Chapter 1

2020 年笔记

1.1 20.07.27

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\int_{0}^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= [\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{2}} + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{\arcsin\frac{r}{2}}^{\pi-\arcsin\frac{r}{2}}] f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

1.2 20.08.03

$$
\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{1+2})(1-\frac{1}{1+2})(1-\frac{1}{1+2+3})\dots(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}) =? \tag{1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} &= 1-\frac{2}{n(n+1)} \\
&= \frac{n^2+n-2}{n(n+1)} \\
&= \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1\times 4}{2\times 3}\frac{2\times 5}{3\times 4}\dots\frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n}\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\frac{4}{2}\frac{2}{4}\frac{5}{3}\frac{3}{5}\frac{6}{4}\dots\frac{n+2}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\frac{n+2}{n} \\
&= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

卡塔兰数 C_n

从 0 开始 $1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots$

$$
C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + \cdots + C_nC_0
$$

该公式的证明可以通过

$$\left(\left(\left(\left(\right)\right)\right)\right)$$

如图所示的括号匹配，C_n 可以看成上面四组括号的合理排列形式，（合理排列意味着每一对括号都是左右对应的，像)(这样的形式是非法的）

在 n 对括号的排列中，假设最后一个括号和第 i 个左括号匹配。则在第 i 个左括号之前，一定已经匹配上了 $(i-1)$ 对左括号。如下图，因此，此种情况的数量为 $f(i-1)*f(n-i-1)$。$(1 \leq i \leq n)$ 最后一个右括号可以 $1 \sim n$ 个左括号匹配共 n 种情况。

第 $n+1$ 项

$$C(n) = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1}$$

$$C(n) = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1}$$

通项公式

$$C_1 = 1, C_n = C_{n-1}\frac{4n-2}{n+1}$$

Python 实现

```
# 打印前 n 个卡特兰数
ans, n = 1, 20
print("1:" + str(ans))
for i in range(2, n + 1):
ans = ans * (4 * i - 2) // (i + 1)
print(str(i) + ":" + str(ans))
```

扩展

最后留一道比较有意思的卡特兰数问题，欢迎读者留言，提出自己的看法。

8 个高矮不同的人需要排成两队，每队 4 个人。其中，每排都是从低到高排列，且第二排的第 i 个人比第一排中第 i 个人高，则有多少种排队方式。

1.3 20.08.07

Theorem 1.3.1. *A-G 不等式*
任意 n 个非负实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \tag{1.5}$$

其中等号成立 $\iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

证明. 数学归纳法
$n = 1$ 时结论平凡
$n = 2 \qquad \frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$

$$(a_1 - a_2)^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0$$

$$a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 4a_1a_2$$

$$(a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1a_2$$

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$$

$n=k$ 时，假设 $\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\geq\sqrt[k]{a_1\ldots a_k}$ 成立

$n=k+1$

$$\begin{aligned}&\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}-\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\\=&\frac{k(a_1+\cdots+a_{k+1})-(k+1)(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}\\=&\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}\end{aligned}\tag{1.6}$$

we found

$$\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}=\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}$$

note

$$A:=\frac{a_1+\cdots+a_k}{k},\qquad B:=\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}$$

$$(\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1})^{k+1}=(A+B)^{k+1}\geq A^{k+1}+(k+1)A^kB\tag{1.7}$$

使用二项式展开需要对 a_i 从小到大重排，而使用 Bernoulli 不等式则只需要 $A\geq0,(A+B)\geq0$ 即可

$$A^{k+1}+(k+1)A^kB=A^k(A+(k+1)B)\tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}A^k=(\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1})^{k+1}&\geq a_1\ldots a_k\quad\text{assume at}(n=k)\\A+(k+1)B=\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}+\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k}&=a_{k+1}\\\because(A+B)^{k+1}\geq A^k(A+(k+1)B)&\geq a_1\ldots a_ka_{k+1}\\\therefore\frac{a_1+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}&\geq\sqrt[k+1]{a_1\ldots a_ka_{k+1}}\end{aligned}\tag{1.9}$$

使用二项式展开定理的条件：

在归纳法第二步对 $a_1\ldots a_{k+1}$ 重编号，使 a_{k+1} 为其中最大的数（之一）

这使得分解式右边第二项 $\frac{ka_{k+1}-(a_1+\cdots+a_k)}{k(k+1)}$ 一定是非负数 □

证明. Forward and backward (Cauchy, 1897)

