重修微积分

应行仁

2022年10月22日

目录

第一章　重修微积分 1——无穷　1

第二章　重修微积分 2——收敛　4

第三章　重修微积分 3——拓扑　8

第四章　重修微积分 4——距离　12

第五章　重修微积分 5——线性　16

第六章　重修微积分 6——微分　20

第七章　重修微积分 7——测度　25

第八章　重修微积分 8——积分　30

第九章　重修微积分 9——泛函　34

第十章　重修微积分 10——算子　37

插图

7.1 分形曲线 28

8.1 黎曼积分与勒贝格积分的直观区别 30

第一章　重修微积分 1——无穷

这个科普系列是给学过微积分及更深入分析课程的人，觉得读书做题考试都还行，但直观和定义隔了一条河，提到严谨只觉得烦，希望能理解现代分析，又能像物理那样想象的同学。这里介绍无穷、拓扑、空间、测度、泛函和算子等现代分析的概念，让你从高处来看风景。

我学过几次微积分。最初是在高中，了解了导数是变化率，积分能算面积，它们互为逆运算。接着翻到微积分书里的求导公式，一口气背下初等函数导数表和复合函数公式。凭着这个直观概念和套公式本领，大学物理公式推导也看懂了，几天时间里武功大进，高中各种难题，触手可解。这时心雄万夫，认为这就是微积分了。想不明白那巨厚的教材，花那么多的篇幅整什么极限和收敛？后来了解到很多人也和我一样，就学个招式套路，没得心法真传，思想还是停留在有限数学的圈子里，没有走过用逻辑搭起越过无穷深渊的桥，所以永远无法想象不能感知的世界，所说的也只是人云亦云，对与错，自己是无法确认的。再学的实变泛函随机过程，即使考分不错，也只是学个技巧能够解题。真正去应用则在云中雾里，心中懵懂始终不觉踏实。直到在美国数学系从点集拓扑重新学起，每一步踏实了走过去，在巨细的习题中摸过每一块石头，才重新建立起直观想象，找回了自信。

工程师和非数学研究者，不可能都沿着纯数学的路子学习现代严谨的数学理论。耗费大量时间在逻辑巷道里穿行，会让你失去方向看不到全貌，不一定所有人都能走通。对大多数人，数学只是个严谨的逻辑建筑模块和工具。想用好它，最重要的不是繁琐的条件和证明细节的了解，而是要有正确概念的理解。有了正确想象，即使不能精通现代分析，你也能大致读懂相关的理论，用定理套公式才能有自信。急用先学恶补知识时也会有方向。

从初等数学到数学分析，是从现实世界到了无穷空间的跃迁。在牛顿之后，学术界也曾经为此想象图像的转变，迷惑混乱了几百年，至今书里和教授传承还遗留着许多当年混战中的繁杂解读。要走过这座桥，你必须超越有限世界经验的局限，用逻辑证明过的典型例子，来构筑无穷世界的直观想象，知道为什么要分辨看似无谓的概念，接受经验不习惯的事例，才能到达彼岸。

这系列短文，不是教程，而在解读概念。如果你学过这些课程，这里让你依想象指引用逻辑将概念和例子串起来，没学过的也可以浏览无穷世界里的风光。希望有助于迷惘中的人，纠正错误的观念，建立较正确的直观想象，明白些为什么，想穷究深入时，知道往哪儿找。

在微积分之前，数学几乎都是关于 “有限” 的学问，因为只有是有限的个体，或是它们

的有限组合，才算得了，说得清。归纳是人类智力的本能。使用数学归纳法，能够把只对有限事例成立的结论，依仗逻辑和递推关系，严谨地推广到无穷多的适用情况。许多人以为这已是无穷的世界了，其实这只是这个词的一种意思，仍然是在有限的世界里兜圈子。无穷在这里指的是：这个递推过程可以是无法穷尽的。这个认知叫“潜无穷”。在这个无穷尽的过程中，你接触到的每一个还是有限的个体，推理的正确性也只是针对这过程中经过的每一站，无穷的过程没有终点，它们的全体不在考虑之列。

例如：集合 $\{1\}$ 是有限集，假如 $1, 2, \cdots, n$ 是有限集，那么多一个元素的 $\{1, 2, \cdots, n, n+1\}$ 也是有限集，根据数学归纳法，这对所有 n 都成立。但这不证明所有自然数的集合 $\{1, 2, 3\cdots\}$ 是个有限集。因为数学归纳法的证明，对所有自然数都成立的命题，是一种潜无穷的陈述，是动态地指对每一个具体的自然数能成立的陈述，而不是指对自然数的全体都成立。

有限的度量是实践中可以验证的，潜无穷是以此推理的极限。在物理世界，能够被检验和推测的数量，都是有限精度或组合的；任何计算，都必须在有限的步骤中终止，才有结果；数学证明，必须在有限步骤的推理中完成，才是可信。一句话，现实的世界本来是有限的。人们固有的直观想象，都是在有穷的世界里，用实践经验累积和事例验证而成的。

我们现在普遍认知的连续无限可分世界，是微积分这个数学工具成功应用后，人们在书本灌输下接受的假设。这个看似已经深入人心的观念，对绝大多数人只是个不断被重复的表面陈述，与学前的直观不能融合，难以深思。无穷的彼岸和有限的经验是完全不同的两个世界，归纳法的逻辑无法越过有穷的边界。我们必须先验地承认某些无法验证的观念，用逻辑构造出包囊一切的统一图像，才能消融这个隔阂。

无限的过程能否成为一个数学的量？这早在两千多年前的古希腊，就引起争论，它实际是哲学上的一个观念。无法验证也无关对错。数学是个关心在给定前提下，依照逻辑推理能够走多远的学问。古希腊的毕达哥斯学派，还有个追求的指标是“美”，和谐的美、统一的美、简洁的美。主张无穷不仅仅是个变动的过程，而且这无限过程，代表着它要达到的数学实体，可以用来参与计算，称之为“实无穷”，是把它作为一种数学完备化的扩张。

认为无穷不仅仅是一个过程，而且代表着一个要达到的数值，这在逻辑上很重要。只有这样我们才可以把它放在等式里。比如说，认为无穷循环的 0.999... 是数 x，才有 $10x = 9.999\cdots$，因此 $10x = 9 + x$，得出 $x = 1$. 阿基米德用了同样的原理，将阿基里斯追逐乌龟的过程，写成无穷级数的和 $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$，把它当作一个数 x，由 $10x = 10 + x$ 关系，才能算出他追上乌龟在 x=10/9 处。牛顿和莱布尼茨定义导数为两个无穷小量 dy 和 dx 之比 dy/dx，到了后来柯西修正为导数是 Δy/Δx 分子分母都趋于 0 的无穷过程。这些都只有承认实无穷观点时，才有可能。

这些都是假定实无穷能够保持算术运算的和谐关系，才得出答案的。历史上数学天才运用这个思想，取得了令人惊异的成绩。但是这个扩张并不总是像引入开平方的无理数那样和谐。1703 年，意大利数学家格蓝迪问大家，无限的过程 $1-1+1-1+1-1+\cdots$，等于多少？数学王子欧拉，用阿基米德相同的方法，假设 $x = 1-1+1-1+1-1+\cdots$，将这个无限过程第一项 1 先拎出来，后面剩下的相当于它自己乘上-1，有了 $x = 1 - x$，欧拉得出格蓝迪级数的和是 1/2。但是有人说，根据加法的结合律，有 $x = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0$，

类似的做法还可以有 $x = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$。这格蓝迪级数到底是 0、1/2 还是 1？贝克莱主教质问牛顿：你这个无穷小在做除法时认为不是 0，在做加减法时当着是 0，它到底是 0 还是个非 0 的数？

其实古人早已疑惑：自然数全体的数量是无穷大，在其中拿掉几个数，它还是一样大吗？无穷循环小数 0.999... 的每一个截断都小于 1，它怎么最终不再小于 1？承认和不承认实无穷的存在，都与某一种数学的美相冲突。这就是数学家在历史上，对实无穷和潜无穷无所适从的原因。

在牛顿之前，数学家对实无穷采取回避的态度，除了个别公认的天才，有底气做别人不敢质疑的猜测，大家都只老老实实地把无穷只看是一个过程，这样心里踏实，这也是潜无穷派的想法。但微积分是关于无穷的算术。到这时已是无可回避了。

这些冲突，实际上是企图将本质不同东西纳入过去直观的框架。对于有穷的东西，我们可以验证它，从已知的数学实体中通过有限步的推理确认它。在实无穷与确定的数之间，却没有能够确信的桥梁。无穷的序列，可能等价于已知的数学元素，也可以不是大家熟悉的东西，也可能是非此非彼的不确定。把本质上不能一致定义的东西，放入有限数学通行的等式里，从不同的方向则会推出不同的东西。这便是发生矛盾的原因。

现代数学基本认可实无穷的观念，但不认为它的所指都有意义。这个无限的过程，并非都能代表一个数。有的不是指向大家熟悉的数学元素；有的并没有确定的数学意义。实无穷的提法，因为涉及过多历史上混乱的争议，在数学界也不再强调了，而着眼于具体的处理。

将实践中无法检验的一种概念作为构筑理论的砖块，在思想史上并不罕见。在哲学、宗教、社会科学、甚至在自然科学理论里比比皆是。人们希望用新概念的理论，能够透视现实中的秘密，用之推演的结果，与我们的观察有某种程度的吻合。数学家的任务是将它精确化，限定适用的范围，以保证在逻辑上不至于造成冲突。科学是用逻辑为混沌的自然立法，让世界看起来比较有条理。

集合论作为现代数学的基石，研究了无穷大这个新的数学实体。它用一一映射的关系，回答了无穷大比较的问题。这个无穷大与有限的数，只保持一种序的关系，它们是不在一个层次数量，有限数的运算不完全适用于它。这提醒人们，不能用处理有限世界的那种直观，来看待用逻辑扩张出来的无穷世界。要自信自如地在这世界里玩，你必须理解新的概念，接受一些不习惯的事例，用逻辑推演出来的事例来纠正旧的想象，形成新的直观图像。

用无穷变化的过程代表一个可以达到的数，这需要另一座桥梁，我们必须知道这是在什么意义下的等价关系，在什么条件下才有可能，这需要理解一个概念——收敛。

第二章 重修微积分 2——收敛

无穷序列可以用来表示一种趋向。其思想仍然与归纳法一样，企图用已知来推测未知。这里是用有穷的序列项来推测无穷之处的结果。只不过数学归纳法，只能在有穷的世界里漫行，这里需要一个假设，才能用逻辑跨过边界。

大致地说，无穷序列作为数学的模型，在这无穷过程中，当后来的项越来越相像，如果这无穷过程指向一个实无穷的极限，设定的含义是：这极限与有穷过程里的项，也将会是越来越相像，以致难以区分。在这种情况下，我们有把握确定这个极限的性质，可以用这个无穷过程来定义或确定这个极限。

这里有两个问题。一是这序列能否指向一个数学实体，二是什么叫做 “相像”。

第一个问题，不外乎三种情况。一是不能。那就飘过。但如果是都不可能，那就不用谈极限了，微积分是个梦，大家仍旧玩算术。二是指向未知的实体。我们也许可以用模型里 “相像” 这性质来定义它，叫做扩充。这押后再谈。三是指向这空间里已有的实体，称之为收敛的极限。因为它与序列中的项同在一个空间，它们在空间里的关系可以用来描述 “相像” 的含义。

以上所说并不限于实数，适合于包括函数、事件，以及集合元素的无穷序列。不同的 “相像” 含义，确定了不同收敛和极限的含义，这将在以后的篇章里展开。请记住这里的图像，作为分析中直观想象的基础。这一篇，我们先谈最简单的情况——数列。

对于数而言，现实的计算只能区分有限精度的数。按照某种精度画个圈，一个无穷的数列，除了前面有限多个外，如果此后所有的项终将全部落入这个圈里，按照这数学模型的假设，它指向的极限，也是在这圈子里。在这圈里任何两个数，按这精度看不出区别，在圈里取任意一个数当作那个极限也是如此。如果总能以任何精度做到这一点，也就能以任何精度确定这个终极的数。这个无穷数列就对应着这个数。

如果这个极限在讨论的空间上存在，这数列称为 “收敛” 到这个极限。

用数学语言表达无穷数列 (x_n) 收敛于 a 是：$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 或者写成 $a_n \to a,\ (n \to \infty)$，在不混淆的情况可以略去括号里 n 的走向。上述收敛的定义用 $\varepsilon - N$ 语言和数理逻辑符号表达是：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n (n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \tag{2.1}$$

这定义只是说，如果有个数符合这描述，则称数列收敛于它。要认为这个无穷数列确定了这个数，需要证明它是唯一的。作为数学模型的要求，我们还必须证明，收敛的极限与空间里的数做四则运算，其结果与用数列中的项参与同样运算的数列极限是一样的。这些

证明都不难，最后都归结为：要验证的差异随着 N 足够大也会小于任何正数。即这个差异的无穷数列无限地趋向 0。所以在极限时等于 0. 停！在这句结论之前，全部是对有穷数列的推算，这无穷数列要走过所有的项，才能得出相等的结论，这需要一个假设，才能越过这个逻辑的间隙：无穷必须是可以完成的！这样无限减小又始终存在的差异才会消失，让无穷序列的桥梁能够搭上有限世界的对岸。这是被许多人忽略，以致缺乏动力去改变有穷世界里的直观。

从收敛的定义不难看出，如果无穷过程收敛，那么在这过程中走得足够远的项之间的差别也会足够小，即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\forall m(m,n>N\Rightarrow|a_n-a_m|<\varepsilon) \tag{2.2}$$

这样的数列 (x_n)，叫做“柯西列（Cauchy sequence）”。能够收敛的数列都是柯西列。

回头来看格蓝迪级数 1-1+1-1+1-1+⋯，这个无穷过程无法确定任何数值，其有限和构成的无穷数列不是柯西列，不能收敛。欧拉和在收敛意义上不成立。

并非所有柯西列都能收敛，它取决于所在空间的性质。例如，$\sqrt{2}$

取越来越多位数的数列 1.4，1.41，1.414，⋯是柯西列，但它在有理数空间不收敛。即这个数列极限在有理数中不存在。

能够让所有柯西列都收敛的数学空间，叫做“完备的（Complete）”。微积分发明之后，数学家又发现了大量未知的实数和并严格修补了实数的定义，从而证明了实数是完备的。这表示只要数列是趋于相互靠拢的，就一定有极限，这个意义很重大。初等微积分是建立在实数完备性的基础上。

