重修微积分

应行仁

2021 年 7 月 24 日

目录

插图

1 重修微积分 1——无穷

这个科普系列是给学过微积分及更深入分析课程的人，觉得读书做题考试都还行，但直观和定义隔了一条河，提到严谨只觉得烦，希望能理解现代分析，又能像物理那样想象的同学。这里介绍无穷、拓扑、空间、测度、泛函和算子等现代分析的概念，让你从高处来看风景。

我学过几次微积分。最初是在高中，了解了导数是变化率，积分能算面积，它们互为逆运算。接着翻到微积分书里的求导公式，一口气背下初等函数导数表和复合函数公式。凭着这个直观概念和套公式本领，大学物理公式推导也看懂了，几天时间里武功大进，高中各种难题，触手可解。这时心雄万夫，认为这就是微积分了。想不明白那巨厚的教材，花那么多的篇幅整什么极限和收敛？后来了解到很多人也和我一样，就学个招式套路，没得心法真传，思想还是停留在有限数学的圈子里，没有走过用逻辑搭起越过无穷深渊的桥，所以永远无法想象不能感知的世界，所说的也只是人云亦云，对与错，自己是无法确认的。再学的实变泛函随机过程，即使考分不错，也只是学个技巧能够解题。真正去应用则在云中雾里，心中懵懂始终不觉踏实。直到在美国数学系从点集拓扑重新学起，每一步踏实了走过去，在巨细的习题中摸过每一块石头，才重新建立起直观想象，找回了自信。

工程师和非数学研究者，不可能都沿着纯数学的路子学习现代严谨的数学理论。耗费大量时间在逻辑巷道里穿行，会让你失去方向看不到全貌，不一定所有人都能走通。对大多数人，数学只是个严谨的逻辑建筑模块和工具。想用好它，最重要的不是繁琐的条件和证明细节的了解，而是要有正确概念的理解。有了正确想象，即使不能精通现代分析，你也能大致读懂相关的理论，用定理套公式才能有自信。急用先学恶补知识时也会有方向。

从初等数学到数学分析，是从现实世界到了无穷空间的跃迁。在牛顿之后，学术界也曾经为此想象图像的转变，迷惑混乱了几百年，至今书里和教授传承还遗留着许多当年混战中的繁杂解读。要走过这座桥，你必须超越有限世界经验的局限，用逻辑证明过的典型例子，来构筑无穷世界的直观想象，知道为什么要分辨看似无谓的概念，接受经验不习惯的事例，才能到达彼岸。

这系列短文，不是教程，而在解读概念。如果你学过这些课程，这里让你依想象指引用逻辑将概念和例子串起来，没学过的也可以浏览无穷世界里的风光。希望有助于迷惘中的人，纠正错误的观念，建立较正确的直观想象，明白些为什么，想穷究深入时，知道往哪儿找。

在微积分之前，数学几乎都是关于“有限”的学问，因为只有是有限的个体，或是它们的有限组合，才算得了，说得清。归纳是人类智力的本能。使用数学归纳法，能够把只对有限事例成立的结论，依仗逻辑和递推关系，严谨地推广到无穷多的适用情况。许多人以为这已是无穷的世界了，其实这只是这个词的一种意思，仍然是在有限的世界里兜圈子。无穷在这里指的是：这个递推过程可

以是无法穷尽的。这个认知叫“潜无穷”。在这个无穷尽的过程中，你接触到的每一个还是有限的个体，推理的正确性也只是针对这过程中经过的每一站，无穷的过程没有终点，它们的全体不在考虑之列。

> 例如：集合 $\{1\}$ 是有限集，假如 $1, 2, \cdots, n$ 是有限集，那么多一个元素的 $\{1, 2, \cdots, n, n+1\}$ 也是有限集，根据数学归纳法，这对所有 n 都成立。但这不证明所有自然数的集合 $\{1, 2, 3\cdots\}$ 是个有限集。因为数学归纳法的证明，对所有自然数都成立的命题，是一种潜无穷的陈述，是动态地指对每一个具体的自然数能成立的陈述，而不是指对自然数的全体都成立。

有限的度量是实践中可以验证的，潜无穷是以此推理的极限。在物理世界，能够被检验和推测的数量，都是有限精度或组合的；任何计算，都必须在有限的步骤中终止，才有结果；数学证明，必须在有限步骤的推理中完成，才是可信。一句话，现实的世界本来是有限的。人们固有的直观想象，都是在有穷的世界里，用实践经验累积和事例验证而成的。

我们现在普遍认知的连续无限可分世界，是微积分这个数学工具成功应用后，人们在书本灌输下接受的假设。这个看似已经深入人心的观念，对绝大多数人只是个不断被重复的表面陈述，与学前的直观不能融合，难以深思。无穷的彼岸和有限的经验是完全不同的两个世界，归纳法的逻辑无法越过有穷的边界。我们必须先验地承认某些无法验证的观念，用逻辑构造出包囊一切的统一图像，才能消融这个隔阂。

无限的过程能否成为一个数学的量？这早在两千多年前的古希腊，就引起争论，它实际是哲学上的一个观念。无法验证也无关对错。数学是个关心在给定前提下，依照逻辑推理能够走多远的学问。古希腊的毕达哥斯学派，还有个追求的指标是“美”，和谐的美、统一的美、简洁的美。主张无穷不仅仅是个变动的过程，而且这无限过程，代表着它要达到的数学实体，可以用来参与计算，称之为“实无穷”，是把它作为一种数学完备化的扩张。

认为无穷不仅仅是一个过程，而且代表着一个要达到的数值，这在逻辑上很重要。只有这样我们才可以把它放在等式里。比如说，认为无穷循环的 0.999... 是数 x，才有 $10x = 9.999\cdots$，因此 $10x = 9+x$，得出 $x = 1$. 阿基米德用了同样的原理，将阿基里斯追逐乌龟的过程，写成无穷级数的和 $1+0.1+0.01+0.001+\cdots$，把它当作一个数 x，由 $10x = 10 + x$ 关系，才能算出他追上乌龟在 x=10/9 处。牛顿和莱布尼茨定义导数为两个无穷小量 dy 和 dx 之比 dy/dx，到了后来柯西修正为导数是 Δy/Δx 分子分母都趋于 0 的无穷过程。这些都只有承认实无穷观点时，才有可能。

这些都是假定实无穷能够保持算术运算的和谐关系，才得出答案的。历史上数学天才运用这个思想，取得了令人惊异的成绩。但是这个扩张并不总是像引入开平方的无理数那样和谐。1703 年，意大利数学家格蓝迪问大家，无限的过程 $1-1+1-1+1-1+\cdots$，等于多少？数学王子欧拉，用阿基米德相同的方法，假设 $x = 1-1+1-1+1-1+\cdots$，将这个无限过程第一项 1 先拎出来，后面剩下的相当

于它自己乘上-1，有了 $x = 1 - x$，欧拉得出格蓝迪级数的和是 1/2。但是有人说，根据加法的结合律，有 $x = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0$，类似的做法还可以有 $x = 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1+0+0+0+\cdots = 1$。这格蓝迪级数到底是 0、1/2 还是 1？贝克莱主教质问牛顿：你这个无穷小在做除法时认为不是 0，在做加减法时当着是 0，它到底是 0 还是个非 0 的数？

其实古人早已疑惑：自然数全体的数量是无穷大，在其中拿掉几个数，它还是一样大吗？无穷循环小数 0.999... 的每一个截断都小于 1，它怎么最终不再小于 1？承认和不承认实无穷的存在，都与某一种数学的美相冲突。这就是数学家在历史上，对实无穷和潜无穷无所适从的原因。

在牛顿之前，数学家对实无穷采取回避的态度，除了个别公认的天才，有底气做别人不敢质疑的猜测，大家都只老老实实地把无穷只看是一个过程，这样心里踏实，这也是潜无穷派的想法。但微积分是关于无穷的算术。到这时已是无可回避了。

这些冲突，实际上是企图将本质不同东西纳入过去直观的框架。对于有穷的东西，我们可以验证它，从已知的数学实体中通过有限步的推理确认它。在实无穷与确定的数之间，却没有能够确信的桥梁。无穷的序列，可能等价于已知的数学元素，也可以不是大家熟悉的东西，也可能是非此非彼的不确定。把本质上不能一致定义的东西，放入有限数学通行的等式里，从不同的方向则会推出不同的东西。这便是发生矛盾的原因。