Forward Part:

$n=2$

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1a_2}\tag{1.10}$$

$n=4$

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}&\geq\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\frac{a_3+a_4}{2}}\\&\geq\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}\\&\geq\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}\end{aligned}\tag{1.11}$$

$n=2^k$ 假设不等式 $\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\geq\sqrt[2^k]{a_1\ldots a_{2^k}}$ 成立

$n=2^{k+1}$

$$\begin{aligned}\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}&\geq\sqrt{\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}}\\&\geq\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1\ldots a_{2^k}}\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\ldots a_{2^{k+1}}}}\\&\geq\sqrt[2^{k+1}]{a_1\ldots a_{2^{k+1}}}\end{aligned}\tag{1.12}$$

Backward Part: A-G 不等式对某个 $n\geq2$ 成立，则它对 $n-1$ 也成立

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i&=\frac{1}{n}(\frac{n}{n-1})\sum_{i=1}^{n-1}a_i\\&=\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n-1}a_i+\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i)\end{aligned}\tag{1.13}$$

将 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i$ 看作 a_n

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i \geq \sqrt[n]{(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i)} \tag{1.14}$$

$$(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i)^n \geq \prod_{i=1}^{n-1}a_i(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i) \tag{1.15}$$

$$(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i)^{n-1} \geq \prod_{i=1}^{n-1}a_i \tag{1.16}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i \geq \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1}a_i} \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i \geq \sqrt[n]{(\prod_{i=1}^{n-1}a_i)(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i)} \tag{1.18}$$

$$(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i)^n \geq \prod_{i=1}^{n-1}a_i(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i) \tag{1.19}$$

$$(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i)^{n-1} \geq \prod_{i=1}^{n-1}a_i \tag{1.20}$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i \geq \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1}a_i} \tag{1.21}$$

□

Theorem 1.3.2. 柯西，施瓦茨不等式
对 $a_1,\ldots,a_n$ 和 $b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}$，成立

$$|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} \tag{1.22}$$

证明.

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-\lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 - 2\lambda\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + \lambda^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \geq 0$$

由韦达定理（视 λ 为未知数），原方程无解或只有唯一解

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac \leq 0\\ (-2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2 - 4\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \leq 0\\ (\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\ \sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\end{aligned} \tag{1.23}$$

□

1.4 20.08.11

Theorem 1.4.1. 定积分第一中值定理
设函数 $f(x), g(x) \in \mathbb{C}[a, b]$. 且在 $[a, b]$ 上不变号，则存在 $\zeta \in [a, b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x) = f(\zeta)\int_a^b g(x)dx$

证明. suppose that $g(x) \geq 0$. $f(x)$ continuous on close set,so we can get the maximum and minimum value of f. We note that m is the minimum value of $f(x), x \in [a, b]$,and M is the maximum value of $f(x)$, then we have:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \tag{1.24}$$

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \tag{1.25}$$

note that we don't know$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \neq 0$
When $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, then $g(x) \equiv 0$, So $\forall\zeta \in [a, b]$, the theorem works.
When $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, then $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq M$
From the Intermediate Value Theorem, $f(x) \in \mathbb{C}[a, b] \quad m \leq f(x) \leq M$

$$\exists\zeta \in [a, b] \quad f(\zeta) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x} \tag{1.26}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\zeta)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \tag{1.27}$$

□

设 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可积，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续单调递增，且 $f'(x) \geq 0$，并对 $\forall x \in [a, b]$ 有 $f(x) \geq 0$。则存在 $\zeta \in [a, b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_\zeta^b g(x)\mathrm{d}x \tag{1.28}$$

证明. set$G(x) = \int_x^b g(t)\mathrm{d}t, g(x)$在$[a, b]$ 上可积
则 $G(x), x \in [a, b]$ 存在最值，设最小值和最大值分别为 m, M

$$G(x) = -\int_b^x g(t)\mathrm{d}t, \quad G'(x) = -g(x) \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= -\int_a^b f(x)\mathrm{d}G(x) \\ &= -(f(b)G(b) - f(a)G(a)) - \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ &= f(a)G(a) + \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$m\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x \leq M\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x \tag{1.31}$$

$$m[f(b - f(a))] \leq \int_a^b G(x)f'(x)\mathrm{d}x \leq M[f(b - f(a))] \tag{1.32}$$

$$\tag{1.33}$$

∵

$$mf(a) \le f(a)G(a) \le Mf(a) \tag{1.34}$$

$$mf(b) \le \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le Mf(b) \tag{1.35}$$

$$\tag{1.36}$$

From the Intermediate Value Theorem, $\exists \zeta \in [a,b] s.t. G(\zeta) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{f(b)}$
then we have

