具体数学阅读笔记-chap2

weiyuan

2022-07-04

0.1 求和

0.1.1 求和符号

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant k<100} k^2 &= 1^2+3^2+\cdots+99^2 \\
&= 1^2+2^2+\cdots+100^2-(2^2+4^2+\ldots 100^2) \\
&= 1^2+2^2+\cdots+100^2-4\times(1^2+2^2+\ldots 50^2) \\
&= \frac{100\times 101\times 201}{6}-4\frac{50\times 51\times 101}{6} \\
&= \frac{100\times 101}{6}(201-102) \\
&= \frac{99\times 100\times 101}{6} \\
&= 166650
\end{aligned}$$

一般形式比有确定界限形式更好处理

$k \to k+1$

一般形式,

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k = \sum_{1\leqslant k+1\leqslant n} a_{k+1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} a_{k+1} \tag{2}$$

有确定界限形式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k-1} \tag{3}$$

不要轻易省略 0 项计算有效性不等同于理解的有效性

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(n-k) \qquad \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k)$$

保持求和界限简单大有裨益

$$\sum_{\substack{p\leqslant N \\ p\text{是素数}}} \frac{1}{p} = \sum_{p} [p\text{是素数}][p\leqslant N]/p \tag{4}$$

$$[p(k)]\ \text{约定} \to p(k)\ \text{为假} \begin{cases} [p(k)]\text{必定是}0 \\ a_k[p(k)], a_k\text{无意义,}\ a_k[p(k)]\text{仍是}0 \end{cases}$$

由约定 $\frac{[0\text{是素数}][0\leqslant N]}{0} = 0$

0.1.2 求和与递归式 Sums and recurrences

和式

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{5}$$

等价于递归式

封闭形式解递归式的值 $\Rightarrow$ 封闭形式解和式

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_n = S_{n-1} + a_n, \quad n > 0. \end{cases} \tag{6}$$

若 $a_n = const. + k \cdot n$, 则有

$$\begin{cases} R_0 = \alpha \\ R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n, \quad n > 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 + \beta + \gamma \\ R_2 &= R_0 + 2\beta + 3\gamma \\ &\vdots \\ R_n &= A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \end{aligned}$$

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma \tag{8}$$

repertoire method 令 $R_n = 1$, 则 $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$,

$$A(n) = 1$$

令 $R_n = n$, 则 $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0$,

$$B(n) = n$$

令 $R_n = n^2$, 则 $\alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 2$,

$$C(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

例 1.

$$\sum_{k=0}^{n} (a + bk)$$

解 1.

$$\begin{cases} R_0 = a \\ R_n = R_{n-1} + a + bn \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_0 = \alpha \\ R_n = R_{n-1} + \beta + \gamma n \end{cases}$$

$\alpha=\beta=a,\gamma=b$

$$\begin{aligned}A(n)\alpha+B(n)\beta+C(n)\gamma &= aA(n)+aB(n)+bC(n)\\ &= a+an+b\frac{n(n+1)}{2}\\ &= a(n+1)+\frac{bn(n+1)}{2}\end{aligned}$$

对上述递归情况进行推广

$$\begin{cases}R_0=\alpha\\ R_n=R_{n-1}+\beta+\gamma n+\delta n^2, \quad n>0\end{cases} \tag{9}$$

$$R_n=A(n)\alpha+B(n)\beta+C(n)\gamma+D(n)\delta \tag{10}$$

$\delta=0$ 时 (9) 与 (7) 一致, 说明 $A(n),B(n),C(n)$ 不变
$R_n=n^3$

$$\begin{aligned}R_n=R_{n-1} &= n^3-(n-1)^3\\ &= 3n^2-3n+1\end{aligned}$$

解得 $\alpha=0,\beta=1,\gamma=-3,\delta=3$

$$\begin{aligned}n^3 &= B(n)-3C(n)+3D(n)\\ &= n-3\frac{n(n+1)}{2}+3D(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3D(n) &= n^3-n+3\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n(n+1)\left[(n-1)+\frac{3}{2}\right]\\ &= n(n+1)(n+\frac{1}{2})\\ D(n) &= \frac{1}{3}\left((n+1)(n+\frac{1}{2})n\right)\end{aligned}$$

1. 和式用递归式求解
2. 递归式用和式求解

$$\begin{cases}T_0 & =0\\ T_n & =2T_{n-1}+1, \quad n>0\\ fallings\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{T_0}{2^0} & =0\\ \frac{T_n}{2^n} & =\frac{T_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}, \quad n>0\end{cases}$$

记 $S_n=\frac{T_n}{2^n}$

求和因子 s_n

$$a_nT_n = b_nT_{n-1} + c_n$$
$$s_na_nT_n = s_nb_nT_{n-1} + s_nc_n$$

选取求和因子使得 $s_nb_n = s_{n-1}a_{n-1}$ 这样一来，如果记 $S_n = S_{n-1} + s_nc_n$，我们就得到一个和式-递归式

$$S_n = S_{n-1} + s_nc_n$$

$$S_n = s_0a_0T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k = s_1b_1T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k$$

$$T_n = \frac{1}{s_na_n}\left(s_0a_0T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_kc_k\right) \tag{11}$$

例如，当 $n = 1$ 时得到 $T_1 = \frac{(s_1b_1T_0 + s_1c_1)}{s_1a_1} = \frac{(b_1T_0 + c_1)}{a_1}$ [1]

但是，我们怎样才能有足够的智慧求出正确的 s_n 呢？没有问题：关系式 $s_n = \frac{s_{n-1}a_{-1}}{b_n}$ 可以被展开，从而我们发现，分式

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1}{b_nb_{n-1}\dots b_2} \tag{12}$$

或者这个值的任何适当的常数倍，会是一个合适的求和因子. 例如，河内塔递归式有 $a_n = 1$ 和 $b_n = 2$，由刚刚推导出来的一般方法可知，如果要把递归式转化为和式，那么 $s_n = 2^{-n}$ 就是一个用来相乘的好东西. 发现这个乘数并不需要闪光的思想灵感.

