I, J} b_I(\mathbf{x}) c_J(\mathbf{x}) dx_I \wedge dx_J. \tag{57}$$

在這個和中，I 與 J 分別在其可能的值上變動，而 $dx_I \wedge dx_J$ 是定義如 10.16 節中者。因此 $\omega \wedge \lambda$ 是 E 中的$(p+q)$-型。

很容易看出來（我們將細節留作習題），對定義 10.13 在節中的加法而言，分配律

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \lambda = (\omega_1 \wedge \lambda) + (\omega_2 \wedge \lambda)$$

以及

$$\omega \wedge (\lambda_1 + \lambda_2) = (\omega \wedge \lambda_1) + (\omega \wedge \lambda_2)$$

成立。如果這些分配律與(55)式合起來，我們便得到結合律，即對 E 中的任意型式 ω，λ，σ

$$(\omega \wedge \lambda) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda \wedge \sigma) \tag{58}$$

在這討論中，我們暗暗假設了 $p \geq 1$ 及 $p \geq 1$.。一個 0-型 f 與由(56)式定義的p-型 ω 之積，就定義爲

$$f\omega=\omega f=\sum_I f(\mathbf{x})b_I(\mathbf{x})dx_I$$

這個p-型。當f是0-型，習慣上都寫作 $f\omega$，而不寫$f\wedge\omega$.

10.18 微分學 現在我們要定義一個微分算子 d，在某個開集合$E\subset R^n$ 中，它對每個屬於 $\mathscr{C}'$ 的k-型 ω，都給了一個$(k+1)$-型 $d\omega$.

在E中，一個屬於 $\mathscr{C}'$ 的0-型，就只是個實值函數 $f\in\mathscr{C}'(E)$，而我們定義

$$df=\sum_{i=1}^{n}(D_if)(\mathbf{x})dx_i. \tag{59}$$

如果$\omega=\sum b_I(\mathbf{x})dx_I$ 是k-型ω的標準表示式，而對每個漸增k元指標I，$b_I(\mathbf{x})\in\mathscr{C}'(E)$，則我們定義

$$d\omega=\sum_I(db_I)\wedge dx_I. \tag{60}$$

10.19 例子 假設E在R^n中是開集，$f\in\mathscr{C}'(E)$，且γ是E中連續可微分函數，定義域為〔0, 1〕。由(59)及(35)知，

$$\int_\gamma df=\int_0^1\sum_{i=1}^{n}(D_if)(\gamma(t))\gamma_i'(t)dt. \tag{61}$$

再由連鎖定理知，最後一個積分底是 $(f\circ\gamma)'(t)$，因此

$$\int_\gamma df=f(\gamma(1))-f(\gamma(0)), \tag{62}$$

而我們看到，對所有具相同起點與相同終點的γ，$\int_\gamma df$ 是一樣的，如例 10.12 的 (a).

與例 10.12(b) 相比較，因而顯示1-型 xdy 不會是任何0-型f的導數。這也可以由下面定理的(b)部份導得，蓋因

$$d(xdy)=dx\wedge dy\neq 0$$

10.20 定理 (a) 若ω及λ分別是在E中屬於$\mathscr{C}'$的k-及m-型，則

$$d(\omega\wedge\lambda)=(d\omega)\wedge\lambda+(-1)^k\omega\wedge d\lambda. \tag{63}$$

(b) 若ω在E中屬於 $\mathscr{C}''$, 則 $d^2\omega=0$.

這裏 $d^2\omega$ 意思，當然是$d(d\omega)$.

證明: 由（57）及（60）知，如果對

$$\omega=f\,dx_I,\ \lambda=g\,dx_J \tag{64}$$

這特例來證明（63）式，則導得（a），這裏的 f, $g\in\mathscr{C}'(E)$, dx_I 是基本 k- 型，而 dx_J 是基本 m- 型。〔如果 k 或 m，或兩者都是 0，就只在（64）式中略去 dx_I 或 dx_J；下面的證明不會因此受影響。〕則

$$\omega\wedge\lambda=fg\,dx_I\wedge dx_J.$$

我們且假設 I 與 J 沒有共同元素。〔在其它情況下，(63)式中的三項都是 0〕則，利用（53）式，

$$d(\omega\wedge\lambda)=d(fg\,dx_I\wedge dx_J)=(-1)^\alpha d(fg\,dx_{[I,J]})$$

由（59）知，$d(fg)=f\,dg+g\,df$. 因此由（60）式得

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge\lambda)&=(-1)^\alpha(f\,dg+g\,df)\wedge dx_{[I,J]}\\&=(g\,df+f\,dg)\wedge dx_I\wedge dx_J.\end{aligned}$$

由於 dg 是個 1- 型而 dx_I 是個 k- 型，故我們有，由(42)式

$$dg\wedge dx_I=(-1)^k dx_I\wedge dg$$

因此

$$\begin{aligned}d(\omega\wedge\lambda)&=(df\wedge dx_I)\wedge(g\,dx_J)+(-1)^k(f\,dx_I)\wedge(dg\wedge dx_J)\\&=(d\omega)\wedge\lambda+(-1)^k\omega\wedge d\lambda,\end{aligned}$$

這就證明（a）.

留意，我們曾隨時用了（58）式的結合律。

我們先對一個 0- 型 $f\in\mathscr{C}''$ 來證明（b）

$$\begin{aligned}d^2f&=d\left(\sum_{j=1}^n(D_jf)(\mathbf{x})dx_j\right)\\&=\sum_{j=1}^n d(D_jf)\wedge dx_j\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}f)(\mathbf{x})dx_i \wedge dx_j.$$

由於 $D_{ij}=D_{ji}$（定理 9.41）且 $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$，故我們看出 $d^2f = 0$.

如果 $\omega = f\,dx_I$，如（64），則 $d\omega = (df)\wedge dx_I$。由（60）知，$d(dx_I) = 0$ 因此（63）式顯示

$$d^2\omega = (d^2f)\wedge dx_I = 0.$$

10.21 變數變換　假設 E 是 R^n 中的開集合，T 是由 E 映至開集合 $V \subset R^m$ 的 $\mathscr{C}'$- 映射，且 ω 是 V 中一個 k- 型，其標準表示式為

$$\omega = \sum_I b_I(\mathbf{y})dy_I. \tag{65}$$

（我們用 $\mathbf{y}$ 表示 V 中的點，$\mathbf{x}$ 表示 E 中的點。）

令 $t_1, \cdots\cdots, t_m$ 為 T 的分量：如果

$$\mathbf{y} = (y_1, \cdots\cdots, y_m) = T(\mathbf{x}).$$

則 $y_i = t_i(\mathbf{x})$。如在（59）式中，

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} (D_jt_i)(\mathbf{x})dx_j \quad (1 \le i \le m). \tag{66}$$

因此每個 dt_i 都是 E 中的 1- 型。

映射 T 將 ω 轉變為 E 中的一個 k- 型 $d\omega$，其定義為

$$\omega_T = \sum_I b_I(T(\mathbf{x}))dt_{i1} \wedge \cdots\cdots \wedge dt_{i_k}. \tag{67}$$

在每個作和項中，$I = \{i_1, \cdots\cdots, i_k\}$ 是個漸增 k 元指標。

我們下一個定理顯示，微分型式的加法，乘法及微分的定義，可以使得它們和變數變換互換。

10.22 定理　若 E 和 T 是如 10.21 節中者，令 ω 及 λ 分別為 V 中的 k- 及 m- 型。則，

(a) $(\omega+\lambda)_T = \omega_T + \lambda_T$ 如果 $k = m$ 的話；

(b) $(\omega \wedge \lambda)_T = \omega_T \wedge \lambda_T$；

(c) 如果 ω 屬於 $\mathscr{C}'$，T 屬於 $\mathscr{C}''$，則 $d(\omega_T) = (d\omega)_T$.

證明: (a) 部份可直接由定義導得。而一旦我們知道

(68) $$(dy_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge dy_{i_r})_T=dt_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge dt_{i_r},$$

不管 $\{i_1,\cdots\cdots,i_r\}$ 是否是漸增，(b) 部份幾乎是顯然的；(68) 式成立是因爲如果要造成漸增的組合，(68)式兩邊都需要同樣個數的負號。

我們轉到 (c) 的證明。若 f 是V中屬於 $\mathscr{C}'$ 的 0- 型，則

$$f_T(\mathbf{x})=f(T(\mathbf{x})),\ df=\sum_i(D_if)(\mathbf{y})dy_i.$$

由連鎖定理，導得

(69) $$\begin{aligned} d(f_T)&=\sum_j(D_jf_T)(\mathbf{x})dx_j\\ &=\sum_j\sum_i(D_if)(T(\mathbf{x}))(D_jt_i)(\mathbf{x})dx_j\\ &=\sum_i(D_if)(T(\mathbf{x}))dt_i\\ &=(df)_T. \end{aligned}$$

如果 $dy_I=dy_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge dy_{i_k}$，則 $(dy_I)_T=dt_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge dt_{i_k}$，而定理 10.20 顯示

(70) $$d((dy_I)_T)=0.$$

(這就是 $T\in\mathscr{C}''$ 這假設用到的地方。)

現在假設 $\omega=f\,dy_I$。則

$$\omega_T=f_T(\mathbf{x})(dy_I)_T$$

而前面的計算便導得

$$\begin{aligned} d(\omega_T)&=d(f_T)\wedge(dy_I)_T=(df)_T\wedge(dy_I)_T\\ &=((df)\wedge dy_I)_T=(d\omega)_T. \end{aligned}$$

第一個等式成立是由 (63) 式及 (70) 式得出，第二個由 (69) 式，第三個是由 (b) 部份得出，而最後一個則是 $d\omega$ 的定義。

如果我們利用 (a)，則 (c) 的一般情況就由剛才所證的特例導得。證畢。

我們下一個目標就是定理 10.25。這會由微分型式的另外兩

個重要變形性質導得，我們先述第一個。

10.23 定理 設T是由開集合 $E\subset R^n$ 映至開集合 $V\subset R^m$ 的 $\mathscr{C}'$- 映射，S是由V映至開集合 $W\subset R^p$ 的 $\mathscr{C}'$- 映射，且ω是W中的一個 k- 型，因此 ω_S 是V中一個k- 型. 且 $(\omega_S)_T$ 及 ω_{ST} 皆爲E中的 k- 型，ST 定義爲 $(ST)(\mathbf{x})=S(T(\mathbf{x}))$。則

(71) $$(\omega_S)_T=\omega_{ST}.$$

證明：若ω及λ是W中的微分型式，定理 10.22 顯示

$$((\omega\wedge\lambda)_S)_T=(\omega_S\wedge\lambda_S)_T=(\omega_S)_T\wedge(\lambda_S)_T$$

且

$$(\omega\wedge\lambda)_{ST}=\omega_{ST}\wedge\lambda_{ST}.$$

所以，若 (71) 對ω及λ成立，則 (71) 對$\omega\wedge\lambda$也成立。由於每個微分型式可以由 0- 型及 1- 型經由加法來建構，又因爲對 0- 型而言，(71) 是顯然的，故在 $\omega=dz_q, q=1,\cdots\cdots,p$ 的情形下來證 (71) 就够了。（我們把E,V,W的點分別記作 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$.）

令 $t_1,\cdots\cdots,t_m$ 爲T的分量 $s_1,\cdots\cdots,s_p$ 爲S的分量，$r_1,\cdots\cdots,r_p$ 爲 ST 的分量。若 $\omega=dz_q$，則

$$\omega_S=ds_q=\sum_j(D_js_q)(\mathbf{y})dy_j,$$

因此連鎖定理蘊涵了

$$\begin{aligned}(\omega_S)_T&=\sum_j(D_js_q)(T(\mathbf{x}))dt_j\\&=\sum_j(D_js_q)(T(\mathbf{x}))\sum_i(D_it_j)(\mathbf{x})dx_i\\&=\sum_i(D_ir_q)(\mathbf{x})dx_i=dr_q=\omega_{ST}.\end{aligned}$$

10.24 定理 設ω是開集合 $E\subset R^n$ 中的一個 k- 型，Φ是E中的k維曲面，有參數定義域$D\subset R^k$，且Δ是 R^k 中的k維曲面，有參數定義域爲D，定義爲$\Delta(\mathbf{u})=\mathbf{u}(\mathbf{u}\in D)$。則

$$\int_\Phi w=\int_\Delta\omega_\Phi$$

證明: 我們只需要考慮這種情形
$$\omega=a(\mathbf{x})dx_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge dx_{i_k}.$$
若 $\phi_1,\cdots\cdots,\phi_n$ 是 ϕ 的分量，則
$$\omega_\Phi=a(\Phi(\mathbf{u}))d\phi_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge d\phi_{i_k}.$$
如果我們能證明

(72) $$d\phi_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge d\phi_{i_k}=J(\mathbf{u})du_1\wedge\cdots\cdots\wedge du_k,$$
則會得到這定理，這裏的 $J(\mathbf{u})$ 是
$$J(\mathbf{u})=\frac{\partial(x_{i_1},\cdots\cdots,x_{i_k})}{\partial(u_1,\cdots\cdots,u_k)},$$
這是因爲 (72) 式蘊涵了
$$\int_\varphi\omega=\int_D a(\Phi(\mathbf{x}))J(\mathbf{u})d\mathbf{u}$$
$$=\int_\Delta a(\Phi(\mathbf{u}))J(\mathbf{u})du_1\wedge\cdots\cdots\wedge du_k=\int_\Delta\omega_\Phi.$$
令 $[A]$ 爲 $k\times k$ 矩陣，其元素爲
$$\alpha(p,q)=(D_q\phi_{i_p})(\mathbf{u})\quad(p,q=1,\cdots\cdots k).$$
則
$$d\phi_{i_p}=\sum_q\alpha(p,q)du_q$$
因此
$$d\phi_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge d\phi_{i_k}=\sum\alpha(1,q_1)\cdots\cdots\alpha(k,q_k)du_{q_1}\wedge\cdots\cdots\wedge du_{q_k}.$$
在這最後一個和中，$q_1,\cdots\cdots,q_k$ 各別地在 $1,\cdots\cdots,k$ 中變動。反交換關係 (42) 式蘊涵了
$$du_{q_1}\wedge\cdots\cdots\wedge du_{q_k}=s(q_1,\cdots\cdots,q_k)du_1\wedge\cdots\cdots du_k$$
這裏的 s 是如定義 9.33 中者；應用這個定義，我們知道
$$d\phi_{i_1}\wedge\cdots\cdots\wedge d\phi_{i_k}=\det[A]du_1\wedge\cdots\cdots\wedge du_k;$$
又由於 $J(\mathbf{u})=\det[A]$，故 (72) 得證。

本節最後的結果是將前兩個定理合併。

10.25 定理 若 T 是由開集合 $E\subset R^n$ 映至開集合 $V\subset R^m$ 的 $\mathscr{C}'$- 映射。Φ 是 E 中的 k 維曲面，ω 是 V 中的 k- 型。則

$$\int_{T\Phi}\omega=\int_{\Phi}\omega_T.$$

證明：令 D 爲 Φ （因此也是 $T\Phi$)的參數定義域。並定義Δ如定理 10.24 中者。
則

$$\int_{T\Phi}\omega=\int_{\Delta}\omega_{T\Phi}=\int_{\Delta}(\omega_T)_\Phi=\int_{\Phi}\omega_T.$$

這第一個等號是將定理 10.24 用到 $T\Phi$ 以取代 Φ。第二個是由定理 10.23 導得，第三個是定理 10.24，以 ω_T 取代ω.

單體與鏈

10.26　Affine 單體　一個將向量空間X映至向量空間Y的映射 $\mathbf{f}$，如果 $\mathbf{f}-\mathbf{f}(\mathbf{0})$ 是線性，則稱之爲 Affine。換言之，條件是，對某個 $A\in L(X,Y)$,

(73)　$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{0})+A\mathbf{x}.$$

因此，如果當 $1\le i\le k$，我們知道 $\mathbf{f}(\mathbf{0})$ 及 $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i)$，則一個由 R^k 映至 R^n 的 Affine 映射也就決定了；如往常一樣，$\{\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_k\}$ 是 R^k 的標準基底。

我們定義標準單體 Q^k 爲所有 $\mathbf{u}\in R^k$ 而型如

(74)　$$\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{e}_i$$

的集合，其中當 $i=1,\cdots\cdots,k$ 時 $\alpha_i\ge 0$ 且 $\sum\alpha_i\le 1$.

現在假設 $\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\cdots\cdots,\mathbf{p}_k$ 是 R^n 的點。則定向 affine k 維單體 (oriented affine k-simplex)

(75)　$$\sigma=[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\cdots\cdots,\mathbf{p}_k]$$

是定義爲 R^n 中的 k 維曲面，以 Q^k 爲參數域，而由

(76)　$$\sigma(\alpha_1\mathbf{e}_1+\cdots\cdots+\alpha_k\mathbf{e}_k)=\mathbf{p}_0+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0)$$

這個 affine 映射所定義。

留意 σ 可以定性爲

(77) $\sigma(\mathbf{0})=\mathbf{p}_0, \sigma(\mathbf{e}_i)=\mathbf{p}_i$ （當 $1\leq i\leq k$），

並留意

(78) $\sigma(\mathbf{u})=\mathbf{p}_0+A\mathbf{u}$ （$\mathbf{u}\in Q^k$），

其中 $A\in L(R^k, R^n)$ 且 $A\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0$，當 $1\leq i\leq k$.

我們稱 σ 爲定向（oriented）是強調頂點 $\mathbf{p}_0, \cdots\cdots, \mathbf{p}_k$ 的次序是考慮在內的。如果

(79) $\overline{\sigma}=[\mathbf{p}_{i_0}, \mathbf{p}_{i_1}, \cdots\cdots, \mathbf{p}_{i_k}]$,

其中 $\{i_0, i_1, \cdots\cdots, i_k\}$ 是有序集合 $\{0, 1, \cdots\cdots, k\}$ 的一種排列，則我們取用符號

(80) $\overline{\sigma}=s(i_0, i_1, \cdots\cdots, i_k)\sigma$,

其中的 s 是定義在定義 9.33 中的函數。因此 $\overline{\sigma}=\pm\sigma$，要看是 $s=1$ 還是 $s=-1$。嚴格來說，一旦取用了（75）及（76）爲 σ 的定義之後，既使 $s(i_0, i_1, \cdots\cdots, i_k)=1$，但除非 $i_0=0, \cdots\cdots i_k=k$ 之外，我們仍不應該寫成 $\overline{\sigma}=\sigma$；我們這裏所有的是個等價關係，不是相等。不過，就我們的目的來看，這符號由定理 10.27 證實了。

如果 $\overline{\sigma}=\epsilon\sigma$(利用上面的規約)且若 $\epsilon=1$，則我們說 $\overline{\sigma}$ 與 σ 具有相同定向；如果 $\epsilon=-1$，$\overline{\sigma}$ 與 σ 就說是具有相反定向。留意，我們還沒有定義我們所謂「一個單體的定向」是什麼意思。我們所定義的，是具有相同頂點的一對單體之間的關係，就是這「具有相同定向」的關係。

不過，有一個情形，單體的定向可以用很自然的方法來定義，這發生在當 $n=k$，而且 $\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0$ $(1\leq i\leq k)$ 這些向量是獨立的時候。在這情形下，出現在（78）式中的線性變換 A 是可逆的，而其行列式（就是 σ 的 Jacobian）不爲 0。則如果 $\det A$ 是正（或負），σ 就說是正向（或負向）。特別是，在 R^k 中，$[\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \cdots\cdots, \mathbf{e}_k]$ 這單體，由恒等映射所定義者，具有正向。

到現在爲止，我們假設了 $k \geq 1$。一個定向 0 維單體是定義爲一個帶有符號的點。我們寫作 $\sigma = +\mathbf{p}_0$，或 $\sigma = -\mathbf{p}_0$。如果 $\sigma = \epsilon\mathbf{p}_0 (\epsilon = \pm 1)$ 且若 f 是個 0- 型（即一個實値函數），則我們定義

$$\int_{\sigma} f = \epsilon f(\mathbf{p}_0).$$

10.27 定理 若 σ 是個開集合 $E \subset R^n$ 中的定向 affine k 維單體，且若 $\bar{\sigma} = \epsilon\sigma$，則對每個 E 中的 k- 型 ω 而言，

$$\int_{\bar{\sigma}} \omega = \epsilon \int_{\sigma} \omega. \tag{81}$$

證明: 當 $k = 0$，(81) 式由前面定義可得。因此我們假設 $k \geq 1$，並設 σ 是由 (75) 式所定義。

假設 $1 \leq j \leq k$，並設 $\bar{\sigma}$ 是由 σ 經過 $\mathbf{p}_0$ 與 $\mathbf{p}_j$ 的互換所得者。則 $\epsilon = -1$，且

$$\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_j + B\mathbf{u} \qquad (\mathbf{u} \in Q^k),$$

其中的 B 是個由 R^k 映至 R^n 的線性映射，定義爲 $B\mathbf{e}_j = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_j$，而若 $i \neq j$，$B\mathbf{e}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j$。如果我們令 $A\mathbf{e}_i = \mathbf{x}_i (1 \leq i \leq k)$，其中 A 是由 (78) 所定義，則 B 的行向量（即向量 $B\mathbf{e}_i$）是

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_j, \cdots\cdots, \mathbf{x}_{j-1} - \mathbf{x}_j, -\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j, \cdots\cdots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j.$$

如果我們將第 j 行自其他每行中減去，則 (35) 式中的行列式，沒有一個會受影響，而我們得到 $\mathbf{x}_1, \cdots\cdots, \mathbf{x}_{j-1}, -\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \cdots\cdots, \mathbf{x}_k$. 這幾行。這些與 A 的行只差在第 j 行的符號。因此 (81) 式對這情形成立。

其次假設 $0 < i < j \leq k$，而 $\bar{\sigma}$ 是由 σ 經過 $\mathbf{p}_i$ 與 $\mathbf{p}_j$ 互換所得者。則 $\bar{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_0 + C\mathbf{u}$，其中的 C 具有與 A 相同的行，只差在第 i 及第 j 兩行互換。這又蘊涵了 (81) 式成立，蓋 $\epsilon = -1$.