现代数学基本认可实无穷的观念，但不认为它的所指都有意义。这个无限的过程，并非都能代表一个数。有的不是指向大家熟悉的数学元素；有的并没有确定的数学意义。实无穷的提法，因为涉及过多历史上混乱的争议，在数学界也不再强调了，而着眼于具体的处理。

将实践中无法检验的一种概念作为构筑理论的砖块，在思想史上并不罕见。在哲学、宗教、社会科学、甚至在自然科学理论里比比皆是。人们希望用新概念的理论，能够透视现实中的秘密，用之推演的结果，与我们的观察有某种程度的吻合。数学家的任务是将它精确化，限定适用的范围，以保证在逻辑上不至于造成冲突。科学是用逻辑为混沌的自然立法，让世界看起来比较有条理。

集合论作为现代数学的基石，研究了无穷大这个新的数学实体。它用一一映射的关系，回答了无穷大比较的问题。这个无穷大与有限的数，只保持一种序的关系，它们是不在一个层次数量，有限数的运算不完全适用于它。这提醒人们，不能用处理有限世界的那种直观，来看待用逻辑扩张出来的无穷世界。要自信自如地在这世界里玩，你必须理解新的概念，接受一些不习惯的事例，用逻辑推演出来的事例来纠正旧的想象，形成新的直观图像。

用无穷变化的过程代表一个可以达到的数，这需要另一座桥梁，我们必须知道这是在什么意义下的等价关系，在什么条件下才有可能，这需要理解一个概念——收敛。

2 重修微积分 2——收敛

无穷序列可以用来表示一种趋向。其思想仍然与归纳法一样，企图用已知来推测未知。这里是用有穷的序列项来推测无穷之处的结果。只不过数学归纳法，只能在有穷的世界里漫行，这里需要一个假设，才能用逻辑跨过边界。

大致地说，无穷序列作为数学的模型，在这无穷过程中，当后来的项越来越相像，如果这无穷过程指向一个实无穷的极限，设定的含义是：这极限与有穷过程里的项，也将会是越来越相像，以致难以区分。在这种情况下，我们有把握确定这个极限的性质，可以用这个无穷过程来定义或确定这个极限。

这里有两个问题。一是这序列能否指向一个数学实体，二是什么叫做“相像”。

第一个问题，不外乎三种情况。一是不能。那就飘过。但如果是都不可能，那就不用谈极限了，微积分是个梦，大家仍旧玩算术。二是指向未知的实体。我们也许可以用模型里“相像”这性质来定义它，叫做扩充。这押后再谈。三是指向这空间里已有的实体，称之为收敛的极限。因为它与序列中的项同在一个空间，它们在空间里的关系可以用来描述“相像”的含义。

以上所说并不限于实数，适合于包括函数、事件，以及集合元素的无穷序列。不同的“相像”含义，确定了不同收敛和极限的含义，这将在以后的篇章里展开。请记住这里的图像，作为分析中直观想象的基础。这一篇，我们先谈最简单的情况——数列。

对于数而言，现实的计算只能区分有限精度的数。按照某种精度画个圈，一个无穷的数列，除了前面有限多个外，如果此后所有的项终将全部落入这个圈里，按照这数学模型的假设，它指向的极限，也是在这圈子里。在这圈里任何两个数，按这精度看不出区别，在圈里取任意一个数当作那个极限也是如此。如果总能以任何精度做到这一点，也就能以任何精度确定这个终极的数。这个无穷数列就对应着这个数。

如果这个极限在讨论的空间上存在，这数列称为“收敛”到这个极限。

用数学语言表达无穷数列 (x_n) 收敛于 a 是：$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 或者写成 $a_n \to a,\ (n\to\infty)$，在不混淆的情况可以略去括号里 n 的走向。上述收敛的定义用 $\varepsilon - N$ 语言和数理逻辑符号表达是：

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n(n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon) \tag{1}$$

这定义只是说，如果有个数符合这描述，则称数列收敛于它。要认为这个无穷数列确定了这个数，需要证明它是唯一的。作为数学模型的要求，我们还必须证明，收敛的极限与空间里的数做四则运算，其结果与用数列中的项参与同样运算的数列极限是一样的。这些证明都不难，最后都归结为：要验证的差异随着 N 足够大也会小于任何正数。即这个差异的无穷数列无限地趋向 0。所以在极限时等于 0. 停！在这句结论之前，全部是对有穷数列的推算，这无穷数列要走过所有的项，才能得出相等的结论，这需要一个假设，才能越过这个逻辑的间

隙：无穷必须是可以完成的！这样无限减小又始终存在的差异才会消失，让无穷序列的桥梁能够搭上有限世界的对岸。这是被许多人忽略，以致缺乏动力去改变有穷世界里的直观。

从收敛的定义不难看出，如果无穷过程收敛，那么在这过程中走得足够远的项之间的差别也会足够小，即

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n\forall m(m, n > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon) \tag{2}$$

这样的数列 (x_n) ，叫做“柯西列（Cauchy sequence）”。能够收敛的数列都是柯西列。

回头来看格蓝迪级数 1-1+1-1+1-1+⋯，这个无穷过程无法确定任何数值，其有限和构成的无穷数列不是柯西列，不能收敛。欧拉和在收敛意义上不成立。

并非所有柯西列都能收敛，它取决于所在空间的性质。例如，$\sqrt{2}$

取越来越多位数的数列 1.4，1.41，1.414，⋯是柯西列，但它在有理数空间不收敛。即这个数列极限在有理数中不存在。

能够让所有柯西列都收敛的数学空间，叫做“完备的（Complete）”。微积分发明之后，数学家又发现了大量未知的实数和并严格修补了实数的定义，从而证明了实数是完备的。这表示只要数列是趋于相互靠拢的，就一定有极限，这个意义很重大。初等微积分是建立在实数完备性的基础上。

实数在近代，是用有理数上戴迪金分割来定义，把有理数集分割成上下两个集合，让上集合中所有的有理数，都大于下集合的；无理数被定义为，填充这种分割中的“间隙”。可以证明，这样定义的无理数和有理数，构成的实数，在收敛的意义下是完备的。

实数在传统上，看成整数加上一个无穷的小数。一个无穷小数，取越来越多位数的过程，是个柯西列，如果定义这个无穷过程表示的数学实体叫做“实数”，这时，实数可以看成是有理数的完备化扩张。

不论是怎样构造的，它们是等价的，实数是完备的，所有的柯西数列在实数上都收敛。

下面是几个微积分上熟知的定理，说的都是实数的性质，可以证明它们是互相等价的：

1. 实数是完备的。
2. 实数任意上（下）有界的集合，一定有上（下）确界。
3. 单调有界的数列有极限。
4. （区间套定理）闭区间序列 $([a_n, b_n])$ ，如果 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], \forall n \geq 1$ 并且 $(b_n - a_n) \to 0$ ，则必定存在着唯一的实数 c 有 $c \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$ ，并且 $a_n \to c$ 和 $b_n \to c$ 。这个闭区间序列叫作“区间套”。

5.（有限覆盖定理）有界闭区间 I 上的任何开区间覆盖族中，必定有一组有限的开区间覆盖 I。

6. (列紧性定理) 任何有界数列必定有一个收敛的子列。

采用戴迪金类似的方法，是否还能发现实数间的空隙？从实数的完备性，可以证明了这样的空隙不存在。这也称为实数是“连续的”。

任何两个有理数，无论之差是多小，其间都有不可数个实数。只有夹在一个无穷地不断增大的有理数列，与另一无穷地不断减小的有理数列中，当它们之间的差值趋向 0 时，其“缝隙”才只够容下一个实数。

实数的完备性是微积分的基石。与此等价的上述性质，在微积分中扮演了重要的角色。

康托尔用对角线法证明了，实数是不可数的。从实数完备性上，也不难证明实数是不可数的。

用反证法。假设闭区间 $[0,3]$ 里的实数可数,那么可将它们标记为:$x_1, x_2, x_3, \cdots$。将 $[0,3]$ 等分成三个区间 $[0,1],[1,2],[2,3]$, x_1 必然不在其中之一，记这区间为 $I1=[a_1,b_1]$，再将 I_1 等分成三个区间，同样必有一个子区间不含 x_2，记这区间为 $I_2=[a_2,b_2]$，如此进行下去，得到一个区间套 $I_1, I_2, I_3, \cdots$。根据区间套定理，存在着一个实数 y 在所有这些区间中。但从区间的选取中知道，x_n 不在 I_n 中，所以实数 y 不是 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 中任何一个。这就和假设相矛盾。所以实数是不可数的。