实数在近代，是用有理数上戴迪金分割来定义，把有理数集分割成上下两个集合，让上集合中所有的有理数，都大于下集合的；无理数被定义为，填充这种分割中的“间隙”。可以证明，这样定义的无理数和有理数，构成的实数，在收敛的意义下是完备的。

实数在传统上，看成整数加上一个无穷的小数。一个无穷小数，取越来越多位数的过程，是个柯西列，如果定义这个无穷过程表示的数学实体叫做“实数”，这时，实数可以看成是有理数的完备化扩张。

不论是怎样构造的，它们是等价的，实数是完备的，所有的柯西数列在实数上都收敛。

下面是几个微积分上熟知的定理，说的都是实数的性质，可以证明它们是互相等价的：

1. 实数是完备的。
2. 实数任意上（下）有界的集合，一定有上（下）确界。
3. 单调有界的数列有极限。
4. （区间套定理）闭区间序列 $([a_n,b_n])$，如果 $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],\forall n\geq 1$ 并且 $(b_n-a_n)\to 0$，则必定存在着唯一的实数 c 有 $c\in[a_n,b_n],\forall n\geq 1$，并且 $a_n\to c$ 和 $b_n\to c$。这个闭区间序列叫作“区间套”。
5. （有限覆盖定理）有界闭区间 I 上的任何开区间覆盖族中，必定有一组有限的开区间覆盖 I。

6. (列紧性定理) 任何有界数列必定有一个收敛的子列。

采用戴迪金类似的方法，是否还能发现实数间的空隙？从实数的完备性，可以证明了这样的空隙不存在。这也称为实数是“连续的”。

任何两个有理数，无论之差是多小，其间都有不可数个实数。只有夹在一个无穷地不断增大的有理数列，与另一无穷地不断减小的有理数列中，当它们之间的差值趋向 0 时，其“缝隙”才只够容下一个实数。

实数的完备性是微积分的基石。与此等价的上述性质，在微积分中扮演了重要的角色。

康托尔用对角线法证明了，实数是不可数的。从实数完备性上，也不难证明实数是不可数的。

> 用反证法。假设闭区间 $[0,3]$ 里的实数可数，那么可将它们标记为：$x_1, x_2, x_3, \cdots$。将 $[0,3]$ 等分成三个区间 $[0,1],[1,2],[2,3]$，x_1 必然不在其中之一，记这区间为 $I1=[a_1,b_1]$，再将 I_1 等分成三个区间，同样必有一个子区间不含 x_2，记这区间为 $I_2=[a_2,b_2]$，如此进行下去，得到一个区间套 $I_1, I_2, I_3, \cdots$。根据区间套定理，存在着一个实数 y 在所有这些区间中。但从区间的选取中知道，x_n 不在 I_n 中，所以实数 y 不是 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 中任何一个。这就和假设相矛盾。所以实数是不可数的。

实数必须是不可数的，才不会与它的完备性相冲突。在可数的世界里，没有微积分。

对于古希腊毕达哥斯派的疑问：无穷循环小数 0.999⋯的每一个截断都小于 1，它怎么最终会等于 1？从对于每一个截断所有 n 都成立的命题，得出对全体也成立的结论，是有穷世界直观的错觉。持潜无穷的观点，0.999⋯只是个无穷的过程，这小于的关系永远存在，当然不会等于 1。但是这里的“所有”，指的是对每一个有限的数 n，而不是包括了它们无穷全体的“最终”。就像上篇的数学归纳法的例子，这个对所有 n 的推理，只在有穷世界里是对的。不能应用于无穷。这是必需改变的观念。按实无穷的观点，这个无穷的过程是可以达到它的极限，也就是等于 1，这小于的关系，因达到极限而终结为相等。收敛的极限可以等于比数列中每一项都大（小）的上（下）确界。

柯西和魏尔斯特拉斯之后的微积分，为了避免过去对实无穷的简单解读，在能够用潜无穷观念解释的地方，尽量避免使用实无穷。但对收敛的极限，逻辑上毕竟不能绕开实无穷的观念。

也许大家觉得上面所说的内容很浅，早在学习微积分时就知道了。好，考个对收敛理解的问题。

> 张三找李四寻仇，拿个炸弹设了一分钟后扔向李四，李四半分钟后扔回，张三在四分之一分钟后又扔向李四，如此往复，问最后炸弹在谁的手里爆炸？
>
> （停下思考 5 分钟，再往下看，再思考。）
>
> 如果知道某个时刻落在这个无穷往复过程的哪一个时段，就知道炸弹在谁的手里。虽然这是个无穷的过程，但爆炸的时刻终将会到来。这些时段的累加为 1/2+1/4+1/8+⋯⋯，级数收敛到极限 1。但时刻 1 在这些描述炸弹位置的时段里吗？这个数学模型能描述现实的情况吗？

【扩展阅读】

1. 实数理论 http://210.26.16.17/ziyuan/38/analysis/precis/Acrobat/21.pdf

2. 实数的完备性 http://210.45.128.5/jpkc/shuxiefx/sxfxky/hky.pdf

第三章　重修微积分 3——拓扑

上一篇探讨了实数收敛的概念，用无穷级数来确定一个数。很容易把它扩展到无穷的函数序列求极限的问题。在初等微积分里，这是对函数变量的每个值逐点来考察，对每个固定的变量值，这无穷序列对应着一个函数值的数列，如果所有点对应的数列都收敛，那就认为这无穷函数序列收敛，它的极限函数在每个点的函数值是相应数列的极限值。这样函数序列的极限称为逐点收敛的。这个方法被牛顿引入后，广泛地应用，它虽然可行，但在微积分进一步研究时又遇到种种麻烦，于是又附加了许多条件，如“一致连续”，“绝对可积”等等，最后弄得微积分繁杂不堪。能不能把整个函数看成一个数学空间里的一个点，把这些条件都看成空间里的性质，从一个统一的角度来研究收敛极限的问题？这便是这一篇要介绍的概念。

现代的数学建立在比实数更加抽象的集合论基础上，应用于更广泛的空间。要将定义在实数上一元函数微积分的本质说清楚，推广到多元函数，函数逼近，泛函，随机过程，乃至各种抽象数学结构的集合上，我们要了解集合元素间联系的结构，这样才可能描述变动个体的走向，空间的性质，进而谈及趋近、收敛和极限。

微积分是基于无穷逼近极限的数学。收敛描述的是变动差别越来越小，直至微不可察的数列表现。收敛极限的存在，取决于实数的完备性。所以无穷逼近过程的含义和结果，依赖于它所在数学空间的性质。传统微积分是建立在实数空间 R

的性质上。这些实数性质是人们在习以为常的计算经验中总结“发现”出来，又用一些更简单基本的原理来证明的。

在现代数学之前，数学一直被认为是研究真理的学问，直到百多年前，哲人们还都认为不但如此，而且是绝对的真理。现在看来，这些真理也许不过是：习惯成了自然的经验在逻辑上自洽的表现。几千年实践认知形成有穷数学的直观与那时的理论吻合无间。无穷则无法验证，除了凌空而来的假定和逻辑自洽之外无所凭借，一切概念和引为依据的原理都需要精确的定义引入，一切的争执最终也只能根据这些定义和假设，用逻辑作出判决。直觉、经验、试验和公认之事，对数学都不足为凭。数学的价值在于有用，在虚构的空间里，以严谨的逻辑铸造出一把犀利的思想宝刀，当你用对了，无数的实践难题可以迎刃而解。

要想自如地在在抽象的无穷空间中行走，你需要正确的直观想象。前面两篇只是个导引，让你意识到必须纠正过去的直觉，才能放开心怀接纳无穷空间里的真实。在“无穷”篇里数学归纳法的例子，证明了在有限情况都成立的论断，在无穷时未必成立。要走出有限的误区，才能走出局限。在“收敛”篇里 0.999⋯=1 的分析，说明了极限的含义。这是微积

分数学模型的最基本假设，无穷过程达到彼岸的立足点。所有收敛的极限都是依相同的原理，将差异的不等式在极限处变成了等式。除非你曾经震惊思考改变过，如果初读前面这两个例子，没有经历过困惑，思考到终于理解了，你大约还没有走出有穷世界的藩篱。建议你回去走通了再来，否则学过的微积分知识只是别人说的，不是自己会的，此后三篇让你构筑无穷空间想象的介绍，就可能格格难下不能吸收，无缘看见彼岸。

直觉是模糊的联想，并非精确可靠。别人说的风景和你所想的也许不是同一个地方。只有踏在共同之处才是真实的一样。想象必须依附于证实过的判断作为立足点，只有在坚实的桩脚附近延伸，才靠近真实，过度延伸的浮想只是梦呓。可靠的直觉来自大量被证实过的事例，它们编织成了图像，越多的事例，才有越清晰的直觉。在现实有穷的世界，这些事例来自日积月累的学习和实践，判决正误唯有实验。在抽象无穷的空间，可靠的事例来自符合定义的例子和严格证明过的判断，在这里逻辑是唯一的判据。你必须记忆概念的定义，消化例子，纠正限于有穷世界的直觉，才会形成在无穷空间里的正确直观。

这一篇黑体字强调的概念，如开集、闭集、邻域、收敛、稠集、连续等等，你可能已经认识，不过在初等微积分学的是在实数上的定义，这儿是从抽象集合的高处俯视。这篇把点集拓扑的基本概念串起来介绍，有足够的信息让你可以依想象，走通从定义到例子的逻辑。希望你从过去的认知起步，以这里的定义来消除局限，用例子来校正偏差，在走通的过程中重建图像。花费时间逐个概念走过，你将会开始有看清无穷空间景象的基础。

好吧，抽象！讨论问题的空间一切属性都需要定义。忘掉实数、无穷、收敛、极限种种课堂灌给我们前人发现的真理，从简单干净的抽象集合开始。上一篇说，无穷序列作为数学模型来描述收敛的观念，序列中的项以及极限之间的 “相像” 性质，决定了收敛和极限的含义。好的。对集合中的两个元素，比如说是两个人，你能从其一了解另一吗？不能。因为元素只是集合中抽象的个体，没有它们间关系的信息。如果说知道它们同在某一个子集里，好比说知道两人同是一族，你就能知道，他们比不在这子集里的外族人有某些更相像。在这里用子集表达其中的元素具有某些共同的属性，这样的子集称之为开集，它们的并和交满足某些封闭性。集合上有了这样的一组开集，便能以此判断元素间属性是否相近。可以用来判别相邻性的这组开集，称为集合上的拓扑，它们组成了讨论无穷逼近问题的数学空间。

考虑集合 X 上的一个子集族 τ，其元素是 X 的子集，如果它们任意多的并，及有限个的交都属于 τ，空集和 X 也属于 τ，那么 τ 中元素称为开集，τ 称为 X 上的拓扑（**Topology**），组合 (X,τ) 称为拓扑空间，在简略 τ 不致混淆时，也可直接称 X 为拓扑空间。

在任何拓扑，空集和 X 都是开集，只具有这两个开集的拓扑，称为平凡拓扑。取 X 上的一组子集，包括空集和 X 本身，定义它们为开集，进而将它们任意多的并，及有限的交，都视为这空间的开集，则生成了一个拓扑 τ。给几个实例来帮助想象。

例 3.1：定义实数上的开区间为开集，在它们间进行任意多的并和有限个交运算，依定义这生成了实数上的拓扑。通常实数空间指的就是以此为拓扑的空间。

例 3.2：在闭区间 $[a,b]$ 上所有连续函数的集合 $C[a,b]$，对任意的 $f\in C[a,b]$, $\delta>0$，定义集合 $\{g\in C[a,b]\mid \max_{a\le t\le b}|g(t)-f(t)|<\delta\}$ 为开集，它们任意多的并和有限个交，

生成了 $C[a,b]$ 空间上的一个拓扑。

例 3.3：集合 $X=\{a,b\}$，定义空集 ϕ，单点集 $\{a\}$ 和 X 为开集，它们构成 X 上的一个拓扑。

例 3.4：将 X 上所有子集都定义为开集的拓扑，称为离散拓扑。它也可以由定义任何单点集都为开集来生成的。

拓扑空间 (X,τ) 中集合 X 称为空间，它的子集简称为集合，X 的元素称为点，点之间的相邻关系，由 τ 来确定。两个点，如果同在拓扑空间的一个开集里，认为它们是相邻，分属两个不相交的开集，认为是分离；包含了点 x 的开集，称为 x 的开邻域，包住 x 开邻域的集合称为 x 的邻域（neighborhood），寓意是与这点某些属性相近的点都在这里。

那么，怎么用拓扑来描述趋近状态呢？

对于拓扑空间 X 的一个点 x 和序列 (x_n)，如果对于 x 的每个邻域 U，都有对应着它的一个正数 N，当 $n\geq N$ 时，都有 $x_n\in U$，则称 (x_n) 收敛于 x。考虑到点的邻域含义，这意味着，对这空间中拓扑所考虑的属性上，这序列后面的点终将与点 x 是密不可分的。

对于拓扑空间 X 中一个点 x 和集合 A，如果 x 的每个邻域都包含有除了 x 外，还有 A 中其他的点，则 x 称为 A 的一个聚点（cluster point）。例如：在实数空间中，0 和 1 是开区间 $(0,1)$ 的聚点；任何一个无理数都是有理数集的聚点。

显然，序列收敛到非序列中的点 x，是序列所在集合的聚点；但集合 A 的聚点，未必有集合中的序列收敛于它。如果集合中的点都有一组可数的邻域，这点所有邻域都包含这组的某些成员，这样的拓扑空间称为第一可数的（first countable）。第一可数空间集合中的聚点都有集合中的序列收敛于它。在分析应用中的聚点都是用序列来逼近的，所以应用中的拓扑空间都是第一可数的，它也称为可数性的第一公理。

开集的补集称为闭集；包住集合 A 的所有闭集的交，是包住 A 的最小闭集，叫做 A 的闭包。闭包也是包括了 A 和它所有聚点的集合。实数是有理数的闭包。闭区间 [a.b] 是开区间 (a,b) 的闭包，闭区间 $[1,3]$ 是集合 $[1,2)\cup(2,3)$ 的闭包。

对拓扑空间 X 的子集 A，如果任何开集都包含有 A 中的点，则称 A 是 X 中的稠集，意味着 X 中的点的任何邻域，都含有 A 中的点，即可以用 A 中的点来逼近。如果 X 有个稠集是可数的，则称这空间是可分的，X 中的点都有这稠集中的一个序列收敛于它。有理数是可数的，它是实数上的稠集，所以实数空间是可分的，每个实数都有一个有理数的数列收敛于它。所有实数都是有理数集合的聚点，实数空间的拓扑是第一可数的。