於是一般情況也成立了，因爲 $\{0, 1, \cdots\cdots, k\}$ 的每個排列，都是我們剛才所處理的特例的組合情形。

10.28 Affine 鏈　開集合 $E\subset R^n$ 中的一個 affine k-鏈 Γ，是一組有限多個 E 中的定向 affine k 維單體 $\sigma_1,\cdots\cdots,\sigma_r$。這些不必是互異；因此一個單體可以在 Γ 中出現多次。

若 Γ 如上，且若 ω 是 E 中的一個 k- 型，則我們定義

$$\int_\Gamma \omega=\sum_{i=1}^{r}\int_{\sigma_i}\omega. \tag{82}$$

我們可以把 E 中的一個 k 維曲面 Φ，看成是一個其定義域爲 E 中所有 k-型的集合，而對 ω 就賦予 $\int_\Phi \omega$ 這個值的函數，由於實值函數可以相加（如定義 4.3），所以這就提示了我們使用

$$\Gamma=\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_r \tag{83}$$

這個符號，或更簡潔些，

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{r}\sigma_i. \tag{84}$$

以表示 (82) 式對所有 E 中的 k- 型 ω 都成立。

爲了避免誤解起見，我們明白指出，在 (83) 及 (80) 中引入的符號，一定要小心處理。要點在於每個 R^n 中的定向 k 維單體 σ，是兩種身份的函數，有不同的定義域以及不同的值域，也因此可能有兩種完全不同的加法運算。起先，σ 是定義爲 R^n- 值的函數，定義域爲 Q^k；因此，$\sigma_1+\sigma_2$ 可以解釋爲一個函數 σ，它給每個 $\mathbf{u}\in Q^k$ 一個向量 $\sigma_1(\mathbf{u})+\sigma_2(\mathbf{u})$；要注意 σ 結果還是 R^n 中的一個定向affine k 維單體！但這卻不是(83)所說的意思。

例如，若 $\sigma_2=-\sigma_1$，就像 (80) 式一樣（就是說，如果 σ_1 與 σ_2 有同樣的頂點，但是相反的方向），且若 $\Gamma=\sigma_1+\sigma_2$ 則對所有 ω，$\int_\Gamma\omega=0$，而我們可以將此表示爲 $\Gamma=0$ 或 $\sigma_1+\sigma_2=0$。這並不意謂著 $\sigma_1(\mathbf{u})+\sigma_2(\mathbf{u})$ 是 R^n 的零向量。

10.29 邊界　當 $k\geq 1$，定向 affine k 維單體 $\sigma=[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\cdots\cdots,\mathbf{p}_k]$ 的邊界 (boundary) 是定義爲 affine $(k-1)$ 維鏈

(85) $$\partial\sigma=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j[\mathbf{p}_0,\cdots\cdots,\mathbf{p}_{j-1},\mathbf{p}_{j+1},\cdots\cdots\mathbf{p}_k]$$

例如，若 $\sigma=[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2]$，則

$$\partial\sigma=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2]-[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_2]+[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1]=[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1]+[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2]+[\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_0]$$

這與我們平常對一個三角形的有向邊界觀念相符合。

當 $1\leq j\leq k$，留意出現在 (96) 中的單體 $\sigma_j=[\mathbf{p}_0,\cdots\cdots,\mathbf{p}_{j-1},\mathbf{p}_{j+1},\cdots\cdots,\mathbf{p}_k]$，它是以 Q^{k-1} 爲參數定義域，且其定義爲

(86) $$\sigma_j(\mathbf{u})=\mathbf{p}_0+B\mathbf{u}\qquad(\mathbf{u}\in Q^{k-1})$$

這裏的 B 是由 R^{k-1} 映至 R^n 的線性映射，定義爲，若 $1\leq i\leq j-1$，則

$$B\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_0,$$

若 $j\leq i\leq k-1$，則 $B\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_{i+1}-\mathbf{p}_0$。單體

$$\sigma_0=[\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\cdots\cdots,\mathbf{p}_k],$$

也在 (85) 中出現，定義爲

$$\sigma_0(\mathbf{u})=\mathbf{p}_1+B\mathbf{u}$$

這個映射，其中 $B\mathbf{e}_i=\mathbf{p}_{i+1}-\mathbf{p}_1$，$1\leq i\leq k-1$.

10.30 可微分的單體與鏈 令 T 爲由開集合 $E\subset R^n$ 映至開集合 $V\subset R^m$ 的 $\mathscr{C}''$- 映射 T 不必是 1 對 1。若 σ 是 E 中的定向直線 k 維單體。則合成映射 $\Phi=T\circ\sigma$（我們有時會寫成較簡單的形式 $T\sigma$）是 V 中的 k 維曲面，其參數定義域爲 Q^k. 我們稱 Φ 爲屬於 $\mathscr{C}''$ 的定向 k 維單體。

由在 V 中屬於 $\mathscr{C}''$ 的定向 k 維單體 $\Phi_1,\cdots\cdots,\Phi_r$ 所成的有限集合 Ψ，叫做 V 中屬於 $\mathscr{C}''$ 的 k 維鏈；若 ω 是 V 中一個 k- 型，我們定義

(87) $$\int_\Psi\omega=\sum_{i=1}^{r}\int_{\Phi_i}\omega,$$

並使用相對應的符號 $\Psi=\sum\Phi_i$。若 $\Gamma=\sum\sigma_i$ 是個 affine 鏈，且 $\Phi_i=T\circ\sigma_i$，則我們也寫作 $\Psi=T\circ\Gamma$，或是

(88)　　　　$T(\sum\sigma_i)=\sum T\sigma_i$.

定向 k 維單體 $\Phi=T(\sigma)$ 的邊界 $\partial\Phi$ 的定義爲

(89)　　　　$\partial\Phi=T(\partial\sigma)$

這 $(k-1)$ 維鏈。

要證實 (89) 式，留意如果 T 是 affine，則 $\Phi=T\circ\sigma$ 是個定向 affine k 維單體，在這情形下 (89)式就不是定義不定義的問題，而是 (85) 式的結果。因此 (89) 式就將這個特例一般化了。

我們立刻可知，如果 Φ 是屬於 $\mathscr{C}''$，則 $\partial\Phi$ 也是。

最後，我們定義 k 維鏈 $\Psi=\sum\Psi_i$ 的邊界 $\partial\Psi$ 爲

(90)　　　　$\partial\Psi=\sum\partial\Phi_i$

這 $(k$-$1)$ 維鏈。

10. 31　正向邊界　到現在爲止，我們對鏈給了邊界，而不是對 R^n 的子集合。這種邊界的觀念，是對 Stokes 定理的敍述與證明，最適合的一種。不過，在應用時，除了 R^2 或 R^3，習慣上對某些集合也討論「定向邊界」，是會方便些，我們現在要簡單的描述一下這個觀念。

令 Q^n 爲 R^n 中的標準單體，令 σ_0 爲定義域是 Q^n 的恒等映射。我們在 10. 26 節中看過，σ_0 可以當做 R^n 中正向 n 維單體。其邊界 $\partial\sigma_0$ 是個 affine $(n-1)$ 維鏈。這個鏈就叫做集合 Q^n 的正向邊界 (Positively orientated. bonndary of the set Q^n)

例如，Q^3 的正向邊界就是

$$[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]-[\mathbf{0},\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]+[\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3]-[\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$$

現在令 T 爲由 Q^n 映至 R^n 的 1-1 映射，屬於 $\mathscr{C}''$，其 Jacobian 爲正（至少在 Q^n 內點爲正）。令 $E=T(Q^n)$。由反函數定理知，E 是 R^n 中一個開子集的閉包。我們定義集合 E 的正向邊界爲一 $(n-1)$ 維鏈

$$\partial T=T(\partial\sigma_0),$$

而我們可以把這 $(n-1)$ 維鏈記作 ∂E.

這裏出現一個很明顯的問題：如果 $E=T_1(Q^n)=T_2(Q^n)$，且若 T_1 及 T_2 都有正值的 Jacobian，則 $\partial T_1=\partial T_2$ 對嗎？就是說

$$\int_{\partial T_1}\omega=\int_{\partial T_2}\omega$$

這等式對所有 $(n-1)$-型 ω 都對嗎？答案是是的，但我們不證明了。（要看個例子，試比較本節末尾與習題 17）.

我們還可進一步。令

$$\Omega=E_1\cup\cdots\cdots\cup E_r,$$

其中 $E_i=T_i(Q^n)$，每個 T_i 都有上面 T 所有的性質，且集合 E_i 的內點都是互斥的。則 $(n-1)$ 維鏈

$$\partial T_1+\cdots\cdots+\partial T_r=\partial\Omega,$$

叫做 Ω 的正向邊界。

例如，R^2 中的單位正方形是 $\sigma_1(Q^2)$ 及 $\sigma_2(Q^2)$ 的聯集，其中

$$\sigma_1(\mathbf{u})=\mathbf{u},\ \sigma_2(\mathbf{u})=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{u}.$$

σ_1 及 σ_2 兩個的 Jacobian 都是 $1>0$。由於

$$\sigma_1=[\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2];\quad \sigma_2=[\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1],$$

故我們有

$$\partial\sigma_1=[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]-[\mathbf{0},\mathbf{e}_2]+[\mathbf{0},\mathbf{e}_1],$$

$$\partial\sigma_2=[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1]-[\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1]+[\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2];$$

這兩個邊界的和是

$$\partial I^2=[\mathbf{0},\mathbf{e}_1]+[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2]+[\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2]+[\mathbf{e}_2,\mathbf{0}]$$

即 I^2 的正向邊界。注意 $[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$ 與 $[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1]$ 相消。

如果 Φ 是 R^m 中的二維曲面，其參數域爲 I^2，則 Φ（當成是定義在 2- 型上的函數）就與 2 維鏈

$$\Phi\circ\sigma_1+\Phi\circ\sigma_2$$

是一樣的。

因此

$$\begin{aligned}\partial\Phi&=\partial(\Phi\circ\sigma_1)+\partial(\Phi\circ\sigma_2)\\&=\Phi(\partial\sigma_1)+\Phi(\partial\sigma_2)=\Phi(\partial I^2).\end{aligned}$$

換言之，如果 Φ 的參數域是正方形 I^2，我們並不必回頭提到 Q^2 這個單體，而可以直接由 ∂I^2 得到 $\partial\Phi$.

其它的例子可以在習題 17 到 19 中找到。

10.32 例子　當 $0\leq u\leq\pi$，$0\leq v\leq 2\pi$，定義

$$\sum(u,v)=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u).$$

則$\sum$是 R^3 中的 2 維曲面，其參數域是個矩形$D\subset R^2$，而其值域是 R^3 中的單位球。它的邊界是

$$\partial\sum=\sum(\partial D)=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$$

其中

$$\begin{aligned}&\gamma_1(u)=\sum(u,0)=(\sin u,0,\cos u),\\&\gamma_2(v)=\sum(\pi,v)=(0,0,-1),\\&\gamma_3(u)\sum(\pi-u,2\pi)=(\sin u,0,-\cos u),\\&\gamma_4(v)=\sum(0,2\pi-v)=(0,0,1),\end{aligned}$$

分別以 $[0,\pi]$ 及 $[0,2\pi]$ 爲 u 和 v 的參數區間。

由於 γ_3 及 γ_4 是常數，所以它們的導數是 0，因此任何 1-型在 γ_2 及 γ_4 上的積分都是 0〔見例 1.12(a)〕

由於 $\gamma_3(u)=\gamma_1(\pi-u)$，直接應用 (35)，便知對每個 1-型 ω，

$$\int_{\gamma_3}\omega=-\int_{\gamma_1}\omega,$$

因此 $\int_{\partial\Sigma}\omega=0$，而我們歸結到 $\partial\sum=0$.

（用地理學的術語，$\partial\sum$由北極N開始，沿子午線到南極S，停在S，再沿同一子午線回到N，最後再停在N。沿這子午線的兩條路是相反方向。因此所對應的兩個線積分，互相抵消。在習

題 32 中，也有一條曲線，在邊界上出現兩次，但不會消去。）

Stokes 定理

10.33　定理　如果 Ψ 是開集合 $V\subset R^m$ 中，屬於 $\mathscr{C}''$ 的 k 維鏈，且若 ω 是 V 中屬於 $\mathscr{C}'$ 的 $(k-1)$-型，則

$$\int_{\Psi} d\omega=\int_{\partial\Psi}\omega. \tag{91}$$

$k=m=1$ 的情形，就只是微積分基本定理。（再加一點可微分假設）。$k=m=2$ 的情形是 Green 定理，而 $k=m=3$ 的情形，便得到高斯所謂的「散度定理」(divergence theorem). $k=2$ 而 $m=3$ 的情形，就是 Stokes 原先發現的定理。(Spivak 的書有描述一些歷史背景）。這些特例在本章末尾會有進一步的討論。

證明: 只要證明對每個 V 中屬於 $\mathscr{C}''$ 的定向 k 維鏈 Φ

$$\int_{\Phi} d\omega=\int_{\partial\Phi}\omega \tag{92}$$

就够了。蓋若 (92) 得證而 $\Psi=\sum\Phi_i$，則 (87) 及 (89) 就蘊涵了 (91)。

固定這樣一個 Φ，並令

$$\sigma=[\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_k]. \tag{93}$$

因此 σ 是個以恒等映射定義，參數域爲 Q^k 的定向 affine k 維單體。由於 Φ 也是定義在 Q^k 上（見定義10.30且 $\Phi\in\mathscr{C}''$，所以有一開集合 $E\subset R^k$，它包含 Q^k，並有一個由 E 映至 V 的 $\mathscr{C}''$-映射 T，使得 $\Phi=T\circ\sigma$。由定理 10.25 及 10.22(c) 知，(92) 式的左邊等於

$$\int_{T\sigma} d\omega=\int_{\sigma}(d\omega)_T=\int_{\sigma} d(\omega_T).$$

再用一次定理 10.25，由 (89) 知，(92) 式的右邊爲

$$\int_{\partial(T\sigma)}\omega=\int_{T(\partial\sigma)}\omega=\int_{\partial\sigma}\omega_T.$$

由於 ω_T 是 E 中的 $(k-1)$-型，所以我們看出為了與證明 (93) 式，我們只需證明對 (93) 這特別的單體，及每個 E 中屬於 $\mathscr{C}'$ 的 $(k-1)$-型 λ，

(94) $$\int_{\sigma}d\lambda=\int_{\partial\sigma}\lambda.$$

如果 $k=1$，由定向 0 維單體的定義知，(94) 式只是斷言說，對每個在 $[0,1]$ 上的連續可微分函數 f 而言，

(95) $$\int_0^1 f'(u)du=f(1)-f(0),$$

而這由微積分基本定理知為眞。

由現在起，我們假設 $k>1$，固定一個整數 $r\,(1\leq r\leq k)$，並選取 $f\in\mathscr{C}'(E)$。則對

(96) $$\lambda=f(\mathbf{x})dx_1\wedge\cdots\cdots\wedge dx_{r-1}\wedge dx_{r+1}\wedge\cdots\cdots\wedge dx_k$$

這情形來證明 (94) 式就够了，因為，當 $r=1,\cdots\cdots,k$，每個 $(k-1)$-型都是這些特例之和。

由 (85) 知，(93) 這單體的邊界是

$$\partial\sigma=[\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_k]+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\tau_i$$

其中，當 $i=1,\cdots\cdots,k$，

$$\tau_i=[\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_{i-1},\mathbf{e}_{i+1},\cdots\cdots,\mathbf{e}_k].$$

令

$$\tau_0=[\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_{r-1},\mathbf{e}_{r+1},\cdots\cdots,\mathbf{e}_k]$$

留意，τ_0 是由 $[\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_k]$ 經過 $r-1$ 次 $\mathbf{e}_r$ 與其左鄰連續互換所得到的。因此

(97) $$\partial\sigma=(-1)^{r-1}\tau_0+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\tau_i.$$

每個 τ_i 都以 Q^{k-1} 為參數域。

如果 $\mathbf{x}=\tau_0(\mathbf{u})$ 而 $\mathbf{u}\in Q^{k-1}$ 則

(98) $$x_j=\begin{cases} u_j & (1\leq j<r) \\ 1-(u_1+\cdots\cdots+u_{k-1}), & (j=r) \\ u_{j-1} & (r<j\leq k) \end{cases}$$

如果 $1\leq i\leq k$, $\mathbf{u}\in Q^{k-1}$, 且 $\mathbf{x}=\tau_i(\mathbf{u})$, 則

(99) $$x_j=\begin{cases} u_j & (1\leq j<i), \\ 0 & (j=i), \\ u_{j-1} & (i<j\leq k). \end{cases}$$

當 $0\leq j\leq k$, 令 J_i 爲由 τ_i 造成的映射

(100) $$(u_1,\cdots\cdots,u_{k-1})\to(x_1,\cdots\cdots x_{r-1},\cdots x_{r+1}\cdots\cdots x_k)$$

的 Jacobian. 當 $i=0$, 以及當 $i=r$, (98) 及 (99) 顯示 (100) 式是恒等映射。因此, $J_0=1$, $J_r=1$。對其它的 i, 由 (99) 式中 $x_i=0$ 便知, J_i 有一列爲 0, 因此 $J_i=0$. 故由(35)及(96)知

(101) $$\int_{\tau_i}\lambda=0 \quad (i\neq 0,\ i\neq r).$$

結果, 由 (97) 式得出

(102) $$\int_{\partial\sigma}\lambda=(-1)^{r-1}\int_{\tau_0}\lambda+(-1)^r\int_{\tau_r}\lambda$$
$$=(-1)^{r-1}\int f(\tau_0(\mathbf{u}))-f(\tau_r(\mathbf{u}))]d\mathbf{u}.$$

另一方面,

$$d\lambda=(D_rf)(\mathbf{x})dx_r\wedge dx_1\wedge\cdots\cdots\wedge dx_{r-1}\wedge dx_{r+1}\wedge\cdots\cdots\wedge dx_k$$
$$=(-1)^{r-1}(D_rf)(\mathbf{x})dx_1\wedge\cdots\cdots\wedge dx_k,$$

因此

(103) $$\int_\sigma d\lambda=(-1)^{r-1}\int_{Q^k}(D_rf)(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

我們計算 (103), 先對 x_r 在區間

$$[0,1-(x_1+\cdots\cdots+x_{r-1}+x_{r+1}+\cdots\cdots x_k)]$$

上積分，令 $(x_1, \cdots\cdots, x_{r-1}, x_{r+1}, \cdots\cdots, x_k)=(u_1, \cdots\cdots, u_{k-1})$，由 (98) 看出 (103) 中在 Q^k 上的積分，是等於 (102) 中在 Q^{k-1} 上的積分。因此 (94) 式成立，證畢。

封閉型式與正合型式

10.34 定義　令 ω 爲開集合 $E\subset R^n$ 中的一個 k- 型。如果在 E 中有個 $(k-1)$-型 λ，使得 $\omega=d\lambda$，則 ω 就說是在 E 中爲正合 (exact).

若 ω 屬於 $\mathscr{C}'$ 且 $d\omega=0$，則 ω 就說是封閉的 (closed).