实数必须是不可数的，才不会与它的完备性相冲突。在可数的世界里，没有微积分。

对于古希腊毕达哥斯派的疑问：无穷循环小数 0.999⋯的每一个截断都小于 1，它怎么最终会等于 1？从对于每一个截断所有 n 都成立的命题，得出对全体也成立的结论，是有穷世界直观的错觉。持潜无穷的观点，0.999⋯只是个无穷的过程，这小于的关系永远存在，当然不会等于 1。但是这里的“所有”，指的是对每一个有限的数 n，而不是包括了它们无穷全体的“最终”。就像上篇的数学归纳法的例子，这个对所有 n 的推理，只在有穷世界里是对的。不能应用于无穷。这是必需改变的观念。按实无穷的观点，这个无穷的过程是可以达到它的极限，也就是等于 1，这小于的关系，因达到极限而终结为相等。收敛的极限可以等于比数列中每一项都大（小）的上（下）确界。

柯西和魏尔斯特拉斯之后的微积分，为了避免过去对实无穷的简单解读，在能够用潜无穷观念解释的地方，尽量避免使用实无穷。但对收敛的极限，逻辑上毕竟不能绕开实无穷的观念。

也许大家觉得上面所说的内容很浅，早在学习微积分时就知道了。好，考个对收敛理解的问题。

张三找李四寻仇，拿个炸弹设了一分钟后扔向李四，李四半分钟后扔回，张三在四分之一分钟后又扔向李四，如此往复，问最后炸弹在谁的手里爆炸？

（停下思考 5 分钟，再往下看，再思考。）

如果知道某个时刻落在这个无穷往复过程的哪一个时段，就知道炸弹在谁的手里。虽然这是个无穷的过程，但爆炸的时刻终将会到来。这些时段的累加为 $1/2+1/4+1/8+\cdots\cdots$，级数收敛到极限 1。但时刻 1 在这些描述炸弹位置的时段里吗？这个数学模型能描述现实的情况吗？

【扩展阅读】

1. 实数理论 http://210.26.16.17/ziyuan/38/analysis/precis/Acrobat/21.pdf
2. 实数的完备性 http://210.45.128.5/jpkc/shuxiefx/sxfxky/hky.pdf

3 重修微积分 3——拓扑

上一篇探讨了实数收敛的概念，用无穷级数来确定一个数。很容易把它扩展到无穷的函数序列求极限的问题。在初等微积分里，这是对函数变量的每个值逐点来考察，对每个固定的变量值，这无穷序列对应着一个函数值的数列，如果所有点对应的数列都收敛，那就认为这无穷函数序列收敛，它的极限函数在每个点的函数值是相应数列的极限值。这样函数序列的极限称为逐点收敛的。这个方法被牛顿引入后，广泛地应用，它虽然可行，但在微积分进一步研究时又遇到种种麻烦，于是又附加了许多条件，如“一致连续”,“绝对可积”等等，最后弄得微积分繁杂不堪。能不能把整个函数看成一个数学空间里的一个点，把这些条件都看成空间里的性质，从一个统一的角度来研究收敛极限的问题？这便是这一篇要介绍的概念。

现代的数学建立在比实数更加抽象的集合论基础上，应用于更广泛的空间。要将定义在实数上一元函数微积分的本质说清楚，推广到多元函数，函数逼近，泛函，随机过程，乃至各种抽象数学结构的集合上，我们要了解集合元素间联系的结构，这样才可能描述变动个体的走向，空间的性质，进而谈及趋近、收敛和极限。

微积分是基于无穷逼近极限的数学。收敛描述的是变动差别越来越小，直至微不可察的数列表现。收敛极限的存在，取决于实数的完备性。所以无穷逼近过程的含义和结果，依赖于它所在数学空间的性质。传统微积分是建立在实数空间 R

的性质上。这些实数性质是人们在习以为常的计算经验中总结“发现”出来，又用一些更简单基本的原理来证明的。

在现代数学之前，数学一直被认为是研究真理的学问，直到百多年前，哲人们还都认为不但如此，而且是绝对的真理。现在看来，这些真理也许不过是：习惯成了自然的经验在逻辑上自洽的表现。几千年实践认知形成有穷数学的直观与那时的理论吻合无间。无穷则无法验证，除了凌空而来的假定和逻辑自洽之外无所凭借，一切概念和引为依据的原理都需要精确的定义引入，一切的争执最终也只能根据这些定义和假设，用逻辑作出判决。直觉、经验、试验和公认之事，对数学都不足为凭。数学的价值在于有用，在虚构的空间里，以严谨的逻辑铸造出一把犀利的思想宝刀，当你用对了，无数的实践难题可以迎刃而解。

要想自如地在在抽象的无穷空间中行走，你需要正确的直观想象。前面两篇只是个导引，让你意识到必须纠正过去的直觉，才能放开心怀接纳无穷空间里的真实。在“无穷”篇里数学归纳法的例子，证明了在有限情况都成立的论断，在无穷时未必成立。要走出有限的误区，才能走出局限。在“收敛”篇里 0.999⋯=1 的分析，说明了极限的含义。这是微积分数学模型的最基本假设，无穷过程达到彼岸的立足点。所有收敛的极限都是依相同的原理，将差异的不等式在极限处变成了等式。除非你曾经震惊思考改变过，如果初读前面这两个例子，没

有经历过困惑，思考到终于理解了，你大约还没有走出有穷世界的藩篱。建议你回去走通了再来，否则学过的微积分知识只是别人说的，不是自己会的，此后三篇让你构筑无穷空间想象的介绍，就可能格格难下不能吸收，无缘看见彼岸。

直觉是模糊的联想，并非精确可靠。别人说的风景和你所想的也许不是同一个地方。只有踏在共同之处才是真实的一样。想象必须依附于证实过的判断作为立足点，只有在坚实的桩脚附近延伸，才靠近真实，过度延伸的浮想只是梦呓。可靠的直觉来自大量被证实过的事例，它们编织成了图像，越多的事例，才有越清晰的直觉。在现实有穷的世界，这些事例来自日积月累的学习和实践，判决正误唯有实验。在抽象无穷的空间，可靠的事例来自符合定义的例子和严格证明过的判断，在这里逻辑是唯一的判据。你必须记忆概念的定义，消化例子，纠正限于有穷世界的直觉，才会形成在无穷空间里的正确直观。

这一篇黑体字强调的概念，如开集、闭集、邻域、收敛、稠集、连续等等，你可能已经认识，不过在初等微积分学的是在实数上的定义，这儿是从抽象集合的高处俯视。这篇把点集拓扑的基本概念串起来介绍，有足够的信息让你可以依想象，走通从定义到例子的逻辑。希望你从过去的认知起步，以这里的定义来消除局限，用例子来校正偏差，在走通的过程中重建图像。花费时间逐个概念走过，你将会开始有看清无穷空间景象的基础。

好吧，抽象！讨论问题的空间一切属性都需要定义。忘掉实数、无穷、收敛、极限种种课堂灌给我们前人发现的真理，从简单干净的抽象集合开始。上一篇说，无穷序列作为数学模型来描述收敛的观念，序列中的项以及极限之间的“相像”性质，决定了收敛和极限的含义。好的。对集合中的两个元素，比如说是两个人，你能从其一了解另一吗？不能。因为元素只是集合中抽象的个体，没有它们间关系的信息。如果说知道它们同在某一个子集里，好比说知道两人同是一族，你就能知道，他们比不在这子集里的外族人有某些更相像。在这里用子集表达其中的元素具有某些共同的属性，这样的子集称之为开集，它们的并和交满足某些封闭性。集合上有了这样的一组开集，便能以此判断元素间属性是否相近。可以用来判别相邻性的这组开集，称为集合上的拓扑，它们组成了讨论无穷逼近问题的数学空间。

考虑集合 X 上的一个子集族 τ，其元素是 X 的子集，如果它们任意多的并，及有限个的交都属于 τ，空集和 X 也属于 τ，那么 τ 中元素称为开集，τ 称为 X 上的拓扑（**Topology**），组合 (X,τ) 称为拓扑空间，在简略 τ 不致混淆时，也可直接称 X 为拓扑空间。