同一个集合 X 上可以定义不同的拓扑。平凡拓扑是最粗的拓扑，离散拓扑是最细的。开集设定了一个点的邻域，它意味着里面其它点与这点相类。邻域之外就有某些的“不相类”，所以空间的拓扑区分的能力也很重要。如果对两个点，总有一个点开邻域不含另一，称为 T_0 空间；它们各自都有不包含对方的开邻域，是 T1 空间；如果两个点能有分属不相交的开邻域，叫 $\mathbf{T_2}$ 空间，这也称 Hausdorff 空间；T_3,T_4 则是说明点与闭集的区分能力。后者包括前者。过粗的拓扑，让空间中的点含糊难分。过细的拓扑也孤立难同，则难以找到点邻域里的其它点来推测它的性质。应用中大多数具有丰富性质的拓扑，既不会太粗也不会太细。现代分析是建立在点集拓扑研究的基础上。这样可以从简单拓扑结构开始，层层加细，从不断丰富拓扑空间性质的研究中，探究各种特性的本质。

对于微小的变动过程，如果集合上的函数，对应的值的变化也是微小的，即 x 趋向 a 时，$f(x)$ 趋向 $f(a)$，这是一种叫做“连续”的对应关系。用拓扑的语言来描述函数 $f(\cdot)$ 在点 a 处连续，它的定义是函数值 $f(a)$ 的每个邻域，都包含了 a 一个邻域的映像（即这邻域所有函数值的集合）。说函数 $f(\cdot)$ 是连续的，指它对定义域中所有的点都是连续的。

从拓扑空间 X 到 Y 的连续函数意味着，Y 的每个开集 U，它的原像 $f^{-1}(U)$ 在 X 中也是开集；闭集 V 的原像 $f^{-1}(V)$ 也是闭集。连续函数把它对应的两个空间的拓扑结构连系起来了。

两个拓扑空间之间如果有个一一满映射 F，F 和 F^{-1} 都是连续的，则称 F 是同胚映射，这两个拓扑空间称为是同胚的（Homeomorphism）。想象拓扑空间 X 就像一个有弹性的几何体，同胚映射 F 就好比将这几何体拉伸压缩变形，形成另外一个几何体拓扑空间 Y。连续函数 F 在这变形中，让所有点的相邻关系都没变。如果 F 的映射不是满的，则说 F 将 X 嵌入（embedding）到 Y 空间中。传统的拓扑学，用同胚映射和同伦映射对空间进行几何分类和代数特征的研究。分析应用上，将研究的拓扑空间同胚映射或嵌入到熟悉的空间中，可以比较直观地了解它的性质。

上面所说的是在集合的基础上，抽象地定义具有收敛概念的数学空间。这里尽量用简洁清晰的语言表达概念的定义，如果仍有未解之处，建议查看点集拓扑的教科书来加深理解。你的努力，将给了你一双能够看到无穷空间的眼睛。

现在检验你对抽象定义的理解力，请思考下面的概念题。

对拓扑空间 X 中的集合 M，X 的所有开集与 M 的交集定义为 M 中的开集，构成 M 的拓扑，称 M 为 X 的拓扑子空间。M 是个拓扑空间，它继承了 X 的拓扑。例如实数 R 是 3 维欧几里德空间 $\mathbb{R}^3$ 的拓扑子空间。

开区间 $(0,1)$ 继承实数空间的拓扑，问在这拓扑子空间里 $(0,1)$ 是闭集吗？它还是开集吗？在这里的有界数列都收敛吗？这子空间是完备的吗？这拓扑子空间与实数空间是同胚的吗？

【扩展阅读】

1. 维基百科,拓扑空间`http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8B%93%E6%89%91%E7%A9%BA%E9%97%B4`

2. Stephen Willard，General Topology，Addison-Wesley（1970）

3. Renzo's Math 490, Introduction to Topology `http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology10/Notes.pdf`

第四章　重修微积分 4——距离

上一篇从很抽象的角度，介绍了能够支持收敛极限的数学空间。用拓扑空间的定义和例子，从高处俯瞰你学过的初等微积分，把散落的知识，用概念间的联系组织起来，让你看到这些基本概念构筑成一个概括的，无穷空间模糊的图像。

学习没有捷径，唯常习练才能走通。旁人传的只是心法体会。如果没有过去学的微积分知识作为基础，这系列的内容即便记住了，也浮在云中，不过是观光游览。只有用学过的定理公式作为理解概念的桩脚，约束散漫的联想，抽象概念的想象才能落到实处。只有将文中定义，示例和关联的陈述，逐个用逻辑走通，勾画出来的骨架上才有色彩，才有直观想象。正确的想象和浮想的区别，前者可以作为证明的思路，其间的推理能用数学语言来表达和证明。而浮想除了娱乐，推论犹如算卦，不能明确也就没有实用的价值。

如果你已经消化了前几篇，这里将介绍具有更为直观的空间，让你头脑中图像更加鲜明。

很抽象的拓扑空间，缺乏足够的性能可直接用于物理和工程。这一篇和下面一篇，介绍在理论物理和实变泛函课中常见到的，拥有更多性质的拓扑空间。通过它们的联系，揭示相关的数学概念。读者试着从定义来验证所举的例子和关联陈述，用逻辑走通来消化概念，细化前篇建立起来的直观想象。

在集合上的两个点间，如果有了 “距离” 这个度量，将是应用者最易于想象远近相邻概念的拓扑。这时趋近、收敛和极限，就非常直观了。所以它在物理和数学中有着广泛的应用。这样的拓扑空间叫做距离空间（Metric space），有时也译为 “度量空间”。

在集合上怎么抽象化 “距离”，让它有最大外延又符合已有的直观想象？首先，它是个两点间非负实数值的度量，0 值意味着相等，非 0 视为不同，这度量对两点是对称的，三点相互之间犹如三角形的三边长度关系。

> 在集合 M 上，距离定义为一个二元实数值函数 $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$，对 M 上任意的 x, y, z 有下列非负，相等，对称，三角不等式的性质：

$\rho(x,y) \geq 0, \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \rho(x,y) = \rho(y,x), \rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z)$

对于任何实数 $r > 0, x_0 \in M$，集合 $\{x \in M \mid \rho(x, x_0) < r\}$ 定义了一个以 x_0 为中心，r 为半径的开球。以它们为开集，生成了 M 上的拓扑，它构成的拓扑空间称为距离空间，记为 (M, ρ)。实际上这空间的开集都能用开球的并来构成，这样的一组开集（在距离空间是开球）称为拓扑基。具有可数拓扑基的空间，称为第二可数的。第二可数的空间都是第一可数的。想象一下实数中以有理数为边界值的开区间，它们的各种并集构造出实数上所有

的开集。同理可证 $\mathbb{R}^n$ 空间（在通常的拓扑下），都是第二可数的空间。一般距离空间不一定是第二可数的。但都是第一可数的。

可以证明，距离空间中点的邻域，都包含有以这点为中心足够小半径的开球，所以一般拓扑空间中用邻域表达收敛的定义，可以用距离表达如下：

记无穷序列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 为 (x_n)，集合 X 上的无穷序列 (x_n) 收敛于 a，即 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 或者 $a_n \to a$, $(n\to\infty)$，意思是：

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n(n > N \Rightarrow \rho(a_n, a) < \varepsilon)$$

距离空间的邻域必定包含有半径为有理数的小球，所以它是第一可数的，集合的聚点都有集合中的一个序列来趋近它。

在实数上二元函数 $d(x,y) = |x-y|$，它满足距离的定义，所以 $(\mathbb{R}, d)$ 是个距离空间。以此代入上面公式，就是用 $\varepsilon - N$ 语言表达的数列收敛的定义。

在同一个集合上，可以有多种方法来定义距离。例如，对 n 维实数空间上两个点，$x, y \in \mathbb{R}^n$，不难验证函数 d, d_1, d_2 都可以定义为 $\mathbb{R}^n$ 上的距离。

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, d_2(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

特别地，距离空间 $(\mathbb{R}^n \square d)$ 称为 n 维欧几里德空间。上面谈到的开球概念，是逻辑上离中心距离小于一个数的点集合，你可以把它想象成在三维各向同性空间的球体。对 d, d_1, d_2 不同距离定义的开球，如在变形的空间，具有不同的几何形状。但相互间，放大一个便能将另一包住，所以用不同距离定义出的收敛都是一样的（等价的），它们构成的空间并没有本质的区别。下面会看到，对一般的距离空间并非都是如此。

同样地，可以定义柯西列 (x_n)：

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \forall m(m, n > N \to \rho(a_n, a_m) < \varepsilon)$$

收敛的序列都是柯西列，完备的距离空间中柯西列都收敛。欧几里德空间是完备的。

到目前为止，我们可以用实数上收敛极限的图像，类比地想象距离空间相应的概念。距离空间的收敛、极限和柯西列的定义类同于实数空间。点的序列类同于数列，开球相似于开区间，开集、闭集、闭包和覆盖定义性质都一样，我们可以借用实数空间的直观来想象距离空间。下面介绍距离空间的一些重要性质，来修正你过分的联想。

并非所有距离空间都有柯西列。

例 4.1：对集合 X 上任意两个不同点 x,y 定义函数 d(x,x)=0，d(x,y)=1。显然它符合距离的定义。（X，d）是个距离空间，叫“离散空间”，具有离散拓扑，没有柯西列。

对于相同的基础集合，在上面定义不同距离，并非空间上收敛都是等价的。

例 4.2：记 C[a,b] 为实数闭区间 [a,b] 到 R 所有连续函数的集合，对 $f, g \in C[a,b]$ 可以定义：

$$d_1(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|$$

$$d_\infty(f,g)=\max_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|$$

$(C[a,b],d_1)$ 和 $(C[a,b],d_\infty)$ 都是距离空间，因为有 $d1(f,g)\le(b-a)d_\infty(f,g)$，如果函数序列 (f_n) 按距离 d_∞ 收敛的（一致收敛），则按距离 d_1 也必定收敛（积分平均收敛），反之则不然。

例 4.3：闭区间 $[0,1]$ 上连续函数集合 $C[0,1], f_n(t)=t^n$ 看作是下标为 n 的点，序列 (f_n)（或直接写成 (t^n)），按距离 d_1 是柯西列，按 d_∞ 则不是，在这两个距离空间上它都不收敛。但在 $[0,1]$ 上可积函数集合里，依 d_1 距离，（$f_n(t)$）收敛到一个不连续函数 $f(t):f(1)=1,0\le t<1,f(t)=0$，这个极限 $f(t)$ 不在 $C[0,1]$ 里。

如果距离空间 X 中，任何柯西列都收敛到 X 中的一点，则称它是完备的。并非所有距离空间都是完备的。

例 4.4：$(C[a,b],d_\infty)$ 是完备的（连续函数序列一致收敛的极限,是连续函数）。$(C[a,b],d_1)$ 不是完备的（连续函数序列按积分平均收敛的极限，不一定是连续函数）。

例 4.5：开区间 $(0,1)$ 作为实数拓扑子空间不是完备的。柯西列 $(1/n)$ 在那里没极限。

实数空间是完备的，在有界和闭时就有了很好的收敛性质。对一般完备的距离空间，有界则要换成更强的完全有界的条件。下面介绍距离空间中这些概念和关系。

如果集合 M 中任意两点的距离，都小于一个正数，则称集合 M 是 有界的（Bounded）；如果对于任何 $r>0$，都有限多个，半径为 r 的开球覆盖 M，则称 M 是完全有界（Totally Bounded）；如果 M 的开覆盖都有有限子覆盖，则称 M 是紧的或紧致的（Compact）；如果任一无穷序列，都有一个收敛的子列，则称 M 是列紧的（Sequentially Compact）。

实数空间和欧几里德空间是距离空间。它们都是完备的，在那里有界的集合是完全有界的，对它们有列紧性定理：有界数列，都有一个收敛的子列。但这定理对一般距离空间不成立。

例 4.6：无穷序列（t_n）在 $(C[a,b],d_1)$ 和 $(C[a,b],d_\infty)$ 距离空间都是有界，却都没有收敛的子列。前者是不收敛的柯西列，后者不是柯西列，也没有柯西子列。

在一般的距离空间，一个无穷序列，未必有柯西子列，但如果它是完全有界的，则有柯西子列；如果它还是完备的，则有收敛的子列，即是列紧的。

这三个性质在距离空间中等价：完全有界且完备的，列紧的，紧的。

距离空间的子集如果是完全有界的，则它也是有界的，反之则不然。

例 4.7：离散空间是有界的，但无穷集合的离散空间不是完全有界的。

距离空间如果是完备的，它的闭集形成的子空间也是完备的。紧集是完全有界和闭的。实数的有界闭区间，欧几里德空间中的有界闭集都是紧的。

在直观上大致可以这样想象：距离空间中有无穷个点的集合，如果它可以被罩在越来越小的有限个开球里，这个集合的性质叫完全有界。在完全有界集合里的一个无穷序列，任给很小的开球半径，这覆盖着集合的开球数量也都有限，总有一个含有序列中无穷个点，它

们在任意小的球里互相“靠近”着，这个无穷靠近的子序列是柯西列。这柯西列的极限如果是都在这空间里，这空间称为完备的；如果它都在那集合里，这集合则是闭的，这样性质的集合称为列紧的，也是紧的，意思是它很密实且被有限地覆盖。列紧性与紧致性在距离空间没有区别，在第二可数 T_1 空间里也是如此，在更一般的拓扑空间，它们并不等价。

紧致性说明无穷空间里的一些性质，可以通过开集表示的相邻性，只经过有限的集合来确定。在有限的世界里，我们用数学归纳法来推理，对参数 1 具有某种性质，在某一个自然数参数正确时，都能够推出对下一个数也拥有，则对参数为任何自然数的数学式也都拥有这个性质。

紧致性则在无穷空间中，划出一类在里面可以归纳推理的集合：开集说明其中的点都有某种的性质，如果有限个开集都具有某种性质，能够推出它们覆盖住的点也都有相同的性质，则能被开集覆盖的集合的点都有相同的性质。所以空间的紧致性是有限性之外最好的性质。

考一下你能用想象来指导证明的能力。

1. 收敛的定义只是描写某一个点如何是一个无穷序列的极限。这定义并没有说明它是唯一的。实际上 T_1 空间（各点都有不包含对方的开邻域），因为区分能力差，一个无穷序列可能收敛到空间中任何一点。T_2 空间（Hausdorff 空间，任何两个点能有分属它们不相交的开邻域），则具有较强的区分能力。请证明：距离空间是 T_2 的。在 T_2 空间，一个无穷序列如果收敛，它的极限是唯一的。

2. 用例 4.3，4.4，4.6 介绍空间和无穷序列（t_n）的性质，以及这些性质间的关系，请推出这序列在 $(C[a,b],d_1)$ 空间是完全有界的，在 $(C[a,b],d_\infty)$ 空间不是完全有界的。请描述这两函数空间里的开球是什么样的图像，为什么在 d_1 的距离下，可以用有限的开球能覆盖这序列，在 d_∞ 的距离在却不能？请注意正确的想象是能够作为数学证明思路的图像。

【扩展阅读】

1. 维基百科,度量空间Phttp://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%A6%E9%87%8F%E7%A9%BA%E9%97%B4

2. 程代展,系统与控制中的近代数学基础,北京:清华大学出版社,2007 http://product.dangdang.com/9350967.html

3. Davis Edu, MetricSpace https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m125a/intro_analysis_ch7.pdf

第五章　重修微积分 5——线性

数学的空间是集合上赋有某些数学性质的论域。距离空间赋予集合中点的远近概念，让我们可以很直观地想象无穷空间中的收敛、极限和连续。微分、积分和求极限的计算都是线性的，线性运算依赖于，所在空间的点有着对线性运算封闭的代数结构。微积分中大部分概念，可以在有拓扑结构和线性结构的点集空间中理解和推广。所以我们要了解同时拥有这两种结构的空间。

集合 X 中的元素如果对线性运算封闭，即对于数域（实数或复数）$\mathbb{K}$

$$x, y \in X, a \in \mathbb{K} \to x + y \in X, ax \in X$$

那它是线性空间，其中元素叫向量。赋予向量 “长度”（范数）的概念，则可以导出距离。

设 X 是数域 K 上的线性空间，X 上的范数定义为从 X 到 R 一个映射：$x \mapsto \|x\|$，它对于任意的 $x, y \in X, a \in \mathbb{K}$ 满足非负性，比例性和三角不等式：

$$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|ax\| = |a|\|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$\|x\|$ 叫做点 x 的范数（norm），赋以范数的线性空间叫做线性赋范空间（Normed linear space）或简称赋范空间，记为 $(X, \|\cdot\|)$.