定理 10.20(b) 顯示了每個屬於 $\mathscr{C}'$ 的正合型式都是封閉的。

在某些集合 E，例如凸集合一類，其逆亦眞；這就是定理 10.39 (通常名爲 Poincaré 引理) 及定理 10.40 的內涵。不過，例 10.36 及 10.37 會顯示一個封閉型式卻不是正合的。

10.35 備註

(a) 到底一個 k- 型 ω 是不是封閉的，可以對 ω 的標準表示式的係數，稍做微分即可證實。例如，一個 1- 型

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})dx_i, \tag{104}$$

其中 $f_i\in\mathscr{C}'(E)$ 對某個開集 $E\subset R^n$，是封閉的若且唯若對所有在 $\{1, \cdots\cdots, n\}$ 中的 i，j 以及所有 $\mathbf{x}\in E$，方程式

$$(D_j f_i)(\mathbf{x})=(D_i f_j)(\mathbf{x}) \tag{105}$$

成立。

留意 (105) 式是個「點態」條件；它不包含任何與 E 形狀有關的整體性質 (global properties)。

而另一方面，要證明 ω 在 E 中爲正合的，我們必須證明存在一個微分型式 λ，定義在 E 中，使得 $d\lambda=\omega$。這等於是在整個 E 中，而不是局部地，解一組偏微分方程式. 例如，要證明(104)

在集合E中是正合的，我們必須找到一個函數（或0-型）$g\in\mathscr{C}'(E)$。使得

$$(D_i g)(\mathbf{x})=f_i(\mathbf{x}). \quad (\mathbf{x}\in E, 1\le i\le n) \tag{106}$$

當然，(105) 式是 (106) 可解性 (solvability) 的必要條件。

(b) 令ω為E中的正合 k- 型。則在E中有個 $(k-1)$-型λ，$d\lambda=\omega$。而 Stokes 定理斷言，對每個 E 中屬於 $\mathscr{C}''$ 的k維鏈Ψ，

$$\int_{\Psi}\omega=\int_{\Psi}d\lambda=\int_{\partial\Psi}\lambda. \tag{107}$$

如果 Ψ_1 及 Ψ_2 是這樣的鏈，且若他們具有相同的邊界，則導得

$$\int_{\Psi_1}\omega=\int_{\Psi_2}\omega.$$

特別是，E中一個正合 k- 型，在E中每個邊界為 0 的k維鏈上積分，是 0。

留意這種情形的一個重要特例，就是E中的正合 1- 型，在E中的封閉（可微分）曲線上的積分都是 0。

(c) 令ω為E中的封閉 k- 型。則 $d\omega=0$， 而 Stokes 定理斷言道，對E中每個屬於 $\mathscr{C}''$ 的 $(k+1)$ 維鏈Ψ，

$$\int_{\partial\Psi}\omega=\int_{\Psi}d\omega=0. \tag{108}$$

換言之，E中的封閉 k- 型，在E中一個 $(k+1)$ 維鏈的邊界——是個k維鏈——上積分，是 0。

(d) 令 Ψ 為E中的 $(k+1)$ 維鏈，而λ是E中的 $(k-1)$-型，兩者皆屬於 $\mathscr{C}''$，由於 $d^2\lambda=0$，運用 Stokes 定理顯示

$$\int_{\partial\partial\Psi}\lambda=\int_{\partial\Psi}d\lambda=\int_{\Psi}d^2\lambda=0 \tag{109}$$

我們便歸結到 $\partial^2\Psi=0$，換言之，邊界的邊界是 0。

參看習題 16，對這個有一個較直接的證明。

10.36 例子　令$E=R^2-\{\mathbf{0}\}$，卽移去原點的平面。則這個 1- 型

$$\eta=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} \tag{110}$$

在 $R^2-\{\mathbf{0}\}$ 中是封閉的。由微分很容證實這點，固定 $r>0$，且定義

$$\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)\quad(0\leq t\leq 2\pi) \tag{111}$$

則γ是 $R^2-\{\mathbf{0}\}$ 中的曲線(一個「定向 1 維單體」)。由於 $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$，故我們有

$$\partial\gamma=0. \tag{112}$$

直接計算便知

$$\int_\gamma \eta=2\pi\neq 0. \tag{113}$$

由備註 10.35(b) 及 (c) 的討論顯示，從 (113) 式我們可得出兩個結論：

首先，η在 $R^2-\{\mathbf{0}\}$ 中不是正合的，蓋否則 (112) 式會使得 (113) 式的積分爲 0。

其次，γ不是 $R^2-\{\mathbf{0}\}$ 中任何 (屬於 $\mathscr{C}''$ 的) 2 維鏈的邊界，蓋否則η爲封閉這性質，會使得 (113) 的積分爲 0。

10.37 例子　令$E=R^3-\{\mathbf{0}\}$，卽 3 度空間移去個原點，定義

$$\zeta=\frac{xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{114}$$

其中我們用 (x,y,z) 取代了 (x_1,x_2,x_3)。微分後顯示 $d\zeta=0$. 故ζ是 $R^3-\{\mathbf{0}\}$ 中的封閉 2- 型。

令$\sum$爲在例 10.32 中建構過的，$R^3-\{\mathbf{0}\}$ 中一個 2 維鏈；記得$\sum$是 R^3 中單位圓球的參數型式。利用例 10.32 的矩形D爲參數域，很容易計算得

(115)　$$\int_{\Sigma}\zeta=\int_{D}\sin u\,du\,dv=4\pi\neq 0$$

正如前例中一樣，現在我們可以歸結到 ζ 在 $R^3-\{\mathbf{0}\}$ 中不是正合的（蓋因 $\partial\Sigma=0$，如例 10.32 中所證明的），而且，儘管 $\partial\Sigma=0$，但 Σ 這個球卻不是 $R^3-\{\mathbf{0}\}$ 中任何（屬於 $\mathscr{C}''$ 的）3 維鏈的邊界。

下面這結果，會在定理 10.39 的證明中用到。

10.38　定理　假設 E 是 R^n 中的凸開集合，$f\in\mathscr{C}'(E)$，p 是個整數。$1\le p\le n$，且

(116)　$$(D_jf)(\mathbf{x})=0\quad(p<j\le n,\mathbf{x}\in E)$$

則存在 $F\in\mathscr{C}'(E)$，使得

(117)　$$(D_pF)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),(D_jF)(\mathbf{x})=0\,(p<j\le n,\mathbf{x}\in E)$$

證明：令 $\mathbf{x}=(\mathbf{x}',x_p,\mathbf{x}'')$，其中

$$\mathbf{x}'=(x_1,\cdots\cdots,x_{p-1}),\mathbf{x}''=(x_{p+1},\cdots\cdots,x_n).$$

（當 $p=1$，$\mathbf{x}'$ 沒有；當 $p=n$，$\mathbf{x}''$ 沒有。）令 V 爲所有 $(\mathbf{x}',x_p)\in R^p$ 而對某個 $\mathbf{x}''$，$(\mathbf{x}',x_p,\mathbf{x}'')\in E$ 所成的集合。由於 V 是 E 的投影，故 V 是 R^p 中的凸開集合。因爲 E 是凸集，且 (116) 成立，故 $f(\mathbf{x})$ 與 $\mathbf{x}''$ 無關。所以有一函數 φ，以 V 爲定義域，使得對所有 $\mathbf{x}\in E$，

$$f(\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}',x_p)$$

如果 $p=1$，則 V 是 R^1 中的線段（可能是無界的）。取 $c\in V$，並定義

$$F(\mathbf{x})=\int_c^{x_1}\varphi(t)dt\quad(\mathbf{x}\in E).$$

如果 $p>1$，令 U 爲所有 $\mathbf{x}'\in R^{p-1}$ 而對某個 x_p，$(\mathbf{x}',x_p)\in V$ 所成的集合。則 U 是 R^{p-1} 中的凸開集合，且有一函數 $\alpha\in\mathscr{C}'(U)$ 使得對所有 $\mathbf{x}\in U$，$(\mathbf{x}',\alpha(\mathbf{x}'))\in V$；換言之，$\alpha$ 的圖形落在 V 中（習題 29）。定義

$$F(\mathbf{x})=\int_{\alpha(\mathbf{x}')}^{x_p}\varphi(\mathbf{x}', t)dt \qquad (\mathbf{x}\in E).$$

在兩種情形下，F都滿足 (117) 式。

(備註：記得一般的習慣，如果 $b<a$，則$\int_a^b$ 意思是 $-\int_b^a$。)

10.39 定理 如果 $E\subset R^n$ 是凸開集合，$k\geq 1$，ω是E中屬於 $\mathscr{C}'$ 的 k- 型，且若 $d\omega=0$，則在E中有個 $(k-1)$-型 λ，使得$\omega=d\lambda$.

簡單說，就是在凸集合上，封閉型式是正合的。

證明： 當 $p=1,\cdots\cdots,n$ 令Y_p 爲所有E中屬於 $\mathscr{C}'$ 的k-型 ω，且其標準表示式

$$\omega=\sum_I f_I(\mathbf{x})dx_I$$

不包含 $dx_{p+1},\cdots\cdots,dx_n$，等所成的集合。換言之，如果對某個 $\mathbf{x}\in E, f_I(\mathbf{x})\neq 0$，則 $I\subset\{1,\cdots\cdots,p\}$.

我們以對 p 做歸納法來證明。

首先假設$\omega\in Y_1$，則$\omega=f(\mathbf{x})dx_1$。由於 $d\omega=0$，故當 $1<j\leq n, \mathbf{x}\in E$ 時，$(D_jf)(\mathbf{x})=0$。由定理 10.38 知，有一個 $F\in\mathscr{C}'(E)$，使得當 $1<j\leq n, D_1F=f$ 而 $D_jF=0$。因此

$$dF=(D_1F)(\mathbf{x})dy_1=f(\mathbf{x})dx_1=\omega.$$

現在我們取 $p>1$ 並作以下的歸納性假設：每個屬於 Y_{p-1} 的封閉 k- 型在E中都是正合的。

選取 $\omega\in Y_p$ 使得 $d\omega=0$。由 (118) 式知，

$$(119) \qquad \sum_I\sum_{j=1}^n(D_jf_I)(\mathbf{x})dx_j\wedge dx_I=d\omega=0.$$

考慮一固定的j，$p<j\leq n$。每個在 (118) 中出現的I，都落在 $\{1,\cdots\cdots,p\}$ 中。如果 I_1, I_2 是這樣的兩個k元指標，且若 $I_1\neq I_2$ 則 (I_1, j)，(I_2, j) 這兩個 $(k+1)$ 元指標也互異。因此沒有消去，而我們由 (119) 式歸結到，(118) 式中每個係數都滿足

$$(120) \qquad (D_jf_I)(\mathbf{x})=0 \qquad (\mathbf{x}\in E, p<j\leq n)$$

我們現在將 (118) 式中包含 dx_p 的那些項集起來，把 ω 重寫爲這種型式

$$(121)\qquad \omega=\alpha+\sum_{I_0} f_I(\mathbf{x})dx_{I_0}\wedge dx_p,$$

其中 $\alpha\in Y_{p-1}$ 每個 I_0 都是個 $\{1,\cdots\cdots,p-1\}$ 的漸增 $(k-1)$ 元指標，且 $I=(I_0,p)$。由 (120) 知，定理 10.38 給了我們一個函數 $F_I\in\mathscr{C}'(E)$ 使得

$$(122)\qquad D_pF_I=f_I,\quad D_jF_I=0\quad (p<j\leq n).$$

令

$$(123)\qquad \beta=\sum_{I_0} F_I(\mathbf{x})dx_{I_0}$$

並定義 $\gamma=\omega-(-1)^{k-1}d\beta$。由於 β 是個$(k-1)$-型，故得

$$\gamma=\omega-\sum_{I_0}\sum_{j=1}^{p}(D_jF_I)(\mathbf{x})dx_{I_0}\wedge dx_j$$

$$=\alpha-\sum_{I_0}\sum_{j=1}^{p-1}(D_jF_I)(\mathbf{x})dx_{I_0}\wedge dx_j$$

這顯然是在 Y_{p-1} 之內。由於 $d\omega=0$ 且 $d^2\beta=0$，故我們有 $d\gamma=0$。我們的歸納性假設因而顯示，對某個E中的 $(k-1)$-型 μ，$\gamma=d\mu$。如果 $\lambda=\mu+(-1)^{k-1}\beta$，則我們歸結到 $\omega=d\lambda$.

由歸納法知，證明完畢。

10.40　定理　固定 k，$1\leq k\leq n$，令 $E\subset R^n$ 爲開集合，而在其中每個封閉 k- 型都是正合的。令T爲由E映成開集合$U\subset R^n$ 的 1-1$\mathscr{C}''$ 映射，其逆 S 也是屬於 $\mathscr{C}''$。

則U中的每個封閉 k- 型都是在U中正合的。

留意，由定理 10.39 知，每個凸開集合都滿足目前的條件。E和U間的關係可以說成它們是 $\mathscr{C}''$- 等價的 ($\mathscr{C}''$-equivalent).

因此每個封閉型式，在任何與凸開集合 $\mathscr{C}''$- 等價的集合上，是正合的。

證明：令 ω 爲U中的 k- 型，$d\omega=0$。由定理 10.22(c) 知，

ω_T 是E中的 k- 型而 $d(\omega_T)=0$。因此，對某個E中的 $(k-1)$-型 $\lambda, \omega_T=d\lambda$。由定理 10.23，再用一次定理 10.22(c)，

$$\omega=(\omega_T)_S=(d\lambda)_S=d\,(\lambda_S).$$

由於 λ_S 是U中的 $(k-1)$-型，故ω在U中是正合的。

10.41 備註 在應用上，以胞體（見定義 2,17）做爲參數域，常是比單體來得方便些。如果我們整個體系的發展，是基於胞體而不是單體的話，Stokes 定理證明中的計算，還會更簡單。（在 Spivak 的書中是這麼做的。）我們偏愛單體的理由是，對一個定向單體邊界的定義，要比對胞體的看來簡單而且比較自然。（見習題 19。）此外，把集合分割成單體〔稱作「三角化」(triangulation)〕在拓樸學中佔很重要的地位，而且在拓樸學與微分型式的某些方面，有很密切的關係，這些在 10.35 節中都提示過了。Singer 及 Thorpe 的書對這問題有很好的介紹。

由於每個胞體都可三角化，我們可以把它當作是鏈。對 2 維度情形，例 10.32 中如此做了；對 3 維的情形，見習題 18。

Poincaré 引理（定理 10.39）可有多種方法證明。例如，見 Spivak 的書 p.94，或 Fleming 的書 p.280。對某些特例的兩種簡單的證明，在習題 24 及 27 中都有提到。

向量分析

在本章的結尾，我們將前面的材料應用到有關 R^3 中向量分析的定理上。這些都是有關微分型式定理的特例，但通常用不同的術語來敍述。我們面前的工作，就是要由一種語言翻譯成另一種。

10.42 向量場 令 $\mathbf{F}=F_1\mathbf{e}_1+F_2\mathbf{e}_2+F_3\mathbf{e}_3$ 爲由開集合$E\subset R^3$ 映至 R^3 的連續映射。由於 $\mathbf{F}$ 對每個E中的點都賦予一向量，所以有時稱 $\mathbf{F}$ 爲向量場，特別是在物理學中是如此。對每個這樣的 $\mathbf{F}$，都對應一個 1- 型

(124) $\lambda_F=F_1dx+F_2dy+F_3dz$

或 2- 型

(125) $\omega_F=F_1dy\wedge dz+F_2dz\wedge dx+F_3dx\wedge dy,$

在此，以及本章所餘部份，我們使用通常 (x, y, z) 的符號以取代 (x_1, x_2, x_3).

相反地，很明顯每個E中的 1- 型 λ，是某個E中向量場 $\mathbf{F}$ 的 λ_F，而每個 2- 型 ω 是某個 $\mathbf{F}$ 的 ω_F。因此在 R^3 中，對 1- 型及 2- 型的研究，就與對向量場的研究是同樣的了。

如果 $u\in\mathscr{C}'(E)$ 是個實值函數，則其梯度 (gradient)

$$\nabla u=(D_1u)\mathbf{e}_1+(D_2u)\mathbf{e}_2+(D_3u)\mathbf{e}_3$$

是E中向量場的一個例子。

現在假設 $\mathbf{F}$ 是E中一個向量場，屬於 $\mathscr{C}'$。它的渦度 (curl) $\nabla\times\mathbf{F}$ 是定義在E中的一個向量場:

$$\nabla\times\mathbf{F}=(D_2F_3-D_3F_2)\mathbf{e}_1+(D_3F_1-D_1F_3)\mathbf{e}_2+(D_1F_2-D_2F_1)\mathbf{e}_3$$

而其散度 (divergence) 是個定義在E中的實值函數:

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=D_1F_1+D_2F_2+D_3F_3.$$

這些量有許多物理上的解釋，我們推介 O. D. Kellog 的書以求其詳。

這裏是一些度梯，渦度，及散度之間的關係。

10.43 定理 假設E是 R^3 中的開集合，$u\in\mathscr{C}''(E)$，而 $\mathbf{G}$ 是E中一個向量場，屬於 $\mathscr{C}''$

(a) 若 $\mathbf{F}=\nabla u$，則$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$

(b) 若 $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{G}$，則$\nabla\cdot\mathbf{F}=0$.

此外，若E與一凸集合是 $\mathscr{C}''$-等價，則 (a) 與 (b) 都有逆定理，其中我們假設 $\mathbf{F}$ 是E中一向量場，屬於 $\mathscr{C}'$:

(a′) 若$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$，則對某個 $u\in\mathscr{C}''(E)$, $\mathbf{F}=\nabla u$.

(b′) 若$\nabla\cdot\mathbf{F}=0$，則對某個在E中屬於 $\mathscr{C}''$ 的向量場 $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{G}$.

證明: 如果我們將∇u, $\nabla\times\mathbf{F}$ 及$\nabla\cdot\mathbf{F}$ 的定義，與由 (124) 及 (125) 所定義的微分型式 λ_F 及 ω_F 相比較，我們得到下列四個敍述:

$$\mathbf{F}=\nabla u \quad \text{若且唯若} \quad \lambda_F=du.$$
$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0} \quad \text{若且唯若} \quad d\lambda_F=0.$$
$$\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{G} \quad \text{若且唯若} \quad \omega_F=d\lambda_G.$$
$$\nabla\cdot\mathbf{F}=0 \quad \text{若且唯若} \quad d\omega_F=0.$$

現在如果 $\mathbf{F}=\nabla u$，則 $\lambda_F=du$，因此 $d\lambda_F=d^2u=0$ (定理 10.20)，這意思就是 $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$。因此 (a) 得證。

至於 (a′)，所做的假設就等於是說在E中 $d\lambda_F=0$。由定理 10.40 知，對某個 0- 型u, $\lambda_F=du$。因此 $\mathbf{F}=\nabla u$.

(b) 及 (b′) 的證明則依完全相同的方式證明。

10.44　體積元素

$$dx_1\wedge\cdots\cdots dx_k$$

這個 k- 型，稱爲 R^k 中的體積元素 (Volume element)。它通常是記作 dV (或 dV_k，如果需要把維度明示出來的話)，而當 Φ 是 R^k 中一個正向 k 維曲面，而f是 Φ 值域上的連續函數時，我們用

$$\int_\Phi f(\mathbf{x})dx_1\wedge\cdots\cdots\wedge dx_k=\int_\Phi f dV \tag{126}$$

這符號。

使用這名詞的原因很簡單: 如果D是 R^k 中一個參數域，且若 Φ 是個由D映至 R^k 的 1-1$\mathscr{C}'$-映射，Jacobian J_Φ 爲正，則 (126)式的左邊是，由 (35) 式及定理 10.9,

$$\int_D f(\Phi(\mathbf{u}))J_\Phi(\mathbf{u})d\mathbf{u}=\int_{\Phi(D)} f(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

特別是當$f=1$時，(126) 定義了 Φ 的體積 (Volume)。我們早在 (36) 式就看過這個的特例了。

對 dV_2 通常的符號是 dA。

10.45 Green 定理 假設E是 R^2 中一開集合，$\alpha\in\mathscr{C}'(E)$，$\beta\in\mathscr{C}'(E)$。而Ω是E中的閉子集，它有正向邊界 $\partial\Omega$，如定義在 10.31 節中者。則

$$\int_{\partial\Omega}(\alpha\,dx+\beta\,dy)=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)dA. \tag{127}$$

證明： 令 $\lambda=\alpha\,dx+\beta\,dy$

$$\begin{aligned} d\lambda&=(D_2\alpha)dy\wedge dx+(D_1\beta)dx\wedge dy\\ &=(D_1\beta-D_2\alpha)dA \end{aligned}$$

而 (127) 式就與

$$\int_{\partial\Omega}\lambda=\int_{\Omega}d\lambda$$

完全相同，而這由定理 10.33 知為眞。

用$\alpha(x,y)=-y$ 及 $\beta(x,y)=x$，則 (127) 式變成

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x\,dy-y\,dx)=A(\Omega), \tag{128}$$

即Ω的面積。

當$\alpha=0$，$\beta=x$，可得類似的公式。例 10.12(b) 就包含了這個的一特例。

10.46 $\mathbf{R}^3$ 中的面積元素 令 Φ 為 R^3 中屬於 $\mathscr{C}'$ 的 2 維曲面，其參數域為$D\subset R^2$。對每個點 $(u,v)\in D$，我們都對應一個向量

$$\mathbf{N}(u,v)=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{e}_1+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathbf{e}_2+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{e}_3. \tag{129}$$

(129) 式中的幾個 Jacobian 是對應於方程式

$$(x,y,z)=\Phi(u,v). \tag{130}$$

如果f是 $\Phi(D)$ 上的連續函數．則f在 Φ 上的面積分 (area integral) 是定義為

$$\int_{\Phi}f\,dA=\int_{D}f(\Phi(u,v))\,|\mathbf{N}(u,v)|\,du\,dv. \tag{131}$$

特別是當 $f=1$ 時，我們得到 Φ 的面積（area），即

$$A(\Phi)=\int_D |\mathbf{N}(u,v)|\,du\,dv. \tag{132}$$

由以下的討論會知道（131）及其特例（132）都是合理的定義。同時也會描述向量 $\mathbf{N}$ 的幾何性質。

令 $\Phi=\varphi_1\mathbf{e}_1+\varphi_2\mathbf{e}_2+\varphi_3\mathbf{e}_3$，固定一點 $\mathbf{p}_0=(u_0,v_0)\in D$，令 $\mathbf{N}=\mathbf{N}(\mathbf{p}_0)$，並令

$$\alpha_i=(D_1\varphi_i)(\mathbf{p}_0),\quad \beta_i=(D_2\varphi_i)(\mathbf{p}_0)\quad (i=1,2,3) \tag{133}$$

又令 $T\in L(R^2,R^3)$ 為線性變換，定義為

$$T(u,v)=\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i u+\beta_i v)\mathbf{e}_i. \tag{134}$$

留意 $T=\Phi'(\mathbf{p}_0)$ 與定義 9.11 相合

我們現在假設 T 的秩階為 2。（如果它是 1 或 0，則 $\mathbf{N}=\mathbf{0}$，而下面所提到的切平面便退化成一直線或一點。）affine 映射

$$(u,v)\to\Phi(\mathbf{p}_0)+T(u,v)$$

的值域則是一個平面 Π，稱為在 $\mathbf{p}_0$ 點 Φ 的切平面（tangent plane）。〔有人喜歡稱 Π 為在 $\Phi(\mathbf{p}_0)$ 處的切平面，而不是在 $\mathbf{p}_0$；但如果 Φ 不是 1 對 1，這便會遇到問題。〕

如果我們在（129）式用了（133），我們就得到

$$\mathbf{N}=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\mathbf{e}_1+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\mathbf{e}_2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_3 \tag{135}$$

而（134）式顯示

$$T\mathbf{e}_1=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\mathbf{e}_i,\qquad T\mathbf{e}_2=\sum_{i=1}^{3}\beta_i\mathbf{e}_i. \tag{136}$$

經過直接計算，便導得

$$\mathbf{N}\cdot(T\mathbf{e}_1)=0=\mathbf{N}\cdot(T\mathbf{e}_2). \tag{137}$$

因此 $\mathbf{N}$ 與 Π 垂直。我們因而稱之為 Φ 在 $\mathbf{p}_0$ 的法線（normal）.

