具体数学阅读笔记-chap1 exercise

weiyuan

更新：2022-06-27

1 Exercises

1.1 Warmups

练习 1 1 All horses are the same color; we can prove this by induction on the number of horses in a given set. Here's how: "If there's just one horse then it's the same color as itself, so the basis is trivial. For the induction step, assume that there are n horses numbered 1 to n. By the induc- tion hypothesis, horses 1 through n 1 are the same color, and similarly horses 2 through n are the same color. But the middle horses, 2 through n 1, can't change color when they're in different groups; these are horses, not chameleons. So horses 1 and n must be the same color as well, by transitivity. Thus all n horses are the same color; QED." What, if anything, is wrong with this reasoning?

题目解答 1 n=1 情况下马有相同颜色

但 n=2 时该假设不一定成立

练习 2 2

题目解答 2 不允许在 A B 之间直接移动, 求最短的移动序列

$$
\begin{array}{lllll}
k=1 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & 2 & sum=2 \\
k=2 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B, & 2 & \\
 & 2 & A \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 2 & C \rightarrowtail B & 1 & \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & 2 & sum=8 \\
k=3 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B, & 2 & \\
 & 2 & A \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 2 & C \rightarrowtail B & 1 & \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & 2 & sum=8 \\
 & 3 & A \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 2 & B \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B, & 2 & \\
 & 2 & C \rightarrowtail A & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 3 & C \rightarrowtail B & 1 & sum=18 \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B, & 2 & \\
 & 2 & A \rightarrowtail C & 1 & \\
 & 1 & B \rightarrowtail C, C \rightarrowtail A, & 2 & \\
 & 2 & C \rightarrowtail B & 1 & \\
 & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & 2 & sum=26 \\
\vdots & & & & \\
k=n & 1 & A \rightarrowtail C, C \rightarrowtail B & &
\end{array}
$$

从前面的移动可以看出 $f(n) = 3 * f(n-1) + 2$, 设 $g(n) = f(n) + 1, g(1) = f(1) + 1 = 3, g(n) = 3g(n-1)$. $g(n) = 3^n$, $f(n) = 3^n - 1$.

练习 3 3

题目解答 3 是的，以 n 个圆盘为例正确的叠放方法有 3^n 种将 ABC 视为 3 个序列，将所有圆盘从大到小依次放置在 3 个序列中，每个圆盘放置时有 3 种选择，所共有 3^n 种正确的叠放方法。第二题移动 3^n-1 次，再加上移动前所有圆盘都在 A 柱上的情况，共有 3^n 种情况，所以所有正确的叠放方法均会出现。

我的思考，n 个圆盘在 3 根柱子上任意放的方法有多少种？

练习 4 4

题目解答 4 Are there any starting and ending configurations of n disks on three pegs that are more than $2^n 1$ moves apart, under Lucas's original rules?

是否存在 $m > 2^n - 1$

不存在。根据卢卡斯的规则，将可能出现的移动情况分为两种:
1. 最大的圆盘不需要移动，根据归纳法，最多需要移动 $2^{n-1}-1$ 次。
2. 最大的圆盘需要移动，根据归纳法，最多需要移动 $2^{n-1}-1+1+2^{n-1}-1$ 即 2^n-1 次

练习 5 5

题目解答 5 3 个给定集合，共有 8 个可能子集。使用 Venn 图表示

[1] $A, B, C,$ 三个集合的所有子集为 $\{\varnothing, A, B, C, A\cap B, A\cap C, B\cap C, A\cap B\cap C,\}$ $,\{A\setminus B, A\setminus C, B\setminus A, B\setminus C, C\setminus A, C\setminus B\}, \{A\setminus(B\cup C), B\setminus(C\cup A), C\setminus(A\cup B)\}$, $\{A\cup B, A\cup C, B\cup C, A\cup B\cup C\}. \ldots$