线性赋范空间是定义了 “长度” 的线性空间，空间中两个点之差也是个空间中的点，以此可用长度来定义距离。令 $d(x, y) = \|x - y\|$，则定义了一个距离。如果线性赋范空间按其导出的距离是个完备的距离空间，则称它是巴拿赫（Banach）空间。线性空间中的点有时也称为向量，以强调它的线性元素性质。

在线性代数中，大家熟悉的是有限维的线性空间，赋向量予范数，当然也成了赋范空间。所以实数以其绝对值为范数，n 维欧几里德空间以其分量平分和的开平方为范数，都是巴拿赫空间。显然还可以以其他方式来定义不同的范数，可以证明 n 维赋范空间不同定义的范数都是等价的，因此 n 维巴拿赫空间不同定义的距离也都是等价的。就是说，它们在一种定义下收敛，在另一种定义下也必然如此。从实数的完备性，不难推出它们的完备性。这些已是大家熟知的结果。

对巴拿赫空间，人们更感兴趣的是无穷维的情况，它的性质略有些不同。让我们看几个例子。

例 5.1：在闭区间 $[a,b]$ 上所有连续函数的集合 $C[a,b]$，对任意的 $f \in [a,b]$ 定义范数 $\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|$，它是一个巴拿赫空间。

线性空间的维数是其中最多线性不相关向量的个数。在闭区间 $[a,b]$ 上的多项式是这个巴拿赫空间上的向量，它们不可能都是有限个幂函数 x^n 的线性组合，所以这空间是无穷维的。

例 5.2：记无穷数列 $x=(x_n)$ 为集合中的一个点，对于任何一个自然数 p，都可以定义一个范数 $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$

对于给定的自然数 p，范数值有限的无穷数列的集合，在这范数下是一个巴拿赫空间，这空间很有用，记为 l^p 。

例 5.3：在 E 上 p 次勒贝格可积函数，在下面范数下是一个巴拿赫空间，这是分析中更常遇见的空间，记为 $L^p(E)$, $\|f\|_p = (\int_E |f(x)|^p dx)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$

下面将看到以 $L^2(E)$ 最为著名。$l^\infty, L^\infty(E)$ 及更多巴拿赫空间的例子见【 1 】。

既然线性空间的点，被看作是向量，从几何直观上很自然会想象到夹角的概念，如果用正交的向量做分解，在物理和工程上会很有用。这要推广欧几里德空间的内积概念。

设 X 是数域 $\mathbb{K}$（通常指实数或复数）上的线性空间，定义映射 $\langle x,y \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$，称为 X 上的内积，如果它满足下列性质：$\forall x,y,z \in X, \forall a,b \in \mathbb{K}$ 有

正定性:$\langle x,x \rangle \ge 0, \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

共轭对称性:$\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle};$

对第一变量的线性:$\langle ax+by,z \rangle = a\langle x,z \rangle + b\langle y,z \rangle$

赋以内积性质的线性空间称为内积空间。（注：有的教材的定义是对第二变量线性。）

定义范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$ ，如果按其导出的距离是个完备的距离空间，则称它是希尔伯特（**Hilbert**）空间。

不难看到，例 5.2 和 5.3 中 l^2 和 L^2 空间，很容易用内积来定义。

例 5.4：l^p 空间中无穷数列 $x=(x_n), y=(y_n)$ 定义它们的内积 $\langle x,y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$

不难验证，以此导出的正是前面 l^2 空间定义的范数，所以 l^2 空间是希尔伯特空间。L^2 也可以仿此定义内积，$\langle x,y \rangle = (\int_E x(t)\overline{y(t)}dt)^{1/2}$，所以它也是希尔伯特空间【 2 】。

学习线性代数时，我们知道，任何向量都可以表示为在线性空间下，基向量的线性组合。对巴拿赫空间和希尔伯特空间中的点，比如说连续函数、可积函数，是不是也可以做到这一点？当然如此，不过这个线性组合很可能是无穷级数的和或积分。比如说例 5.1 中连续函数可以表示为多项式级数的和（斯通-维尔斯特拉斯定理：闭区间上多项式一致逼近连续函数）。

在希尔伯特空间,因为有了内积概念,我们可以有正交归一的基,即对于它们有 $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ 。例如 e_i 为无穷数列中第 i 个分量为 1，其余分量都为 0 的数列，集合 $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}$ 是 l^p 空间上的基，而且是 l^2 空间上的正交归一基。

在数学物理和工程应用中，为了便于微分方程求解，人们经常将函数分解为某种无穷函数项级数的和，如傅立叶级数、各种正交多项式、特殊函数等等。这样可以把微分方程

变成代数方程来求解。这其实是将线性空间中的向量表示成在一组基上的线性组合。这个函数是否等于这种分解，实际上是问这个无穷级数是否收敛。学习了拓扑概念后，我们就会问这是哪一种意义下的收敛。最简单的如幂级数等指的是逐点的收敛，这只是说在收敛域里，每个点的函数值满足收敛关系，极限函数不一定保持序列中函数的性质，如有界性，连续性，可积性等等。有时我们更关心的是，能保持有某些性质的分解表示问题，这就需要了解所在的拓扑空间。

无穷维的巴拿赫空间和希尔伯特空间中的向量，可以分解为对基向量的线性组合，这并不意味着可以表示成无穷级数的和，因为基不一定是可数的。例如 e^{-st}， $s \geq 0$ 是一族函数集合的基，它是不可数的。能否做到对可数基的分解，取决于空间的拓扑，或是怎么定义它的范数和内积。

巴拿赫空间有可数的基（向量），当且仅当它是可分的，也就是说这空间有可数的稠集。显然，如果希尔伯特空间的向量都能表示成正交归一基的无穷级数和，它是可分的。反之，可分的希尔伯特空间中的向量，都能表示成正交归一基的无穷级数和。

对于可分的希尔伯特空间，将一个可数的稠集的点排成序列，剔去与序列中前面线性相关的点，形成了一个线性独立的序列，再将这组序列用 Gram − Schmidt 方法正交归一化，都可以形成了一个可数的正交归一基（e_k）。可分的希尔伯特空间中的点 x，都可以在这个基上分解，也就是等于收敛的级数。$x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$

也就是说在基（e_k）下，x 一一对应着数列 $\langle x, e_k \rangle$，不难证明这个数列是 l^2 空间的点，这个对应保持了线性关系，极限和内积的不变，即它与 l^2 空间等价。可分的希尔伯特空间在内积的对应关系下是等价的。

尽管可分的希尔伯特空间在内积的抽象下可以看成是唯一的。空间中的点都可以等于一个收敛的级数。但是不同的内积和不同线性独立向量的选取，可以形成不同的正交归一基，方便用于不同的应用。比如说应用于通讯工程信号处理的 $L^2(0,1)$ 中的 Haar 函数组与 Walsh 函数组，物理中用到的 Hermite 多项式等。

不能表示为无穷级数和的函数，也可能表示为不可数基向量的线性组合，即积分变换。比如说，对不可数基 e^{-ist} 向量用内积公式来分解的傅立叶变换，和对基向量线性组合（积分）的傅立叶变换反演。

学习数学概念，最起码的功课是用一个简单的例子，根据定义自己走过一遍，才能得到真正的体会。如果你相信自己是理解了，例 5.2，5.3 和 5.4 中 l^2 和 L^2 是两个简单的例子。请从内积、范数、距离、收敛、完备的概念开始，验证它们符合定义，证明它们是巴拿赫空间，并且也是希尔伯特空间，而且是可分的。这些证明都不需要技巧，范数和内积中的不等式可以直接引用 Minkowski 和 Holder 不等式【4】【5】，其他都没有难度，只是验证对概念的理解。

【扩展阅读】

1. 互动百科，巴拿赫空间 `http://www.baike.com/wiki/%E5%B7%B4%E6%8B%BF%E8%B5%AB%E7%A9%BA%E9%97%B4`

2. 维基百科，希尔伯特空间`http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B8%8C%E5%B0%94%E4%`

BC%AF%E7%89%B9%E7%A9%BA%E9%97%B4

3. 程代展,系统与控制中的近代数学基础,北京:清华大学出版社,2007 http://product.dangdang.com/9350967.html

4. 维基百科，闵可夫斯基不等式http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%97%B5%E5%8F%AF%E5%A4%AB%E6%96%AF%E5%9F%BA%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8F

5. 维基百科,赫尔德不等式http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B5%AB%E5%B0%94%E5%BE%B7%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8F

第六章　重修微积分 6——微分

> 芝诺“飞矢不动”的悖论说：飞行的箭，每个时刻都占据了一个确定的位置，这意味着它不会同时存在其他的位置，箭矢的位置固定，所以它在这时刻是静止的。依此推理，飞行的箭在任何时刻都是静止的，所以运动在逻辑上是不可能的。

对于这个悖论，有不同的解答。黑格尔认为运动就是一对矛盾，每个时刻飞矢是既在这个位置又不在这个位置上，用辩证法回避了形而上学的挖掘。康德认为时间和空间并非事物的属性，而是我们感知事物方式的属性，这个矛盾是我们过去时空观念的疵瑕。休谟否认时空的无限可分性，以此也可以给出有穷时空的离散化解释。而牛顿坚持了时空无穷可分的观点，用微积分给予近代的解释。从而也让时空无穷可分的假设变成了公认的真理。

运动在直观上是个时间段上位移的现象，当一个物体在时刻 t_0 到 t_1 的时段，从位置 x_0 到了 x_1，如果 $\Delta t = t_1 - t_0 \neq 0$ 时 $\Delta x = x_1 - x_0 \neq 0$，我们说它是在运动。物体在这时段的速度为 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$，意思是位移对时段里时间流逝的变化率。物体时刻 t_1 在位置 x_1，这个信息，不足以判定它是静止还是运动的。只要 $\Delta t > 0$，速度 $\frac{\Delta x}{\Delta t} \neq 0$ ，在 $[t_0\square t_1)$ 时段都是在运动，牛顿把这确信是运动的区间无限缩小，当 $\Delta t \leftarrow 0, \frac{\Delta x}{\Delta t} \leftarrow v$ 时，用这个无穷过程的极限，把运动和速度的概念扩展到时刻和位置点上，定义时刻 t_1，物体在位置 x_1 处的速度为 v，只要 t_1 时刻（或 x_1 位置上）$v \neq 0$，说明这时在这一点也是在运动。

这区间里的运动和速度，从单纯逻辑上不能推出在 t_1 和 x_1 也是如此，这里还需要一个假设。他的信念是，运动的概念在这无穷过程推到了极限，都应该保持不变，在数学上的表达是：运动速度是连续，也就是说它不会在同一时刻有不同的值。牛顿用速度加速度的极限定义和力学第二定律，规定速度是连续的，而力可以是不连续的。在牛顿的力学世界里，运动是一阶可导的位置函数。

当计算区间无限缩小到达极限时，时段变成了时刻，位移变成了位置，这个变化实质是，无穷的过程用它的极限值来代表了。比值的无穷过程说法（这是柯西略微修正了牛顿无穷过程的比值说法），赋予速度新的含义，称之为在这一点的导数。微积分里用了莱布尼茨在数学上不严谨但应用上很直观符号，记为：dx/dt.