我们必须小心谨慎，永远不用 0 做除数. 只要所有的 a 和所有的 b 都不为零，那么求和因子方法就能奏效.

我们来把这些想法应用到“快速排序”研究中所出现的递归式，快速排序是计算机内部数据排序的一种最重要的方法. 当把它应用到有 n 个随机排列的项目时，用典型的快速排序方法所做的比较步骤的平均次数满足递归式

$$C_0 = C_1 = 0; C_n = n + 1 + \tfrac{2}{n}\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad n > 1. \tag{13}$$

$C_2 = 3$, $C_3 = 6$, $C_4 = \frac{19}{2}$

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad n > 1.$$

消去分母中的 n

$$nC_n = n(n+1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad n > 1. \tag{14}$$

[1] s_1 的值消去了，所以它可以是除零以外的任何数.）

$n \to (n-1)$

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)n + 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k, \quad n-1 > 1. \tag{15}$$

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1}, \quad n > 2.$$

递归式化为

$$C_0 = C_1 = 0; C_2 = 3nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n, \quad n > 2. \tag{16}$$

使用求和因子方法处理 $a_n = n, b_n = n+1$ 且

$$c_n = 2n - 2[n=1] + 2[n=2].$$

故而我们现在能用求和因子方法. 前面描述的一般方法告诉我们, 要用

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1}{b_n b_{n-1}\ldots b_2} = \frac{(n-1)\times(n-2)\cdots\times 1}{(n+1)\times n\times\cdots\times 3} = \frac{2}{(n+1)n}$$

的某个倍数来遍乘该递归式

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}\left(s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right)$$

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{n+1}{2}\left(0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\right) \\
&= \frac{n+1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} 2k\right) \\
&= 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{2}{3}(n+1), \quad n > 1
\end{aligned}$$

mynote(! 这里的推导有问题, $s_0 = 0$ 不能直接代入)

调和数（harmonic number）

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{17}$$

之所以这样命名, 是因为小提琴弦所产生的第 k 个泛音（harmonic）是弦长 $\frac{1}{k}$ 处所产生的基音.

$$\begin{aligned}
\sum_{q\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k+1} &= \sum_{1\leqslant k-1\leqslant n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{2\leqslant k\leqslant n+1} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k} - \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1} \\
&= H_n - \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$C_n = 2(n+1)H_n - \frac{8}{3}n - \frac{2}{3},\ n > 1. \tag{18}$$

0.1.3 求和式处理

分配律 distributive law
结合律 associative law
交换律 communicative law
等差级数 arithmetic progression
扰动法 perturbation method 把单独一次从和式中分出去
几何级数 geometric progression

0.1.4 多重求和

Exercise 1

$$A = \begin{bmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

求 $S_{\triangleleft} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_j a_k$ [2]

解 2. $\because a_ja_k = a_ka_j$, $\therefore$ 矩阵 A 沿主对角线对称, $S_{\triangleleft} = S_{\triangleright}$.

$$[1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n] + [1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n] = [1 \leqslant j, k \leqslant n] + [1 \leqslant j = k \leqslant n]$$

$$\begin{aligned} 2S_{\triangleleft} &= S_{\triangleleft} + S_{\triangleright} = S_A + S_{diag(A)} \\ &= \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_ja_k + \sum_{1\leqslant j=k\leqslant n} a_ja_k \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \end{aligned}$$

$\therefore S_{\triangleleft} = \frac{1}{2}[(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2]$

[2] 下三角形矩阵的符号是一个右上部分的直角三角形, 目前我还不会输入

Exercise 2

$$S = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \tag{20}$$

解 3. 交换 j, k 仍有对称性.

$$S = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_j - a_k)(b_j - b_k)$$

$$[1 \leqslant j < k \leqslant n] + [1 \leqslant k < j \leqslant n] = [1 \leqslant j, k \leqslant n] - [1 \leqslant j = k \leqslant n]$$

$$\begin{aligned}
2S &= 2 \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\
&= \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) + \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\
&= \sum_{1 \leqslant j, k \leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) - \sum_{1 \leqslant j = k \leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\
&(a_j - a_k = 0, b_j - b_k = 0, [j = k]) \qquad = \sum_{1 \leqslant j, k \leqslant n} (a_k b_k - a_j b_k - a_k b_j + a_j b_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j b_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j b_j \\
&= n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j b_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_j + n \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \\
&= 2n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - 2 \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} b_k
\end{aligned}$$

$$S = n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right)$$

对上式结果重新排序得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) = n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

定理 1. 切比雪夫单调不等式 (Chebyshec's monotonic inequality)

$$\begin{aligned}
\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} b_k\right) &\leqslant n \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \qquad && a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, \text{and } b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n \\
& && a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, \text{and } b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \\
\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} b_k\right) &\geqslant n \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \qquad && a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, \text{and } b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \\
& && a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, \text{and } b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n
\end{aligned}$$

一般来说，如果 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 且 p 是 $\{1,\dots,n\}$ 的一个排列。那么不难证明:
当 $b_{p(1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{p(n)}$ 时 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{P(k)}$ 最大.
当 $b_{p(1)} \geqslant \cdots \geqslant b_{p(n)}$ 时 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{P(k)}$ 最小.