$\mathbf{N}$ 的第二個性質，也是從（135）及（136）式直接計算可證實的，是 R^3 上將 $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ 映至 $\{T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \mathbf{N}\}$ 這線性變換的行列式是 $|\mathbf{N}|^2>0$（習題 30）。而 3 維單體

(138) $[\mathbf{0}, T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, \mathbf{N}]$

便是正向的（Positively Oriented.）

我們要用到的 $\mathbf{N}$ 的第三個性質，是前兩個的結果：上面提到過的行列式，其值爲 $|\mathbf{N}|^2$。是以 $[\mathbf{0}, T\mathbf{e}_1]$, $[\mathbf{0}, T\mathbf{e}_2]$ 及 $[\mathbf{0}, \mathbf{N}]$ 爲邊的平行四面體的體積。由 (137) 知，$[\mathbf{0}, \mathbf{N}]$ 與另兩邊相垂直。因此，以

(139) $\mathbf{0}, T\mathbf{e}_1, T\mathbf{e}_2, T(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$

爲頂點的平行四邊形，其面積就是 $|\mathbf{N}|$。

這個平行四邊形是 R^2 中單位正方形，在 T 之下的像。如果 E 是 R^2 中任意矩形，則（由 T 的線性性質）知，平行四邊形 $T(E)$ 的面積爲

(140) $$A(T(E))=|\mathbf{N}|\,A(E)=\int_E |\mathbf{N}(u_0, v_0)|\,du\,dv.$$

我們歸結到，當 Φ 是 affine 時，(132) 是正確的。要將定義 (132) 對一般情況加以證實，我們將 D 分成小矩形，在每個中取 (u_0, v_0)，而在每個矩形中，以相對應的切平面取代 Φ。所得平行四邊形面積，由 (140) 得出，之總和，就是 $A(\Phi)$ 的一種近似值。最後，從 (132) 式，再對 f 以階梯函數 (step functions) 逼近，便可證得 (131) 式。

10.47 例子 令 $0<a<b$ 爲固定值。K 爲 3 維胞體，定爲

$$0\le t\le a,\ 0\le u\le 2\pi.\ 0\le v\le 2\pi$$

方程組

$$\begin{aligned} x &= t\cos u \\ y &= (b+t\sin u)\cos v \qquad (141)\\ z &= (b+t\sin u)\sin v \end{aligned}$$

便描述了由 R^3 映至 R^3 的一個映射 Ψ，它在 K 的內部是 1-1，而 $\Psi(K)$ 是個立體圓環 (Solid torus)。其 Jacobian 爲

$$J_{\Psi}=\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(t, u, v)}=t\,(b+t\sin u)$$

除了在 $t=0$ 的面之外，這行列式在K上爲正。如果我們把 J_{Ψ} 在K上積分，我們就得到

$$Vol(\Psi)(K))=2\pi^2a^2b$$

爲我們立體圓環的體積。

現在考慮二維鏈 $\Phi=\partial\Psi$（見習題 19）Ψ 將K中 $u=0$ 及 $u=2\pi$ 兩面映成同樣的圓柱帶，但具相反方向。Ψ 將 $v=0$ 及 $v=2\pi$ 兩面映成同樣的圓盤，但具相反方向，Ψ 將 $t=0$ 的面映成爲一圓，它對 2 維鏈 $\partial\Psi$ 所提供的值是 0。(相關的 Jacobian 是 0）因此 Φ 只是個 2 維曲面，這在(141)中令 $t=a$ 便可得到，其參數域D是定義爲 $0\leq u\leq 2\pi$，$0\leq v\leq 2\pi$ 的正方形。

根據（129）及（141），Φ 在 $(u,v)\in D$ 處的法線，便是向量

$$\mathbf{N}(u,v)=a\,(b+a\sin u)\mathbf{n}(u,v)$$

其中

$$\mathbf{n}(u,v)=(\cos u)\mathbf{e}_1+(\sin u\cos v)\mathbf{e}_2+(\sin u\sin v)\mathbf{e}_3.$$

由於 $|\mathbf{n}(u,v)|=1$，故我們得到 $|\mathbf{N}(u,v)|=a\,(b+a\sin u)$. 而如果我們將此在$D$上積分，則由（131）得

$$A(\Phi)=4\pi^2ab$$

爲我們圓環的體積。

如果我們將 $\mathbf{N}=\mathbf{N}(u,v)$ 想成是有向線段，由 $\Phi(u,v)$ 指向 $\Phi(u,v)+\mathbf{N}(u,v)$，則 $\mathbf{N}$ 指向外 (outward)，就是說離開 $\Psi(K)$。這會是這樣，是因爲當 $t=a$ 時，$J_{\Psi}>0$

例如，取 $u=v=\pi/2$，$t=a$。這就給了我們 z 在 $\Psi(K)$ 上的最大值，且對這 (u,v) 的選取，$\mathbf{N}=a\,(b+a)\mathbf{e}_3$ 指「向上」(upward)。

10.48 $\mathbf{R}^3$ 中 1- 型的積分 令 γ 爲開集合 $E\subset R_3$ 中的一個 $\mathscr{C}'$- 曲線，參數區間爲〔0, 1〕，令 $\mathbf{F}$ 爲 E 中一向量場，如節 10.42 中者，並由 (124) 式定義 λ_F. λ_F，在 γ 上的積分可以改寫爲另一種方式，我們現在就要描述它。

對任意 $u\in$〔0, 1〕,

$$\gamma'(u)=\gamma_1'(u)\mathbf{e}_1+\gamma_2'(u)\mathbf{e}_2+\gamma_3'(u)\mathbf{e}_3$$

稱爲 γ 在 u 點的切向量 (tangent vecotor)。我們定義 $\mathbf{t}=\mathbf{t}(u)$ 爲 $\gamma'(u)$ 方向的單位向量。因此

$$\gamma'(u)=|\gamma'(u)|\mathbf{t}(u).$$

〔如果對某個 u，$\gamma'(u)=\mathbf{0}$，則取 $\mathbf{t}(u)=\mathbf{e}_1$；任何其它選擇也一樣可以。〕由 (35) 式知，

$$\begin{aligned}\int_\gamma\lambda_F&=\sum_{i=1}^{3}\int_0^1F_i(\gamma(u))\gamma_i'(u)du\\ &=\int_0^1\mathbf{F}(\gamma(u))\cdot\gamma_0'(u)du \qquad (142)\\ &=\int_0^1\mathbf{F}(\gamma(u))\cdot\mathbf{t}(u)|\gamma'(u)|du.\end{aligned}$$

由定理 6.27 知；我們稱 $|\gamma'(u)|du$ 爲沿 γ' 的弧長元素 (element of arc length along γ) 是合理的。它通常的記號是 ds 而 (142) 式可改寫爲這種型式

$$\int_\gamma\lambda_F=\int_\gamma(\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})ds. \qquad (143)$$

由於 $\mathbf{t}$ 是 γ 的單位切向量，故 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{t}$ 稱爲是 $\mathbf{F}$ 沿 γ 的切線分量 (tangential component)

(143) 式的右邊，應該看成只是 (142) 式最後一個積分式的簡寫。主要是 $\mathbf{F}$ 是定義在 γ 的值域上，而 $\mathbf{t}$ 是定義在〔0, 1〕上所以 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{t}$ 必須確切地加以解釋。當然，當 γ 是 1 對 1. 則 $\mathbf{t}(u)$ 可以由 $\mathbf{t}(\gamma(u))$ 所取代，而這問題就沒有了。

10.49 $\mathbf{R}^3$ 中 2- 型的積分 令 Φ 爲開集合 $E\subset R^3$ 中的

一個 2 維曲面，屬於 $\mathscr{C}'$，其參數域爲 $D\subset R^2$，令 $\mathbf{F}$ 爲 E 中的一向量場，並由（125）式定義 ω_F。正如前一節一樣，我們要得出 ω_F 在 Φ 上積分的另一種表示法。

由（35）式及（129）式知，

$$\begin{aligned}\int_\Phi \omega_F &= \int_\Phi (F_1 dy\wedge dz + F_2 dz\wedge dx + F_3 dx\wedge dy)\\ &= \int_D \left\{(F_1\circ\Phi_1)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (F_2\circ\Phi_2)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right.\\ &\qquad \left. + (F_3\circ\Phi_3)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\}du\,dv\\ &= \int_D \mathbf{F}(\Phi(u,v))\cdot\mathbf{N}(u,v)\,du\,dv\end{aligned}$$

現在令 $\mathbf{n}=\mathbf{n}(u,v)$ 爲 $\mathbf{N}(u,v)$ 方向的單位向量。〔如果 $\mathbf{N}(u,v)=\mathbf{0}$，對某個 $(u,v)\in D$ 的話，則取 $\mathbf{n}(u,v)=\mathbf{e}_1$.〕則 $\mathbf{N}=|\mathbf{N}|\mathbf{n}$，而因此，最後一個積分式就變爲

$$\int_D \mathbf{F}(\Phi(u,v))\cdot\mathbf{n}(u,v)\,|\mathbf{N}(u,v)|\,du\,dv.$$

由（131）式知，我們最後可以將此寫成這種型式

(144) $$\int_\Phi \omega_F = \int_\Phi (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dA.$$

至於 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ 的意義，在 10.48 節末的備註現在仍然適用。

10.50 Stokes 公式 如果 $\mathbf{F}$ 是開集合 $E\subset R^3$ 中，屬於 $\mathscr{C}'$ 的一個向量場，且若 Φ 是 E 中屬於 $\mathscr{C}''$ 的 2 維曲面，則

(145) $$\int_\Phi (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \int_{\partial\Phi} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\,ds.$$

證明: 令 $\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{F}$。則像在定理 10.43 的證明一樣，我們有

(146) $$\omega_H = d\lambda\ .$$

因此，

$$\int_\Phi (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dA = \int_\Phi (\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})\,dA = \int_\Phi \omega_H$$

$$=\int_{\Phi} d\lambda_F=\int_{\partial\Phi}\lambda_F=\int_{\partial\Phi}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})ds.$$

在這裏，我們用了 $\mathbf{H}$ 的定義，然後是在 (144) 中以 $\mathbf{H}$ 取代 $\mathbf{F}$ 再是 (146) 式，然後——最主要的一步——是定理 10.33，最後是 (143) 式，以一種很顯然的方法將曲線擴展到 1 維鏈。

10.51 散度定理 (divergence theorem) 如果 $\mathbf{F}$ 是開集合 $E\subset R^3$ 中屬於 $\mathscr{C}'$ 的向量場，且若 Ω 是 E 的一個子集合，具有正向邊界 $\partial\Omega$ (描述在 10.31 節中)，則

$$\int_{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{F})dV=\int_{\partial\Omega}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dA. \tag{147}$$

證明：由 (125) 式知

$$d\omega_F=(\nabla\cdot\mathbf{F})dx\wedge dy\wedge dz=(\nabla\cdot\mathbf{F})dV.$$

因此，由定理 10.33，用到 2- 型 ω_F 上，再由 (144) 式，便知

$$\int_{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{F})dV=\int_{\Omega}d\omega_F=\int_{\partial\Omega}\omega_F=\int_{\partial\Omega}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})dA.$$

習題

1. 令 H 為 R^k 中緊緻凸集合，有非空內部 (nonempty interior)。令 $f\in\mathscr{C}(H)$ 在 H 的補集中取 $f(\mathbf{x})=0$，並如定義 10.3 中定義 $\int_H f$.

   試證 $\int_H f$ 與 k 個積分所施行之次序無關。提示：用在 R^k 上連續且其擔臺在 H 中的函數來逼近 f，就像在例 10.4 中一樣。

2. 當 $i=1,2,3,\cdots\cdots$，令 $\varphi_i\in\mathscr{C}(R^1)$ 在 $(2^{-i},2^{1-i})$ 中有擔臺，而 $\int\varphi_i=1$。令

   $$f(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}[\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)]\varphi_i(y)$$

   則 f 在 R^2 中有緊緻擔臺，它除了在 $(0,0)$ 外都連續，而且

   $$\int dy\int f(x,y)dx=0 \quad 但是 \quad \int dx\int f(x,y)dy=1.$$

   注意，f 在 $(0,0)$ 的每個隣域都是無界。

3. (a) 如果 F 是如定理 10.7 中者，令 $\mathbf{A}=\mathbf{F}'(\mathbf{0})$, $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x})$。則

$\mathbf{F}_1'(\mathbf{0})=\mathbf{I}$。試證在 $\mathbf{0}$ 的某個隣域中，對某些素朴映射 $\mathbf{G},\cdots\cdots\mathbf{G}n$，

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x})=\mathbf{G}_n\circ\mathbf{G}_{n-1}\circ\cdots\cdots\circ\mathbf{G}_1(\mathbf{x})$$

這就得到定理 10.7 的另一種寫法

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=\mathbf{F}'(\mathbf{0})\mathbf{G}_n\circ\mathbf{G}_{n-1}\circ\cdots\cdots\circ\mathbf{G}_1(\mathbf{x}).$$

(b) 試證由 R^2 映至 R^2 的映射 $(x,y)\to(y,x)$，在任何原點的隣域內都不是兩個素朴映射的合成。（這就說明了在定理 10.7 的敍述中，不能略去跳換映射 B_i）

4. 當 $(x,y)\in R^2$ 定義

$$\mathbf{F}(x,y)=(e^x\cos y-1,e^x\sin y).$$

試證 $\mathbf{F}=\mathbf{G}_2\circ\mathbf{G}_1$，其中

$$\mathbf{G}_1(x,y)=(e^x\cos y-1,y),$$
$$\mathbf{G}_2(u,v)=(u,(1+u)\tan v).$$

在 $(0,0)$ 的某個隣域中都是素朴的。

試計算 $\mathbf{G}_1,\mathbf{G}_2,\mathbf{F}$ 在 $(0,0)$ 的 Jacobian。定義

$$\mathbf{H}_2(x,y)=(x,e^x\sin y)$$

試求

$$\mathbf{H}_1(u,v)=(h(u,v),v)$$

使得在 $(0,0)$ 的某個隣域內，$\mathbf{F}=\mathbf{H}_1\circ\mathbf{H}_2$.

5. 試敍述並證明定理 10.8 的類似命題，而其中的K是任意度量空間中的緊緻子集。（將出現在定理 10.8 證明中的函數 φ_i，用第 4 章習題 22 中所建構的函數形式來取代。）

6. 試證定理 10.8 中的函數 ψ_i 可以使得成爲可微分，甚至無限次可微，以強化其定理結論。（利用第 8 章習題 1，來建構輔助函數 φ_i.）

7. (a) 試證 Q^k 這單體是 R^k 中包含 $\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\cdots\cdots,\mathbf{e}_k$，的最小凸子集。

(b) 試證 affine 映射將凸集合映至凸集合。

8. 令$\mathbf{H}$爲 R^2 中的平行四邊形，其頂點爲 $(1,1),(3,2)(4,5),(2,4)$。試找一個 affine 映射 T，它將 $(0,0)$ 射到 $(1,1),(1,0)$ 射到 $(3,2)$，$(0,1)$ 射到 $(2,4)$。試證 $J_T=5$。並用T將

$$\alpha=\int_H e^{x-y}dxdy$$

這積分變成在 I^2 上的積分，並從而計算α。

9. 在矩形

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

上定義 $(x, y) = T(r, \theta)$ 爲方程式

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

試證 T 將此矩形映成爲閉圓盤 D，其中心爲 $(0,0)$，半徑爲 a，且 T 在矩形內部爲 1 對 1，以及 $J_T(r, \theta) = r$。如果 $f \in \mathscr{C}(D)$，試證在極座標內的積分公式：

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(T(r, \theta))\, r\, dr d\theta.$$

提示：令 D_0 爲 D 之內部，減去由 $(0,0)$ 至 $(0, a)$ 的區間。如定理 10.9 所述，它可用在連續函數 f，其擔臺在 D_0 中。要移去這限制，可如例 10.4 中進行。

10. 在習題 9 中，令 $a \to \infty$，試證

$$\int_{R^2} f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(T(r, \theta)) r dr d\theta,$$

當連續函數 f 在 $|x| + |y| \to \infty$ 時遞減得相當快。(試找一個比較嚴密的敍述法。) 將這結果用到

$$f(x, y) = exp(-x^2 - y^2)$$

以導出第 8 章公式 (10)。

11. 在帶域 (Strip)

$$0 < s < \infty, \quad 0 < t < 1$$

上定義 $(u, v) = T(s, t)$ 爲 $u = s - st$。$v = st$，試證 T 是將此帶域映成 R^2 的正象限 Q 的 1-1 映射。證明 $J_T(s, t) = s$.

當 $x > 0$，$y > 0$，試在 Q 上積分

$$u^{x-1} e^{-u} v^{y-1} e^{-v},$$

利用定理 10.9 將這積分換成在帶域上積分，並由此導出第 8 章公式 (96)。

〔爲了這個應用，定理 10.9 必須擴充到涵蓋一些瑕積分，(improper integral)．請提出此一擴充性敍述。〕

12. 令 I^k 爲所有 $\mathbf{v} = (u, \cdots\cdots, u_k) \in R^k$，而對所有 i，$0 \leq u_i \leq 1$，的集合令 Q^k 爲所有 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots\cdots, x_k) \in R^k$ 而 $x_i \geq 0, \Sigma x_i \leq 1$ 的集合。(

I^k 是單位方體; Q^k 是 R^k 中標準單體。) 定義 $\mathbf{x}=T(\mathbf{u})$ 爲

$$x_1=u_1$$
$$x_2=(1-u_1)u_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_k=(1-u_1)\cdots\cdots(1-u_{k-1})u_k$$

試證 $\sum_{i=1}^{k} x_i= 1 - \prod_{i=1}^{k}(1-u_i)$

試證 T 將 I^k 映成 Q^k, 且 T 在 I^k 內部爲 1-1, 以及其逆 S 在 Q^k 之內部定義爲 $u_1=x_1$, 及當 $i=2,\cdots\cdots,k$ 時

$$u_i=\frac{x_i}{1-x_1-\cdots\cdots-x_{i-1}}$$

試證

$$J_T(\mathbf{u})=(1-u_1)^{k-1}(1-u_2)^{k-2}\cdots\cdots(1-u_{k-1}),$$

且

$$J_S(\mathbf{x})=[(1-x_1)(1-x_1-x_2)\cdots\cdots(1-x_1-\cdots\cdots-x_{k-1})]^{-1}$$

13. 令 $r_1,\cdots\cdots,r_k$ 爲非負整數, 試證

$$\int_{Q^k} x_1^{r_1}\cdots\cdots x_k^{r_k}dx=\frac{r_1!\cdots\cdots r_k!}{(k+r_1+\cdots\cdots+r_k)!}$$

提示; 利用習題 12, 定理 10.9 及 8.20.

留意 $r_1=\cdots\cdots=r_k=0$ 的特例顯示 Q^k 的體積爲 $1/k!$.

14. 試證公式 (46)。

15. 若 ω 及 λ 分別爲 k- 及 m- 型, 試證

$$\omega\wedge\lambda=(-1)^{km}\lambda\wedge\omega.$$

16. 如果 $k\geq 2$ 且 $\sigma=[\mathbf{p}_0,\mathbf{p}_1,\cdots\cdots,\mathbf{p}_k]$ 爲定向 affine k 維單體, 試直接由邊界算子 ∂ 的定義證明 $\partial^2\sigma=0$。並由此導出對每個鏈 Ψ, $\partial^2\Psi=0$.

提示: 對定向情形, 先做 $k=2$ 及 $k=3$, 對一般情形, 如果 $i<j$, 令 σ_{ij} 爲由 σ 中去掉 $\mathbf{p}_i$ 及 $\mathbf{p}_j$ 所得之 $(k-2)$ 維單體。試證每個 σ_{ij} 在 $\partial^2\sigma$ 中出現兩次, 但符號相反。

17. 令 $J^2=\tau_1+\tau_2$, 其中

$$\tau_1=[\mathbf{0},\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2],\quad \tau_2=-[\mathbf{0},\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1].$$

試解釋何以我們有理由稱 J^2 爲 R^2 中正向單位正方形。試證 ∂J^2 是 4 個定向 affine 1 維單體的和。求出這些單體, $\partial(\tau_1-\tau_2)$ 是什麼

呢?

18. 考慮 R^3 中定向 affine 3 維單體。

$$\sigma_1=[\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3].$$

試證 σ_1（當作是線性變換）其行列式為 1。因此 σ_1 是正向的。

令 $\sigma_2, \cdots\cdots, \sigma_6$ 為 5 個定向 3 維單體，如下得到:（1, 2, 3,）有五種與（1, 2, 3,）不同的排列 (i_1, i_2, i_3)，對每個這樣的 (i_1, i_2, i_3)，我們對應給一個單體

$$s\,(i_1, i_2, i_3)[\mathbf{0}, \mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_1}+\mathbf{e}_{i_2}, +\mathbf{e}_{i_2}+\mathbf{e}_{i_3}]$$

其中 s 的是出現在行列式中定義的符號。（這就是在習題 17 中，由 τ_1 得出 τ_2 的方法。）

試證 $\sigma_2, \cdots\cdots, \sigma_6$ 都是正向的。

令 $J^3=\sigma_1+\cdots\cdots+\sigma_6$。則 J^3 可稱為 R^3 中正向單位正方體。

試證 ∂J^3 是 12 個正向 affine 2 維單體之和。（這 12 個三角形覆蓋了單位方體 J^3 的表面。）

試證 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ 是在 σ_1 的值域內，若且唯若 $0\leq x_3\leq x_2\leq x_1\leq 1$。

試證 $\sigma_1, \cdots, \sigma_6$ 的值域都具有互斥內部，而它們的聯集覆蓋了 J^3。（與習題 13 比較；注意 $3!=6$。）

19. 令 J^2 及 J^3 為習題 17 及習題 18 中者。定義

$$B_{01}(u, v)=(0, u, v), \quad B_{11}(u, v)=(1, u, v),$$

$$B_{02}(u, v)=(u, 0, v), \quad B_{12}(u, v)=(u, 1, v),$$

$$B_{03}(u, v)=(u, v, 0), \quad B_{12}(u, v)=(u, v, 1),$$

這些都是 affine 且將 R^2 映至 R^3。

令 $\beta_{ri}=B_{ri}(J^2)$，當 $r=0, 1, i=1, 2, 3$。則每個 β_{ri} 都是 affine 定向 2 維鏈。（見 10.30 節）。試證

$$\partial J^3=\sum_{i=1}^{3}(-1)^i(\beta_{0i}-\beta_{1i}),$$

與習題 18 相合。

20. 試述在何種條件下，公式

$$\int_{\Phi} f d\omega=\int_{\partial\Phi} f\omega-\int_{\Phi}(df)\wedge\omega$$

會成立，並證明這使得分部積分的公式一般化了

提示: $d(f\omega)=(df)\wedge\omega+f(d\omega)$.