这个无穷解释的观念影响至今，有了微积分这个利器，从此人们慢慢习惯世界是连续、无穷可分、确定性的，甚至是线性的了。这再次体现了康德的名言：“理性为自然立法”。

实数域上函数 $f(x)$ 在某一点的导数 $f'(x)$ 是函数值在这一点的变化率，它的直观几何图像是函数在这一点切线的斜率。函数的微分与变量的微分是一种线性关系 $df(x) = f'(x)dx$，这让人们构造数学模型时可以应用叠加原理，在近似时用差分来计算，因此被

广泛地应用。

实数或复数值函数在所有点的导数，构成了导函数。所以对函数求导，可以看成函数空间的一种线性变换。记微分算子 $D=\frac{d}{dx}, Df(x)=f'(x)$，它是作用在巴拿赫空间的一个线性算子。让我们从线性代数的角度来看，这线性算子将怎么分解所在的空间。

在线性代数中，我们知道线性算子在线性空间中有特征值，特征向量的子集，张成对这算子的不变子空间，全体构成线性空间的基，所有的向量都可表示为这些特征向量的线性组合。微分算子特征向量和它们张成的子空间对导数和积分运算封闭，微分方程在这里表现成向量之间的代数关系式，我们可以用它来解微分方程和逼近。下面考察怎样应用特征向量的例子。

显然，指数函数 e^{-iat} 是微分算子 D 的一个特征向量，这里 i 是虚数符号，a 是任意复数，t 是实数变量。对这特征向量，D 的特征值是 $-ia$。取任意一组这样的特征向量，它们的线性组合是微分算子 D 的不变子空间。但是仅仅如此的应用不多，我们更关心的是能否有个可数的正交基张成希尔伯特空间，让它里面的函数都能表示成无穷级数的和。这就和空间的拓扑性质有关了。

考虑希尔伯特空间 $L^2[0,2]$，那么 D 的特征向量集合 $e_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikt}|k\in\mathbb{Z}$ 便是这空间上的一个正交归一基。

让我们首先来验证正交归一性。对于 $L^2[0,2]$ 空间，它的内积定义是

$$\langle f(\cdot),g(\cdot)\rangle=\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$$

，对于任意整数 m,n ，我们有：

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-imt},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-int}\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-imt}e^{int}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(m-n)t}dt=\delta_{mn} \tag{6.1}$$

这就证明了它们是正交归一的。空间中向量 $f(\cdot)\in L^2[0,2\pi]$ 在 e_k 上的投影是：

$$\langle f(\cdot),e_k\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(t)e^{ikt}dt \tag{6.2}$$

这是大家熟悉的函数 $f(\cdot)$ 傅立叶系数的复数形式（若将复数展开成余弦和正弦正交基，则系数乘一个常数因子）。函数 $f(\cdot)$ 对这组向量的分解是傅立叶级数，不难证明这个傅立叶级数收敛于 $f(\cdot)$。所以它们构成了 $L^2[0,2]$ 空间上的基。经典的傅立叶级数，就是建立在微分算子 D 一组在 $L^2[-T\square T]$ 空间正交归一的特征向量上。这组可数的基张成了 $L^2[-T\square T]$ 希尔伯特空间。

注意到微分算子 D，有不可数的特征向量 e^{-iat}，所以它们在无穷序列表达下可能是线性相关的。这取决于它们所在的空间。

是不是所有希尔伯特空间中的点都能表达成无穷级数？也就是说，是不是它们都有可数的基？答案是否定的。

例如：对于函数定义内积为 $\langle f(\cdot),g(\cdot)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T\pi}^{T\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$，它构造了一个希尔伯特空间 $L^2(-\infty,\infty)*$，对所有的实数 s,t 的函数 $e_s(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ist}$ 都是这空间上线性算子 D 的特征向量，不难验证它们是正交归一的，这组向量是不可数的。

$L^2[-T\square T]$ 是可分的希尔伯特空间，里面的函数可以用傅立叶级数来表达（在 L^2 积分意义下收敛，级数展开几乎处处逐点收敛于它）。而 $L^2(-\infty,\infty)*$ 这希尔伯特空间是不可分的，所以这里的函数不能用傅立叶级数来表达。例子里那组向量是个不可数的正交归一基，这空间里的函数可以用积分变换来表达对这组基的分解和线性组合。从内积公式得到傅立叶变换，即是对这组基分解的分布函数；对基向量分布性分解的线性组合可直接写出傅立叶变换的反演。这提供了一个通俗的直观解读。更深入的探讨，诸如无穷区域的积分，无穷小分解系数分布函数的表达，积分的线性组合表示，及扩充到广义函数等等数学细节，在 Sobolev 空间可以得到更严谨的解读。

数学是直观想象在逻辑上精确化的学问。希尔伯特空间的研究，源自狄拉克对量子力学算符的表达。狄拉克非常注重数学上形式的美，简洁的美，他以此扩充了许多直观概念的应用场合，取得十分漂亮的结果。但在无穷世界的想象，还是需要用精确的逻辑来校正。1927 年冯・诺依曼、希尔伯待和诺戴姆的论文《量子力学基础》，纠正了狄拉克缺乏严谨的不足。

在早期的泛函分析研究，特别是在物理应用中，希尔伯特空间指的是可分的完备的内积空间，即这空间有可数的稠集。上面的例子说明并非都是如此的。

大家已经熟悉在 $\mathbb{R}^n$ 空间上的微分，怎么将它推广到往整体看不是那么“平整”的空间？先看看平面几何是怎么使用的。我们生活的大地实际上是地球球面上的一部分，把这个局部当作 2 维的欧几里德空间，或者说映射到 $\mathbb{R}^2$ 空间。每一个局部地方在映射下对应着一个平面地图，球面上每个地点对应着平面地图上一个坐标，我们可以用坐标进行这个球面局部的各种计算。用几张平面地图覆盖了全球，就可以计算地球的各处。

对高维和更一般情况，也可以类似地，把拓扑空间 X 的一个局部开集，一一映射到 $\mathbb{R}^n$ 空间上来计算。X 空间上的一个点 x 对应着 $\mathbb{R}^n$ 空间上的一个点，称为 x 的坐标，x 的邻域对应着坐标的邻域以保持对应的收敛关系。所以这个映射必须是同胚的，也就是这个一一对应的映射双向都是连续的，就像 X 中的这个开集通过伸缩变形展平成 $\mathbb{R}^n$

空间的开集一样。如果有一族这样的开集覆盖了 X，都能做到这样的映射，那么 X 上的每个点都有了 n 维实数的局部坐标。这样的 X 空间便称为流形。覆盖开集的重叠部分，流形上的点在不同映射的局部坐标系上，可以进行坐标变换。因为这样的映射是定义在开集上，所以 x 点总有一个足够小的邻域是完全在一个映射的局部坐标系上，x 点与它坐标的收敛关系是一一对应的，如果交集之处的坐标变换是连续可导的，整个流形通过这些映射的坐标系，便可以有对应的微积分计算，这时称为微分流形。

当然并非任何的拓扑空间都能做到这一点。流形 X 的拓扑不能太粗，对于两个点必须有能够分开的邻域，即是 T_2 或者称为 Hausdorff 空间；拓扑也不能太复杂，要有可数的拓扑基（其元素的并能够生成所有开集，即是第二可数的）。局部映射必须与相同维数的 $\mathbb{R}^n$ 空间同胚。下面是用数学语言描述的定义。

X 是第二可数，T_2 的拓扑空间，若在一个覆盖 X 的开集族中的每个开集，都有一个

嵌入 $\mathbb{R}^n$ 的同胚映射，X 可以称为 **n** 维拓扑流形，这个映射称为坐标图。在拓扑流形上，两个坐标图交集部分的点在不同的坐标图上映成不同的（坐标）点，如果这两个坐标变换函数有 r 阶连续导数，则称它们是 C^r 相容的坐标图。如果所有坐标图都是 C^r 相容的，则称这个流形为 **C^r^** 微分流形。r 为无穷大时称为光滑微分流形。

对于一般的距离空间，它是 T^2，但只是第一可数的。如果它还是可分的，则它是第二可数的，这个拓扑中任何的开集都能由一组可数开球，用它们的并集来构成。可分的距离空间满足第二可数和 T^2 的条件，只要每点的开邻域都有同维数的同胚坐标映射，就可以是流形。

两个维数分别为 m 和 n 的 C^r 微分流形间的映射称为 C^r 映射，它可以表示为对应点局部坐标上的 C^r 函数。对这个函数的求导和积分，对应着这两个流形间的映射在这局部区域上的相应的运算。比如说，n 维光滑微分流形 X 到 R 的函数，在 X 中点 x 的邻域对应着 $\mathbb{R}^n$

空间上一段光滑曲线。这条光滑曲线，对应着 x 点的切线（用方向导数表示）是一个 n 维向量，所有这些切向量形成的空间称为 X 在 x 处的切空间。虽然上述的切空间是由某一局部坐标系下定义的，可以证明不同的坐标系导出的切空间是相同的。直观上可以想象成二维 X 曲面在 x 这一点上的切平面。如果一个映射 F 将 C^r 微分流形 X 上每一点都对应着它切空间上的一个向量，F 称为 C^r 向量场，在局部坐标下表示如下，其参数都是 C^r 函数。

$$F = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{6.3}$$

纤维丛的定义了包含三个拓扑空间 B□M□Y 和一个投影映射 p：基空间 M 是全空间 B 的投影 $p(B) = M$；基空间上每一个点 x 对应着这个投影在全空间 B 里的原像 $p^{-1}(x)$，这原像与丛空间 Y 同胚，称为这点上的丛；基空间上每一点存在着一个邻域 U，直积空间 $U \times Y$ 与 U 的投影原像 $p^{-1}(U)$ 同胚。在直观上可以想象二维曲面 M，每一点 x 上都有一根 $p^{-1}(x)$ 的纤维，这些纤维互不相交，全体构成三维空间 B。B 中的每一点都可以沿着纤维对应到 M 的同一个点上（称为投影），全空间上点的邻域在纤维上和投影到基空间上仍然是它们的邻域。不要把基空间 M 想象成一把刷子的底部，M 应该看成是全空间的一个横截面，密实的纤维集束穿过这个横截面向两边无限延伸。每根纤维都像直线 Y 的弯曲变形。纤维丛的数学模型也可以用来描述物理空间中的场。

微分流形和纤维丛，若以欧几里德三维空间中的曲面和纤维集束几何体来看，都不难想象其图像。不过它们是在抽象的点集拓扑空间上有严格的定义，从而能够在上面推广微积分的应用。这些都是现代微分几何课程的内容，这里的简略介绍，希望通过较精确的数学定义，让大家可以想象这些概念。

【扩展阅读】

1. 冯・诺依曼关于量子理论的数学基础，算子环，遍历理论的研究 `http://www.kepu.net.cn/gb/basic/szsx/2/25/2_25_1008.htm`

2. 钱诚德,高等量子力学 `http://course.zjnu.cn/huangshihua/book/%E9%92%B1%E8%AF%9A%E5%BE%B7_%E9%AB%98%E7%AD%89%E9%87%8F%E5%AD%90%E5%8A%9B%E5%AD%A6.pdf`

3. 关肇直等，张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979

4. 维基百科，流形http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B5%81%E5%BD%A2

5. 程代展,系统与控制中的近代数学基础,北京:清华大学出版社,2007 http://product.dangdang.com/9350967.html

第七章　重修微积分 7——测度

计量是数学的肇始。无论是称重量，量尺寸，度面积，计体积，结果都是从 0 到无穷大的一个数。计算时多将整体划分成比较规范的部分，分别测量累加而成。不因测量的方法不同而异。所以计量必须具备几点：它是非负的数量，空无为 0，划分后计量之和等于总体，不因测量方法而变。在无限可分世界里任何的计量，就必须把这性质推广到无穷的集合。抽象集合中的测度 **m**，就是将集合的子集映射到 $[0,\infty]$ 区间的函数，空集对应着 0，测度有着可数可加性，即：

$$m(\phi)=0,\quad m(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n),\ \ E_i\cap E_j=\phi\ \ \forall i\neq j \tag{7.1}$$

在不同坐标系下表示集合的点，测度值要保持对坐标变换的不变性。注意，无穷大这里也可以是个测度的量值，这让它适用于一些无穷的情况，比如说没有尽头的直线长度，无边无际的平面面积和无限空间的体积等等。例如，集合的势也是一个测度，满足 0 的对应和可数可加性，对于有限集，这测度是集合中元素的数量，对无穷集，这测度是无穷大。人们的计数其实是从这个测度开始的。

显然对于同一个集合，可以定义不同含义的测度。学习数学的抽象，这是要适应的思想方法。

这个系列介绍过收敛、拓扑、距离、范数、内积、测度等数学的概念，在集合的基础上定义它们的性质。在同一个基础集合上，往往有多种具体的结构和映射符合这些定义的性质，它们的抽象都属同一概念。这情形与物理等自然科学很不同，让有些学者觉得不习惯和不确定。在思想方法上，自然科学本质是归纳的，研究的都是具体一类的事物，从中抽象发现一些共有的性质，形成了概念。虽然有时用抽象的语言来定义，也因此逻辑推理，但隐在定义之后的具体一类事物，始终是最终的裁判，当推理的结论逸出接受的范围，就放弃原有的概念代之以新的解读。而数学的本质是演绎，虽然许多概念的形成来自归纳，但不同定义的概念在逻辑上必须是一致的，等价的，或是由论域的局限或推广。数学研究的是由这些共同性质定义下的概念，在演绎下的共同表现，不论概念所指的具体对象的类别有多大的不同，所得的结论从具体对象来看会如何不可思议。就抽象所聚焦的概念而言，它们都是一样的，拥有共同推理而得的性质。在数学最高的权威是逻辑而不是事实。所以要构造数学概念的直观图像，必须习惯用多种不同类别的具体对象（在数理逻辑上称之为模型）来想象抽象的概念，了解不同模型的局限，而不要被它所左右。自然科学关心物质世界里的真。数学关心的是思维世界里的真。只有确信思维中逻辑推理的结论是真实可靠的，

才能利用数学概念作为工具，来了解、表达和推测物质世界里的真实。

让我们从测度的定义出发，看当逻辑与事实冲突时，数学家和自然科学家的不同处理。

实践经验告诉我们，将一个物体分割成几部分，分别测量它们的重量和体积，它们之和一定会等于整体。这已经成了无可置疑的真理。很不幸，经验不能代替逻辑，因为经验只涉及到有穷的世界，当我们把物体看成无穷可分时，无穷集合的任意分割，并非都能如此。在定义了一些集合测度后的空间里，并非所有的集合都可以参与保有这样性质的测度。

巴拿赫-塔斯基（Banach Tarski）举了一个例子。大致说来，他用分别沿 X，Y 两轴左转或右转某个特殊的角度（例如 $arccos(1/3)$）的操作，形成包含 4 种旋转 a, a^{-1}, b, b^{-1} 的运算序列。这些有限步运算序列生成了一个具有无穷个元素的群 H。在序列中刨去相邻反向相消的旋转，可以证明每个序列与群 H 中的元素一一对应。这个群里的元素可以按生成时，第一个的旋转操作分别为 a, a^{-1}, b, b^{-1} 而分成不相交的 4 组及单位元 e 组。实心球中的质点，在这群每个元素对应的旋转操作序列作用下，形成一条旋转轨迹质点相连的链。利用选择公理，在每个链条都可以选出一个点来代表，这些点的集合记为 M，球中所有的质点都在 M 中某点所在的轨迹链条中。这些轨迹链条依对应的 4 个群组也分成 4 组，将这些轨迹链条的第一个质点取出放在对应于群的 e 组，其余链条中的质点对应到起始旋转分别为 a, a^{-1}, b, b^{-1} 的群组，它们是互不相交的 5 个组，可以看成球被分割成 5 堆。现在将对应 a^{-1} 组那堆整体做 a 的旋转，经过这旋转后的这堆包含有对应着所有 a^{-1}, b, b^{-1} 组及部分 e 组的质点，对 b^{-1} 组那堆整体做 b 的旋转，得到类似的结果，不难想象将它们与剩下的 a,b 和 e 组可以组装成没有缝隙与原来一样的两个球，详见【2】。