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{P(k)\in K} a_{P(k)}$$

$P(k)$ 为这些整数的任意一个排列。

$$f : J \Rightarrow K, \quad j \in J \quad f(j) \in K$$

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{k\in K} a_k \quad \#f^{-}(k)$$

式中 $\#f^{-}(k)$ 表示集合 $f^{-}(k) = \{j|f(j) = k\}$ 中元素的个数

$$\sum_{j\in J} [f(j) = k] = \#f^{-}(k)$$

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_k[f(j) = k] = \sum_{k\in K} a_k \sum_{j\in J} [f(j) = k]$$

若有 $\#f^{-}(k) = 1$ (一一对应)[3]

$$\sum_{j\in J} a_{f(j)} = \sum_{f(j)\in K} a_{f(j)} = \sum_{k\in K} a_k$$

Exercise 3

$$S_n = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j}$$

首先写出前几项，尝试寻找规律:

$$\begin{aligned}
S_1 &= 0\\
S_2 &= \frac{1}{2-1} = 1\\
S_3 &= \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-2} = \frac{5}{2}\\
S_4 &= \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{4-1} + \frac{1}{3-2} + \frac{1}{4-2} + \frac{1}{4-3} = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

[3]这里还不太理解

解 4. 1. 先对 j 求和

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{1\leqslant j<k}\frac{1}{k-j} \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{1\leqslant (k-j)<k}\frac{1}{k-(k-j)} \quad j\Rightarrow (k-j) \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{0<j\leqslant k-1}\frac{1}{j} \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} H_{k-1} \quad (H_k\text{为调和级数}) \\
&= \sum_{1\leqslant k+1\leqslant n} H_k \quad k\Rightarrow k+1 \\
&= \sum_{0\leqslant k<n} H_k
\end{aligned}
$$

2. 先对 k 求和

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j<k\leqslant n}\frac{1}{k-j} \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j<(k+j)\leqslant n}\frac{1}{(k+j)-j} \quad k\Rightarrow (k+j) \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{0<k\leqslant n-j}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} H_{n-j} \quad (H_k\text{为调和级数}) \\
&= \sum_{1\leqslant n-j\leqslant n} H_k \quad j\Rightarrow n-j \\
&= \sum_{0\leqslant j<n} H_j
\end{aligned}
$$

以上两种常用的求和顺序都无法得到这个多重求和的结果，我们需要转换思路.

3. 先用 $k+j$ 替换 k (先换元，再求和)

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant j<(k+j)\leqslant n}\frac{1}{(k+j)-j} \quad k\Rightarrow k+j \\
&= \sum_{1\leqslant j<(k+j)\leqslant n}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{1\leqslant j\leqslant n-k}\frac{1}{k} \quad \text{首先对}j\text{求和} \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{n-k}{k} \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{n}{k}-1\right) = nH_n - n
\end{aligned}
$$

综上可得 $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} H_k = nH_n - n$

代数：$k + f(j)$, f 为任意函数.
用 $k - f(j)$ 替换 k，并对 j 先求和较好。
几何：S_n $(n = 4)$

$$\begin{array}{ccccc} & k=1 & k=2 & k=3 & k=4 \\ j=1 & & \frac{1}{1} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ j=2 & & & +\frac{1}{1} & +\frac{1}{2} \\ j=3 & & & & +\frac{1}{1} \\ j=4 & & & & \end{array}$$

先对 j 求和 (按列) $H_1 + H_2 + H_3$ 先对 k 求和 (按行) $H_3 + H_2 + H_1$ $k \Rightarrow k + j$ 按对角线求和

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{k} = n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$nH_n - n$,$n = 4$

$$\begin{aligned} \frac{4}{1} + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} &= \sum_{k=1}^{4} \frac{4-k}{k} \\ &= 4\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{4} 1 \\ &= 4H_4 - 4 \end{aligned}$$

$$4\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - 4 = \frac{4}{2} + \frac{4}{3} + \frac{4}{4}$$

$$\begin{array}{ccccc} & k-j=0 & k-j=1 & k-j=2 & k-j=3 \\ j=1 & & \frac{1}{1} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} \\ j=2 & & \frac{1}{1} & +\frac{1}{2} & \\ j=3 & & \frac{1}{1} & & \\ j=4 & & & & \end{array}$$

0.1.5 General methods

Exercise 4

求 $\Box_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k^2$, $n \geqslant 0$ 的封闭形式

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2 - 2k - 1] \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - 2\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0^2-(n+1)^2 &= -2\sum_{k=0}^{n}k-(n+1)\\
2\sum_{k=0}^{n}k &= (n+1)^2-(n+1)\\
\sum_{k=0}^{n}k &= \frac{(n+1)n}{2}
\end{aligned}
$$

上述运算没有告诉我们 $\square_n$ 的值，但却能推导出 $\sum_{k=0}^{n}k$ 的值。我们可以利用这种思路求解 $\square_n$ 。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^3-k^3\right] &= \sum_{k=0}^{n}\left[3k^2+3k+1\right]\\
(n+1)^3-0^3 &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1\\
(n+1)^3 &= 3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3\sum_{k=0}^{n}k^2 &= (n+1)^3-3\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\\
\sum_{k=0}^{n}k^2 &= \frac{1}{3}(n+1)\left((n+1)^2-\frac{3}{2}n-1\right)\\
\sum_{k=0}^{n}k^2 &= \frac{1}{3}(n+1)(n+\frac{1}{2})n
\end{aligned}
$$

reference book list:

1. (CRC Tables) CRC Standard Mathematical Tables
2. Handbook of Mathematical Functions
3. Sloane. Handbook of Integer Sequences

software:

Axiom MACSYMA Maple Mathematica

my: Octave maxima 熟悉标准的信息源

方法 3：建立成套方法

参考第二节的内容

方法 4：用积分替换和式 $\sum \Rightarrow \int$

$$\square_n = 1\times 1+1\times 4+1\times 9+\cdots+1\times n^2$$

该式近似等于 0 到 n 之间曲线 $f(x)=x^2$ 下的面积

$$\begin{aligned} S &= \int_0^n x^2 dx \\ &= \frac{n^3}{3} \end{aligned}$$

$\Box_n$ 近似等于 $\frac{n^3}{3}$ 。近似的误差 $E_n = \Box_n - \frac{n^3}{3}$

1. 近似误差项递归式

$$\begin{aligned} \Box_n &= \Box_{n-1} + n^2 \\ E_n &= \Box_n - \frac{n^3}{3} = \Box_{n-1} + n^2 - \frac{n^3}{3} \\ E_{n-1} &= \Box_{n-1} - \frac{(n-1)^3}{3} \\ E_n &= E_{n-1} + \frac{(n-1)^3}{3} + n^2 - \frac{n^3}{3} \\ &= E_{n-1} + \frac{-3n^2+3n-1}{3} + n^2 \\ &= E_{n-1} + n - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. 对楔形误差项面积求和

$$\begin{aligned} \Box_n - \int_0^n x^2 dx &= \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - \int_{k-1}^{k} x^2 dx \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - \frac{k^3-(k-1)^3}{3} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1}{3} \right) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n(3n+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \Box_n &= \frac{n^3}{3} + E_n \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n(3n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2n^2+3n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \end{aligned}$$

方法 5：展开和收缩

$$
\begin{aligned}
\Box_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k^2 &= \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} k \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j\leqslant k\leqslant n} k \\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{(j+n)(n-j+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(n(n+1)+j-j^2) \\
&= \frac{1}{2}\left[n^2(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}-\Box_n\right] \\
&= \frac{1}{2}n(n+\frac{1}{2})(n+1)-\frac{1}{2}\Box_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}\Box_n &= \frac{1}{2}n(n+\frac{1}{2})(n+1) \\
\Box_n &= \frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)
\end{aligned}
$$

方法 6：使用有限微积分

方法 7：用生成函数

0.1.6 有限微积分和无限微积分 Finite and infinite calculus

表 1: 有限微积分和无限微积分中的运算对比

无限微积分	有限微积分
微分算子 D	差分算子 Δ

$$
\begin{array}{ll}
Df(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} & \Delta f(x) = f(x+1)-f(x) \\
D(x^m) = mx^{m-1} & \Delta(x^3) = 3x^2+3x+1
\end{array}
$$

为使差分运算在形式上与微分运算类似，引入下降阶乘幂和上升阶乘幂。

下降阶乘幂 (failing factorial power), $x^{\underline{m}}$, 读作 x 直降 m 次.

$$
x^{\underline{m}} = \underbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}_{m\text{ 个因子}}, \quad (m\leqslant 0, m\in\mathbb{N})
$$

上升阶乘幂 (rising factorial power), $x^{\overline{m}}$, 读作 x 直升 m 次.

$$
x^{\overline{m}} = \underbrace{x(x+1)\ldots(x+m-1)}_{m\text{ 个因子}}, \quad (m\leqslant 0, m\in\mathbb{N})
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta(x^{\underline{m}}) &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\
&= (x+1)x\ldots(x+1-m+1) - x(x-1)\ldots(x-m+1) \\
&= (x+1-(x-m+1))x(x-1)\ldots(x-m+2) \\
&= mx(x-1)\ldots(x-m+2) \\
&= mx^{\underline{m-1}}
\end{aligned}
$$

表 2: 有限微积分和无限微积分中的运算对比

无限微积分	有限微积分
D 逆运算 $\int$ (积分算子，逆微分算子)	Δ 逆运算 $\sum$ (求和算子，逆差分算子)
微积分基本定理	
$g(x) = Df(x) \iff \int g(x)dx = f(x) + C$	$g(x) = \Delta f(x) \iff \sum g(x)\delta(x) = f(x) + C$
定积分	和式
若 $g(x) = Df(x)$ 那么	若 $g(x) = \Delta f(x)$ 那么
$\int_a^b g(x)dx = f(x)\|_a^b = f(b) - f(a)$	$\sum_a^b g(x)\delta x = f(x)\|_a^b = f(b) - f(a)$
$\int_b^a g(x)dx = -\int_a^b g(x)dx$	$\sum_b^a g(x)\delta x = -\sum_a^b g(x)\delta x$
$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$	$\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$
$\int_0^n x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big\|_0^n = \frac{n^{m+1}}{m+1}, m \neq -1$	$\sum_0^n k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big\|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, m \neq -1$ $\sum_0^n k^{\overline{m}} = \frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1}\Big\|_0^n = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}, m \neq -1$
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	$(x+y)^{\underline{2}} = x^{\underline{2}} + 2x^{\underline{2}}y^{\underline{1}} + y^{\underline{2}}$ $(x+y)^{\overline{2}} = x^{\overline{2}} + 2x^{\overline{1}}y^{\overline{1}} + y^{\overline{2}}$
$m = -1, \int_a^b x^{-1} = \ln x\Big\|_a^b$	$m = -1, \sum_a^b k^{\underline{-1}} = H_k\Big\|_a^b$
$\int_a^b x^m = \begin{cases} \frac{x^{m+1}}{m+1}\Big\|_a^b, & m \neq -1 \\ \ln n\Big\|_a^b, & m = -1 \end{cases}$	$\sum_a^b k^{\underline{m}} = \begin{cases} \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big\|_a^b, & m \neq -1 \\ H_k\Big\|_a^b, & m = -1 \end{cases}$ $\sum_a^b k^{\overline{m}} = \begin{cases} \frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1}\Big\|_a^b, & m \neq -1 \\ H_{(k+1)}\Big\|_a^b, & m \neq -1 \end{cases}$
连续性问题的解中会出现自然对数	快速排序这样的问题中会出现调和数的原因
e^x, 性质 $De^x = e^x$	$\Delta f(x) = f(x), f(x) = 2^x$ 离散指数函数