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)G(\zeta) = f(b)\int_\zeta^b g(x)\mathrm{d}x \tag{1.37}$$

□

1.5 20.08.12

1.3.2 练习题

1. 关于 Bernoulli 不等式的推广：

(1) 证明：当 $-2 \ge h \ge -1$ 时 Bernoulli 不等式 $(1+h)^n \ge 1+nh$ 仍成立；

(2) 证明：当 $h \ge 0$ 时成立不等式

$$(1+h)^n \ge \frac{n(n-1)h^2}{2} \tag{1.38}$$

(3) 证明：若 $a_i > -1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ 且同号，则成立不等式

solve:

(1)

$$-2 \le h \le -1$$

$$-1 \le 1+h \le 0$$

$$-1 \le (1+h)^n \le 0$$

$$-2n \le nh \le -n$$

$$1-2n \le 1+nh \le 1-n$$

$n = 0 \qquad (1+h)^0 = 1 = 1 + 0 * h$ 结果是平凡的

$n = 1 \qquad 1+h = 1+h$ 结果是平凡的

$n \ge 2 \qquad$ 此时 $1-n \le -2$

$$0 \ge (1+h)^n \ge -1 \ge -2 \ge 1-n \ge 1-nh \ge 1-2n$$

$$(1+h)^n \ge 1+nh$$

(2)

$$h \ge 0 \qquad (1+h)^n \ge \frac{n(n-1)h^2}{2}$$

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots \ge \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

推广:

$$(1+h)^n \ge C_n^3h^3, C_n^4h^4, \ldots, C_n^kh^k, \qquad 0 \le k \le n$$

(3)

$$\prod_{i=1}^n (1+a_i) \ge 1 + \sum_{i=1}^n a_i$$

(a)$a_i \geq 0$, 且同号。

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1,i\neq j}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j + \sum_{i=1,i\neq j,k}^{n}\sum_{j=1,j\neq k}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i a_j a_k + \dots$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)}{1+a_k} \qquad \forall k \in 1,2,\dots,n, \quad 1+a_k \geq 1$$

(b) $0 > a_i > -1$此时$1 > 1 + a_i > 0$
别人的方法：$n = 1$ 时不等式变成等式，显然成立
设 $n = k$ 时不等式也成立

$$\prod_{i=1}^{k}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i$$

则 $n = k + 1$ 时，有

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i) = \prod_{i=1}^{k} a_i(1+a_{k+1}) \geq (1+\sum_{i=1}^{k} a_i)(1+a_{k+1})$$

$$(1+\sum_{i=1}^{k} a_i)(1+a_{k+1}) = 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot a_{k+1} \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

$$\therefore \prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

2. 利用 A-G 不等式求解下列有关阶乘 $n!$ 的不等式
(1) 证明：当 $n > 1$ 时成立

$$n! < (\frac{n+1}{2})^n \tag{1.39}$$

(2) 利用 $(n!)^2 = (n \cdot 1)((n-1)\cdot 2)\dots(1\cdot n)$ 证明：当 $n > 1$ 时成立

$$n! < (\frac{n+2}{\sqrt{6}})^n \tag{1.40}$$

(3) 比较 (1)(2) 两个不等式的优劣，并说明原因；
(4) 证明：对任意实数 r 成立

$$(\sum_{k=1}^{n} k^r)^n \geq n^n (n!)^r \tag{1.41}$$

solve:
(1) when $n > 1$

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n < (\frac{1+2+\dots+n}{n})^n$$

$$(\frac{1+2+\dots+n}{n})^n = (\frac{n(n+1)}{2n})^n = (\frac{n+1}{2})^n$$

(2) when $n > 1$

$$(n!)^2 = (n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\dots(1\cdot n) < (\frac{n\cdot 1 + (n-1)\cdot 2 + \dots + 1\cdot n}{n})^n$$

$$n\cdot 1 + (n-1)\cdot 2 + \dots + 1\cdot n = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k &= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(3(n+1) - (2n+1)) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\end{aligned} \tag{1.42}$$