这个例子很有名，称为“分球悖论”或者“巴拿赫-塔斯基定理”，因为进行分类时，用了选择公理（AC）在无穷集合中挑选，上世纪二十年代，大家是用来反对 AC 的。经过多年争论后，人们发现这里的证明在逻辑上无懈可击，选择公理在数学基础上很重要，是必须保护的不可或缺。而在物质世界中球不可能由无限的质点组成，所以这模型并不与现实冲突。想要继续应用抽象的测度理论，那么只能归结为人们在无穷的世界里的直觉错了。

为什么是不可思议？因为人们觉得将一个球切碎分割成 5 堆，组成球的元素分成了 5 个集合，球的重量和体积是这 5 个集合的总和，一堆元素刚性旋转不会改变重量和体积，即使装配成的球没有缝隙，它们也不该有两个球的重量和体积。

重量和体积都是测度，与经验的冲突在于这种分割不满足可加性。但如果这种怪异分割而成的 5 个集合是不可测度的，那么就没有理由说什么可加性了。一个球和两个球之间就失去了这个有限测度量的联系。至于一个球和两个球的元素数量，因为它们都是无穷的集合，在有限的世界对岸，集合论早就告诉我们，无穷集合和两倍的集合，它们的元素是可以一一对应的。这例子告诉我们，测度有时只能定义在空间的一部分集合上，这些集合称为可测集，它们包括空集，对可数个并，及补集运算封闭，称为 σ 代数。在这 σ 代数之外的集合，对测度没有定义，称为不可测集。

在实数空间，我们定义开区间 (a,b) 的测度为 $|b-a|$，以开区间生成的 σ 代数称为波雷尔 **(Borel)** 集。在实数空间以开区间测度和定义延拓出来的测度称为长度。在 n 维欧几里德空间，可以同样地从定义矩形区间的面积延拓出 2 维的测度，以及 n 维的体积，这样定

义的测度称为勒贝格测度。在不致混淆时，简称为测度，或长度、面积、体积。

波雷尔集包含着 $\mathbb{R}^n$ 空间通常拓扑下的所有空集、全体、开集、闭集、单点、以及它们的各种交和并。在理论上，不可测的集合虽然也有无穷多，你可以想象的却很难，因为它们不存在你的经验中，它必须用逻辑依赖选择公理来构造。

柯尔莫哥洛夫将公理化概率论定义在概率空间上，用样本的集合代表事件，它们构成空间里的 σ 代数，概率则是对集合取值在 0 到 1 之间的测度。

测度为 0 的集合叫做零测集，它在应用中扮演了重要的角色，比如说你突然有个天才的发现，只是它适用的情况在参数中是零测集，如果参数值是随机分布的，那你几乎都没有用武之地。在积分里，如果引起麻烦的地方，比如说无界、间断处等等是零测集，那也可以忽略它们。

$\mathbb{R}^n$ 空间中的一个点的集合，可以包含在任意小的区间里，它的勒贝格测度小于任何正数，所以它只能为 0。从测度的定义可知，可数个零测集的并集仍然是零测集，所以有理数集合是实数空间 $\mathbb{R}$ 上的零测集。

有个古老的疑问："点没有长度，为什么它们组成线段却有了长度？"有人回答，因为这里的点有无穷多，0 乘无穷大可以是非零的数。上面例子说明，这理由对可数多的无穷大不成立。是不是因为线段有不可数的点所致？下面例子说明，在直线上不可数点集的总长度也可能是零。

> 康托集是这样构造的，记 $C_0 = [0,1]$，将这区间三等分，取走中间一块 $(1/3, 2/3)$，留下的部分 $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$；分别在留下的区间 $[0,1/3]$ 及 $[2/3,1]$ 中，再次取走各区间中间 1/3 的那块，得到 C_2；如此重覆得到 C_n，$n = 0,1,2,\cdots$；它们的极限 C 称为康托集。C 是不可数的，因为它的点必须选自无穷序列 Cn 中左边或右边部分，即 2 的可数幂。Cn 测度是 (2/3)n, 当 n 趋向无穷大时，它趋向 0，所以 C 的勒贝格测度是 0.

当一个区间无穷地缩小到一个点，区间的长度也无限地趋向 0，区间的长度和覆盖线段的区间数总在有限世界这一边，没有尺寸的点和无穷多个点是在实无穷的彼岸，我们不能指望用点和点数来解答线段长度的问题。不同维数空间中几何体的测量也是如此。看个例子。

> 英国人很早在测量海岸线长度时，发现所用的尺度越短，海岸线的长度越长，那么到底什么是曲线的长度？二维空间的曲线，显然不能用一维区间来覆盖，而二维的勒贝格测度（面积）是零。实践中用尺子丈量曲线，微积分里用折线来逼近曲线长度，都是用二维空间的园来覆盖曲线，然后计算这些覆盖直径的和。对于不同覆盖所计算的下确界，称为曲线的长度。测量所用的尺子越短，计算出来的长度越长，这反映了近似逼近的过程。这个单调递增的数列极限可能是有限的量，也可能是无穷大。

在 n 维欧几里德空间，任何集合 A 都可以被一族可数的开集覆盖，这族开覆盖测度和的下确界称为集合 A 的外测度，记为 $m^*(A)$。外测度对所有集合都有定义，保持有测度的非负性，对集合包含关系的单调性，和次可数可加性。当集合 A 是可测时，外测度等于它的测度。

$$m^*(A) \geq 0,\ m^*(\phi) = 0, \quad A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B),$$

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n),\ \ E_i \cap E_j = \phi\ \ \forall i \neq j$$

将开集的测度定义为集合中两点距离的上确界，我们就由此定义了曲线的长度。在有界的二维区域里的曲线长度有没有可能是无穷大？当然有。下面是一个分形曲线的例子。

Koch 曲线是这样构造的。对单位线段，中间 1/3 用等边三角形的两边来代替，得到四条边的曲线 k=1，对这四条边做同样的替换，得到 k=2 曲线，如此无限重复这个替代过程，它趋向 Koch 曲线。(见图，图像抄自网络)

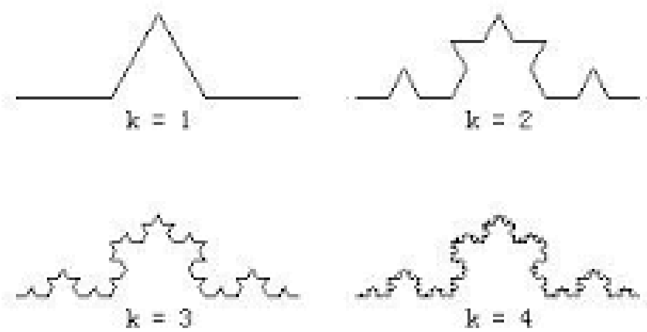

图 7.1: 分形曲线

可以把这个 k 序列看作测量尺度变小的过程，计算不同 k 时计算的曲线长度 $L(K) = (4/3)^K$，所以 Koch 曲线的长度是无穷大。

对于欧几里德空间 $\mathbb{R}^n$ 中的几何体，集合 A 的 **Hausdorff** 测度 $H^s(A)$ 定义如下：

$$H_d^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |O_i|^s \mid \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \supset A,\ \ |O_i| \leq d\right\},\ H^s(A) = \lim_{d\to 0} H_d^s(A) \tag{7.2}$$

$H^s(A)$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 的 Borel 集上，不难验证它满足可数可加性，所以是个带参数 s 的测度。当 s=n 时，$H^s(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 n 维勒贝格测度 (精确地说只差一个与 n 有关的倍因子，因为 Hausdorff 测量的尺子是球，勒贝格是方块)。

在 $\mathbb{R}^n$ 空间，将几何体 A 线性放大 k 倍，其集合记为 $kA = \{kx \mid x \in A\}$，则有 $H^s(kA) = k^s H^s(A)$，这与 k 维几何体的线性放大后，长度、面积和体积比例关系是一致的。注意到对于给定的集合 A，Hausdorff 测度 $H^s(A)$，随着 s 从 n+1 开始减小，其数值从 0，到了一个临界点后，突然跳到无穷大，我们把这个 s 的临界值，称为几何体的维数，或者 **Hausdorff** 维数。当它是自然数时，这与我们日常中的经验是一致的，但有时它不是一个整数。

作为一个应用的例子，现在我们审视 $\mathbb{R}^n$ 空间里曲线的长度，凡是能够用积分算出有限值长度的，无论在平面或在三维空间，用 Hausdorff 测度可以证明都是一维的曲线。Koch

曲线按照 s=1 来计算是无穷大，所以它可能是更高的维数。分形物体具有自相似结构，注意到如果将 Koch 曲线线性放大 3 倍，可以得到 4 份的原来曲线，根据上述 s 维几何体的线性放大与 Hausdorff 测度的倍数关系，可以算出 $s = ln4/ln3 = 1.26186...$，即 Koch 曲线是 1.26186... 维。前面例子中的康托集，线性放大 3 倍可以得到 2 份原来的康托集，所以它的维数是 $s = ln2/ln3 = 0.63093...$，是分数维的。只有在几何体所在的维度里的测度，才可能是一个正实数值。

如果你好奇，$\mathbb{R}^n$ 空间里一个点的维数是多少？建议你用 Hausdorff 测度公式验算一下，以加深理解。只有 s=0 时，单点的 Hausdorff 测度是 1，k 个点和可数无穷个点，测度是 k 和无穷大，而它们在 s>0 时都是零测集。不可数的点集，在 s=1 时的测度，既可能为 0，如康托集；也可能是正数，如有界区间；也可能是无穷大，如整条直线；还可能没有定义，如不可测集。这也许能给予古老的点与线段长度关系问题，更多一点的认识。

【扩展阅读】

1. 维基百科，测度 `http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B5%8B%E5%BA%A6`

2. Wikipedia，Banach–Tarskiparadox `http://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski_paradox`

   Wikipedia，Hausdorffmeasure `http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_measure`

3. 维基百科，维塔利集合 `http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BB%B4%E5%A1%94%E5%88%A9%E9%9B%86%E5%90%88`

第八章　重修微积分 8——积分

一元非负函数 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分，可以很直观地看成是这函数与 x 轴中 [a，b] 区间所夹的面积。在几何上，牛顿很直观地将 [a，b] 分割成细小的区间 Δx，以此为宽度的小长方块来填充或覆盖逼近这个面积，$\sum_i f(x_i)\Delta x$，当 Δx 趋于零时它趋于这曲线所围的面积，莱布尼茨形象地把这个极限记为：$\int_a^b f(x)dx$

。多元函数的多重积分是类推到高维体积的度量。

面积和高维体积按照这样计算的本质就是勒贝格测度。积分作为描述物理世界的数学模型，这是它所要求的属性。测度的计算是将整体切割成规范的部分，测算累加而成。上述牛顿的定义是按纵条切割的算法，叫做黎曼积分。面积也可以按横条来切割，把函数的值域区间细分，$\sum_i m(f^{-1}([y_i, y_i + \Delta y]))\Delta y$，算 Δy 趋于零时的极限，这个算法收敛的极限叫勒贝格积分。（数学语言的定义见【1】，直观见图，图像来自网络下载）

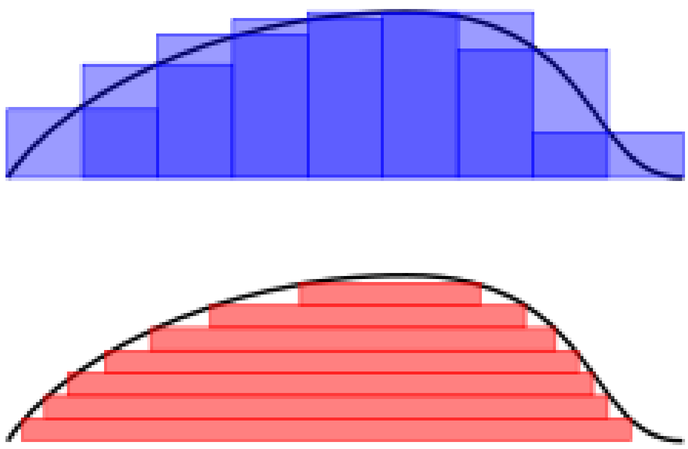

图 8.1: 黎曼积分与勒贝格积分的直观区别

显然无论是用哪一种算法，它们计算所指的面积或体积是一样的，也应该相等的。将积分作为描述实践对象的数学模型，无论是用哪种测量计算方法，它们必须相等才有实用意义。这些面积或体积作为一种测度，如果按照不同的分割方法（即不同的积分定义）都

有计算结果，在逻辑上也可证明是相等的。所以，如果黎曼积分和勒贝格积分都存在，它们相等。

如果函数具有负值，可以看成它是两个非负函数的相减。也就是两块面积体积或测度的相减，所以上述的结论也适用于一般的情况。

函数 f 在集合 E 上的勒贝格积分，记为 $\int_E fdm$，这里 E 是可测集，f 是 E 上可测函数，m 是 E 上的测度。当 E 是个区间时，它通常也用与黎曼积分相同形式的式子。请注意，对勒贝格积分，它只是沿用黎曼积分的形式记号，不再具有莱布尼茨那种对 dx 的符号解读。在可以缺省所指的测度和集合时，甚至将它记为 $\int_E f$ 或 $\int f$

因为所有黎曼可积的也是勒贝格可积，而且相等，借用相同积分形式的记法不会引起混淆。当你读论文里公式推导，看到不满足初等微积分相关的定理条件，居然也通行，不是作者不严谨，或误以为应用上不需要严谨，而是式子里指的是勒贝格积分。

勒贝格积分中测度、可测集，可测函数的术语吓住了许多对它们不熟悉的人，不敢使用。其实只要理解这是和黎曼积分一样应用，并具有更宽松应用条件的数学模型就不难了。黎曼积分的区域是可测集，能进行黎曼积分的函数是可测函数。黎曼积分都可写成勒贝格积分。在细节上：当 E 是一维时这里的勒贝格测度就是长度，二维时是面积，高维时是体积类推；说 f 是 E 上的可测函数，其定义是在 E 中 f 函数值大于任给一个数所有点形成的集合，都是可测集。大致说来，可测集包含了非数学专业人可以想象到的任何集合。迄今所知的勒贝格不可测集，都是用选择公理构造出来的无穷世界里的怪胎。如果你在物理或工程应用中涉及勒贝格积分，除非得到惊人违反常识的结果，大约都可放心地认为，你用到的都是可测集和可测函数。你大约还没有足够的运气和能力，构造出不可测集或不可测函数来犯错误。