$$
g(x) = Df(x), \iff \underbrace{\int g(x)dx}_{\text{不定积分}} = f(x) + \underbrace{C}_{\text{任意常数}} \tag{21}
$$

$$g(x)=\Delta f(x), \iff \underbrace{\sum g(x)\delta(x)}_{\text{不定和式}} = f(x) + \underbrace{C}_{\text{满足}p(x+1)=p(x)\text{的任意函数}} \tag{22}$$

$$\sum_a^b g(x)\delta x = f(x)|_a^b = f(b) - f(a) \tag{23}$$

设 $g(x)=\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$
如果 $b=a$, 我们就有

$$\sum_a^a g(x)\delta x = f(a) - f(a) = 0 \tag{24}$$

如果 $b=a+1$, 我们就有

$$\sum_a^{a+1} g(x)\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a) \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\sum_a^{b+1} g(x)\delta x - \sum_a^b g(x)\delta x &= \big[f(b+1)-f(a)\big] - \big[f(b)-f(a)\big] \\ &= f(b+1) - f(b) = g(b)\end{aligned}$$

由数学归纳法 $a,b\in\mathbb{N}$ 且 $b\leqslant a$ 时，$\sum_a^b g(x)\delta x$ 的确切含义是

$$\sum_a^b g(x)\delta x = \sum_{k=1}^{b-1} g(k) = \sum_{a\leqslant k<b} g(k), \quad (b\geqslant a, a, b\in\mathbb{N}) \tag{26}$$

若有 $g(x)=f(x+1)-f(x)$

$$\sum_{a\leqslant k<b} g(l) = \sum_{a\leqslant k<b} (f(k+1)-f(k)) = f(b)-f(a)$$

$$\begin{aligned}\sum_a^b g(x)\delta x &= f(b)-f(a) \qquad (b<a) \\ &= -(f(a)-f(b)) = -\sum_a^b g(x)\delta x\end{aligned}$$

$$\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$$

应用：计算下降幂和式的简单方法

$$\sum_{0\leqslant k<n} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, \quad \big(m,n\geqslant 0 \quad m,n\in\mathbb{N}^+\big) \tag{27}$$

$m=1$ 时，$k^{\underline{1}}=k$

$$\sum_{0\leqslant k<n} k=\frac{n^{\underline{2}}}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

$k^2=k(k-1)+k=k^{\underline{2}}+k^{\underline{1}}$

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n} k^2&=\frac{n^{\underline{3}}}{3}+\frac{n^{\underline{2}}}{2}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)}{3}+\frac{n(n-1)}{2}\\&=\frac{1}{3}n(n-\frac{1}{2})(n-1)\end{aligned}$$

$k^3=k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k=k^{\underline{3}}+3k^{\underline{2}}+k^{\underline{1}}$

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n} k^3&=\frac{n^{\underline{4}}}{4}+3\frac{n^{\underline{3}}}{3}+\frac{n^{\underline{2}}}{2}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{3}+\frac{n(n-1)}{2}\\&=\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)^2=\left(\sum_{0\leqslant k<n} k\right)^2\end{aligned}$$

负指数下降幂

$$\begin{aligned}x^{\underline{3}}&=x(x-1)(x-2)\\x^{\underline{2}}&=x(x-1)\\x^{\underline{1}}&=x\\x^{\underline{0}}&=1\\x^{\underline{-1}}&=\frac{1}{x+1}\\x^{\underline{-2}}&=\frac{1}{(x+1)(x+2)}\\&\vdots\\x^{\underline{-m}}&=\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}\end{aligned}$$

$$x^{\underline{3}}\cdot\frac{1}{x-3+1}=x^{\underline{2}}\Rightarrow x^{\underline{0}}\cdot\frac{1}{x-0+1}=x^{\underline{-1}}$$

为什么选用 $x^{\underline{-1}}=\frac{1}{x+1}$ 而不是 $x^{\underline{-1}}=\frac{1}{x+1}$ 作为下降阶乘幂的拓展定义?[4]

通常幂法则 $x^{m+n}=x^mx^n$, 推广:

$x^{\underline{m+n}}=x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}$, $(m,n\in\mathbb{N}^+)$

$x^{\overline{m+n}}=x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$, $(m,n\in\mathbb{N}^+)$