在任何拓扑，空集和 X 都是开集，只具有这两个开集的拓扑，称为平凡拓扑。取 X 上的一组子集，包括空集和 X 本身，定义它们为开集，进而将它们任意多的并，及有限的交，都视为这空间的开集，则生成了一个拓扑 τ。给几个实例来帮助想象。

例 3.1：定义实数上的开区间为开集，在它们间进行任意多的并和有限个交运算，依定义这生成了实数上的拓扑。通常实数空间指的就是以此为拓扑的空

间。

例 3.2:在闭区间 $[a,b]$ 上所有连续函数的集合 $C[a,b]$,对任意的 $f\in C[a,b]$, $\delta>0$,定义集合 $\{g\in C[a,b]\mid \max_{a\le t\le b}|g(t)-f(t)|<\delta\}$ 为开集，它们任意多的并和有限个交，生成了 $C[a,b]$ 空间上的一个拓扑。

例 3.3: 集合 $X=\{a,b\}$，定义空集 ϕ，单点集 $\{a\}$ 和 X 为开集，它们构成 X 上的一个拓扑。

例 3.4: 将 X 上所有子集都定义为开集的拓扑，称为离散拓扑。它也可以由定义任何单点集都为开集来生成的。

拓扑空间 (X,τ) 中集合 X 称为空间，它的子集简称为集合，X 的元素称为点，点之间的相邻关系，由 τ 来确定。两个点，如果同在拓扑空间的一个开集里，认为它们是相邻，分属两个不相交的开集，认为是分离；包含了点 x 的开集，称为 x 的开邻域，包住 x 开邻域的集合称为 x 的邻域（neighborhood），寓意是与这点某些属性相近的点都在这里。

那么，怎么用拓扑来描述趋近状态呢？

对于拓扑空间 X 的一个点 x 和序列 (x_n)，如果对于 x 的每个邻域 U，都有对应着它的一个正数 N，当 $n\ge N$ 时，都有 $x_n\in U$，则称 (x_n) 收敛于 x。考虑到点的邻域含义，这意味着，对这空间中拓扑所考虑的属性上，这序列后面的点终将与点 x 是密不可分的。

对于拓扑空间 X 中一个点 x 和集合 A，如果 x 的每个邻域都包含有除了 x 外，还有 A 中其他的点，则 x 称为 A 的一个聚点（cluster point）。例如：在实数空间中，0 和 1 是开区间 $(0,1)$ 的聚点；任何一个无理数都是有理数集的聚点。

显然，序列收敛到非序列中的点 x，是序列所在集合的聚点；但集合 A 的聚点，未必有集合中的序列收敛于它。如果集合中的点都有一组可数的邻域，这点所有邻域都包含这组的某些成员，这样的拓扑空间称为第一可数的（first countable）。第一可数空间集合中的聚点都有集合中的序列收敛于它。在分析应用中的聚点都是用序列来逼近的，所以应用中的拓扑空间都是第一可数的，它也称为可数性的第一公理。

开集的补集称为闭集；包住集合 A 的所有闭集的交，是包住 A 的最小闭集，叫做 A 的闭包。闭包也是包括了 A 和它所有聚点的集合。实数是有理数的闭包。闭区间 [a.b] 是开区间 (a,b) 的闭包，闭区间 [1, 3] 是集合 $[1,2)\cup(2,3)$ 的闭包。

对拓扑空间 X 的子集 A，如果任何开集都包含有 A 中的点，则称 A 是 X 中的稠集，意味着 X 中的点的任何邻域，都含有 A 中的点，即可以用 A 中的点来逼近。如果 X 有个稠集是可数的，则称这空间是可分的，X 中的点都有这稠集中的一个序列收敛于它。有理数是可数的，它是实数上的稠集，所以实数空间是可分的，每个实数都有一个有理数的数列收敛于它。所有实数都是有理数集合的聚点，实数空间的拓扑是第一可数的。

同一个集合 X 上可以定义不同的拓扑。平凡拓扑是最粗的拓扑，离散拓扑是最细的。开集设定了一个点的邻域，它意味着里面其它点与这点相类。邻域之外就有某些的“不相类”，所以空间的拓扑区分的能力也很重要。如果对两个点，总有一个点开邻域不含另一，称为 T_0 空间；它们各自都有不包含对方的开邻域，是 T1 空间；如果两个点能有分属不相交的开邻域，叫 $\boldsymbol{T_2}$ 空间，这也称 Hausdorff 空间；T_3, T_4 则是说明点与闭集的区分能力。后者包括前者。过粗的拓扑，让空间中的点含糊难分。过细的拓扑也孤立难同，则难以找到点邻域里的其它点来推测它的性质。应用中大多数具有丰富性质的拓扑，既不会太粗也不会太细。现代分析是建立在点集拓扑研究的基础上。这样可以从简单拓扑结构开始，层层加细，从不断丰富拓扑空间性质的研究中，探究各种特性的本质。

对于微小的变动过程，如果集合上的函数，对应的值的变化也是微小的，即 x 趋向 a 时，$f(x)$ 趋向 $f(a)$ ，这是一种叫做“连续”的对应关系。用拓扑的语言来描述函数 $f(\cdot)$ 在点 a 处连续，它的定义是函数值 $f(a)$ 的每个邻域，都包含了 a 一个邻域的映像（即这邻域所有函数值的集合）。说函数 $f(\cdot)$ 是连续的，指它对定义域中所有的点都是连续的。

从拓扑空间 X 到 Y 的连续函数意味着，Y 的每个开集 U，它的原像 $f^{-1}(U)$ 在 X 中也是开集；闭集 V 的原像 $f^{-1}(V)$ 也是闭集。连续函数把它对应的两个空间的拓扑结构连系起来了。

两个拓扑空间之间如果有个一一满映射 F，F 和 F^{-1} 都是连续的，则称 F 是同胚映射，这两个拓扑空间称为是同胚的（Homeomorphism）。想象拓扑空间 X 就像一个有弹性的几何体，同胚映射 F 就好比将这几何体拉伸压缩变形，形成另外一个几何体拓扑空间 Y。连续函数 F 在这变形中，让所有点的相邻关系都没变。如果 F 的映射不是满的，则说 F 将 X 嵌入（embedding）到 Y 空间中。传统的拓扑学，用同胚映射和同伦映射对空间进行几何分类和代数特征的研究。分析应用上，将研究的拓扑空间同胚映射或嵌入到熟悉的空间中，可以比较直观地了解它的性质。

上面所说的是在集合的基础上，抽象地定义具有收敛概念的数学空间。这里尽量用简洁清晰的语言表达概念的定义，如果仍有未解之处，建议查看点集拓扑的教科书来加深理解。你的努力，将给了你一双能够看到无穷空间的眼睛。

现在检验你对抽象定义的理解力，请思考下面的概念题。

对拓扑空间 X 中的集合 M，X 的所有开集与 M 的交集定义为 M 中的开集，构成 M 的拓扑，称 M 为 X 的拓扑子空间。M 是个拓扑空间，它继承了 X 的拓扑。例如实数 R 是 3 维欧几里德空间 $\mathbb{R}^3$ 的拓扑子空间。

开区间 $(0, 1)$ 继承实数空间的拓扑，问在这拓扑子空间里 $(0, 1)$ 是闭集吗？它还是开集吗？在这里的有界数列都收敛吗？这子空间是完备的吗？这拓扑子空间与实数空间是同胚的吗？

【扩展阅读】

1. 维基百科,拓扑空间`http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8B%93%E6%89%`

91%E7%A9%BA%E9%97%B4

2. Stephen Willard，General Topology，Addison-Wesley（1970）

3. Renzo's Math 490,Introduction to Topology http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topology10/Notes.pdf

4 重修微积分 4——距离

上一篇从很抽象的角度，介绍了能够支持收敛极限的数学空间。用拓扑空间的定义和例子，从高处俯瞰你学过的初等微积分，把散落的知识，用概念间的联系组织起来，让你看到这些基本概念构筑成一个概括的，无穷空间模糊的图像。