既然这两种积分都一样，为什么黎曼积分用了几百年后，被称为经典分析而渐渐淡出，上个世纪初发展的勒贝格积分被广泛应用，并看作是近代分析的开端呢？

简单的答案是：应用黎曼积分在积分区域、积分函数及参与其他无穷过程时，有许多限制，而勒贝格积分解决了这些麻烦。它们是对相同应用的不同测算方法，就像原来用木尺丈量土地，现在改为用测距仪来测量一样，更有效的新方法必然会取代旧的，需要的只是熟悉。观念转换需要时间来消化，所读课本需要更新，个人则像是跟了不同师傅学了不同的功夫而已。

观念的不同带来了眼界的不同。经典分析一直徘徊在有限的视野和无穷的梦魇中。站在有穷世界的岸边，用无穷过程来窥视对岸的实无穷。想尽量保持有限世界的直观和逻辑上的严谨。这种囿于有限世界的观念和对无穷实质的回避，使得触及无穷时缩手缩脚，理论结果支离破碎。而勒贝格积分则基于包括有限和实无穷集合的测度研究上，以逻辑为骨架来拟合修正过去经验形成的概念。只要善于纠正陈旧观念形成的误区，在新的直观下，便能欣赏更广阔世界中简洁一致的美。

测度是从 0 到无穷大的量度。在包含着正负无穷大的扩充实数里，它们间的四则运算除了规定 0 乘无穷大仍为 0 外，其他都与中学关于无穷大的知识一致，包括了无穷大减无穷大没有定义。在勒贝格积分中，函数和积分的值域都是定义在这扩充的实数上。不难想象和证明，对于非负可测函数，勒贝格积分都存在。可测函数可以分解成两个非负可测函

数之差，所以只要它俩的积分不都是无穷大，可测函数的积分都存在，在应用上都有意义。注意勒贝格积分存在，包括了它的积分值可能是无穷大的情况，所以勒贝格积分通常都存在。而勒贝格可积函数指的是积分值是有界的，显然，勒贝格可积等价于它是绝对可积的。

黎曼积分是定义在有界区间上有界函数的积分，这时勒贝格积分也有界，所以黎曼可积，勒贝格也是可积的。勒贝格积分定义在任何可测集上，包括可以黎曼积分的区间，和无界的全空间。黎曼积分要推广到无界的区间，它通常被定义为有界区间上积分的对称上下限无穷的扩展，在想象上比较直观，但这是个有疵瑕的形式扩展。例如，对于在 0 点从-1 到 1 的阶跃函数，广义黎曼积分值是 0，勒贝格积分不存在，对于周期函数也是如此。有些书上作为黎曼可积，勒贝格不可积的例子。但阶跃函数的广义黎曼积分，不满足平移不变性，若坐标向左或右平移一点，它的黎曼积分值就不同了。对周期函数如果黎曼积分的上下界不是对称地无穷扩展，它们的极限积分值也不一样。这用于描述物理世界，对应着测量的坐标变化和计算的方法不同，则意味着测算物理量的不同。所以对应于数学模型描述的对象，勒贝格不可积的结论正确地反映了这种不可计量的情况，广义黎曼积分则给出误导的答案。在推广到无穷的区域，广义的黎曼积分无论如何定义都有疵瑕。

黎曼积分最大的问题是，在与取极限、无穷级数、多重积分等运算的交换顺序，必须在很严格的条件下方为可行，这在应用上极不方便。实际上黎曼绝对可积的函数，在绝对值积分的范数下不是个完备的空间，这就像我们只在有理数域谈几何公式和代数应用，处处受到局限。从另一种观点来看，勒贝格积分可以定义为可积空间完备化的手段，它将函数绝对值黎曼积分为范数的计算方法更进，勒贝格可积函数是包含了黎曼可积函数的巴拿赫空间 L^1。【4】

为什么勒贝格积分会带来了这么多的便利？我们先用零测集牛刀小试。

黎曼积分在基本定义中假定被积的函数是连续的有界的，但应用中不一定都那么理想，可能有些间断点的“毛刺”，它的技术处理是分段来积分，然后将它们加起来，绕过这些疵点。在疵点是有限数目时，这样处理没有问题，但如果有无穷多个呢？

勒贝格积分告诉我们，如果这些疵点是零测集，把它们刨去换成任何数值，都不影响积分结果。黎曼积分和勒贝格积分如果同时存在，它们的数值必然相等。例如，Dirichlet 函数 D(x)，当 x 是有理数时为 1，无理数时为 0；它在 [0,1] 区间的勒贝格积分为 0，但不是黎曼可积的。我们知道可数个点集是零测集，有理数是可数的，所以是零测集，将这些点的函数值都置换成 0，便是恒为 0 的常数值函数，这时黎曼积分也是 0. 用这个方法“修理”黎曼积分中有疵瑕的函数，便得出黎曼积分的一个重要定理：

区间 [a,b] 上函数 f 是黎曼可积的，必须且只需 f 在 [a,b] 上的不连续点是零测集。

在积分和概率计算中都可以忽略零测集，这引入了常见的一个数学术语“几乎处处”（almost everywhere），简记为“a.e.”。如果两个函数不相等点的集合是零测集，叫做它们是“几乎处处相等”，它们的勒贝格积分相等。因此可以用一个几乎处处相等“良好的”函数来替代它计算。一个函数除了有个零测集外是有界的，叫做“几乎处处有界”。对积分的所有定理，可以把有界函数的条件换成“几乎处处有界”。闭区间上黎曼可积的函数，当且仅当是几乎处处连续的。

黎曼积分积分号里函数序列取极限，要在很强的条件下才能与积分号交换顺序。而“勒

贝格控制收敛定理” 说：在积分的集合上，只要它们的绝对值几乎处处不大于一个勒贝格可积函数，它们就几乎处处逐点收敛到一个函数，函数序列取极限就可以与勒贝格积分号交换顺序。

对于几乎处处一致有界的可测函数序列，勒贝格有界收敛定理给出更宽松的收敛要求，它只要这序列是按测度收敛就可以与积分号交换顺序了。什么是 “按测度收敛” 呢? 就是说，这序列函数与其极限函数不同之处，将会趋于零测集。

对于 $\mathbb{R}^n$ 区间上勒贝格可积的函数，Fubini 定理说，它的积分等于任何顺序的多重积分，也就是说可以任意地交换积分顺序。

牛顿—莱布尼茨公式描述了微分与积分的关系。记 $F'(x) = f(x)$，有 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ，直观图像是，F 曲线划分成 n 段折线，计算折线 y 轴上的增量与 x 轴增量之比，其导函数是当 n 趋近无穷大时，这些比值的极限。对这个导函数的积分，可以看成逼近导函数的这些折线比值与 x 轴增量的乘积累加的极限，很明显它是这些折线在 y 轴增量之和，因此等于这曲线在 y 轴数值之差。

在黎曼积分里这个定理要求被积函数在 [a,b] 上是连续的，或说原函数是连续可微的。在勒贝格积分里，我们有：原函数 F 在 [a,b] 上是绝对连续的，等价于它是勒贝格可积函数 f 的不定积分，且有牛顿—莱布尼茨公式关系。F 几乎处处可导，其导数几乎处处等于 f。这结论要比黎曼积分强多了，也更靠近直观想象。

仔细读过这篇文章，必要时将你应用积分推导的公式后面加个 “（L）”，表明这是勒贝格积分，那么它 “几乎处处” 会让你免除许多严格条件限制的烦恼，和数学上不严谨的责难。

勒贝格积分除了与黎曼积分同样应用在 $\mathbb{R}^n$ 上，且有更自由积分区域外，还通用于任何定义有测度的抽象集合，例如随机过程在概率空间上的积分。勒贝格积分极大地提高了你的数学武功，只是你想深入其中纵横自如，则要走出历史旧观念的局限，改练无穷世界的测度基本功。

【扩展阅读】

1. 维基百科，勒貝格積分 `http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8B%92%E8%B2%9D%E6%A0%BC%E7%A9%8D%E5%88%86`
2. 维基百科，维塔利集合`http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BB%B4%E5%A1%94%E5%88%A9%E9%9B%86%E5%90%88`
3. 维基百科，微积分基本定理`http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BE%AE%E7%A7%AF%E5%88%86%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E5%AE%9A%E7%90%86`
4. 关肇直等，张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979

第九章 重修微积分 9—泛函

算术是从一个或几个具体的数计算另一个数的学问，在这儿，数是已知和不变的。代数等式中有些数虽然未知，但其所指，仍是一个固定的数。在几百年前，只在几何中表示数量的对应，运动则代表着变化。几千年中的算术、几何和运动的研究，人们在三者间交叉借用形象来类比推理，直到 1694 年莱布尼茨终于用了函数这名词，抽象地表达变动的已知数到答案数之间，算法所对应的映射。其后近百年间，由约翰・伯努里和他的学生欧拉的推崇，最后到维尔斯特拉斯，确认了必须用函数的概念，把微积分建立在代数而不是几何的基础上。

函数，是我们从小学算术到中学要理解的第一个抽象概念，没过这坎的人，与数理绝缘，后面的课就不能理解了，对数学的认知停留在中世纪。初等微积分是在函数概念的基础上，对变动数极限运算的数学，牛顿称之为“流数术”，在有穷的世界窥测无穷的彼岸。近代分析建立在无穷空间的映射概念上，研究抽象空间结构和算子性质。由此俯视分析理论，能更抽象地构造数学模型，解决微分方程解和函数推广等等难题。理科生在这里，必须再过一个坎，走进抽象无穷的世界，才能理解现在的数学，而不是停留在二百年前的旧时光里。

算术的眼界局限在数域中。函数表达了数域中变量与映射值的对应关系。经典微积分用函数和极限的概念从数域，跨进实数和欧几里德空间。其运算都基于这个空间的性质。泛函分析将函数作为变量，研究它所在的空间和算子。在这里，一个函数也只看成集合上的一个点。

将讨论的对象抽象成集合中的点，点与点之间的相邻关系和点间运算对应关系，是集合上设定了的性质。数学的空间是定义有这些性质的集合，在这些设定条件下来讨论数学问题，而不再借助任何其他背景。在我们介绍过的空间里，由粗到精的包含关系顺序是：拓扑空间，T^2 空间，距离空间，赋范空间，巴拿赫空间，希尔伯特空间。这些空间都只是抽象的类，可在相应的各类里设定具体的拓扑、距离、范数或内积。L^2 和 l^2 空间，欧几里德空间，实数空间则是常见具体化的希尔伯特空间。初等微积分局限在实数空间和欧几里德空间里，泛函分析研究抽象的空间，特别是赋范空间、巴拿赫空间和希尔伯特空间的结构和线性运算性质。下面带你领略这里的风光。

两个距离空间中的映射称为算子。这篇只讨论赋范空间的线性算子。回顾一下赋范空间定义，它是线性空间，是以向量长度为范数导出了距离的距离空间。在这距离定义下，如果它对收敛还是完备的，则称为巴拿赫空间（Banach space）。大家熟悉的欧几里德空间 $\mathbb{R}^n$，

是有穷维的巴拿赫空间，其线性算子在基底下表示为矩阵。无穷维巴拿赫空间中线性算子的研究，是泛函分析的中心内容。

在分析中，函数是数与数的对应关系，是实数或复数间的映射，泛函则是以函数为自变量，对应于实数或复数值的映射。一般地说，从距离空间到数域的映射称为泛函。数域也是赋范空间，所以线性泛函也是一种线性算子。

例 9.1：函数的定积分是个线性泛函。下面 $L(f)$ 和 $K(f)$ 都定义了 $L^1[0,1]$ 空间上的一个泛函。（在 [0,1] 上绝对可积函数的空间上）

$$L(f) = \int_0^1 f(t)dt \quad \forall f \in L^1[0,1] \qquad K(f) = \int_0^1 f(t)e^{-t}dt \quad \forall f \in L^1[0,1] \tag{9.1}$$

先介绍线性泛函的一些性质，以此来揭示赋范空间、巴拿赫空间和希尔伯特空间的结构。

对线性算子 T，如果存在着一个正数 c，对其定义域上所有的点都有 $\|Tx\| \le c\|x\|$，称这个算子是有界的，这个 c 的下确界称为线性算子 **T** 的范数。对于线性算子，连续性与有界性是等价的。有界的算子总是把微小的变化映射成微小的差异，把有界的集合映射成有界的像。

泛函的连续性在应用上很重要，例如用一个收敛的函数序列来计算泛函作用下极限值，只有对连续泛函这样的逼近才有意义。欧几里德空间的线性泛函，可以表示成一个内积，它总是连续和有界的。但在赋范空间，并非所有的线性泛函都是有界或连续的。

例 9.2：闭区间 [0,1] 上连续可微函数集合 $C^1[0,1]$，以 $\|x\| = \max_{0\le t\le 1}\|x(t)\|$ 为范数构成赋范空间。函数在 0 点的导数是这空间的一个线性泛函。它不是连续的。因为对函数序列 $x_n(t) = \frac{1}{n}\sin(nt), n \ge 1$，有 $\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0$，$n \to \infty$，即 $x_n \to 0$，但是 $x_n{}' = \cos(n0) = 1,\ n \ge 1$ ，它并不趋于 0。所以它不是连续的，也不是有界的。

在某些线性距离空间，甚至没有非零的有界线性泛函。但是对赋范空间，我们却有足够多的有界线性泛函。

Hahn-Banach 延拓定理：如果赋范空间的线性子空间上，定义有一个有界线性泛函，那么可以把它延拓到全空间，延拓后的算子也是个有界线性泛函，在原来子空间的映射保持不变，而且它的范数与延拓前是一样的。

取 X 中任何一个非零点 x_0，它的数乘张成一维的线性子空间，在这子空间上定义一个有界线性泛函，使得 $f(x_0) = \|x_0\|$ ，应用这个定理，可以将它延拓到全空间，并且有 $\|f\| = 1$，这说明对于任何一个赋范空间，都有不比它向量少的有界线性泛函。

记赋范空间 X 上所有的有界线性泛函的集合为 X^*，不难验证 X^* 在算子的范数下是一个巴拿赫空间。X^* 叫做 X 的对偶空间，也称为共轭空间。X^* 的对偶空间 X^{**}，自然也是个巴拿赫空间。那么 X^{**} 与 X 是什么关系？