[4]当一个原有的记号被拓展包含更多种情形时，以一种使得一般性法则继续成立的方式来表述它的定义，这永远是最佳选择

my 推广至正指数下降幂

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{3}} &= x(x+1)(x+2) \\
x^{\overline{2}} &= x(x+1) \\
x^{\overline{1}} &= x \\
x^{\overline{0}} &= 1 \\
x^{\overline{-1}} &= \frac{1}{x-1} \\
x^{\overline{-2}} &= \frac{1}{(x-1)(x-2)} \\
&\vdots \\
x^{\overline{-m}} &= \frac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(x-m)}
\end{aligned}
$$

$$
x^{\overline{3}} \cdot \frac{1}{x+3} = x^{\overline{2}} \Rightarrow x^{\overline{0}} \cdot \frac{1}{x+0-1} = x^{\overline{-1}}
$$

例如

$$
\begin{aligned}
x^{\underline{2+3}} &= x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{3}} = x^{\underline{3}}(x-3)^{\underline{2}} \\
x^{\underline{2-3}} &= x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{-3}} \\
&= x(x-1)\frac{1}{(x-2+1)(x-2+2)(x-2+3)} \\
&= x(x-1)\frac{1}{(x-1)x(x+1)} \\
&= \frac{1}{x+1}
\end{aligned}
$$

$m<0$ 时，$\Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$ 是否仍成立?

$$
\begin{aligned}
\Delta x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\
&= \frac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\
&= -2x^{\underline{-3}}
\end{aligned}
$$

通常幂法则对负指数下降阶乘幂仍然成立。

离散指数函数 2^x

$$
\begin{aligned}
&\Delta(c^x) = c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x \\
&c \neq 1 \frac{c^x}{c-1} \overset{\Delta}{\Longrightarrow} c^x \\
&\sum_{a\leqslant k<b} c^k = \sum_a^b c^x \delta x = \frac{c^x}{c-1}\Big|_a^b = \frac{c^b-c^a}{c-1},\ c\neq 1
\end{aligned}
$$

表 3: Table 55(1994), What's difference

$f=\sum g$	$\Delta f = g$
$x^{\underline{0}} = 1$	0
$x^{\underline{1}} = x$	1
$x^{\underline{2}} = x(x-1)$	$2x$
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$
$x^{\underline{m+1}}$	$(m+1)x^{\underline{m}}$
H_x	$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1}$
2^x	2^x
c^x	$(c-1)c^x$
$\frac{c^x}{c-1}$	c^x
$cu(x)$, c is constant	$c\Delta u(x)$
$u+v$	$\Delta u + \Delta v$
uv	$u\Delta v + Ev\Delta u$, $Ev = v(x+1)$

$$D(uv) = uDv + vDu \tag{28}$$

$$\int uDv = uv - \int vDu \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\Delta(u(x)v(x)) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x) \\ &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1) + u(x)v(x+1) - u(x)v(x) \\ &= \Delta u(x)v(x+1) + u(x)\Delta v(x) \\ &= u\Delta v + Ev\Delta u\end{aligned} \tag{30}$$

其中 E 被称为移位算子.
在无限微积分中，令 $x+1 \to x$ 无限细分，避开了 E

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u \tag{31}$$

例 2. $\int xe^x dx \xrightarrow{\text{离散模拟}} \sum x2^x \delta x \qquad (\sum_{k=0}^{n} k2^k)$

解 5. 令 $u(x) = x, \delta v(x) = 2^x$,
可得 $\delta u(x) = 1, v(x) = 2^x, Ev = 2^{x+1}$

$$\begin{aligned}\sum x2^x\delta x &= x\cdot 2^x - \sum 2^{x+1}\cdot 1\delta x \\ &= x\cdot 2^x - 2^{x+1} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_0^n k2^k &= \sum_0^{n+1} x2x\delta x \\ &= x\cdot 2^x - 2^{x+1}\Big|_0^{n+1}\end{aligned}$$

关于第二组等式的推导，我一开始没有完全掌握，主要是对求和符号 $\sum$ 的上下标范围存在误解.

记 $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k2^k = S_n$

$$
\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k2^k + (n+1)2^{n+1} &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n+1} k2^k \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} (k-1)2^k + \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} 2^k \\
&= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} k2^{k+1} + \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} 2^k \\
&= 2S_n + \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1} 2^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n + (n+1)2^{n+1} &= 2S_n + \frac{2^{n+1}-2^1}{2-1} \\
S_n &= (n+1)2^{n+1} - (2^{n+1}-2) \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{0\leqslant k<n} H_k = nH_n - n \tag{32}
$$

求解看起来更困难的和式 $\sum_{0\leqslant k<n} kH_k$

类比 $\int x \ln x dx$

$$
\begin{aligned}
I &= \int x \ln x dx \\
&= x^2 \ln x - \int x(\ln x + x \cdot \frac{1}{x})dx \\
&= x^2 \ln x - I - \int x dx \\
I &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C
\end{aligned}
$$

对 $\sum_{0\leqslant k<n} kH_k$，取 $u(x) = H_x\Delta$, $v(x) = x = x^{\underline{1}}$

$\Delta u(x) = x^{\underline{-1}}$, $v(x) = \frac{1}{2}x^{\underline{2}}$,$Ev(x) = v(x+1) = \frac{1}{2}(x+1)^{\underline{2}}$

$$
\begin{aligned}
\sum xH_x\delta x &= \frac{1}{2}x^{\underline{2}}H_x - \sum \frac{1}{2}(x+1)^{\underline{2}}x^{\underline{-1}}\delta x \\
&= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \sum \frac{(x+1)x}{2}\frac{1}{x+1}\delta x \\
&= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \sum \frac{x^{\underline{1}}}{2}\delta x \\
&= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{1}{4}x^{\underline{2}} + C
\end{aligned}
$$

$$\sum_{0\leqslant k<n} kH_k = \sum_{x=0}^{n-1} xH_x\delta x = \frac{(n-1)^{\underline{2}}}{2}(H_{n-1}-\frac{1}{2})$$