我认为这里所将的八个子集应当是 $\{\varnothing\}, \{A\setminus(B\cup C), B\setminus(C\cup A), C\setminus(A\cup B)\}$, $\{(A\cap B)\setminus C, (C\cap A)\setminus B, (B\cap C)\setminus A\}, \{A\cap B\cap C\}$. 空集和 7 个互不相交的真子集。

[1]Venn 图之后会补上

对于 4 个集合，Venn 图不能给出可能的 16 个子集，因为不同的圆至多交于两点。参考答案中说的卵形 (ovals) 是什么意思？

练习 6 6

题目解答 6 无界区域个数 $2n$
所有区域个数 $\frac{n(n+1)}{2}+1$
二者相减得到有界区域个数 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

练习 7 7

题目解答 7 设 $H(n)=J(n+1)-J(n)$.
$H(2n)=2$, 对 $n\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}H(2n+1)&=J(2n+2)-J(2n+1)\\&=(2J(n+1)-1)-(2J(n)+1)\\&=2H(n)-2\end{aligned}$$

但在 $n=0$ 时，由此推出

$$H(1)=J(2)-J(1)=1-1=0\neq 2$$

1.2 作业题

练习 8

$$\begin{aligned}Q_0&=\alpha\\Q_1&=\beta\\Q_n&=\frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}},\quad n>1\end{aligned}$$

(hint: $Q_4=\frac{1+\alpha}{\beta}$)

题目解答 8

$$\begin{aligned}
Q_0 &= \alpha && && && = \alpha \\
Q_1 &= \beta && && && = \beta \\
Q_2 &= \frac{1+Q_1}{Q_0} && && && = \frac{1+\beta}{\alpha} \\
Q_3 &= \frac{1+Q_2}{Q_1} &&= \frac{1+\dfrac{1+\beta}{\alpha}}{\beta} && && = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta} \\
Q_4 &= \frac{1+Q_3}{Q_2} &&= \frac{1+\dfrac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}}{\dfrac{1+\beta}{\alpha}} &&= \frac{\alpha\beta+1+\alpha+\beta}{\beta(1+\beta)} && = \frac{1+\alpha}{\beta} \\
Q_5 &= \frac{1+Q_4}{Q_3} &&= \frac{1+\dfrac{1+\alpha}{\beta}}{\dfrac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}} &&= \frac{\alpha\beta+\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha+beta} && = \alpha \\
Q_6 &= \frac{1+Q_5}{Q_4} &&= \frac{1+\alpha}{\dfrac{1+\alpha}{\beta}} && && = \beta
\end{aligned}$$

因此解得

$$\begin{aligned}
Q_i &= \{ && \alpha, && \beta, && \frac{1+\beta}{\alpha}, && \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\beta}, && \frac{1+\alpha}{\beta} && \} \\
(i\%n) &= \{ && 0, && 1, && 2, && 3, && 4, && \}
\end{aligned}$$

练习 9 反向归纳法，从 n 到 $n-1$ 证明命题

$$P(n):\ x_1 \ldots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n, \quad x_i \geqslant 0, i=1,\ldots,n$$

$n=2$ 时为真

$$(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1-x_2)^2 \geqslant 0$$

a) $x_n = \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$, 证明只要 $n>1$ 时 $P(n)$ 蕴含 $P(n-1)$.

b) 证明 $P(n)$ 和 $P(2)$ 蕴含 $P(2n)$

c) 由 a), b) 说明这就蕴含了 $P(n)$ 对所有 n 为真

题目解答 9 a) $P(n)$ 成立，$\forall n>1$

给定 $x_n = \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$，则有

$$\begin{aligned}
x_1 \ldots x_{n-1} \cdot \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} &\leqslant \left(\frac{x_1+x_{n-1}+\dfrac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)^n \\
x_1 \ldots x_{n-1} \cdot \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} &\leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n \\
x_1 \ldots x_{n-1} &\leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$