学习没有捷径，唯常习练才能走通。旁人传的只是心法体会。如果没有过去学的微积分知识作为基础，这系列的内容即便记住了，也浮在云中，不过是观光游览。只有用学过的定理公式作为理解概念的桩脚，约束散漫的联想，抽象概念的想象才能落到实处。只有将文中定义，示例和关联的陈述，逐个用逻辑走通，勾画出来的骨架上才有色彩，才有直观想象。正确的想象和浮想的区别，前者可以作为证明的思路，其间的推理能用数学语言来表达和证明。而浮想除了娱乐，推论犹如算卦，不能明确也就没有实用的价值。

如果你已经消化了前几篇，这里将介绍具有更为直观的空间，让你头脑中图像更加鲜明。

很抽象的拓扑空间，缺乏足够的性能可直接用于物理和工程。这一篇和下面一篇，介绍在理论物理和实变泛函课中常见到的，拥有更多性质的拓扑空间。通过它们的联系，揭示相关的数学概念。读者试着从定义来验证所举的例子和关联陈述，用逻辑走通来消化概念，细化前篇建立起来的直观想象。

在集合上的两个点间，如果有了“距离”这个度量，将是应用者最易于想象远近相邻概念的拓扑。这时趋近、收敛和极限，就非常直观了。所以它在物理和数学中有着广泛的应用。这样的拓扑空间叫做距离空间（Metric space），有时也译为“度量空间”。

在集合上怎么抽象化“距离”，让它有最大外延又符合已有的直观想象？首先，它是个两点间非负实数值的度量，0 值意味着相等，非 0 视为不同，这度量对两点是对称的，三点相互之间犹如三角形的三边长度关系。

在集合 M 上，距离定义为一个二元实数值函数 $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$，对 M 上任意的 x, y, z 有下列非负，相等，对称，三角不等式的性质：

$$\rho(x,y) \geq 0, \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y, \rho(x,y)=\rho(y,x), \rho(x,y)+\rho(y,z) \geq \rho(x,z)$$

对于任何实数 $r > 0, x_0 \in M$，集合 $\{x \in M \mid \rho(x,x_0) < r\}$ 定义了一个以 x_0 为中心，r 为半径的开球。以它们为开集，生成了 M 上的拓扑，它构成的拓扑空间称为距离空间，记为 (M,ρ)。实际上这空间的开集都能用开球的并来构成，这样的一组开集（在距离空间是开球）称为拓扑基。具有可数拓扑基的空间，称为第二可数的。第二可数的空间都是第一可数的。想象一下实数中以有理数为边界值的开区间，它们的各种并集构造出实数上所有的开集。同理可证 $\mathbb{R}^n$ 空间（在通常的拓扑下），都是第二可数的空间。一般距离空间不一定是第二可数的。但都是第一可数的。

可以证明，距离空间中点的邻域，都包含有以这点为中心足够小半径的开球，所以一般拓扑空间中用邻域表达收敛的定义，可以用距离表达如下：

记无穷序列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 为 (x_n)，集合 X 上的无穷序列 (x_n) 收敛于 a，即 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 或者 $a_n \to a$, $(n \to \infty)$，意思是：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n(n > N \Rightarrow \rho(a_n, a) < \varepsilon)$$

距离空间的邻域必定包含有半径为有理数的小球，所以它是第一可数的，集合的聚点都有集合中的一个序列来趋近它。

在实数上二元函数 $d(x,y) = |x-y|$，它满足距离的定义，所以 $(\mathbb{R}, d)$ 是个距离空间。以此代入上面公式，就是用 $\varepsilon - N$ 语言表达的数列收敛的定义。

在同一个集合上，可以有多种方法来定义距离。例如，对 n 维实数空间上两个点，$x, y \in \mathbb{R}^n$ ，不难验证函数 d, d_1, d_2 都可以定义为 $\mathbb{R}^n$ 上的距离。

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, d_2(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$$

特别地，距离空间 $(\mathbb{R}^n\ d)$ 称为 n 维欧几里德空间。上面谈到的开球概念，是逻辑上离中心距离小于一个数的点集合，你可以把它想象成在三维各向同性空间的球体。对 d, d_1, d_2 不同距离定义的开球，如在变形的空间，具有不同的几何形状。但相互间，放大一个便能将另一包住，所以用不同距离定义出的收敛都是一样的（等价的），它们构成的空间并没有本质的区别。下面会看到，对一般的距离空间并非都是如此。

同样地，可以定义柯西列 (x_n) ：

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \forall m(m, n > N \to \rho(a_n, a_m) < \varepsilon)$$

收敛的序列都是柯西列，完备的距离空间中柯西列都收敛。欧几里德空间是完备的。

到目前为止，我们可以用实数上收敛极限的图像，类比地想象距离空间相应的概念。距离空间的收敛、极限和柯西列的定义类同于实数空间。点的序列类同于数列，开球相似于开区间，开集、闭集、闭包和覆盖定义性质都一样，我们可以借用实数空间的直观来想象距离空间。下面介绍距离空间的一些重要性质，来修正你过分的联想。

并非所有距离空间都有柯西列。

例 4.1：对集合 X 上任意两个不同点 x,y 定义函数 d(x,x)=0，d(x,y)=1。显然它符合距离的定义。（X，d）是个距离空间，叫“离散空间”，具有离散拓扑，没有柯西列。

对于相同的基础集合，在上面定义不同距离，并非空间上收敛都是等价的。

例 4.2：记 C[a,b] 为实数闭区间 [a,b] 到 R 所有连续函数的集合，对 $f, g \in C[a,b]$ 可以定义：

$$d_1(f,g)=\int_a^b|f(t)-g(t)|$$

$$d_\infty(f,g)=\max_{a\le t\le b}|f(t)-g(t)|$$

$(C[a,b],d_1)$ 和 $(C[a,b],d_\infty)$ 都是距离空间，因为有 $d1(f,g)\le(b-a)d_\infty(f,g)$，如果函数序列 (f_n) 按距离 d_∞ 收敛的（一致收敛），则按距离 d_1 也必定收敛（积分平均收敛），反之则不然。

例 4.3：闭区间 $[0,1]$ 上连续函数集合 $C[0,1], f_n(t)=t^n$ 看作是下标为 n 的点，序列 (f_n)（或直接写成 (t^n)），按距离 d_1 是柯西列，按 d_∞ 则不是，在这两个距离空间上它都不收敛。但在 $[0,1]$ 上可积函数集合里，依 d_1 距离，（$f_n(t)$）收敛到一个不连续函数 $f(t):f(1)=1,0\le t<1,f(t)=0$，这个极限 $f(t)$ 不在 $C[0,1]$ 里。

如果距离空间 X 中，任何柯西列都收敛到 X 中的一点，则称它是完备的。并非所有距离空间都是完备的。

例 4.4：$(C[a,b],d_\infty)$ 是完备的（连续函数序列一致收敛的极限，是连续函数）。$(C[a,b],d_1)$ 不是完备的（连续函数序列按积分平均收敛的极限，不一定是连续函数）。

例 4.5：开区间 $(0,1)$ 作为实数拓扑子空间不是完备的。柯西列 $(1/n)$ 在那里没极限。

实数空间是完备的，在有界和闭时就有了很好的收敛性质。对一般完备的距离空间，有界则要换成更强的完全有界的条件。下面介绍距离空间中这些概念和关系。

如果集合 M 中任意两点的距离，都小于一个正数，则称集合 M 是 有界的（Bounded）；如果对于任何 $r>0$，都有限多个，半径为 r 的开球覆盖 M，则称 M 是完全有界（Totally Bounded）；如果 M 的开覆盖都有有限子覆盖，则称 M 是紧的或紧致的（Compact）；如果任一无穷序列，都有一个收敛的子列，则称 M 是列紧的（Sequentially Compact）。

实数空间和欧几里德空间是距离空间。它们都是完备的，在那里有界的集合是完全有界的，对它们有列紧性定理：有界数列，都有一个收敛的子列。但这定理对一般距离空间不成立。

例 4.6：无穷序列（t_n）在 $(C[a,b],d_1)$ 和 $(C[a,b],d_\infty)$ 距离空间都是有界，却都没有收敛的子列。前者是不收敛的柯西列，后者不是柯西列，也没有柯西子列。