教材上是

$$\sum_{0\leqslant k<n} kH_k = \sum_{x=0}^{n} xH_x\delta x = \frac{n^{\underline{2}}}{2}(H_n-\frac{1}{2})$$

借助有限微积分的原理，我们很容易地记住

$$\sum_{0\leqslant k<n} k = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = n(n-1)/2 \tag{33}$$

[5] myex $\sum_{0\leqslant k<n} H_k$

$$\begin{aligned} u(x) &= H_x & \Delta v(x) &= x^{\underline{0}} = 1 \\ \Delta u(x) &= x^{\underline{-1}} & v(x) &= x^{\underline{1}} \\ & & Ev(x) &= v(x+1) = (x+1)^{\underline{1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum H_x \cdot 1\delta x &= x^{\underline{1}}H_x - \sum x^{\underline{-1}}(x+1)^{\underline{1}}\delta x \\ &= x^{\underline{1}}H_x - \sum x^{\underline{0}}\delta x \\ &= x^{\underline{1}}H_x - x^{\underline{1}} + C \end{aligned}$$

$$\sum_{0\leqslant k<n} H_k = \sum_{0}^{n} H_x\delta x = nH_n - n - (0-0) = nH_n - n$$

0.1.7 无限和式 Infinite sums

a_k 非负，$\sum_{k\in K} a_k$

定义 1. 如果有 $A = const$. s.t. $\forall$ 有限子集 $F \subset K$, 均有

$$\sum_{k\in F} a_k \leqslant A$$

那么我们定义 $\sum_{k\in K} a_k$ 是最小的这样的 A (所有这样的 A 总包含一个最小元素)。若没有这样的常数 A，我们就说 $\sum_{k\in K} a_k = \infty$ 即 $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists$ 有限多项 a_k 组成的一个集合, 它的和超过 A

该定义与指标集 K 中可能存在的任何次序无关

特殊情形：K 为非负整数集合 $a_k \leqslant 0$ 意味着

$$\sum_{k\geqslant 0} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

[5] 数学的终极目标是不需要聪明的想法

理由：实数任意非减序列均有极限

$F \subset \mathbb{N}\,, \forall i \in F, i \leqslant n\,, \exists \sum_{k\in F} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant A\,. \quad \therefore \begin{cases} A = \infty \\ A\text{为有界常数} \end{cases}$

又 $\forall A' < A\,. \exists n\,.$ s.t $\sum_{k=0}^{n} a_k > A'\,, F = \{0, 1, \ldots, n\}$. 证明 A' 不是有界常数。

练习 1. $a_k = x^k$ 有

$$\sum_{k\geqslant 0} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 \leqslant x < 1 \\ \infty, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

练习 2.

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$
$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = S - 1,\ S = 2$$
$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$$
$$2T = 2 + 4 + 8 + \cdots = T - 1,\ T = -1(\times)$$
$$T = \infty.\ (\text{另一个解})$$

练习 3.

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k\geqslant 0} k^{\underline{-2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{-2}} \delta k \\ &= \lim_{n\to\infty} \left.\frac{k^{\underline{-1}}}{-1}\right|_0^n \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1) \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{0+1}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

非负和式 $\to$ 和式中有非负项与负项 1.

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1\end{aligned}$$

$$\sum_{k\geqslant 0} x^k = \frac{1}{1-x},\ x \in [0, 1)$$

$x = -1$ 代入上式，$I = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$

2. 双向无限 $\sum_k a_k$

$$\begin{aligned} k \geqslant 0 \quad a_k &= \tfrac{1}{k+1} \\ k < 0 \quad a_k &= \tfrac{1}{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cdots + (-\tfrac{1}{4}) + (-\tfrac{1}{3}) + (-\tfrac{1}{2}) + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \dots \\
&\cdots + \left((-\tfrac{1}{4}) + \left((-\tfrac{1}{3}) + \left((-\tfrac{1}{2}) + (1) + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{4}\right) + \dots && = 1 \\
&\cdots + \left((-\tfrac{1}{4}) + \left((-\tfrac{1}{3}) + ((-\tfrac{1}{2})) + 1\right) + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \dots && = 1 \\
&\qquad\qquad (\ ) = 1 - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} \\
&\cdots + \left((-\tfrac{1}{4}) + \left((-\tfrac{1}{3}) + \left((-\tfrac{1}{2}) + 1 + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \right) \dots && = 1 + \ln 2
\end{aligned}$$

从内往外第 n 对括号包含数

$$-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} - \cdots - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = 1 + H_{2n} - H_{n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}(H_{2n} - H_{n+1}) = \ln 2$

按照不同方式对其项相加而得出不同值的和式，有某些不同寻常之处．关于分析学的高等教材中有五花八门的定义，它们对这样自相矛盾的和式赋予了有意义的值，但是，如果我们采用那些定义，就不能像一直在做的那样自由地对记号 $\sum$ 进行操作．就本书的目的而言，不需要“条件收敛”这种精巧的改进，因此我们会坚持使用无限和的一种定义，以保证在这一章里所做的所有运算都是正确的．