对于 X 上的点 x，可以定义 X^* 上的泛函：$L_x(f) = \overline{f(x)},\ \forall f \in X^*$

显然，Lx 是线性的，而且 $\|Lx\| = \|x\|$，是有界的。这说明 X 到 X^{**} 间有个一一的，线性的，并且保持范数相等的映射，即 X 等价于 X^{**} 的一个线性子空间。如果这个映射还是满的，即 X 等价于 X^{**}，则称为 X 是自反的，记为 X=X^{**}，自反的赋范空间必定是个巴拿赫空间。

例 9.3：函数空间 $L^p[0,1], p>1$ 是自反的，它上面的线性泛函 $f(\cdot)$ 表示为

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt, \quad x\in L^p[0,1],\ y\in L^q[0,1],\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

它的对偶空间是 $L^q[0,1]$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

自反巴拿赫空间与对偶空间互为有界线性泛函的关系，让我们联想起内积的关系。所以就用内积的符号来表示线性泛函，$f(x)=\langle x,f\rangle$ ，对它们间的线性性质与内积形式上完全一样，只不过这里左右矢量是在不同的空间。特别地，从线性算子范数的定义，有与内积完全相同的 Schwarz 不等式 $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$

希尔伯特空间 H 是定义了内积，并以此导出范数的巴拿赫空间。由上面巴拿赫空间与对偶空间的内积表示，及 Schwarz 不等式，很自然地会猜测：H 空间的对偶空间是否是它自己？确实如此。H 中任何一点，都可以用内积定义 H 空间上的一个有界线性泛函，这说明 H 是 H* 的子集。**Riesz** 表现定理则证明，H 空间上，任何一个有界线性泛函 $f\in H^*$，都对应着空间中的一个点 $y\in H$，使得 $f(x)=\langle x,f\rangle,\forall x\in H$，而且 $\|f\|=\|y\|$，这说明 H^* 是 H 的子集。所以 $H=H^*$。

Hahn-Banach 延拓定理证明了每一个巴拿赫空间，它的有界线性泛函构成了它的对偶的巴拿赫空间，有界线性泛函算子间的作用可以用内积的式子来表示。Riesz 表现定理则肯定了希尔伯特空间的对偶空间就是它自己。Hahn-Banach 延拓定理可以放宽到，具有线性的距离空间附加上一些条件，泛函分析的教科书介绍这方面的内容。

距离空间中收敛的要求比较强，用泛函我们可以定义一种比较弱的 “功能性” 的收敛。

比如说，赋范空间 X 中的序列 (x_n) 收敛于 x_0，指 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|$

这有时称为强收敛，弱收敛则定义为这序列对所有的有界线性泛函都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0),\ \ \forall f\in X^*$$

X^* 中序列 (f_n) 弱 * 收敛于 f_0，则是满足

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f_0(x),\ \ \forall x\in X$$

显然强收敛隐含着弱收敛，弱收敛未必能强收敛，下面是个例子。

例 9.4：希尔伯特 H 的任何正交归一基 e_n ，不难从向量在这个基上分解的无穷序列和中得到，$\lim_{n\to\infty}\langle x,e_n\rangle=0,\ \forall x\in H$

由 Riesz 表现定理得知，这表明这基的序列弱收敛于 0，但是所有基向量的范数都是 1，所以它不可能强收敛于 0.

【扩展阅读】

1. 关肇直等，张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979

2. 程代展,系统与控制中的近代数学基础,北京:清华大学出版社,2007 `http://product.dangdang.com/9350967.html`

第十章　重修微积分 10——算子

算术是从给定条件和已知数，得出符合条件数值，计算的学问。算法用给定的条件，构造性地定义了从已知数到得数的映射。算术所在的数域仅仅是抽象空间包含的一个实例。近代分析把抽象空间作为给定条件，定义在空间的映射称为算子，研究它们的一般性质。

例如，迭代算法是用相同的子算法，把得数作为下次计算的已知数，一次次地迭代计算来逼近结果的计算方法。抽象空间里的压缩映像是能够应用于这类计算的算法。

距离空间 $(X□d)$ 具有如下性质的映射称为压缩映像 $T : X \to X$,　$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$, $a \in (0, 1), \forall x, y \in X$。这里的 $d(x, y)$ 是 x 和 y 间的距离，如差值的绝对值及范数等等。应用压缩映像不断地迭代计算，能够逼近至多一个不动点。巴拿赫不动点原理说，压缩映像 T 在完备距离空间 X 中，有唯一的不动点 x，即 $Tx = x$. 有了压缩映像 T，在 X 中任取一点 x_0，令 $x_{n+1} = Tx_n, n = 0, 1 \cdots$，它将收敛于一个不动点 x. 重要的原理都是简单和直观的。这个定理在分析中是个强有力的工具，以此可以证明空间和流形上的各种的反函数定理，它不仅可用来定性地证明常微分方程解的存在和唯一性，而且是解方程迭代算法的基础。

压缩映像是个算子，可以是线性也可以是非线性的。但在分析中，研究最多并最富有成果的是无穷维空间的线性算子。

为什么要研究无穷维空间的线性算子呢？因为物理的动态系统从初始状态开始的变化，微分方程由状态函数映射成微分关系和边界条件，工程系统由输入转变成输出，都可以看成一个算子作用在函数空间进行变换。出自叠加原理应用和近似的简化，这些算子也多是线性的。微分和积分作为算子是线性的，它们与其他因子组合而成的算子，例如傅立叶变换，拉普拉斯变化等积分变换，线性常微分方程，数理方程，这些数学工具都是无穷空间的线性算子。

数学上，代数关心的是集合中元素在运算映射下的性质。分析则研究这些代数运算在无穷空间中变动极限的性质。这就要考虑集合所在空间的拓扑性质，和了解在这些代数运算角度下空间的结构。上一篇，我们用有界线性泛函的内积形式，揭示了巴拿赫空间以及希尔伯特空间的对偶关系。这里要介绍线性算子的基本性质。

请注意，空间的线性，是集合中的元素对线性运算封闭，例如连续函数集合是线性空间，因为连续函数的数乘和相加仍然是连续函数。而算子的线性，则是算子的映射对空间上的线性运算保持不变的关系，即线性组合的映像等于组合中元素映像的线性组合，例如积分是在闭区间连续函数空间上的线性算子，线性常微分方程的系数可以是非线性的函数。

线性算子必须作用在线性空间上，而线性空间上的算子可以是非线性的。

复习一下这里要用到的几个空间的概念。距离空间在集合任意两点中定义有距离，以此定义开球和邻域，生成空间的拓扑。赋范空间是线性空间，是以向量长度为范数导出了距离的距离空间。在这距离定义下，如果它对收敛还是完备的，则称为巴拿赫空间（Banach space）。希尔伯特空间是定义有内积的巴拿赫空间。这篇谈定义在赋范空间上的线性算子。线性代数课程讨论问题在欧几里德空间，它是有穷维的巴拿赫空间 $\mathbb{R}^n$，其线性算子在基底下表示为矩阵，它只是局限在有穷维的表现，我们对比地来介绍一般的线性算子。

上篇说过，对线性算子 T，如果存在着一个正数 c，对其定义域上所有的点都有 $\|Tx\| \leq c\|x\|$，则这个算子是有界的。这个 c 的下确界称为线性算子 T 的范数。

欧几里德空间上的线性算子都是连续的和有界的，这在巴拿赫空间未必成立。

例 10.1：闭区间 [0,1] 上连续函数集合 C[0,1]，以 $\|x\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1}|x(t)|$ 为范数构成巴拿赫空间。定义在 C[0,1] 到 C[0,1] 的微分算子 D，是这空间上的线性算子，它的定义域是在 C[0,1] 中所有连续可微函数构成的线性子空间。D 不是有界的。因为函数序列$x_n(t)|x_n(t) = e^{-nt}, n \geq 1$ 在 C[0,1] 中，有 $\|xn\|_\infty = 1$，不难推出它是个有界的集合（这集合中任何两点的距离都小于 2），但是 $Dx_n(t) = \frac{d}{dt}x_n(t) = -nx_n(t)$ 的集合，却是 C[0,1] 中的无界集。算子 D 将有界的集合映射成无界的像，所以它是无界的算子。

线性算子是否有界，还取决于映射所在空间的拓扑。微分算子 D 定义在另一范数的空间，可以是有界的。

例 10.2：连续函数集合 $C[0,1]$ 以范数 $\|x\|_\infty$，构成巴拿赫空间。记函数 x 的导数为 x'，连续可微函数集合 $C^1[0,1]$ 的范数定义为 $\|x\|1 = \|x\|_\infty + \|x'\|_infty$，它也是个巴拿赫空间。

微分算子 D 也是 $C^1[0,1]$ 空间到 $C[0,1]$ 上的线性算子，有

$$\|Dx\|_\infty = \|x'\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty = \|x\|_1, \forall x \in C^1[0,1]$$

这说明 $C^1[0,1]$ 空间中有界的集合，在算子 D 映射下在 $C[0,1]$ 上仍然是有界的，所以它是这空间里有界的算子。

尽管赋范空间中线性算子不一定是有界的，但有界性和连续性却是等价的，甚至只要在某一点上连续，它们就有了全体的连续性和有界性。

在欧几里德空间，线性算子 T，用下面的内积式子，可以定义它的对偶算子 T^*，

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in \mathbb{R}^m \tag{10.1}$$

用矩阵表示，T^* 是 T 的共轭转置矩阵。对于赋范空间，我们也对线性算子用相同的方法定义其对偶算子。不过从空间 X 到 Y 的算子不一定对全空间都有定义，例如在微分算子 T 在连续函数空间 $C[0,1]$，只对其中连续可微的函数有定义。上述的定义只限在各自的定义域里。

算子 T 的定义域记为 $D(T)$。如果 $D(T)$ 是稠集，即空间 X 中任何一个点，都可以表示为 $D(T)$ 中点序列的极限，T 则称为是稠定的。赋范空间 X 到巴拿赫空间 Y 上的有界线性算子，如果是稠定的，它可以唯一地（按连续性）延拓到整个空间，成为定义在 X 上的有界算子，且算子的范数与原来的相等。

如果 T 的值域充满了 Y 的全空间，则称为是满的。如果 $D(T)$ 中的序列 (x_n) 当 $x_n \to x$□$Tx_n \to y$，有 x 也在 $D(T)$ 中，$Tx = y$，则称 T 是闭的。闭算子定义域中所有的点 x 与对应像 Tx 的组合 (x, Tx)，在 $X \times Y$ 空间中是个闭集。

如果 T 是两个希尔伯特空间中的线性算子，T 是稠定的则 T^* 是闭的，如果 T 还是闭的，则 T^* 也是稠定的，而且有 $T^{**} = T$。

欧几里德空间上的线性算子，可以表达成矩阵 A，其范数 $\|A\|$ 是它与共轭转置矩阵相乘 A'A 最大特征值的开平方值，它们的全体也是个欧几里德空间。相应的，赋范空间 X 到巴拿赫空间 Y 上的有界线性算子，所有这些有界线性算子 $L(X, Y)$，在算子的范数下也是巴拿赫空间。

微分方程可以看成算子 T 作用在线性距离空间的点上，等于另一空间的点（函数，初始或边界条件），例如 Tu = v。应用算子理论研究微分方程，解的存在性对应着算子 T 有右逆，解的唯一性对应着算子 T 有左逆，所以 T 的逆算子存在意味着解的存在和唯一性。解的稳定性说，当参数、边界或初始条件变化很小时，解也应该变化很小，这对应着逆算子的连续性即有界性。在未知是否有逆时，稳定性的要求表达成算子的开映像性质，而微分方程解对初值一致连续性则表达成算子族的一致有界性。

这些问题，对于巴拿赫空间 X 到 Y 的线性算子 T，都已经有了很好的答案。

开映像定理：如果 T 是闭的和满的，对于任意小的 $\epsilon > 0$，有相应的 $\delta > 0$，使得

$$\forall y \in Y,\ \|y\| < \delta \Rightarrow \exists x \in D(T),\ \|x\| < \epsilon,\ y = Tx \tag{10.2}$$

简言之，开集的像是开的。

巴拿赫逆算子定理：如果 T 是闭的，满的，一一对应的，则它的逆算子存在且是有界的。

闭图像定理：如果 T 是闭的，定义域是 X 全空间，则 T 是有界的。

共鸣定理：如果一族有界线性算子在 X 上是逐点有界的，那它们也是一致有界的。

上述这几个是泛函分析中线性算子的基本定理。它们都还有在更广泛的线性距离空间，附加上一些条件的版本。有兴趣请看泛函分析的教科书。

线性算子的这些性质，让线性微分方程成为描述世界强有力的工具。在这种线性描述下，逆算子的存在，证明了一切的变化都可以由已知的原理、参数、边界和初始条件唯一地确定；逆算子的连续性保证了一切的误差都是可以无限地消减。这个关于无穷过程线性数学利器的成功应用，让人们相信世界是确定性的，无穷可分的，差不多是线性的，几乎忘记了为了能够应用这个利器，曾经省却了一些细节，作过了一些假设，即使非线性的研究也只往这方向靠，忽略本质不同难以想象的部分，直至非线性动力系统以混沌、分叉、孤立子突兀在眼前，打破了幻想，在数学上揭示了系统上不确定的机制。

三百多年前，微积分以函数为阶梯从无穷小分析的思路，把人们带进了想象中的无穷世界。由线性联系着微观机制和宏观的表现，线性系统的叠加原理所惠，让它成为研究动态和连续系统最强有力的工具。短短的三百年时间，研究函数科学的分析，成为数学最大的分支。在这无穷可分几乎是线性的世界里，数学分析是撰写自然律法的笔墨文书，是从事理工研究必不可少的工具。我们对世界的认知，其实是符号的象征和想象的产物，数学

工具极大地影响着研究者对事物构造的想象和规律的理解，进而推及大众。计算机的出现，将可能改变世界的图像，影响着数学研究方向和对世界的认知。世界也许将回到有穷分立的结构，非线性将是主流，复杂和不确定系统或成为富饶的主题。但无论怎么改变，数学都是人们用逻辑来及远的工具，指使计算机的方向，描绘世界的画笔。现在的计算机在科研中，还基本是分析计算的工具，图像表达的机器和记忆搜索的助手。人们还未找到代替叠加原理超越线性，组合分立研究结果的方法，还在等待着一个革命性的思想，来指引怎样用计算机来描述，理解和控制我们的世界。在这之前，数学分析仍然统治着物理和工程的世界，理科生还离不开这时代战士必备的这个武器。

【扩展阅读】

1. 关肇直等，张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979

2. 程代展,系统与控制中的近代数学基础,北京:清华大学出版社,2007 `http://product.dangdang.com/9350967.html`