在一般的距离空间，一个无穷序列，未必有柯西子列，但如果它是完全有界的，则有柯西子列；如果它还是完备的，则有收敛的子列，即是列紧的。

这三个性质在距离空间中等价：完全有界且完备的，列紧的，紧的。

距离空间的子集如果是完全有界的，则它也是有界的，反之则不然。

例 4.7：离散空间是有界的，但无穷集合的离散空间不是完全有界的。

距离空间如果是完备的，它的闭集形成的子空间也是完备的。紧集是完全有界和闭的。实数的有界闭区间，欧几里德空间中的有界闭集都是紧的。

在直观上大致可以这样想象：距离空间中有无穷个点的集合，如果它可以被罩在越来越小的有限个开球里，这个集合的性质叫完全有界。在完全有界集合里的一个无穷序列，任给很小的开球半径，这覆盖着集合的开球数量也都有限，总有一个含有序列中无穷个点，它们在任意小的球里互相"靠近"着，这个无穷靠近的子序列是柯西列。这柯西列的极限如果是都在这空间里，这空间称为完备的；如果它都在那集合里，这集合则是闭的，这样性质的集合称为列紧的，也是紧的，意思是它很密实且被有限地覆盖。列紧性与紧致性在距离空间没有区别，在第二可数 T_1 空间里也是如此，在更一般的拓扑空间，它们并不等价。

紧致性说明无穷空间里的一些性质，可以通过开集表示的相邻性，只经过有限的集合来确定。在有限的世界里，我们用数学归纳法来推理，对参数 1 具有某种性质，在某一个自然数参数正确时，都能够推出对下一个数也拥有，则对参数为任何自然数的数学式也都拥有这个性质。

紧致性则在无穷空间中，划出一类在里面可以归纳推理的集合：开集说明其中的点都有某种的性质，如果有限个开集都具有某种性质，能够推出它们覆盖住的点也都有相同的性质，则能被开集覆盖的集合的点都有相同的性质。所以空间的紧致性是有限性之外最好的性质。

考一下你能用想象来指导证明的能力。

1. 收敛的定义只是描写某一个点如何是一个无穷序列的极限。这定义并没有说明它是唯一的。实际上 T_1 空间（各点都有不包含对方的开邻域），因为区分能力差，一个无穷序列可能收敛到空间中任何一点。T_2 空间（Hausdorff 空间，任何两个点能有分属它们不相交的开邻域），则具有较强的区分能力。请证明：距离空间是 T_2 的。在 T_2 空间，一个无穷序列如果收敛，它的极限是唯一的。

2. 用例 4.3，4.4，4.6 介绍空间和无穷序列（t_n）的性质，以及这些性质间的关系，请推出这序列在 $(C[a,b],d_1)$ 空间是完全有界的，在 $(C[a,b],d_\infty)$ 空间不是完全有界的。请描述这两函数空间里的开球是什么样的图像，为什么在 d_1 的距离下，可以用有限的开球能覆盖这序列，在 d_∞ 的距离在却不能？请注意正确的想象是能够作为数学证明思路的图像。

【扩展阅读】

1. 维基百科,度量空间Phttp://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%A6%E9%87%8F%E7%A9%BA%E9%97%B4

2. 程代展，系统与控制中的近代数学基础，北京：清华大学出版社，2007 http://product.dangdang.com/9350967.html

3. Davis Edu,MetricSpace `https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/m125a/intro_analysis_ch7.pdf`

5 重修微积分 5——线性

数学的空间是集合上赋有某些数学性质的论域。距离空间赋予集合中点的远近概念，让我们可以很直观地想象无穷空间中的收敛、极限和连续。微分、积分和求极限的计算都是线性的，线性运算依赖于，所在空间的点有着对线性运算封闭的代数结构。微积分中大部分概念，可以在有拓扑结构和线性结构的点集空间中理解和推广。所以我们要了解同时拥有这两种结构的空间。

集合 X 中的元素如果对线性运算封闭，即对于数域（实数或复数）$\mathbb{K}$

$$x, y \in X, a \in \mathbb{K} \to x + y \in X, ax \in X$$

那它是线性空间，其中元素叫向量。赋予向量“长度”（范数）的概念，则可以导出距离。

设 X 是数域 K 上的线性空间，X 上的范数定义为从 X 到 R 一个映射：$x \mapsto \|x\|$ ，它对于任意的 $x, y \in X, a \in \mathbb{K}$ 满足非负性，比例性和三角不等式：

$$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|ax\| = |a|\|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$\|x\|$ 叫做点 x 的范数（norm），赋以范数的线性空间叫做线性赋范空间（Normed linear space）或简称赋范空间，记为 $(X, \|\cdot\|)$.

线性赋范空间是定义了“长度”的线性空间，空间中两个点之差也是个空间中的点，以此可用长度来定义距离。令 $d(x, y) = \|x-y\|$，则定义了一个距离。如果线性赋范空间按其导出的距离是个完备的距离空间，则称它是巴拿赫（Banach）空间。线性空间中的点有时也称为向量，以强调它的线性元素性质。

在线性代数中，大家熟悉的是有限维的线性空间，赋向量予范数，当然也成了赋范空间。所以实数以其绝对值为范数，n 维欧几里德空间以其分量平分和的开平方为范数，都是巴拿赫空间。显然还可以以其他方式来定义不同的范数，可以证明 n 维赋范空间不同定义的范数都是等价的，因此 n 维巴拿赫空间不同定义的距离也都是等价的。就是说，它们在一种定义下收敛，在另一种定义下也必然如此。从实数的完备性，不难推出它们的完备性。这些已是大家熟知的结果。

对巴拿赫空间，人们更感兴趣的是无穷维的情况，它的性质略有些不同。让我们看几个例子。

例 5.1: 在闭区间 $[a, b]$ 上所有连续函数的集合 $C[a, b]$, 对任意的 $f \in [a, b]$ 定义范数 $\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$，它是一个巴拿赫空间。

线性空间的维数是其中最多线性不相关向量的个数。在闭区间 $[a, b]$ 上的多项式是这个巴拿赫空间上的向量，它们不可能都是有限个幂函数 x^n 的线性组合，所以这空间是无穷维的。

例 5.2：记无穷数列 $x=(x_n)$ 为集合中的一个点，对于任何一个自然数 p，都可以定义一个范数 $\|x\|_p=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$

对于给定的自然数 p，范数值有限的无穷数列的集合，在这范数下是一个巴拿赫空间，这空间很有用，记为 l^p 。

例 5.3：在 E 上 p 次勒贝格可积函数，在下面范数下是一个巴拿赫空间，这是分析中更常遇见的空间，记为 $L^p(E)$ ，$\|f\|_p=(\int_E|f(x)|^p dx)^{1/p},\quad 1\le p<\infty$

下面将看到以 $L^2(E)$ 最为著名。$l^\infty, L^\infty(E)$ 及更多巴拿赫空间的例子见【1】。

既然线性空间的点，被看作是向量，从几何直观上很自然会想象到夹角的概念，如果用正交的向量做分解，在物理和工程上会很有用。这要推广欧几里德空间的内积概念。

设 X 是数域 $\mathbb{K}$（通常指实数或复数）上的线性空间，定义映射 $\langle x,y\rangle$ $:X\times X\to\mathbb{K}$，称为 X 上的内积，如果它满足下列性质：$\forall x,y,z\in X, \forall a,b\in\mathbb{K}$ 有

正定性:$\langle x,x\rangle\ge 0, \langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0;$

共轭对称性:$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle};$

对第一变量的线性:$\langle ax+by,z\rangle=a\langle x,z\rangle+b\langle y,z\rangle$

赋以内积性质的线性空间称为内积空间。（注：有的教材的定义是对第二变量线性。）

定义范数 $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ ，如果按其导出的距离是个完备的距离空间，则称它是希尔伯特（**Hilbert**）空间。

不难看到，例 5.2 和 5.3 中 l^2 和 L^2 空间，很容易用内积来定义。

例 5.4：l^p 空间中无穷数列 $x=(x_n), y=(y_n)$ 定义它们的内积 $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$

不难验证，以此导出的正是前面 l^2 空间定义的范数，所以 l^2 空间是希尔伯特空间。L^2 也可以仿此定义内积，$\langle x,y\rangle=(\int_E x(t)\overline{y(t)}dt)^{1/2}$，所以它也是希尔伯特空间【2】。