事实上，我们关于无限和式的定义相当简单．设 K 是任意一个集合，而 a_k 是对每一个 $k \in K$ 定义的实值项（这里“k”实际上可以代表若干个指标 $k_1, k_2, \dots$，因而 K 可以是多维的）．任何实数 x 都可以写成其正的部分减去负的部分

$$x = x^+ - x^-, \ x^+ := x \times [x > 0], \ x^- := -x \times [x < 0]$$

对 $\{a_k\}$ 中的每一项这样操作，得到无限和式 $\sum_{k\in K} a_k^+$ 和 $\sum_{k\in K} a_k^-$ (mynote: 将任意和式拆成两个非负和式)

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} a_k^+ - \sum_{k\in K} a_k^- \tag{34}$$

除非右边的两个和式都等于 ∞．在后面这种情形，我们不定义 $\sum_{k\in K} a_k$

设 $A^+ = \sum_{k\in K} a_k^+$，$A^- = \sum_{k\in K} a_k^-$．如果 A^+ 和 A^- 都是有限的，就说和式 $\sum_{k\in K} a_k$ 绝对收敛 (converge absolutely) 于值 $A = A^+ - A^-$．如果 $A^+ = \infty$ 而 A^- 是有限的，就说和式 $\sum_{k\in K} a_k$ 发散 (diverge) 于 $+\infty$．类似地，如果 A^+ 是有限的而 $A^- = \infty$，就说和式 $\sum_{k\in K} a_k$ 发散 (diverge) 于 $-\infty$．如果 $A^+ = A^- = \infty$，结果还很难说．[6]

mynote:

$\forall$ 集合 K (可以是多维的), $a_k \in \mathbb{R}$ $(k \in K)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = x^+ - x^-$

a_k^+, a_k^- 均非负

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} a_k^+ - \sum_{k\in K} a_k^-$$

[6]换句话说，绝对收敛就意味着绝对值的和式收敛．

$\sum_{k\in K} a_k^+$, $\sum_{k\in K} a_k^-$ 不同时为 0

$$\begin{array}{llll} A & = A^+ & -A^- & A = \sum_{k\in K} a_k \\ & A^+\text{有限} & A^-\text{有限} & \sum_{k\in K} a_k\text{绝对收敛 (converge absolutely)} \\ & A^+ = \infty & A^-\text{有限} & \sum_{k\in K} a_k\text{发散 (diverge) 于}\infty \\ & A^+\text{有限} & A^- = \infty & \sum_{k\in K} a_k\text{发散 (diverge) 于} -\infty \end{array}$$

$a_k \in \mathbb{R} \Rightarrow a_k \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{k\in K} \Re(a_k) + i\sum_{k\in K} \Im(a_k)$$

两式均有定义时,
$\sum_{k\in K} a_k$有定义

分配律
结合律 $\Rightarrow$ 多个指标集绝对收敛的和式, 永远可以对指标中的任何一个首先求和。(结
交换律
果与求和顺序无关)

$\forall$ 指标集 J 且 $\{K_j | j\in J\}$ 的元素是任意的指标集. s.t.

$$\sum_{\substack{j\in J \\ k\in K_j}} a_{j,k}\text{绝对收敛于}A$$

那么对每一个 $j\in J$, $\exists A_j \in \mathbb{C}$ .s.t.

$$\sum_{k\in K_j} a_{j,k}\text{绝对收敛于}A_j.\ \text{且}\sum_{j\in J} A_j\text{绝对收敛于}A$$

对所有项非负证明这一结记即可.
每项分解成实部与虚部, 正的和负的部分, 证明一般情形.
设对所有指标 $(j,k)\in M$ 都有 $a_{j,k} \geqslant 0$.
其中 M 是主指标集 $\{(j,k)|j\in J, k\in K_j\}$
给定 $\sum_{(j,k)\in M} a_{j,k}$ 是有限的即对所有有限子集 $F\subset M$ 有

$$\sum_{(j,k)\in M} a_{j,k} \leqslant A$$

而 A 是这样的最小上界.

$\forall j\in J$ 形如 $\sum_{k\in F_j} a_{j,k}$ 的每一个和都以 A 为上界. 其中 F_j 是 k_j 的一个有限子集, 从而这些和式有一个最小上界 $A_j \geqslant 0$. 且根据定义有 $\sum_{k\in K_j} = A_j$.

需证明对所有有限子集 $G\subset J$. A 是 $\sum_{j\in G} A_j$ 的最小上界.

假设 G 是 J 满足 $\sum_{j\in G} A_j = A' > A$ 的有限子集.
我们可以求出一个有限子集 $F_j \subseteq K_j$.
使得对每个满足 $A_j > 0$ 的 $j\in G$ 均有 $\sum_{k\in F_j} a_{j,k} > \left(\frac{A}{A'}\right) A_j$.

至少存在一个这样的 j .
但此时有 $\sum_{j\in G,k\in F_j} a_{j,k} > \left(\frac{A}{A'}\right)\sum_{j\in G} A_j = A$.
这与如下事实矛盾. 对有限子集 $F\subseteq M$ 有 $\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} \leqslant A$.
从而对所有有限子集 $G\subset J$ 都有 $\sum_{j\in G} A_j \leqslant A$.

最后, 设 A' 是小于 A 的任何一个实数如果我们能找到一个有限集合 $G\subseteq J$ s.t $\sum_{j\in G} A_j > A'$. 证明就完成了.

已知存在有限集合 $F\subseteq M$ s.t. $\sum_{(j,k) a_{j,k} > A'}$.
设 G 是 F 中 j 组成的集合, 又设 $F_j = \{k|(j,k)\in F\}$ 那么有

$$\sum_{j\in G} A_j \geqslant \sum_{j\in G}\sum_{k\in F_j} a_{j,k} = \sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} > A'$$

证完.