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\dots(1\cdot n)\\ &< (\frac{n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\cdots+1\cdot n}{n})^n\\ &= (\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(n+2)}{6})^n\\ &= (\frac{(n+1)(n+2)}{6})^n\\ &< (\frac{n+2}{6})^{2n}\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\therefore \qquad n! < (\frac{n+2}{\sqrt{6}})^n \tag{1.44}$$

(3)

$$\frac{n+1}{2} = \frac{n+2}{\sqrt{6}} \tag{1.45}$$

解得 $n = 1+\sqrt{6} > 3$, $n > 3$ 时 (2) 式更精确，结果比 (1) 式更好。

(4) $\forall r \in \mathbb{R} \quad (n!)^r \le \frac{1}{n^n}(\sum_{k=1}^n k^r)^n$ 由 A-G 不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k^r \ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n k^r} \tag{1.46}$$

$$(n!)^r = \prod_{k=1}^n k^r \le (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k^r)^n = \frac{1}{n^n}(\sum_{k=1}^n k^r)^n \tag{1.47}$$

1.6 20.08.13

2.(4)

$$\begin{aligned}\forall r\in\mathbb{R} \qquad (\sum_{i=1}^n k^r)^n &\ge n^n(n!)^r\\ (n!)^r = \prod_{k=1}^n k^r \le (\frac{1^r+2^r+\cdots+n^r}{n})^n = \frac{1}{n^n}(\sum_{k=1}^n k^r)^n \quad &\text{A-G inequality}\\ \therefore (\sum_{k=1}^n k^r)^n &\ge n^n(n!)^r\end{aligned} \tag{1.48}$$

3. $a_k > 0, \quad k = 1,2,\dots,n$ 证明几何-调和平均值不等式

$$(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} \ge \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \tag{1.49}$$

证明. from A-G inequality

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}{n} &\ge \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}\\ &= \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}}\\ \therefore a_k > 0, \qquad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} &\ge \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}\end{aligned} \tag{1.50}$$

□

4. $a, b, c \ge 0$, proof that

$$\sqrt[3]{abc} \le \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \le \frac{a+b+c}{3} \tag{1.51}$$

并推广到 n 个非负数的情况

证明. left:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{abc} &= \sqrt{\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}}\\ &\leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}\end{aligned} \tag{1.52}$$

right:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} &\leq \sqrt{\frac{(\frac{a+b}{2})^2+(\frac{b+c}{2})^2+(\frac{c+a}{2})^2}{3}}\\ &= \sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)}{12}}\\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{6}}\end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\because a,b,c\geq 0 \qquad \frac{ab+bc+ca}{3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{6} \tag{1.54}$$

需要证明 $\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$
对该式两边平方

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{9} = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{9} \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}\frac{ab+bc+ca}{3} &\leq \frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{ab+bc+ca}{6}\\ &\leq \frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{ab+bc+ca}{3}\\ &= (\frac{a+b+c}{3})^2\\ \therefore \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} &\leq \frac{a+b+c}{3}\end{aligned} \tag{1.56}$$

□

证明. 推广至 n 个

$$\begin{aligned} [l]n=2 \qquad & \sqrt{ab} && \leq \frac{a+b}{2} \\ n=3 \qquad & \sqrt[3]{abc} && \leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} && \leq \frac{a+b+c}{3} \\ n=k \qquad & \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} a_i} && \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} -1 a_i a_{i+1} + a_k a_1}{k}} && \leq \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{k}\end{aligned} \tag{1.57}$$

$$1 \qquad \sqrt[k]{a_1a_2\dots a_k} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1^2a_2^2\dots a_k^2}} \leq \sqrt{\frac{a_1a_2+a_2a_3+\dots a_ka_1}{k}} \tag{1.58}$$

$$2 \qquad \sqrt{\frac{a_1a_2+a_2a_3+\dots a_ka_1}{k}} \leq \frac{a_1+\dots+a_k}{k} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}\frac{a_1a_2+a_2a_3+\dots a_ka_1}{k} &\leq \frac{a_1^2+\dots a_k^2}{2k}\\ 2\frac{a_1a_2+a_2a_3+\dots a_ka_1}{k} &\leq \frac{(a_1+\dots a_k)^2}{2k}\\ \sqrt{\frac{a_1\dots a_k}{k}} &\leq \frac{a_1+\dots+a_k}{\sqrt{4k}} \quad \text{wrong!}\end{aligned} \tag{1.60}$$

□