学习线性代数时，我们知道，任何向量都可以表示为在线性空间下，基向量的线性组合。对巴拿赫空间和希尔伯特空间中的点，比如说连续函数、可积函数，是不是也可以做到这一点？当然如此，不过这个线性组合很可能是无穷级数的和或积分。比如说例 5.1 中连续函数可以表示为多项式级数的和（斯通-维尔斯特拉斯定理：闭区间上多项式一致逼近连续函数）。

在希尔伯特空间，因为有了内积概念，我们可以有正交归一的基，即对于它们有 $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ 。例如 e_i 为无穷数列中第 i 个分量为 1，其余分量都为 0 的数列，集合 $\{e_k|k\in\mathbb{N}\}$ 是 l^p 空间上的基，而且是 l^2 空间上的正交归一基。

在数学物理和工程应用中，为了便于微分方程求解，人们经常将函数分解为某种无穷函数项级数的和，如傅立叶级数、各种正交多项式、特殊函数等等。

这样可以把微分方程变成代数方程来求解。这其实是将线性空间中的向量表示成在一组基上的线性组合。这个函数是否等于这种分解，实际上是问这个无穷级数是否收敛。学习了拓扑概念后，我们就会问这是哪一种意义下的收敛。最简单的如幂级数等指的是逐点的收敛，这只是说在收敛域里，每个点的函数值满足收敛关系，极限函数不一定保持序列中函数的性质，如有界性，连续性，可积性等等。有时我们更关心的是，能保持有某些性质的分解表示问题，这就需要了解所在的拓扑空间。

无穷维的巴拿赫空间和希尔伯特空间中的向量，可以分解为对基向量的线性组合，这并不意味着可以表示成无穷级数的和，因为基不一定是可数的。例如 e^{-st}, $s \geq 0$ 是一族函数集合的基，它是不可数的。能否做到对可数基的分解，取决于空间的拓扑，或是怎么定义它的范数和内积。

巴拿赫空间有可数的基（向量），当且仅当它是可分的，也就是说这空间有可数的稠集。显然，如果希尔伯特空间的向量都能表示成正交归一基的无穷级数和，它是可分的。反之，可分的希尔伯特空间中的向量，都能表示成正交归一基的无穷级数和。

对于可分的希尔伯特空间，将一个可数的稠集的点排成序列，剔去与序列中前面线性相关的点，形成了一个线性独立的序列，再将这组序列用 Gram — Schmidt 方法正交归一化，都可以形成了一个可数的正交归一基（e_k）。可分的希尔伯特空间中的点 x，都可以在这个基上分解，也就是等于收敛的级数。$x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$

也就是说在基（e_k）下，x 一一对应着数列 $\langle x, e_k \rangle$，不难证明这个数列是 l^2 空间的点，这个对应保持了线性关系，极限和内积的不变，即它与 l^2 空间等价。可分的希尔伯特空间在内积的对应关系下是等价的。

尽管可分的希尔伯特空间在内积的抽象下可以看成是唯一的。空间中的点都可以等于一个收敛的级数。但是不同的内积和不同线性独立向量的选取，可以形成不同的正交归一基，方便用于不同的应用。比如说应用于通讯工程信号处理的 $L^2(0,1)$ 中的 Haar 函数组与 Walsh 函数组，物理中用到的 Hermite 多项式等。

不能表示为无穷级数和的函数，也可能表示为不可数基向量的线性组合，即积分变换。比如说，对不可数基 e^{-ist} 向量用内积公式来分解的傅立叶变换，和对基向量线性组合（积分）的傅立叶变换反演。

学习数学概念，最起码的功课是用一个简单的例子，根据定义自己走过一遍，才能得到真正的体会。如果你相信自己是理解了，例 5.2，5.3 和 5.4 中 l^2 和 L^2 是两个简单的例子。请从内积、范数、距离、收敛、完备的概念开始，验证它们符合定义，证明它们是巴拿赫空间，并且也是希尔伯特空间，而且是可分的。这些证明都不需要技巧，范数和内积中的不等式可以直接引用 Minkowski 和 Holder 不等式【4】【5】，其他都没有难度，只是验证对概念的理解。

【扩展阅读】

1. 互动百科，巴拿赫空间 http://www.baike.com/wiki/%E5%B7%B4%E6%8B%BF%E8%B5%AB%E7%A9%BA%E9%97%B4

2. 维基百科，希尔伯特空间http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B8%8C%E5%B0%94%E4%BC%AF%E7%89%B9%E7%A9%BA%E9%97%B4

3. 程代展，系统与控制中的近代数学基础，北京：清华大学出版社，2007 http://product.dangdang.com/9350967.html

4. 维基百科，闵可夫斯基不等式http://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%97%B5%E5%8F%AF%E5%A4%AB%E6%96%AF%E5%9F%BA%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8F

5. 维基百科，赫尔德不等式http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B5%AB%E5%B0%94%E5%BE%B7%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8F

6 重修微积分 6——微分

> 芝诺“飞矢不动”的悖论说：飞行的箭，每个时刻都占据了一个确定的位置，这意味着它不会同时存在其他的位置，箭矢的位置固定，所以它在这时刻是静止的。依此推理，飞行的箭在任何时刻都是静止的，所以运动在逻辑上是不可能的。

对于这个悖论，有不同的解答。黑格尔认为运动就是一对矛盾，每个时刻飞矢是既在这个位置又不在这个位置上，用辩证法回避了形而上学的挖掘。康德认为时间和空间并非事物的属性，而是我们感知事物方式的属性，这个矛盾是我们过去时空观念的疵瑕。休谟否认时空的无限可分性，以此也可以给出有穷时空的离散化解释。而牛顿坚持了时空无穷可分的观点，用微积分给予近代的解释。从而也让时空无穷可分的假设变成了公认的真理。

运动在直观上是个时间段上位移的现象，当一个物体在时刻 t_0 到 t_1 的时段，从位置 x_0 到了 x_1，如果 $\Delta t = t_1 - t_0 \neq 0$ 时 $\Delta x = x_1 - x_0 \neq 0$，我们说它是在运动。物体在这时段的速度为 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$，意思是位移对时段里时间流逝的变化率。物体时刻 t_1 在位置 x_1，这个信息，不足以判定它是静止还是运动的。只要 $\Delta t > 0$，速度 $\frac{\Delta x}{\Delta t} \neq 0$ ，在 $[t_0\ t_1)$ 时段都是在运动，牛顿把这确信是运动的区间无限缩小，当 $\Delta t \leftarrow 0, \frac{\Delta x}{\Delta t} \leftarrow v$ 时，用这个无穷过程的极限，把运动和速度的概念扩展到时刻和位置点上，定义时刻 t_1，物体在位置 x_1 处的速度为 v，只要 t_1 时刻（或 x_1 位置上）$v \neq 0$，说明这时在这一点也是在运动。

这区间里的运动和速度，从单纯逻辑上不能推出在 t_1 和 x_1 也是如此，这里还需要一个假设。他的信念是，运动的概念在这无穷过程推到了极限，都应该保持不变，在数学上的表达是：运动速度是连续，也就是说它不会在同一时刻有不同的值。牛顿用速度加速度的极限定义和力学第二定律，规定速度是连续的，而力可以是不连续的。在牛顿的力学世界里，运动是一阶可导的位置函数。

当计算区间无限缩小到达极限时，时段变成了时刻，位移变成了位置，这个变化实质是，无穷的过程用它的极限值来代表了。比值的无穷过程说法（这是柯西略微修正了牛顿无穷过程的比值说法），赋予速度新的含义，称之为在这一点的导数。微积分里用了莱布尼茨在数学上不严谨但应用上很直观符号，记为：dx/dt.