21. 像在例 10.36 中一樣，考慮在 $R^2-\{\mathbf{0}\}$ 中的 1- 型

$$\eta=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

(a) 試做出那些導得公式 (113) 的計算式，並證明 $d\eta=0$.

(b) 若對某個 $r>0$，令 $\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t)$，並令 Γ 為 $R^2-\{\mathbf{0}\}$ 中 $\mathscr{C}''$- 的曲線，參數區間為 $[0,2\pi]$，且 $\Gamma(0)=\Gamma(2\pi)$，而區間 $[\gamma(t),\Gamma(t)]$ 對任何 $t\in[0,2\pi]$ 都不包含 $\mathbf{0}$。試證

$$\int_\Gamma \eta=2\pi$$

提示: 當 $0\leq t\leq 2\pi$, $0\leq u\leq 1$，定義

$$\Phi(t,u)=(1-u)\Gamma(t)+u\gamma(t).$$

則 Φ 是 $R^2-\{\mathbf{0}\}$ 中的 2 維曲面，其參數域就是所示矩形。由於會消去 (像例 10,32 一樣)，故

$$\partial\Phi=\Gamma-\gamma.$$

利用 Stokes 定理，因為 $d\eta=0$，導出

$$\int_\Gamma \eta=\int_\gamma \eta.$$

(c) 取 $\Gamma(t)=(a\cos t, b\sin t)$，其中 $a>0$，$b>0$ 都是固定的。試利用 (b) 部分證明

$$\int_0^{2\pi}\frac{ab}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt=2\pi.$$

(d) 試證，在任何 $x\neq 0$ 的凸開集合中，

$$\eta=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$$

而在任何 $y\neq 0$ 的凸開集合中。

$$\eta=d\left(-\arctan\frac{x}{y}\right).$$

試解釋何以這便證實了 $\eta=d\theta$，而不管事實上 η 在 $R^2-\{\mathbf{0}\}$ 中並非正合的。

(e) 試證 (b) 可以由 (d) 導得。

(f) 若Γ是任意 $R^2-\{\mathbf{0}\}$ 中的封閉 $\mathscr{C}'$- 曲線，試證

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \eta = Ind(\Gamma).$$

(見第 8 章習題 23，查看曲線指標的定義。)

22. 像在例 10.37 中一樣，在 $R^3-\{\mathbf{0}\}$ 中定義ζ爲

$$\zeta = \frac{x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy}{r^3}$$

其中 $r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，令 D 爲矩形 $0\le u\le\pi$，$0\le v\le 2\pi$，並令Σ爲 R^3 中的 2 維曲面，其參數域D爲

$$x=\sin u\cos v,\quad y=\sin u\sin v,\quad z=\cos u.$$

(a) 試證在$R^3-\{\mathbf{0}\}$ 中，$d\zeta=0$.

(b) 令S表示Σ在參數域$E\subset D$上的局限 (restriction)。試證，

$$\int_S \zeta = \int_E \sin u\,du\,dv = A(S),$$

其中A表示面積，像在 10.43 節中一樣。留意這包含了 (115) 這個特例。

(c) 假設 g, h_1, h_2, h_3，是 $[0,1]$ 上的$\mathscr{C}''$- 函數，$g>0$。令$(x,y,z)=\Phi(s,t)$ 來定義一個 2 維曲面 Φ，以 I^2 爲參數域，爲

$$x=g(t)h_1(s),\ y=g(t)h_2(s),\ z=g(t)h_3(s)$$

試直接由 (35) 式，證明

$$\int_\Phi \zeta = 0.$$

且留意 Φ 値域之形狀：對固定的 s，$\Phi(s,t)$ 是在通過的一條直線上的一個區間上變化。因此 Φ 的値域是在以原點爲頂點的「錐」(cone) 上面。

(d) 令 E 爲 D 中一封閉矩形，其邊皆平行D之邊。假設 $f\in\mathscr{C}''(D)$, $f>0$。令Ω爲以E爲參數域的 2 維曲面，定義爲

$$\Omega(u,v)=f(u,v)\Sigma(u,v).$$

如 (b) 中定義S，試證

$$\int_\Omega \zeta = \int_S \zeta = A(S)$$

〔由於S是Ω到單位球上的「徑向投影」(radial projection)，由這個

結果，我們有理由稱 $\int_{\Omega}\zeta$ 爲 Ω 的值域在原點所張的「立體角」（solid angle).〕

提示：考慮 3 維曲面 Ψ，定義爲

$$\Psi(t,u,v)=[1-t+tf(u,v)]\Sigma(u,v),$$

其中 $(u,v)\in E$，$0\le t\le 1$。對固定的 v，映射 $(t,u)\to\Psi(t,u,v)$ 是個二維曲面 Ψ，而 (c) 可用以證明 $\int_{\Phi}\zeta=0$。當 u 是固定．同樣的結果也成立。由 (a) 及 Stokes 定理知，

$$\int_{\partial\Psi}\zeta=\int_{\Psi}d\zeta=0\,.$$

(e) 令 $\lambda=-(z/r)\eta$，其中，如習題 21，

$$\eta=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

則 λ 是開集合 $V\subset R^3$ 的 1- 型，在 V 中 $x^2+y^2>0$。試由證明

$$\zeta=d\lambda$$

來證明 ζ 在 V 中是正合的。

(f) 不用 (c)，試由 (e) 導出 (d)。

提示：首先，假設在 E 上 $0<u<\pi$。由 (e) 知

$$\int_{\Omega}\zeta=\int_{\partial\Omega}\lambda\qquad\text{且}\quad\int_{S}\zeta=\int_{\partial S}\lambda\,.$$

試利用習題 21 的 (d) 部分，並留意在 $\Sigma(u,v)$ 的 z/r 與在 $\Omega(u,v)$ 的 z/r 是相同，來證明 λ 的這兩個積分相等。

(g) ζ 在每個通過原點的直線，它們的補集內是正合嗎？

23. 固定 n。當 $1\le k\le n$，定義 $r_k=(x_1^2+\cdots\cdots+x_k^2)^{1/2}$，令 E_k 爲所有 $\mathbf{x}\in R^n$，而在該點 $r_k>0$ 的集合，並令 ω 爲 E_k 上的 $(k-1)$- 型，定義爲

$$\omega_k=(r_k)^{-k}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}x_idx_1\wedge\cdots\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\cdots\wedge dx_k$$

注意 $\omega_2=\eta,\omega_3=\zeta$—用習題 21 及 22 的名詞—也要注意，

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\cdots\subset E_n=R^n-\{\mathbf{0}\}.$$

(a) 試證在 E_k 中 $d\omega_k=0$．

(b) 當 $k=2,\cdots\cdots,n$，試證 ω_k 在 E_{k-1} 中是正合的，可先證明，

$$\omega_k = d\,(f_k\omega_{k-1}) = (df_k)\wedge\omega_{k-1},$$

其中 $f_k(\mathbf{x}) = (-1)^k g_k(x_k/r_k)$，而

$$g_k(t) = \int_{-1}^{t} (1-s^2)^{(k-3)/2} ds \quad (-1<t<1)$$

提示：f_k 滿足微分方程式

$$\mathbf{x}\cdot(\nabla f_k)(\mathbf{x}) = 0$$

以及

$$(D_k f_k)(\mathbf{x}) = \frac{(-1)^k (r_{k-1})^{k-1}}{(r_k)^k}.$$

(c) ω_n 在 E_n 中是正合的嗎?

(d) 注意 (b) 是習題 22(e) 部份的一般型式。對任意的 n 試將習題 21 及 22 的一些其它論斷擴展到 ω_n。

24. 令 $\omega = \sum a_i(\mathbf{x})dx_i$ 爲凸開集合 $E\subset R^n$ 中屬於 $\mathscr{C}''$ 的 1- 型。假設 $d\omega = 0$，試完成以下步驟以證明ω在E中是正合的:

固定 $\mathbf{p}\in E$。定義

$$f(\mathbf{x}) = \int_{[p,\,x]} \omega \qquad (\mathbf{x}\in E).$$

將 Stokes 定理用到E中的 affine 定向 2 維單體 $[\mathbf{p},\mathbf{x},\mathbf{y}]$ 上。導出，對所有$\mathbf{x}\in E$，$\mathbf{y}\in E$，

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\int_0^1 a_i((1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y})dt$$

因此 $(D_i f)(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x})$。

25. 假設ω是開集合 $E\subset R^n$ 中的 1- 型，而且對每個E中屬於 $\mathscr{C}'$ 的封閉曲線 γ。

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

試模仿習題 24 中所描述的部份論證以證明ω在E中是正合的。

26. 假設ω在 $R^3-\{\mathbf{0}\}$中是屬於 $\mathscr{C}'$ 的 1- 型，且 $d\omega = 0$。試證ω在 $R^3-\{\mathbf{0}\}$ 中是正合的。

提示：每個 $R^3-\{\mathbf{0}\}$ 中的封閉連續可微分曲線，都是 $R^3-\{\mathbf{0}\}$ 中 2 維曲面的邊界。應用 Stokes 定理以及習題 25.

27. 令E爲 R^3 中開 3 維胞體，其邊平行於座標軸，假設 $(a,b,c)\in E$，對

$i=1,2,3, f_i\in\mathscr{C}'(E)$,

$$\omega=f_1dy\wedge dz+f_2dz\wedge dx+f_3dx\wedge dy,$$

並設在E中 $d\omega=0$。定義

$$\lambda=g_1dx+g_2dy$$

其中，當 $(x,y,z)\in E$,

$$g_1(x,y,z)=\int_c^z f_2(x,y,s)ds-\int_b^y f_3(x,t,c)dt$$

$$g_2(x,y,z)=-\int_c^z f_1(x,y,s)ds$$

試證在E中，$d\lambda=\omega$.

當$\omega=\zeta$時，試算出這些積分，並由此求出出現在習題 22(e) 部份的微分型式λ。

28. 固定$b>a>0$，當$a\le r\le b$，$0\le\theta\le 2\pi$ 時，定義

$$\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

〔Φ的值域是 R^2 中的一個環形（annulus)〕令$\omega=x^3dy$，試計算

$$\int_\Phi d\omega \quad 以及 \quad \int_{\partial\Phi}\omega$$

這兩個積分，以證實它們是相等的。

29. 試證滿足定理 10.38 證明中所需要性質的函數 α 存在。並證明所得的函數F是屬於$\mathscr{C}'$。(如果E是個開胞體或開球，這兩個敍述都很顯然，蓋α此時可取成常數，參考定理 9.42。)

30. 若 $\mathbf{N}$ 是由 (235) 式所定的向量，試證

$$\det\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\\ \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\end{bmatrix}=|\mathbf{N}|^2$$

此外，證明 (137) 這方程式。

31. 令 $E\subset R^3$ 爲開集，假設 $g\in\mathscr{C}''(E)$, $h\in\mathscr{C}''(E)$，並考慮向量場

$$\mathbf{F}=g\nabla h.$$

(a) 試證

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=g\nabla^2h+(\nabla g)\cdot(\nabla h)$$

其中 $\nabla^2h=\nabla\cdot(\nabla h)=\Sigma\partial^2h/\partial x_i^2$，是所謂$h$的 “Laplacian”.

(b) 如果Ω是E的一個閉子集，具有正向邊界 $\partial\Omega$（如定理10.15)，試

證

$$\int_\Omega [g\nabla^2 h-(\nabla g)\cdot(\nabla h)]dv=\int_{\partial\Omega} g\frac{\partial h}{\partial n}dA$$

這裏（習慣上也是）我們將 $\partial h/\partial n$ 取代了$(\nabla h)\cdot \boldsymbol{n}$〔因此，$\partial h/\partial n$ 是 h 在 $\partial\Omega$ 的外向法線方向的方向導數，所謂 h 的「法線導數」(normal derivative)〕。將 g 與 h 互換，由第一式減去所得式，得到。

$$\int_\Omega (g\nabla^2 h-h\nabla^2 g)dV=\int_{\partial\Omega}\left(g\frac{\partial h}{\partial n}-h\frac{\partial g}{\partial n}\right)dA.$$

這兩個公式通常稱爲 Green 恒等式。

(c) 假設 h 在 E 中是調和的 (harmonic)；意思是 $\nabla^2 h=0$。取 $g=1$．歸結到

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial h}{\partial n}dA=0$$

取 $g=h$，歸結到，若在 $\partial\Omega$ 上 $h=0$，則在 Ω 中，$h=0$．

(d) 試證 Green 恒等式在 R^2 中也成立。

32. 固定 δ，$0<\delta<1$。令 D 爲所有 $(\theta,t)\in R^2$ 而 $0\leq\theta\leq\pi$，$-\delta\leq t\leq\delta$ 的集合。令 Φ 爲 R^3 中的 2 維曲面，其參數域爲 D，定義爲

$$x=(1-t\sin\theta)\cos 2\theta$$
$$y=(1-t\sin\theta)\sin 2\theta$$
$$z=t\cos\theta$$

其中 $(x,y,z)=\Phi(\theta,t)$。注意 $\Phi(\pi,t)=\Phi(0,-t)$，且 Φ 在 D 的其餘部份都是 1 對 1。

Φ 的值域 $M=\Phi(D)$ 是名爲 Möbius 帶。這是不可定向曲面最簡單的例子。

試證以下所描述的幾個命題：令 $\mathbf{p}_1=(0,-\delta)$，$\mathbf{p}_2=(\pi,-\delta)$，$\mathbf{p}_3=(\pi,\delta)$，$\mathbf{p}_4=(0,\delta)$，$\mathbf{p}_5=\mathbf{p}_1$．令 $\gamma_i=[\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_{i+1}]$ $i=1,\cdots\cdots,4$，並令。$\Gamma_i=\Phi\circ\gamma_i$ 則

$$\partial\Phi=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4$$

令 $\mathbf{a}=(1,0,-\delta)$，$\mathbf{b}=(1,0,\delta)$。則

$$\Phi(\mathbf{p}_1)=\Phi(\mathbf{p}_3)=\mathbf{a},\ \Phi(\mathbf{p}_2)=\Phi(\mathbf{p}_4)=\mathbf{b},$$

而 $\partial\Phi$ 可描述如下。

Γ_1 由 **a** 以螺線上升至 **b**; 它在 (x, y) 平面上的投影，繞著原點，具有迴旋數（winding number）爲$+1$。（見第 8 章習題 23。）

$$\Gamma_2=[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$$

Γ_3 由 **a** 以螺線上升至 **b**; 它在 (x, y) 平面上的投影，繞著原點，具有迴旋數爲-1.

$$\Gamma_4=[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$$

因此 $\partial\Phi=\Gamma_1+\Gamma_3+2\Gamma_2$,

如果我們由 **a** 沿著 Γ_1 走到 **b**, 再繼續沿著M的「邊」走，直到我們回到 **a**, 所走出來的曲線是。

$$\Gamma=\Gamma_1-\Gamma_3.$$

這也可以在參數區間 $[0, 2\pi]$ 上表示爲方程式

$$x=(1+\delta\sin\theta)\cos 2\theta$$

$$y=(1+\delta\sin\theta)\sin 2\theta$$

$$z=-\delta\cos\theta.$$

應加強調的是，$\Gamma\neq\partial\Phi$: 令η爲在習題 21 及 22 所討論的1-型。由於 $d\eta=0$，故由 Stokes 定理知，

$$\int_{\partial\Phi}\eta=0.$$

但是，儘管Γ是M的「幾何」邊界，我們還是得到

$$\int_{\Gamma}\eta=4\pi.$$

爲了避免可能有的混淆. Stokes 定理（定理 10.50）通常是只對定向曲面Φ來說的。

第十一章

Lebesgue 理論

本章的目的是展示 Lebesgue 測度與積分理論的基本概念，並以相當一般性的手法來證明一些重要定理，而不用一大堆相當瑣碎的細節，混淆了發展主線。因此在某些情況，只有概略的證明，同時有些較簡單的命題是以沒有證明來敍述的。不過，熟悉前面幾節所用的技巧的讀者，在填補略去的步驟上，絕不會發生困難。

Lebesgue 積分理論可以用幾種不同的方式來發展，在此只考慮這些方法中的一種，至於其它方法，我們推薦書單中有關積分論的較專門性的論著。

集合函數

若A與B爲任意兩集合，我們以$A-B$代表所有$x\in A$，$x\notin B$的元素x所成的集合。$A-B$這符號並不蘊涵$B\subset A$，我們將空集合記爲0。同時，若$A\cap B=0$，我們說A和B是互斥

(disjoint)。

11.1　定義　　一個集合族$\mathscr{R}$叫做一個環(ring)，如果$A\in\mathscr{R}$且$B\in\mathscr{R}$蘊涵了

(1)　　　　$A\cup B\in\mathscr{R}$,　　$A-B\in\mathscr{R}$.

由於$A\cap B=A-(A-B)$，故若$\mathscr{R}$是個環，我們也有$A\cap B\in\mathscr{R}$.

一個環$\mathscr{R}$叫做 σ- 環 (σ-ring)，如果只要$A_n\in\mathscr{R}(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ 則

(2)　　　　$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{R}.$$

由於

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A_1-\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_1-A_n),$$

故若$\mathscr{R}$是 σ- 環，我們也有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{R}$$

11.2　定義　　我們說ϕ是定義在$\mathscr{R}$上的一個集合函數，如果對每個$A\in\mathscr{R}$, ϕ在擴展的實數系中，給它一個數$\phi(A)$。而ϕ是加性的 (additive)，如果$A\cap B=0$蘊涵了

(3)　　　　$\phi(A\cup B)=\phi(A)+\phi(B)$。

而ϕ是可數地加性 (countably additive)，如果$A_i\cap A_j=0(i\neq j)$蘊涵了

(4)　　　　$$\phi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A_n).$$

我們將一直假設ϕ的值域不同時包含$+\infty$取$-\infty$兩者；蓋若如此，(3) 式的右邊可能變得無意義。此外，我們剔除只具$+\infty$

或$-\infty$之值的集合函數。

注意很有趣的，(4) 的左邊與 A_n 是如何排列的無關，因此，重組定理顯示，若 (4) 的右邊根本就是收斂，它必是絕對收斂；若它不收斂，則其部份和趨於$+\infty$或$-\infty$。

若 ϕ 是加性的，則下面的性質很容易證實：

(5) $\phi(0)=0$

若每當 $i\neq j$, $A_i\cap A_j=0$，則

(6) $\phi(A_1\cup\cdots\cdots\cup A_n)=\phi(A_1)+\cdots\cdots+\phi(A_n)$

(7) $\phi(A_1\cup A_2)+\phi(A_1\cap A_2)=\phi(A_1)+\phi(A_2)$

若對所有 A, $\phi(A)\geq 0$，且 $A_1\subset A_2$，則

(8) $\phi(A_1)\leq\phi(A_2)$.

由於 (8)，非負加性集合函數通常稱做單調的。若 $B\subset A$，且 $|\phi(B)|<+\infty$，則

(9) $\phi(A-B)=\phi(A)-\phi(B)$

11.3 定理 若 ϕ 在一個環 $\mathscr{R}$ 上是可數地加性，假設 $A_n\in\mathscr{R}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$, $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots\cdots$; $A\in\mathscr{R}$，且

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

則當 $n\longrightarrow\infty$,

$$\phi(A_n)\longrightarrow\phi(A)。$$

證明：令，$B_1=A_1$ 且

$$B_n=A_n-A_{n-1},\ (n=2,3,\cdots\cdots)。$$

則當 $i\neq j$, $B_i\cap B_j=0$, $A_n=B_1\cup\cdots\cdots\cup B_n$，且 $A=\cup B_n$，因此

$$\phi(A_n)=\sum_{i=1}^{n}\phi(B_i)$$

且

$$\phi(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\phi(B_i).$$

Lebesgue 測度的建構

11.4 **定義** 令 R^p 表 p 維歐氏空間，所謂 R^p 的一個區間 (interval)，我們指的是這樣的點 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots\cdots,x_p)$

(10) $\quad a_i\leq x_i\leq b_i \qquad (i=1,\cdots\cdots,p)$

或是將 (10) 中任一或全部的≤代以<，所描述的集合。對任意的 i，我們不排除 $a_j=b_i$ 的可能性，特別是，空集合也包含在區間中。

若A是有限個區間的聯集，則A叫做一個基本集合 (elementary set)。

若I是個區間，不管 (10) 中任一不等式中，等號包含或不包含在內，我們定義。

$$m(I)=\prod_{i=1}^{p}(b_i-a_i)$$

若$A=I_1\cup\cdots\cdots\cup I_n$，且若這些區間都彼此互斥，我們則令

(11) $\quad m(A)=m(I_1)+\cdots\cdots+m(I_n)$

我們用$\mathscr{E}$表示所有 R^p 中的基本子集合族。

此時，下面的性質必須加以證實:

(12) $\quad \mathscr{E}$是個環，卻不是 σ-環。

(13) 若$A\in\mathscr{E}$，則A是有限個互斥區間的聯集。

(14) 若$A\in\mathscr{E}$，則 $m(A)$ 由 (11) 所定義是無歧義的；就是說，如果我們將 A，用兩種不同的分解法化爲互斥的區間，則每個都會給出相同的$m(A)$值。

(15) m在$\mathscr{E}$上是加性的。

注意，若 $p=1, 2, 3$。則 m 分別是長度，面積及體積。

11.5 定義 一個定義在 $\mathscr{E}$ 上的非負，可加集合函數稱爲 ϕ 正則（regular），如果下面敍述爲眞：對每個 $A\in\mathscr{E}$ 及 $\epsilon>0$，存在集合 $F\in\mathscr{E}$，$G\in\mathscr{E}$，使得 F 是閉集，G 是開集，$F\subset A\subset G$ 而且

(16) $$\phi(G)-\epsilon\leq\phi(A)\leq\phi(F)+\epsilon.$$

11.6 例子 (a) 集合函數 m 是正則。

若 A 是個區間，顯然定義 11.5 的要件都滿足。一般情形則由 (13) 可得。

(b) 取 $R^p=R^1$，並令 α 爲單調漸增函數，定義在所有 x。令

$$\mu([a, b))=\alpha(b-)-\alpha(a-),$$

$$\mu([a, b])=\alpha(b+)-\alpha(a-),$$

$$\mu((a, b])=\alpha(b+)-\alpha(a+),$$

$$\mu((a, b))=\alpha(b-)-\alpha(a+)$$

這裏的 $[a, b)$ 是 $a\leq x<b$ 等等的集合。由於 α 可能有的不連續點，這些情形必須標示出來。若 μ 是像 (11) 中對基本集合的定義，則 μ 在 $\mathscr{E}$ 上是正則。其證明正如在 (a) 中者。

我們下一個目標就是要證明，每個在 $\mathscr{E}$ 上的正則集合函數，可以擴展到包含 $\mathscr{E}$ 的 σ- 環上的可數加性集合函數。

11.7 定義 令 μ 在 $\mathscr{E}$ 上爲加性，正則、非負且有限。考慮由基本開集合 A_n 所成，對任意集合 $E\subset R^p$ 的可數覆蓋：

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

定義

(17) $$\mu^*(E)=\inf\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$$

這 inf 是對所有基本開集合所成E的可數覆蓋來取的。$\mu^*(E)$叫做E對於μ的外測度 (outer measure)。

很明顯，對所有 $E, \mu^*(E)\geq 0$。且若$E_1\subset E_2$，則

$$\mu^*(E_1)\leq\mu^*(E_2)$$

11.8　定理　(a) 對每個$A\in\mathscr{E}, \mu^*(A)=\mu(A)$.

(b) 若$E=\bigcup_1^\infty E_n$，則

$$\mu^*(E)\leqq\sum_{n=1}^\infty\mu^*(E_n)。\tag{19}$$

注意，(a)斷言 μ^* 是μ由$\mathscr{E}$到所有 R^p 子集合族的一個擴充(extension)。(19) 這性質稱之爲次可加性 (subadditivity)。

證明: 選$A\in\mathscr{E}$，且$\epsilon>0$。

μ的正則性顯示，A包含在一個基本開集合G中，而 $\mu(G)\leq\mu(A)+\epsilon$.

由於 $\mu^*(A)\leq\mu(G)$，且ϵ是任意的，我們有

$$\mu^*(A)\leq\mu(A)\tag{20}$$

又由 μ^* 的定義顯示，有一組基本開集合敍列$\{A_n\}$，它們的聯集覆蓋了A，並使得

$$\sum_{n=1}^\infty\mu(A_n)\leq\mu^*(A)+\epsilon$$

μ的正則性顯示，A 包含一個基本閉集合 F，使得 $\mu(F)\geq\mu(A)+\epsilon$；而由於$F$是緊緻的，我們有，對某個$N$，

$$F\subset A_1\cup\cdots\cdots\cup A_N,$$

因此，

$$\mu(A)\leq\mu(F)+\epsilon\leq\mu(A_1)+\cdots\cdots+\mu(A_N)+\epsilon\leq\sum_{n=1}^N\mu(A_n)+\epsilon\leq\mu^*(A)+2\epsilon.$$

與 (20) 式合併，便證明 (a)。

其次，若$E=\cup E_n$，並假設對所有n，$\mu^*(E_n)<+\infty$. 給定$\epsilon>0$，則有由基本開集合成E_n的覆蓋$\{A_{n_k}\}$，$k=1,,3,\ldots\ldots$。使得

$$(21)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_{n_k})\leq\mu^*(E_n)+2^{-n}\epsilon。$$

則

$$\mu^*(E)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_{n_k})\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)+\epsilon$$

而導得 (19)。在所排除的情形，即對某個n，$\mu^*(E_n)=+\infty$，(19) 當然是不證而明的。

11.9 定義 對任意$A\subset R^p$, $B\subset R^p$，我們定義

$$(22)\qquad S(A,B)=(A-B)\cap(B-A)$$

$$(23)\qquad d(A,B)=\mu^*(S(A,B)).$$

若

$$\lim_{n\to\infty}d(A_n,A)=0,$$

則我們寫成$A_n\longrightarrow A$。

若有一基本集合敍列$\{A_n\}$，而$A_n\longrightarrow A$，則我們說A是有限μ-可測 (finitely μ-measurable)，並寫成$A\in\mathscr{M}_F(\mu)$.

若A是有限μ-可測集合的可數聯集，則我們說A是μ-可測，並寫成$A\in\mathscr{M}(\mu)$。

$S(A,B)$是所謂A與B的「對稱差」(Symmetric difference)，我們將會看出$d(A,B)$實質上是個距離函數。

下面的定理，會使我們得到所要的μ的擴充。

11.10 定理 $\mathscr{M}(\mu)$是個σ-環，且μ^*在$\mathscr{M}(\mu)$是可數地加性的。

在我們轉到這定理的證明以前，我們探究一些$S(A,B)$及$d(A,B)$的性質。我們有

(24) $$S(A,B)=S(B,A),\qquad S(A,A)=0.$$
(25) $$S(A,B)\subset S(A,C)\cup S(C,B).$$
(26) $$\left.\begin{array}{l} S(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2)\\ S(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2)\\ S(A_1-A_2, B_1-B_2)\end{array}\right\}\subset S(A_1,B_1)\cup S(A_2,B_2).$$

(24) 式很明顯，而 (25) 式則由
$$(A-B)\subset(A-C)\cup(C-B),\quad (B-A)\subset(C-A)\cup(B-C)$$
導得，(26) 式的第一式可由
$$(A_1\cup A_2)-(B_1\cup B_2)\subset(A_1-B_1)\cup(A_2-B_2)$$
導得。其次，以 E^c 表示E的補集，我們有
$$S(A_1\cup A_2, B_1\cap B_2)=S(A_1{}^c\cup A_2{}^c, B_1{}^c\cup B_2{}^c)$$
$$\subset S(A_1{}^c, B_1{}^c)\cup S(A_2{}^c, B_2{}^c)=S(A_1,B_1)\cup S(A_2,B_2).$$
若我們注意到
$$A_1-A_2=A_1\cap A_2{}^c,$$
便可得出 (26) 中最後的式子。

由 (23),(19) 及 (18) 這些 $S(A,B)$ 的性質，蘊涵了。

(27) $$d(A,B)=d(B,A),\qquad d(A,A)=0.$$
(28) $$d(A,B)\le d(A,C)+d(C,B).$$
(29) $$\left.\begin{array}{l} d(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2)\\ d(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2)\\ d(A_1-A_2, B_1-B_2)\end{array}\right\}\le d(A_1,B_1)+d(A_2,B_2)$$

關係式 (27) 及 (28) 顯示，除了 $d(A,\ B)=0$ 並不蘊涵 $A=B$之外，$d(A,B)$ 滿足定義 2.15 的要件。例如，若 $\mu=m$，A 是可數集合，而B是空集合，則我們有
$$d(A,B)=m^*(A)=0;$$
要了解這個，將A的第 n 個點，用一個區間 I_n 覆蓋之，使得
$$m(I_n)<2^{-n}\epsilon.$$
但若我們將兩個集合A及B，而

$$d(A, B)=0$$

定爲等價。我們便可將 R^p 的子集合分爲等價族，而 $d(A, B)$ 將這些等價族的集合造成爲一度量空間。則$\mathscr{M}_F(\mu)$ 便形同$\mathscr{E}$的閉包。這個解釋對證明並不很重要，但卻說明了背後的想法。

我們還需要一個 $d(A, B)$ 的性質，就是，若 $\mu^*(A), \mu^*(B)$ 至少有一個是有限，則

$$|\mu^*(A)-\mu^*(B)|\leq d(A, B). \tag{30}$$

因爲，若 $0\leq\mu^*(B)\leq\mu^*(A)$，則 (28) 顯示

$$d(A, 0)\leq d(A, B)+d(B, 0)。$$

就是說，

$$\mu^*(A)\leq d(A, B)+\mu^*(B)。$$

因爲 $\mu^*(B)$ 是有限，故得

$$\mu^*(A)-\mu^*(B)\leq d(A, B).$$

定理 11.10 的證明: 設若$A\in\mathscr{M}_F(\mu), B\in\mathscr{M}_F(\mu)$，選取 $\{A_n\}, \{B_n\}$ 使得。$A_n\in\mathscr{E}$, $B_n\in\mathscr{E}$, $A_n\longrightarrow A$, $B_n\longrightarrow B$ 則 (29) 及 (30) 顯示

$$A_n\cup B_n\longrightarrow A\cup B \tag{31}$$

$$A_n\cap B_n\longrightarrow A\cap B, \tag{32}$$

$$A_n-B_n\longrightarrow A-B, \tag{33}$$

$$\mu^*(A_n)\longrightarrow\mu^*(A), \tag{34}$$

以及$\mu^*(A)<+\infty$，蓋因$d(A_n, A)\longrightarrow 0$。由 (31) 及 (33)知，$\mathscr{M}_F(\mu)$ 是個環，由 (7)，

$$\mu(A)+\mu(B)=\mu(A_n\cup B_n)+\mu(A_n\cap B_n)。$$

令$n\longrightarrow\infty$，由 (34) 及定理 11.8(a)，我們得到

$$\mu^*(A)+\mu^*(B)=\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B).$$

若$A\cap B=0$，則 $\mu^*(A\cup B)=0$.

這導得 μ^* 在$\mathscr{M}_F(\mu)$ 上是加性的。

現在，令$A\in\mathscr{M}(\mu)$，則A可表示爲$\mathscr{M}_F(\mu)$ 中互斥集合的

可數聯集。蓋若$A=\cup A_n'$, $A_n'\in\mathscr{M}_F(\mu)$，令$A_1=A'$，且

$$A_n=(A_1'\cup\cdots\cdots\cup A_n')-(A_1'\cup\cdots\cdots\cup A'_{n-1})$$
$$(n=2,3,4\cdots\cdots)$$

則

$$(35)\qquad A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

這便是所要的表式。由（19）知，

$$(36)\quad \mu^*(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$$

另一方面，$A\supset A_1\cup\cdots\cdots\cup A_n$；由 μ^* 在 $\mathscr{M}_F(\mu)$ 上的加性性質，我們得到

$$(37)\qquad \mu^*(A)\geq\mu^*(A_1\cup\cdots\cdots\cup A_n)=\mu^*(A_1)+\cdots+\mu^*(A_n)$$

方程式（36）及（37）蘊涵了。

$$(38)\qquad \mu^*(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n).$$

設若 $\mu^*(A)$ 爲有限，令 $B_n=A_1\cup\cdots\cdots\cup A_n$，則（38）顯示，當$n\longrightarrow\infty$,

$$d(A,B_n)=\mu^*(\bigcup_{i=n+1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\mu^*(A_i)\longrightarrow 0$$

因此 $B_n\longrightarrow A$；又因爲 $B_n\in\mathscr{M}_F(\mu)$，故很容易看出 $A\in\mathscr{M}_F(\mu)$。

我們於是證明了，若 $A\in\mathscr{M}(\mu)$ 且$\mu^*(A)<+\infty$，則$A\in\mathscr{M}_F(\mu)$。

現在，很明顯的 μ^* 在 $\mathscr{M}(\mu)$ 上是可數地加性的，蓋若

$$A=\cup A_n,$$

其中的$\{A_n\}$是$\mathscr{M}(\mu)$ 中互斥集合序列。我們已證明了，若對每個n, $\mu^*(A_n)<+\infty$，則（38）式成立，而在其它情形下，（38）

是顯然的。

最後，我們必須證明$\mathscr{M}(\mu)$ 是個 σ- 環。若$A_n \in \mathscr{M}(\mu)$, $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$，則很明顯$\cup A_n \in \mathscr{M}(\mu)$（定理 2.12），設若 $A \in \mathscr{M}(\mu), B \in \mathscr{M}(\mu)$，且

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

其中的 $A_n, B_n \in \mathscr{M}_F(\mu)$，則恒等式

$$A_n \cap B=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_n \cap B_i)$$

顯示，$A_n \cap B \in \mathscr{M}(\mu)$；且由於

$$\mu^*(A_n \cap B) \leq \mu^*(A_n)<+\infty,$$

故 $A_n \cap B \in \mathscr{M}_F(\mu)$。因此$A_n-B \in \mathscr{M}_F(\mu)$。而且因爲$A-B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-B)$，故$A-B \in \mathscr{M}(\mu)$。

若$A \in \mathscr{M}(\mu)$，我們現在用 $\mu^*(A)$ 來代替 $\mu(A)$，因而μ原來只定義在$\mathscr{E}$上，被擴展成在 σ- 環$\mathscr{M}(\mu)$ 上的可數加性集合函數了。這擴展了的集合函數稱做測度（measure），$\mu=m$的特殊情形，叫做 R^p 上的 Lebesgue 測度。

11.11 備註 (a) 若A是開集，則$A \in \mathscr{M}(\mu)$。蓋R^p中每一個開集都是由開區間所成的可數集合的聯集。要證明這個，只須建構一個其元素都是開區間的可數基底卽可。

取補集，得到每個閉集合也在$\mathscr{M}(\mu)$ 中。

(b) 若$A \in \mathscr{M}(\mu)$ 且$\epsilon>0$，則存在集合F和G，使得

$$F \subset A \subset G,$$

而F是閉集，G是開集，且

$$\mu(G-A)<\epsilon, \qquad \mu(A-F)<\epsilon. \tag{39}$$

第一個不等式成立，是因爲 μ^* 是經由基本開子集的覆蓋所定義的；第二個不等式則由取補集而得。

(c) 我們說 E 是個 Borel 集合，如果 E 可以經由可數個運算而得，由開集合開始，每一運算包括取聯集，交集或補集。R^p 中所有 Borel 集合組 $\mathscr{B}$，是個 σ－環。事實上，它是包含所有開集合最小的 σ－環。由備註 (a) 知，若 $E\in\mathscr{B}$，則 $E\in\mathscr{M}(\mu)$。

(d) 若 $A\in\mathscr{M}(\mu)$，則存在 Borel 集合 F 和 G，使 $F\subset A\subset G$，且

(40)　　$$\mu(G-A)=\mu(A-F)=0\text{。}$$

這是由 (b)，若我們取 $\epsilon=\dfrac{1}{n}$，並讓 $n\longrightarrow\infty$ 而得。

因爲 $A=F\cup(A-F)$，我們知道每個 $A\in\mathscr{M}(\mu)$ 都是一個 Borel 集合及一個測度爲 0 的集合的聯集。

Borel 集合對每個 μ 都是 μ- 可測，但測度爲 0 的集合〔就是 $\mu^*(E)=0$ 的集合 E〕可能隨不同的 μ 而異。

(e) 對每個 μ，測度爲 0 的集合形成一 σ－環。

(f) 在 Lebesgue 測度的情形，每個可數集都具有測度爲 0。但也有不可數集合（甚至完集）測度爲 0 的。Cantor 集合可以取爲代表：用 2.44 節的符號，很容易看出

$$m(E_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n\qquad(n=1,2,3,\cdots\cdots);$$

而由於 $P=\cap E_n$，故對每個 n，$P\subset E_n$，因此 $m(P)=0$。

測度空間

11.12　定義　設 X 爲一集合，它並不一定要是歐氏空間，甚或任何度量空間，的子集。如果存在 X 的子集合所成的 σ－環 $\mathscr{M}$（稱爲可測集合）及一個定義在 $\mathscr{M}$ 上的非負，可數加性集合函數 μ（稱爲測度），則 X 叫做一個測度空間。

此外，若$X\in\mathscr{M}$，則X叫做可測空間(measurable space)。

例如，我們可取$X=R^p$，$\mathscr{M}$爲 R^p 中所有 Lebesgue 可測子集合族，μ爲 Lebesgue 測度。

或者，令X爲所有正整數的集合，$\mathscr{M}$爲所有X的子集合所成的集合，而 $\mu(E)$ 爲E中元素的個數。

另一個例子是由機率論所提供的。其中事件（events）可以考慮爲集合，而事件發生的機率是個加性（或可數加性）集合函數。

在下面幾節中，我們總是處理可測空間。應該強調的是，在我們馬上要討論的積分理論裏，如果我們犧牲掉到現在所達成的普遍性理論，而只限制在，像實數軸區間上的，Lebesgue 測度，它並不會變得比較簡單，事實上，在此較普遍的情況下，這理論的主要特性，會更加清晰地呈現出來。而我們會看出，這都μ與在σ-環上是可數地加性有關。

引入一個符號會比較方便。

(41) $\{x|P\}$

代表所有具有性質P的元素x所成的集合。

可測函數

11.13 定義 令f爲定義在可測空間X上的函數，其值在擴充了的實數系中，如果對每個實數a，

(42) $\{x|f(x)>a\}$

這集合是可測，則f叫做可測。

11.14 例子 若$X=R^p$且$\mathscr{M}=\mathscr{M}(\mu)$，如在定義 10.9 中者，則每個連續函數 f 都是可測的，因爲這時 (42) 是個開集。

11.15 定理 下列四個條件，每一個都蘊涵其它三個：

(43) 對每個實數 a, $\{x|f(x)>a\}$ 可測。

(44) 對每個實數 a, $\{x|f(x)\geq a\}$可測。

(45) 對每個實數 a, $\{x|f(x)<a\{$可測。

(46) 對每個實數 a, $\{x|f(x)\leq a\}$可測。

證明:

$$\{x|f(x)\geq a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|f(x)>a-\frac{1}{n}\},$$

$$\{x|f(x)<a\}=X-\{x|f(x)\geq a\},$$

$$\{x|f(x\leq a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|f(x)<a+\frac{1}{n}\},$$

$$\{x|f(x)>a\}=X-\{x|f(x)\leq a\}$$

這些關係式逐一顯示; (43) 蘊涵了 (44); ,(44) 蘊涵了(45); (45) 蘊涵了 (46), (46) 蘊涵了 (43)。

因此, 這些條件中的任一個, 都可取代 (42) 而用來定義可測性。

11.16 定理 若 f 可測, 則$|f|$可測。

證明:

$$\{x||f(x)|<a\}=\{x|f(x)<a\}\cap\{x|f(x)>-a\}.$$

11.17 定理 令$\{f_n\}$爲一組可測函數序列。若 $x\in X$令

$$g(x)=\sup f_n(x) \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$h(x)=\limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

則g和h是可測。

對 inf 及 lim inf 當然同樣爲眞。

證明:

$$\{x|g(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|f_n(x)>a\}$$

$$h(x)=\inf g_m(x), \quad g_m(x)=\sup f_n(x) \quad (n\geq m).$$

系。(a) 若 f 和 g 爲可測，則 $\max(f,g)$ 及 $\min(f,g)$ 皆可測。特別是，若

$$(47)\qquad f^{+}=\max\{f,0\},\qquad f^{-}=-\min\{f,0\}.$$

則 f^{+} 及 f^{-} 皆可測。

(b) 可測函數之收斂序列的極限爲可測。

11.18 定理 令 f 和 g 爲定義在 X 上的可測實值函數，F 在 R^2 上爲實值且連續，並令

$$h(x)=F(f(x),g(x))\qquad (x\in X).$$

則 h 爲可測。

特別是，$f+g$ 及 fg 爲可測。

證明: 令

$$G_a=\{(u,u)\,|\,F(u,v)>a\}.$$

則 G_a 是 R^2 中的開集合。故我們可以寫成

$$G_a=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

這裏的 I_n 是開集合序列:

$$I_n=\{(u,v)\,|\,a_n<u<b_n,\ c_n<v<d_n\}.$$

由於

$\{x\,|\,a_n<f(x)<b_n\}=\{x\,|\,f(x)>a_n\}\cap\{x\,|\,f(x)<b_n\}$爲可測，於是集合

$\{x\,|\,(f(x),g(x))\in I_n\}=\{x\,|\,a_n<f(x)<b_n\}\cap\{x\,|\,c_n<g(x)<d_n\}$亦爲可測。故對

$$\{x\,|\,h(x)>a\}=\{x\,|\,(f(x),g(x))\in G_a\}$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\,|\,(f(x),g(x))\in I_n\}$$

也同樣爲眞。

我們可以總結來說，當所有分析學中的普通運算，包括極限

運算，運用到可測函數上去時，也必得可測函數；換言之，所有常遇到的函數，都是可測的。

然而，由下例知（基於直線上的 Lebesgue 測度），這只是一個粗略的說法：若 $h(x)=f(g(x))$，其中 f 是可測而 g 是連續，但 h 不一定可測（其詳見 MeShane p. 241）。

讀者可能已注意到，在我們討論可測函數時，沒有提到測度，事實上，X 上的可測函數族只與 σ-環 $\mathscr{M}$ 有關（用11. 12 節的符號）。例如，我們可以說 R^p 上的 Borel 可測函數就是，函數 f，

$$\{x \mid f(x)>a\}$$

永遠是個 Borel 集合，而不必提及任何特定的測度。

單葉函數

11. 19　定義　令 s 爲定義在 X 上的實值函數，若 s 的值域是有限，則我們說 s 是個單葉函數（simple function）。

令 $E\subset X$，並使

$$K_E(x)=\begin{cases}1 & (x\in E)\\ 0 & (x\notin E)\end{cases} \tag{48}$$

K_E 叫做 E 的特徵函數（Characteristic function）。

若 s 的值域包含有相異數 c_1，$\cdots\cdots c_n$，令。

$$E_i=\{x \mid s(x)=c_i\}\quad (i=1,\cdots\cdots,n)$$

則

$$s=\sum_{i=1}^{n} c_i\, K_{E_i} \tag{49}$$

就是說，每個單葉函數都是特徵函數的有限線性組合。很明顯 s 是可測，若且唯若 $E_1,\cdots\cdots,E_n$ 是皆可測。

有趣的是，每個函數都可由單葉函數來逼近：

11. 20　定理　令 f 爲 X 上一個實值函數，則存在一單葉

函數序列$\{s_n\}$，使得當$n\longrightarrow\infty$，對所有$x\in X$, $s_n(x)\longrightarrow f(x)$.
若f爲可測，則$\{s_n\}$可以取成一個可測函數序列。若$f\geq 0$，$\{s_n\}$可以取爲一單調漸增序列。

證明: 若$f\geq 0$，定義，當$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$, $i=1, 2, \cdots\cdots n2^n$,

$$E_{n_i}=\left\{x\left|\frac{i-1}{2^n}\leq f(x)\leq\frac{i}{2^n}\right.\right\},\qquad F_n=\{x\,|\,f(x)\geq n\}$$

令

$$s_n=\sum_{i=1}^{n2^n}\frac{i-1}{2^n}K_{E_i}+nK_{F_n}. \tag{50}$$

在一般情況下，令$f=f^+-f^-$，將前述建構用於f^+及f^-。

可能要留意的是，若f爲有界，(50) 所給的序列$\{s_n\}$均勻收斂到f。

積分學

我們要在一個可測空間X上定義積分，其中$\mathscr{M}$是個可測集合所成的σ-環，而μ是測度。想要看出較具體情況的讀者，可以將X想成是實數軸，或一個區間，而將μ想成是 Lebesgue 測度m。

11.21 定義 設若

$$s(x)=\sum_{i=1}^{n}c_iK_{E_i}(x)\qquad (x\in X,\ c_i>0) \tag{51}$$

爲可測，且若$E\in\mathscr{M}$。我們定義

$$I_E(s)=\sum_{i=1}^{n}c_i\mu(E\cap E_i) \tag{52}$$

若f爲可測且非負，我們定義

(53) $$\int_E f\,d\mu=\text{lub}\,I_E(s)$$

這裏的lub是對所有單葉函數滿足 $0\leq s\leq f$ 而取的。

(53) 的左邊叫做 f 在集合 E 上，關是測度 μ 的 Lebesgue 積分。值得注意的是，這積分可以取 $+\infty$ 值。

很容易證實，對所有非負的單葉函數而言，

(54) $$\int_E s\,d\mu=I_E(s).$$

11.22 定義　令 f 爲可測，考慮兩個積分

(55) $$\int_E f^+d\mu,\qquad \int_E f^-d\mu,$$

f^+, f^- 是如定義在 (47) 中者。

若 (55) 中至少有一個是有限，則我們定義

(56) $$\int_E f\,d\mu=\int_E f^+d\mu-\int_E f^-d\mu$$

若 (55) 中兩個積分都有限，則 (56) 爲有限，而我們說 f 以 Lebesgue 意味關於 μ，在 E 上是可積 (integrable) 〔或可和 (summable)〕；我們寫成在 E 上，$f\in\mathscr{L}(\mu)$，若 $\mu=m$，通常的符號是：在 E 上，$f\in\mathscr{L}$。

這個術語可能有點混亂：若 (56) 是 $+\infty$ 或 $-\infty$，則 f 在 E 上的積分是有定義的，但 f 在上面的意味下是不可積的；f 在 E 上可積，只有當它在 E 上的積分爲有限。

11.23 備註　下面的性質是很明顯的。

(a) 若 f 在 E 上可測且有界，且 $\mu(E)<+\infty$，則在 E 上 $f\in\mathscr{L}$。

(b) 若對 $x\in E$，$a\leq f(x)\leq b$，且 $\mu(E)<+\infty$，則

$$a\mu(E)\leq\int_E f\,d\mu\leq b\mu(E).$$

(c) 若在 E 上，$g\in\mathscr{L}(\mu)$，且若對所有 $x\in E$，$f(x)\leq g(x)$ 則

$$\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu.$$

(d) 若在E上，$f\in\mathscr{L}(\mu)$，則對所有有限常數c，在E上，$cf\in\mathscr{L}(\mu)$，且

$$\int_E cf\,d\mu = c\int_E f\,d\mu.$$

(e) 若 $\mu(E)=0$，且f爲可測，則

$$\int_E f\,d\mu = 0.$$

(f) 若在E上，$f\in\mathscr{L}(\mu)$, $A\in\mathscr{M}$，且$A\subset E$，則在A上，$f\in\mathscr{L}(\mu)$。

11.24 定理 (a) 設f在X上爲可測且非負，對$A\in\mathscr{M}$. 定義

$$\phi(A)=\int_A f\,d\mu, \tag{57}$$

則ϕ在 $\mathscr{M}$ 上是可數地加性的。

(b) 若在X上，$f\in\mathscr{L}(\mu)$，則同樣的結論亦成立。

證明: 很明顯，若我們寫成$f=f^+-f^-$，並將 (a) 用到 f^+ 及 f^-，則 (b) 可由 (a) 導得。

要證明 (a)，我們必須證明，若 $A_n\in\mathscr{M}(n=1,2,\cdots\cdots)$, $A_i\cap A_j=0$，$i\neq j$，且若 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，則

$$\phi(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A_n) \tag{58}$$

若f是特徵函數，則ϕ的可數加性性質就完全與μ的可數加性性質相同，蓋

$$\int_A K_E\,d\mu=\mu(A\cap E).$$

若f是單葉，則f是 (51) 的型式，結論仍然成立。

在一般的情形，對每個可測單葉函數 s，$0\leq s\leq f$，我們

都有

$$\int_A s\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} s\,d\mu\leq\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A_n),$$

因此，由 (53) 式，

(59) $$\phi(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A_n),$$

現在，若對任一個 n，$\phi(A_n)=+\infty$, (58) 是顯然的，蓋 $\phi(A)\geq\phi(A_n)$. 假設對每個 n, $\phi(A_n)<+\infty$。

給定 $\epsilon>0$，我們可以選擇一個可測單葉函數 s，使 $0\leq s\leq f$，並使得

(60) $$\int_{A_1} s\,d\mu\geq\int_{A_1} f\,d\mu-\epsilon\,,\ \int_{A_2} s\,d\mu\geq\int_{A_2} f\,d\mu-\epsilon\,.$$

因此，

$$\phi(A_1+A_2)\geq\int_{A_1\cup A_2} s\,d\mu=\int_{A_1} s\,d\mu+\int_{A_2} s\,d\mu\geq\phi(A_1)+\phi(A_2)-2\epsilon.$$

所以

$$\phi(A_1+A_2)\geq\phi(A_1)+\phi(A_2)$$

於是對所有 n，我們有

(61) $$\phi(A_1+\cdots\cdots+A_n)\geq\phi(A_1)+\cdots\cdots+\phi(A_n).$$

由於 $A\supset A_1\cup\cdots\cdots\cup A_n$,，(61)蘊涵了

(62) $$\phi(A)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\phi(A_n)$$

則 (58) 便由 (59) 及 (62) 導得。

系。若 $A\in\mathscr{M}$, $B\subset A$，且 $\mu(A-B)=0$，則

$$\int_A f\,d\mu=\int_B f\,d\mu.$$

由於 $A=B\cup(A-B)$，這可由備註 11.23(e) 導得。

11.25 備註　上面的系顯示，測度爲 0 的集合，在積分時可以忽略。

若集合

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

其測度爲 0，則我們寫成，在E上，$f \sim g$.

則$f \sim f$；$f \sim g$蘊涵了$g \sim f$；且$f \sim g$，$g \sim h$蘊涵了$f \sim h$，這就是說～這關係是一種等價關係，

若在E上，$f \sim g$，我們很明顯地有

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu,$$

如果對每個E的可測子集A，這些積分都存在的話。

若一個性質P，對每個$x \in E - A$都成立，而 $\mu(A) = 0$。則常常說成對幾乎所有$x \in E$，P成立，或說在E上，P殆遍成立 (hold almost everywhere)（殆遍的觀念當然與所考慮的測度有關。在文獻中，除非有相反的說法，通常是指 Lebesgue 測度）。

若在E上，$f \in \mathscr{L}(\mu)$，則很明顯 $f(x)$ 在E上必然殆遍有限，因此在大多數的情況中，如果我們一開始就假設所給的函數是有限值，並不失其普遍性。

11-26 定理 若在E上，$f \in \mathscr{L}(\mu)$，則在E上，$|f| \in \mathscr{L}(\mu)$，且

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leq \int_E |f|\,d\mu. \tag{63}$$

證明： 令$E = A \cup B$，其中在A上 $f(x) \geq 0$，在B上 $f(x) < 0$。由定理 10.24 知，

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_A |f|\,d\mu + \int_B |f|\,d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty.$$

所以 $|f| \in \mathscr{L}(\mu)$。由於$f \leq |f|$ 且$-f \leq |f|$，我們看出

$$\int_E f\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu, \quad -\int_E f\,d\mu \leq \int_E |f|\,d\mu,$$

而導得 (63)。

由於f的可積蘊涵了 $|f|$ 的可積性，Lebesgue 積分常稱爲絕對收斂積分 (absolutely convergent integral)。要定義非絕對收斂積分當然是可能的，而且在某些問題的處理上，這樣做還是切要的。但是，這類積分缺少 Lebesgue 積分中一些最有用的性質，因此在分析學中佔一個較不重要的角色。

11.27 定理 設若f在 E 上爲可測。$|f|\leq g$，且在E上，$g\in\mathscr{L}(\mu)$ 則在E上，$f\in\mathscr{L}(\mu)$。

證明: 我們有 $f^+\leq g$ 且 $f^-\leq g$.

11.28. Lebesgue 的單調收斂定理. 設若 $E\in\mathscr{M}$, 令 $\{f_n\}$ 爲一可測函數序列，而

$$0\leq f_1(x)\leq f_2(x)\leq\cdots\cdots\quad(x\in E). \tag{64}$$

令f定義爲，當$n\longrightarrow\infty$

$$f_n(x)\longrightarrow f(x)\qquad(x\in E) \tag{65}$$

則

$$\int_E f_n d\mu\longrightarrow\int_E f d\mu\qquad(n\longrightarrow\infty) \tag{66}$$

證明: 由 (64) 很明顯的，當$n\longrightarrow\infty$，有某個α，

$$\int_E f_n d\mu\longrightarrow\alpha; \tag{67}$$

又由於$\int f_n\leq\int f$，我們有

$$\alpha\leq\int_E f d\mu. \tag{68}$$

選取c，使$0<c<1$，並令s爲一單葉可測函數，而$0\leq s\leq f$，取

$$E_n=\{x\,|\,f_n(x)\geq cs(x)\}\quad(n=1,2,\cdots\cdots)。$$

由 (64), $E_1\subset E_2\subset E_3\cdots\cdots$，並由 (65) 知，

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n. \tag{69}$$

對任意n，

(70) $$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c\int_{E_n} s d\mu.$$

於（70）中，我們令 $n \longrightarrow \infty$。由於積分是可數加性集合函數（定理 10.24），故（69）顯示，我們可以將定理 11.3 用到(70)的最後一個積分，而我們得到

(71) $$\alpha \geq c\int_E s d\mu.$$

令 $c \longrightarrow 1$，我們看出

$$\alpha \geq \int_E s d\mu,$$

而（53）式蘊涵了

(72) $$\alpha \geq \int_E f d\mu.$$

由（67),(68）及（72）便導得此定理。

11.29 定理 設若 $f=f_1+f_2$，而在 E 上，$f_i \in \mathscr{L}(\mu)$ $(i=1,2)$。則在E上，$f \in \mathscr{L}(\mu)$ 且

(73) $$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu.$$

證明: 首先，假設 $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0$，若 f_1 及 f_2 皆爲單葉，顯而易見的，(73) 可由 (52) 及 (54) 導得。否則，選取可測單葉函數所成的單調漸增序列 $\{s_n'\}$ 及 $\{s_n''\}$ 以收斂到 f_1 及 f_2，定理 11.20 顯示這是可能的。令 $s_n = s_n' + s_n''$，則

$$\int_E s_n d\mu = \int_E s_n' d\mu + \int_E s_n'' d\mu,$$

如果我們讓 $n \longrightarrow \infty$，由定理 11.28 便導得（73)。

其次，設 $f_1 \geq 0, f_2 \leq 0$，令

$$A=\{x \mid f(x) \geq 0\}, \quad B=\{x \mid f(x) < 0\}.$$

則在A上，f, f_1 及 $-f_2$ 都是非負。因此

(74) $$\int_A f_1 d\mu = \int_A f d\mu + \int_A (-f_2) d\mu = \int_A f d\mu - \int_A f_2 d\mu.$$

同樣地，$-f, f_1$ 及 $-f_2$ 在B上都是非負，所以

$$\int_B (-f_2)d\mu = \int_B f_1 d\mu + \int_B (-f)d\mu,$$

或者

$$\int_B f_1 d\mu = \int_B f d\mu - \int_B f_2 d\mu. \tag{75}$$

如果我們將 (74), (75) 相加，便導得 (73)。

在一般的情形，E可以分解爲四個集合 E_i，而在每一個中，$f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 的符號都是一定。由我們到現在爲止所證明的兩種情形便蘊涵了

$$\int_{E_i} f d\mu = \int_{E_i} f_1 d\mu + \int_{E_i} f_2 d\mu. \qquad (i=1, 2, 3, 4).$$

將這四個方程式加起來，使導得 (73)。

我們現在可以將定理 11–28 對級數來予以重述:

11.30 定理 設若 $E \in \mathscr{M}$。若 $\{f_n\}$ 爲一非負可測函數序列，且

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E) \tag{76}$$

則

$$\int_E f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) d\mu$$

證明: (76) 的部份和形成一個單調漸增序列。

11.31 Fatou 定理 設$E \in \mathscr{M}$，若 $\{f_n\}$ 爲非負可測函數序列，且

$$f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E).$$

則

$$\int_E f(x) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, d\mu \tag{77}$$

在 (77) 中，嚴格的不等式可能成立，習題 5 中便有一個例

子。

證明: 對 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ 且 $x\in E$，令

$$g_n(x)=\inf f_i(x) \qquad (i\geq n),$$

則在 E 上 g_n 為可測。且

(78) $$0\leq g_1(x)\leq g_2(x)\leq\cdots\cdots,$$

(79) $$g_n(x)\leq f_n(x),$$

(80) $$g_n(x)\longrightarrow f(x) \qquad (n\longrightarrow\infty)$$

由 (78),(80) 及定理 11.28 知,

(81) $$\int_E g_n d\mu\longrightarrow\int_E f d\mu,$$

因此 (77) 則由 (79) 及 (81) 導得。

11.32 Lebesgue 制約收斂定理 設 $E\in\mathscr{M}$, $\{f_n\}$ 為非負可測函數序列。而當 $n\longrightarrow\infty$時,

(82) $$f_n(x)\longrightarrow f(x) \qquad (x\in E).$$

如果存在函數 g，而在 E 上 $g\in\mathscr{L}(\mu)$。且

(83) $$|f_n(x)|\leq g(x) \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots, x\in E).$$

則

(84) $$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E f d\mu$$

由於 (83) 式，我們說 $\{f_n\}$ 是被 g_n 所制約，因此說它是制約收斂。又由備註 11.25 知，如果 (82) 在 E 上殆遍成立，結論仍然一樣。

證明: 首先，(83) 式及定理 11.27 蘊涵了，在 E 上，$f_n\in\mathscr{L}(\mu)$ 且 $f\in\mathscr{L}(\mu)$。

由於 $f_n+g\geq 0$ Fatou 定理顯示,

$$\int_E(f+g)d\mu\leq\lim_{n\to\infty}\inf\int_E(f_n+g)d\mu,$$

或

(85) $$\int_E f d\mu\leq\lim_{n\to\infty}\inf\int_E f_n d\mu$$

又因爲 $g-f_n\geq 0$，我們一樣看得出

$$\int_E (g-f)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E (g-f_n)\,d\mu$$

所以，

$$-\int_E f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left[-\int_E f_n d\mu\right]$$

這式和下式是一樣的，

$$(86)\qquad \int_E f\,d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu.$$

現在，(84) 式中極限的存在性及 (84) 所斷言的等式，則由 (85) 式及 (86) 式導得。

系。如果 $\mu(E)<+\infty$，而 $\{f_n\}$ 在 E 上是均勻有界，且在 E 上，$f_n(x)\longrightarrow f(x)$ 則 (84) 式成立。

均勻有界的收斂序列，常說成是有界收斂。

與 Riemann 積分之比較

我們的下一個定理會顯示，每個函數若在區間上是 Riemann 可積，則也是 Lebesgue 可積。而且 Riemann 可積函數是限制在相當嚴格的連續條件之下的。倒不是因爲 Lebesgue 的理論使我們能對更多的函數作積分，它最大的好處，可能是在於我們可以輕易地處理許多極限運算；由這看來，Lebesgue的收斂定理可以認爲正是 Lebesgue 理論的核心。

在 Riemann 理論中，我們所遭遇到的一個困難是，Riemann 可積函數（甚至連續函數）的極限函數，可能並非 Riemann 可積。而這個難題現在幾乎消失了，蓋可測函數的極限函數永遠是可測。

令測度空間X爲實數線的區間 $[a,b]$，$\mu=m$ (Lebesgue 測度）而 $\mathscr{M}$ 爲 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可測子集合族。對於 f 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 積分，我們不用

$$\int_X f\,dm,$$

而用這習慣上熟悉的符號

$$\int_a^b f\,dx.$$

爲了分別 Riemann 積分與 Lebesgue 積分，我們將 Riemann 積分記作

$$\mathscr{R}\int_a^b f\,dx.$$

11.33 定理 (a) 如果在〔a, b〕上，$f\in\mathscr{R}$ 則在〔a, b〕上，$f\in\mathscr{L}$ 且

$$\int_a^b f\,dx=\mathscr{R}\int_a^b f\,dx \tag{87}$$

(b) 設 f 在〔a, b〕上爲有界，則在〔a, b〕上 $f\in\mathscr{R}$，若且唯若 f 在〔a, b〕上殆遍連續。

證明： 設 f 爲有界，由定義 6.1 及定理 6.4 知，有〔a, b〕諸分割所成的序列 $\{P_k\}$，且使得 P_{k+1} 爲 P_k 的細分，P_k 的兩相鄰點之間的距離都小於 $1/k$，同時

$$\lim L(P_k, f)=\mathscr{R}\underline{\int} f\,dx,\ \lim U(P_k, f)=\mathscr{R}\overline{\int} f\,dx. \tag{88}$$

（在證明中，所有積分都是對〔a, b〕取的。）

若 $P_k=\{x_0, x_1, \cdots\cdots, x_n\}$。而 $x_0=a$, $x_n=b$。定義

$$U_k(a)=L_k(a)=f(a);$$

當 $x_{i-1}<x\le x_i$, $1\le i\le n$，令 $U_k(x)=M_i$ 而 $L_k(x)=m_i$，利用定義 6.1 的符號，則

$$L(P_k, f)=\int L_k\,dx,\ U(P_k, f)=\int U_k\,dx, \tag{89}$$

而對所有 $x\in$〔a, b〕而言，

$$L_1(x)\le L_2(x)\le\cdots\cdots\le f(x)\le\cdots\cdots\le U_2(x)\le U_1(x), \tag{90}$$

蓋 P_{k+1} 將 P_k 再細分了，由 (90) 式知，存在有

(91)　　$L(x)=\lim\limits_{k\to\infty}L_k(x),\quad U(x)=\lim\limits_{k\to\infty}U_k(x).$

留意，在〔a,b〕上，L及U都是有界可測函數，而

(92)　　$L(x)\leq f(x)\leq U(x)\quad (a\leq x\leq b)$

且由（88），（90）及單調收斂定理知，

(93)　　$\int L\,dx=\mathscr{R}\underline{\int} f\,dx,\quad \int U\,dx=\mathscr{R}\overline{\int} f\,dx.$

至此，除了假設f在〔a,b〕上是有界實值函數之外，對f沒有任何其它的假設。

要完成這個證明，且留意 $f\in\mathscr{R}$ 若且唯若其上下 Riemann 積分要相等，故若且唯若

(94)　　$\int L\,dx=\int U\,dx;$

又由於$L\leq U$，故（94）要成立若且唯若 $L(x)=U(x)$，對幾乎所有$x\in$〔a,b〕（習題 1）.

這情形下，（92）式蘊涵了，殆遍於〔a,b〕，

(95)　　$L(x)=f(x)=U(x)$

所以f是可測，而（87）則由（93）及（95）導得。

此外，若x不屬於任何 P_k，則很容易看出，若且唯若f在x連續，則 $U(x)=L(x)$。由於集合 P_k 的聯集是可數，其測度為零，故我們歸結到f在〔a,b〕上殆遍連續，若且唯若殆遍 $L(x)=U(x)$，因此（如我們在上面看到的）若且唯若$f\in\mathscr{R}$。

證畢。

積分與微分之間所熟悉的關係，我們大半可以移入 Lebesgue 理論中。若在〔a,b〕上，$f\in\mathscr{R}$，且

(96)　　$F(x)=\int_a^x f\,dx\qquad (a\leq x\leq b),$

則在〔a,b〕上，殆遍 $F'(x)=f(x)$。

反之，若F在〔a,b）上每一點皆可微（在這裏『殆遍』還不够好！）且在〔a,b〕上，$F'\in\mathscr{L}$，則

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)dt \quad (a\leq x\leq b).$$

至於這兩個定理的證明，我們介紹讀者參考書目中所提的任何一本積分論的書。

複值函數的積分

設 f 爲定義在測度空間 X 區上的複值函數，且 $f=u+iv$，u, v，皆實值，我們說 f 爲可測，若且唯若 u 及 v 皆爲可測。

我們很容易證實，複值可測函數的和與積還是可測。由於

$$|f|=(u^2+v^2)^{1/2},$$

定理 11.18 顯示，對每個複值可測函數 f，$|f|$ 爲可測。

設 μ 爲 X 上的測度，E 爲 X 的可測子集，f 爲 X 上複值函數，我們說在 E 上，$f\in\mathscr{L}$；如果 f 爲可測，且

$$\int_E |f|\,d\mu<+\infty。\tag{97}$$

若 (97) 式成立，我們並定義

$$\int_E f\,d\mu=\int_E u\,d\mu+i\int_E v\,d\mu.$$

又由於 $|u|\leq|f|$, $|v|\leq|f|$，而 $|f|\leq|u|+|v|$，故很明顯，(97) 式會成立若且唯若在 E 上，$u\in\mathscr{L}(\mu)$, $v\in\mathscr{L}(\mu)$.

定理 11.23(a), (d), (e), (f), 11.24(b), 11.26, 11.27, 11.29 及 11.32 等現在都可以擴展到複值函數的 Lebesgue 積分上，其證明都相當直接，只有定理 11.26 的證明是比較有趣的:

若在 E 上，$f\in\mathscr{L}(\mu)$，則有一複數 c, $|c|=1$ 使得

$$c\int_E f\,d\mu\geq 0.$$

令 $g=cf=u+iv$, u, v，皆實值，則

$$\left|\int_E f\,d\mu\right|=c\int_E f\,d\mu=\int_E g\,d\mu=\int_E u\,d\mu\leq\int_E |f|\,d\mu$$

上式中的第三個等號成立，是因爲由前幾個等式看來，$\int g d\mu$ 是實值的。

$\mathscr{L}^2$ 類的函數

作爲 Lebesgue 理論的應用，我們要擴展 Parseval 定理（我們在第 8 章中，只對連續函數證明過），並對函數的單直交系證明 Riesz-Fisher 定理。

11.34 定義　令 X 爲可測空間，我們說在 X 上，一個複値函數 $f \in \mathscr{L}^2$，如果 f 爲可測，而且

$$\int_X |f|^2 d\mu < +\infty。$$

如果 μ 是 Lebesgue 測度，則我們說 $f \in \mathscr{L}^2$，對 $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$（此後我們略去『在 X 上』這句話），我們定義

$$\|f\| = \left\{\int_X |f|^2 d\mu\right\}^{1/2},$$

並叫 $\|f\|$ 爲 f 的 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 範數。

11.35 定理　設 $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$ 且 $g \in \mathscr{L}(\mu^2)$，則 $fg \in \mathscr{L}(\mu)$，且

$$\int_X fg\, d\mu \leq \|f\| \cdot \|g\|. \tag{98}$$

這是 Schwarz 不等式，我們早在級數及 Riemann 積分裏見過了，它是由這個不等式導來的：

$$0 \leq \int_X (|f| + \lambda |g|)^2 d\mu = \|f\|^2 + 2\lambda \int_X |fg|\, d\mu + \lambda^2 \|g\|^2,$$

而這對所有實數 λ 都成立。

11.36 定理　若 $f \in \mathscr{L}^2(\mu)$，且 $g \in \mathscr{L}^2(\mu)$，則 $f+g \in \mathscr{L}^2(\mu)$，且

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

證明: 由 Schwarz 不等式知。

$$\|f+g\|^2=\int|f|^2+\int f\bar{g}+\int\bar{f}g+\int|g|^2$$
$$\leq\|f\|^2+2\|f\|\|g\|+\|g\|^2=(\|f\|+\|g\|)^2.$$

11.37 備註 如果我們定義，$\mathscr{L}^2(\mu)$ 中兩個函數 f 和 g 間的距離爲 $\|f-g\|$，我們看到，除了 $\|f-g\|=0$ 並不蘊涵對所有 x，而只是幾乎所有 x. $f(x)=g(x)$之外，定義 2.15 的條件都滿足了。因此，如果我們將一些只在某個測度 0 爲的集合上相異的函數，視爲同一，則 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 便會是個度量空間。

我們現在考慮實數線的區間上，對於 Lebesgue 測度的 $\mathscr{L}^2$。

11.38 定理 連續函數在 $[a,b]$ 上形成 $\mathscr{L}^2$ 的一個稠密子集。

更明白點講，這意思是，在 $[a,b]$ 上. 給了任意 $f\in\mathscr{L}^2$ 及任意 $\epsilon>0$，就有一個在 $[a,b]$ 上連續的函數 g，使得。

$$\|f-g\|=\left\{\int_a^b(f-g)^2dx\right\}^{1/2}<\epsilon.$$

證明: 我們說 f 在 $\mathscr{L}^2$ 中被序列 $\{g_n\}$ 所逼近，如果當 $n\longrightarrow\infty$, $\|f-g_n\|\longrightarrow 0$.

令 A 爲 $[a,b]$ 的閉子集，K_A 爲其特徵函數，令

$$t(x)=\inf|x-y| \qquad (y\in A),$$

且

$$g_n(x)=\frac{1}{1+nt(x)} \quad (n=1,2,3\cdots\cdots)$$

則 g_n 在 $[a,b]$ 上是連續，在 A 上 $g_n(x)=1$，而在 B 上，$B=[a,b]-A$，則 $g_n(x)\longrightarrow 0$。故由定理 11.32 知

$$\|g_n(x)-K_A\|=\left\{\int_B g_n{}^2dx\right\}^{1/2}\longrightarrow 0$$

因此，閉集合的特徵函數，在 $\mathscr{L}^2$ 中可以被連續函數所逼近。

由 (39) 知，對任何可測集合的特徵函數，也是這樣，因此

對單葉可測函數亦然。

如果 $f\geq 0, f\in\mathscr{L}^2$，令 $\{s_n\}$ 爲單葉非負可測函數所成的單調漸增序列，且 $s_n(x)\longrightarrow f(x)$。由於 $|f-s_n|^2\leq f^2$，定理 11.32 顯示，$\|f-s_n\|\longrightarrow 0$。

11.39 定義 我們說複値函數序列 $\{\phi_n\}$，是可測空間 X 上函數的單直交系（orthonormal set），如果

$$\int_X \phi_n\bar{\phi}_m d\mu=\begin{cases}0 & (n\neq m)\\ 1 & (n=m)\end{cases}$$

特別是，我們一定有 $\phi_n\in\mathscr{L}^2(\mu)$。如果 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$ 且若

$$c_n=\int_X f\bar{\phi}_n d\mu \quad (n=1,2,3\cdots\cdots)$$

則我們寫成，如定義 8.10 中一樣，

$$f\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n.$$

三角富氏級數的定義，可以同樣擴展到 $[-\pi,\pi]$ 上的 $\mathscr{L}^2$（甚至 $\mathscr{L}$）中。定理 8.11 及 8.12（Bessel 不等式）對任何 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$ 都成立，證明都一樣，逐字不易。

我們現在可以證明 Parseval 定理了。

11.40 定理 設

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}, \tag{99}$$

而在 $[-\pi,\pi]$ 上，$f\in\mathscr{L}^2$，令 s_n 爲 (99) 中第 n 部份和。則

$$\lim_{n\to\infty}\|f-s_n\|=0 \tag{100}$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2dx. \tag{101}$$

證明： 令 $\epsilon>0$ 已給。由定理 11.38 知，有連續函數 g，使得

$$\|f-g\|<\frac{\epsilon}{2}$$

尤有甚者，很容易看出，我們可以設法使得 $g(\pi)=g(-\pi)$。則 g 可以擴展爲週期連續函數。由定理 8.16 知，有一個三角多項式 T，次數爲 N 好了，使得

$$\|g-T\|<\frac{\epsilon}{2}$$

因此，由定理 8.11（已擴展至 $\mathscr{L}^2$ 了）知，$n\geq N$ 蘊涵了，

$$\|s_n-f\|\leq\|T-f\|<\epsilon$$

而導得（100)。正如定理 8.16 的證明，方程式（101）可由（100）導出。

系。若在 $[-\pi,\pi]$ 上，$f\in\mathscr{L}^2$，且若

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}=0 \qquad (n=0,\pm1\cdot\pm2\cdots\cdots)$$

則 $\|f\|=0$。

因此，如果 $\mathscr{L}^2$ 中的兩函數，具有同樣的富氏級數，則它們最多在一個測度爲 0 的集合上相異。

11.41 定義 令 f 及 $f_n\in\mathscr{L}^2(\mu)(n=1,2,3\cdots\cdots)$，如果 $\|f-f_n\|\longrightarrow 0$，則我們說 $\{f_n\}$ 在 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 中收斂到 f；如果對每個 $\epsilon>0$，有整數 N，使得 $n\geq N, m\geq N$，蘊涵了 $\|f_n-f_m\|<\epsilon$，則我們說 $\{f_n\}$ 是 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 中的 Cauchy 序列。

11.42 定理 如果 $\{f_n\}$ 是 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 中的 Cauchy 序列，則存在函數 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$，使得 $\{f_n\}$ 在 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 中收斂到 f

換言之，這就是說，$\mathscr{L}^2(\mu)$ 是個完備度量空間。

證明: 由於 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 序列，故我們可以找到序列 $\{n_k\}$，$k=1,2,\ ,\cdots\cdots$，使得

$$\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|<\frac{1}{2^k} \qquad (k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

選取函數 $g\in\mathscr{L}^2(\mu)$，則由 Schwarz 不等式知，

$$\int_X|g(f_{n_k}-f_{n_{k+1}})|d\mu\leq\frac{\|g\|}{2^k}.$$

因此

(102)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_X |g(f_{n_k}-f_{n_{k+1}})|\,d\mu\le\|g\|.$$

由定理 11.30 知，我們可以將 (102) 中的作和與積分互換，於是導得，在X上殆遍

(103)
$$|g(x)|\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|<+\infty.$$

因此，在X上殆遍。

(104)
$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)|<+\infty.$$

蓋若 (104) 的級數，在某個正測度的集合E上為發散，則我們可以取 $g(x)$ 在某個E的正測度子集合上不為 0，因而導致與(103)的矛盾。

由於級數，

$$\sum|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|,$$

在X上殆遍收斂，其第k部份和為

$$f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_1}(x),$$

我們看出

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}f_{n_k}(x)$$

這方程式，對幾乎所有$x\in X$，定義了 $f(x)$，至於我們在X其它點上如何定義 $f(x)$ 是無關緊要的。

我們現在要證明，f這個函數具有我們想要的性質。令$\epsilon>0$已給，選取在定義 11.41 中指示的N，如果 $n_k>N$，由 Fatou 定理知，

$$\|f-f_{n_k}\|\le\liminf_{i\to\infty}\|f_{n_i}-f_{n_k}\|\le\epsilon.$$

因此，$f-f_{n_k}\in\mathscr{L}^2(\mu)$，又因為 $f=(f-f_{n_k})+f_{n_k}$，我們知道 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$。此外，由於ϵ是任意的，

$$\lim_{k\to\infty}\|f-f_{n_k}\|=0$$

最後,

(105) $$\|f-f_n\|\leq\|f-f_{n_k}\|+\|f_{n_k}-f_n\|$$

這不等式顯示了 $\{f_n\}$ 在 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 中收斂到 f; 蓋若我們取的 n 及 n_k 够大, 則 (105) 右邊的兩項可以變得任意小。

11.43 Riesz-Fisher 定理 令 $\{\phi_n\}$ 在 X 上爲單直交。設若 $\sum|c_n|^2$ 收斂, 並令 $s_n=c_1\phi_1+\cdots\cdots+c_n\phi_n$。則存在函數 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$, 使得 $\{s_n\}$ 在 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 中收斂到 f, 且

$$f\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n.$$

證明: 對 $n>m$,

$$\|s_n-s_m\|=|c_{m+1}|^2+\cdots\cdots+|c_n|^2$$

因此 $\{s_n\}$ 爲 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 中的 Cauchy 序列。由定理 11.42 知, 有函數 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f-s_n\|=0$$

現在, 對 $n>k$,

$$\int_X f\bar{\phi}_k\,d\mu-c_k=\int_X f\bar{\phi}_k d\mu-\int_X s_n\bar{\phi}_k d\mu,$$

所以,

$$\left|\int_X f\bar{\phi}_k d\mu-c_k\right|\leq|f-s_n\|\cdot\|\phi_k\|+\|f-s_n\|$$

令 $n\longrightarrow\infty$, 我們看出

$$c_k=\int_X f\bar{\phi}_k d\mu\quad(k=1,2,3,\cdots\cdots)$$

證畢。

11.44 定義 一個單直交系 $\{\phi_n\}$ 稱做完備(Complete), 如果對 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$,

$$\int_X f\bar{\phi}_n d\mu=0\qquad(n=1,2,3\cdots\cdots)$$

則這方程式蘊涵了 $\|f\|=0$。

在定理 11.40 的系中，我們由 Parseval 方程式 (101)，導出了三角系的完備性。反之，Parseval 定理對每個完備單直交系都成立:

10.45　定理　令 $\{\phi_n\}$ 爲一完備單直交系，如果 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$，且

$$f\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n, \tag{106}$$

則

$$\int_X|f|^2d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2. \tag{107}$$

證明: 由 Bessel 不等式知，$\sum|c_n|^2$ 收斂。令

$$s_n=c_1\phi_1+\cdots\cdots+c_n\phi_n$$

Riesz-Fisher 定理顯示，有函數 $g\in\mathscr{L}^2(\mu)$，使得，

$$g\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n, \tag{108}$$

同時 $\|g-s_n\|\longrightarrow 0$。因此 $\|s_n\|\longrightarrow\|g\|$。由於

$$\|s_n\|^2=|c_1|^2+\cdots\cdots+|c_n|^2,$$

我們有

$$\int_X|g|^2d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2. \tag{109}$$

現在 (106),(108) 及 $\{\phi_n\}$ 的完備性顯示，$\|f-g\|\longrightarrow 0$。所以 (109) 蘊涵了 (107)。

定理 11.43 及 11.45 合起來，我們便得到非常有趣的結論，就是，每個單直交系，造成了一方是函數 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$（將那些殆遍相等的函數視做同一），另一方是序列 $\{c_n\}$, $\sum|c_n|^2$ 收斂，這兩者之間的一個 1-1 對應。

$$f\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n$$

這表現式以及 Parseval 方程式，顯示了 $\mathscr{L}^2(\mu)$ 可以看成是個無限維歐氏空間，（所謂的 “Hilbert 空間” ），其中的點 f，具

有座標 c_n，而 ϕ_n 這些函數是座標向量。

習 題

1. 若 $f\geq 0$，且 $\int_X f d\mu=0$，試證在 E 上，殆遍 $f=0$。

   提示：令 E_n 爲 E 的子集合，在其上 $f(x)>\frac{1}{n}$。令 $A=\bigcup E_n$。則 $\mu(A)=0$ 若且唯若對每個 n, $\mu(E_n)=0$.
2. 若對每個 E 的可測子集 A，$\int_A f d\mu=0$，則在 E 上，殆遍 $f=0$。
3. 若 $\{f_n\}$ 爲可測函數序列，試證使 $\{f_n(x)\}$ 收斂的點 x 所成的集合是可測。
4. 若 $f\in L(\mu)$ 且 g 在 E 上是有界而可測。則在 E 上，$fg\in L(\mu)$
5. 令

$$g(x)=\begin{cases}0 & (0\leq x\leq\frac{1}{2})\\ 1 & (1/2\leq x\leq 1)\end{cases}$$

$$f_{2k}(x)=g(x) \qquad (0\leq x\leq 1)$$

$$f_{2k+1}(x)=g(1-x) \qquad (0\leq x\leq 1)$$

   則

$$\liminf f_n(x)=0 \qquad (0\leq x\leq 1)$$

   但是

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\frac{1}{2}。$$

   〔與 (77) 式比較之〕。
6. 令

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & (|x|\leq n),\\ 0 & (|x|>n).\end{cases}$$

   則在 R^1 上，$f_n(x)\longrightarrow 0$ 均勻地。但。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n dx=2 \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

   (我們用 $\int_{-\infty}^{\infty}$ 代替 $\int_{R^1}$)。因此，均勻收斂性並不蘊涵定理 11.32 所

謂的制約收斂。不過，在有限測度的集合上，有界函數的均勻收斂序列是有界收斂 (boundedly convergent)。

7. 試找出在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathscr{R}$的充要條件。 提示：考慮例 10.6(b) 及定理 10.33。

8. 若在 $[a,b]$上，$f\in\mathscr{R}$，且若 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$，則在 $[a,b]$ 上，殆遍 $F'(x)=f(x)$。

9. 試證 (95) 所給的函數F，在 $[a,b]$ 上連續。

10 若 $\mu(X)<+\infty$，且在X上，$f\in\mathscr{L}^2(\mu)$，則在X上，$f\in\mathscr{L}(\mu)$. 但如果

$$\mu(X)=+\infty,$$

這便不眞。例如，

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|}$$

則在 R^1 上，$f\in\mathscr{L}^2$ 但在 R' 上，$f\notin\mathscr{L}$.

11. 若在X上，$f,g\in\mathscr{L}(\mu)$ 定義 f,g 間的距離爲

$$\int_X|f-g|\,d\mu$$

試證 $\mathscr{L}(\mu)$ 爲一完備度量空間。

12. 設 (a) $f|(x,y)|=1$ 　當$0\leq x\leq 1$，$0\leq y\leq 1$

(b) 對固定的 x, $f(x,y)$ 是y的連續函數。

(c) 對固定的y, $f(x,y)$ 是x的連續函數。

令

$$g(x)=\int_0^1 f(x,y)dy \qquad 0\leq x\leq 1$$

則g連續嗎?

13. 考慮函數

$$f_n(x)=\sin nx \quad (n=1,2,3,\cdots\cdots,\ -\pi\leq x\leq\pi)$$

爲 $\mathscr{L}^2$ 的點。試證這種點的集合是閉集，有界，但不緊緻。

14. 試證複值函數爲可測，若且唯若對每個平面上的開集合 V, $f^{-1}(V)$ 爲可測。

15. 令$\mathscr{R}$爲 $(0,1]$ 中所有基本集合所成的環。若$0<a\leq b\leq 1$，定義

$$\phi([a,b])=\phi([a,b))=\phi((a,b])=\phi((a,b))=b-a$$

但若 $0 < b \leq 1$，則定義

$$\phi((0,b))=\phi((0,b])=1+b$$

試證，這便給了一個在 $\mathscr{R}$ 上的加性集合函數，它不是正則，且它不能被擴充到在 σ- 環上的可數加性集合函數。

16. 設若 $\{n_k\}$ 爲正整數所成的漸增序列，而 E 爲所有 $x\in(-\pi,\pi)$ 而 $\{\sin n_k x\}$ 收斂的點 x 所成的集合。試證 $m(E)=0$。提示：對每個 $A\subset E$

$$\int_A \sin n_k x dx \longrightarrow 0,$$

且當 $k\longrightarrow\infty$

$$2\int_A(\sin n_k x)^2 dx=\int_A(1-\cos 2n_k x)dx \longrightarrow m(A).$$

17. 設 $E\subset(-\pi,\pi)$, $m(E)>0$，$\delta>0$，試利用 Bessel 不等式證明，對所有 $x\in E$，最多有有限多個整數 m，使得 $\sin nx\geq\delta$。

18. 設 $f\in\mathscr{L}^2(\mu)$, $g\in\mathscr{L}^2(\mu)$。試證

$$\left|\int f\bar{g}du\right|^2=\int|f|^2d\mu\int|g|^2d\mu,$$

若且唯若有一常數 c，使得殆遍 $g(x)=cf(x)$。（與定理 11.35 比較之）。

參考書目

ARTIN, E.: "The Gamma Function, " Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1964.

BOAS, R.P.: "A Primer of Real Functions," Carus Mathematical Monograph No. 13, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.

BUCK, R.C. (ed): "Studies in Modern Analysis," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

BUCK, R.C.: "Adavnced Calculus " 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

BURKILL, J.C.: "The Lebesgue Integral," Cambridge University Press, New Yoɹk, 1951.

DIEUDONNÉ, J.: "Foundations of Modern Analysis," Academic Press, 1960.

FLEMING, W.H.: "Functions of Several Variables, "Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.

GRAVES, L.M.: "The Theory of Functions of Real Variables," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

HALMOS, P.R.: "Measure Theory," D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1950

HALMOS, P.R.: "Finite-dimensional Vector Spaces," 2d ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N, J., 1958.

HARDY, G. H. : "Pure Mathematic," 9th ed., Cambridge University Press, New York, 1947.

HARDY, G. H., and ROGOSINSKI, W.: "Fourier Series," 2d ed., Cambridge University Press, New York, 1950.

HERSTEIN, I. N.: "Topics in Algebra," Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.

HEWITT, E., and STROMBERG, K.: " Real and Abstract Analysis," Spring Publishing Co., Inc., New York, 1965.

KELLOGG, O. D.: "Foundations of Potential Theory," Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1940.

KNoPP, K.: "Theory and Application of Infinite Series," Blackie & Son, Ltd., Glasgow, 1928.

LANDAU, E. G. H.: "Foundations of Analysis," Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

MCSHANE, E. J.: "Integration," Princeton University Press, Princeton, N. J., 1944.

NIVEN, I. M.: "Irrational Numbers," Carus Mathematical Monograph No. 11, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1956.

ROYDEN. H. L.: "Real Analysis," The Macmillan Company, New York, 1963.

RUDIN, W.: "Real and Complex Analysis," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.

SIMMONS, G. F.: "Topology and Modern Analysis," McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.

SINGER, I. M., and THORPE, J. A.: "Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry," Scott, Forseman and Company, Glenview, III., 1967.

SMITH, K. T.: "Primer of Modern Analysis," Bogden and Quigley, Tarrytown-on-Hudson, N. Y., 1971,

SPIVAK, M.: "Calculus on Manifold," W. A. Benjamin, Inc., New York, 1965.

THURSTON, H. A.: "The Number System," Blackie & Son, Ltd., London-Glasgow, 1956.

特殊符號一覽表

下面所列的符號之後，都附有該符號意義及其所定義的頁數

索引

G

H

I

T

分析學探原

68. 12. 0382

中華民國六十八年十二月初版　　定價：新臺幣三⊙⊙元

著　者 Walter Rudin
譯　者 施　克　剛
發行人 王　必　成

出版者　聯經出版事業公司
臺北市忠孝東路四段 555 號
電　話：7683708・7074151
郵政劃撥帳戶第 100559 號

行政院新聞局出版事業登記證局版臺業字第 0130 號

・31003・