这个无穷解释的观念影响至今，有了微积分这个利器，从此人们慢慢习惯世界是连续、无穷可分、确定性的，甚至是线性的了。这再次体现了康德的名言：“理性为自然立法”。

实数域上函数 $f(x)$ 在某一点的导数 $f\ (x)$ 是函数值在这一点的变化率，它的直观几何图像是函数在这一点切线的斜率。函数的微分与变量的微分是一种线性关系 $df(x) = f\ (x)dx$，这让人们构造数学模型时可以应用叠加原理，在近似时用差分来计算，因此被广泛地应用。

实数或复数值函数在所有点的导数，构成了导函数。所以对函数求导，可以

看成函数空间的一种线性变换。记微分算子 $D = \frac{d}{dx}, Df(x) = f\ (x)$，它是作用在巴拿赫空间的一个线性算子。让我们从线性代数的角度来看，这线性算子将怎么分解所在的空间。

在线性代数中，我们知道线性算子在线性空间中有特征值，特征向量的子集，张成对这算子的不变子空间，全体构成线性空间的基，所有的向量都可表示为这些特征向量的线性组合。微分算子特征向量和它们张成的子空间对导数和积分运算封闭，微分方程在这里表现成向量之间的代数关系式，我们可以用它来解微分方程和逼近。下面考察怎样应用特征向量的例子。

显然，指数函数 e^{-iat} 是微分算子 D 的一个特征向量，这里 i 是虚数符号，a 是任意复数，t 是实数变量。对这特征向量，D 的特征值是 $-ia$。取任意一组这样的特征向量，它们的线性组合是微分算子 D 的不变子空间。但是仅仅如此的应用不多，我们更关心的是能否有个可数的正交基张成希尔伯特空间，让它里面的函数都能表示成无穷级数的和。这就和空间的拓扑性质有关了。

考虑希尔伯特空间 $L^2[0,2]$，那么 D 的特征向量集合 $e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikt} | k \in \mathbb{Z}$ 便是这空间上的一个正交归一基。

让我们首先来验证正交归一性。对于 $L^2[0,2]$ 空间，它的内积定义是 $\langle f(\cdot), g(\cdot)\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ ，对于任意整数 m, n ，我们有：

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-imt}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-int} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-imt} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)t} dt = \delta_{mn} \tag{3}$$

这就证明了它们是正交归一的。空间中向量 $f(\cdot) \in L^2[0, 2\pi]$ 在 e_k 上的投影是：

$$\langle f(\cdot), e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt \tag{4}$$

这是大家熟悉的函数 $f(\cdot)$ 傅立叶系数的复数形式（若将复数展开成余弦和正弦正交基，则系数乘一个常数因子）。函数 $f(\cdot)$ 对这组向量的分解是傅立叶级数，不难证明这个傅立叶级数收敛于 $f(\cdot)$。所以它们构成了 $L^2[0,2]$ 空间上的基。经典的傅立叶级数，就是建立在微分算子 D 一组在 $L^2[-T\ T]$ 空间正交归一的特征向量上。这组可数的基张成了 $L^2[-T\ T]$ 希尔伯特空间。

注意到微分算子 D，有不可数的特征向量 e^{-iat} ，所以它们在无穷序列表达下可能是线性相关的。这取决于它们所在的空间。

是不是所有希尔伯特空间中的点都能表达成无穷级数？也就是说，是不是它们都有可数的基？答案是否定的。

例如：对于函数定义内积为 $\langle f(\cdot), g(\cdot)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T\pi}^{T\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$，它构造了一个希尔伯特空间 $L^2(-\infty,\infty)*$，对所有的实数 s, t 的函数 $e_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ist}$ 都是这空间上线性算子 D 的特征向量，不难验证它们是正交归一的，这组向量是不可数的。

$L^2[-T\ T]$ 是可分的希尔伯特空间，里面的函数可以用傅立叶级数来表达（在 L^2 积分意义下收敛，级数展开几乎处处逐点收敛于它）。而 $L^2(-\infty,\infty)*$ 这

希尔伯特空间是不可分的，所以这里的函数不能用傅立叶级数来表达。例子里那组向量是个不可数的正交归一基，这空间里的函数可以用积分变换来表达对这组基的分解和线性组合。从内积公式得到傅立叶变换，即是对这组基分解的分布函数；对基向量分布性分解的线性组合可直接写出傅立叶变换的反演。这提供了一个通俗的直观解读。更深入的探讨，诸如无穷区域的积分，无穷小分解系数分布函数的表达，积分的线性组合表示，及扩充到广义函数等等数学细节，在 Sobolev 空间可以得到更严谨的解读。

数学是直观想象在逻辑上精确化的学问。希尔伯特空间的研究，源自狄拉克对量子力学算符的表达。狄拉克非常注重数学上形式的美，简洁的美，他以此扩充了许多直观概念的应用场合，取得十分漂亮的结果。但在无穷世界的想象，还是需要用精确的逻辑来校正。1927 年冯•诺依曼、希尔伯待和诺戴姆的论文《量子力学基础》，纠正了狄拉克缺乏严谨的不足。

在早期的泛函分析研究，特别是在物理应用中，希尔伯特空间指的是可分的完备的内积空间，即这空间有可数的稠集。上面的例子说明并非都是如此的。

大家已经熟悉在 $\mathbb{R}^n$ 空间上的微分，怎么将它推广到往整体看不是那么“平整”的空间？先看看平面几何是怎么使用的。我们生活的大地实际上是地球球面上的一部分，把这个局部当作 2 维的欧几里德空间，或者说映射到 $\mathbb{R}^2$ 空间。每一个局部地方在映射下对应着一个平面地图，球面上每个地点对应着平面地图上一个坐标，我们可以用坐标进行这个球面局部的各种计算。用几张平面地图覆盖了全球，就可以计算地球的各处。

对高维和更一般情况，也可以类似地，把拓扑空间 X 的一个局部开集，一一映射到 $\mathbb{R}^n$ 空间上来计算。X 空间上的一个点 x 对应着 $\mathbb{R}^n$ 空间上的一个点，称为 x 的坐标，x 的邻域对应着坐标的邻域以保持对应的收敛关系。所以这个映射必须是同胚的，也就是这个一一对应的映射双向都是连续的，就像 X 中的这个开集通过伸缩变形展平成 $\mathbb{R}^n$

空间的开集一样。如果有一族这样的开集覆盖了 X，都能做到这样的映射，那么 X 上的每个点都有了 n 维实数的局部坐标。这样的 X 空间便称为流形。覆盖开集的重叠部分，流形上的点在不同映射的局部坐标系上，可以进行坐标变换。因为这样的映射是定义在开集上，所以 x 点总有一个足够小的邻域是完全在一个映射的局部坐标系上，x 点与它坐标的收敛关系是一一对应的，如果交集之处的坐标变换是连续可导的，整个流形通过这些映射的坐标系，便可以有对应的微积分计算，这时称为微分流形。

当然并非任何的拓扑空间都能做到这一点。流形 X 的拓扑不能太粗，对于两个点必须有能够分开的邻域，即是 T_2 或者称为 Hausdorff 空间；拓扑也不能太复杂，要有可数的拓扑基（其元素的并能够生成所有开集，即是第二可数的）。

局部映射必须与相同维数的 $\mathbb{R}^n$ 空间同胚。下面是用数学语言描述的定义。

> X 是第二可数，T_2 的拓扑空间，若在一个覆盖 X 的开集族中的每个开集，都有一个嵌入 $\mathbb{R}^n$ 的同胚映射，X 可以称为 **n** 维拓扑流形，这个映射称为坐标图。在拓扑流形上，两个坐标图交集部分的点在不同的坐标图上映成不同的（坐标）点，如果这两个坐标变换函数有 r 阶连续导数，则称它们是 C^r 相容的坐标图。如果所有坐标图都是 C^r 相容的，则称这个流形为 $\boldsymbol{C^r}$ 微分流形。r 为无穷大时称为光滑微分流形。

对于一般的距离空间，它是 T^2 ，但只是第一可数的。如果它还是可分的，则它是第二可数的，这个拓扑中任何的开集都能由一组可数开球，用它们的并集来构成。可分的距离空间满足第二可数和 T^2 的条件，只要每点的开邻域都有同维数的同胚坐标映射，就可以是流形。

两个维数分别为 m 和 n 的 C^r 微分流形间的映射称为 C^r 映射，它可以表示为对应点局部坐标上的 C^r 函数。对这个函数的求导和积分，对应着这两个流形间的映射在这局部区域上的相应的运算。比如说，n 维光滑微分流形 X 到 R 的函数，在 X 中点 x 的邻域对应着 $\mathbb{R}^n$

空间上一段光滑曲线。这条光滑曲线，对应着 x 点的切线（用方向导数表示）是一个 n 维向量，所有这些切向量形成的空间称为 X 在 x 处的切空间。虽然上述的切空间是由某一局部坐标系下定义的，可以证明不同的坐标系导出的切空间是相同的。直观上可以想象成二维 X 曲面在 x 这一点上的切平面。如果一个映射 F 将 C^r 微分流形 X 上每一点都对应着它切空间上的一个向量，F 称为 C^r 向量场，在局部坐标下表示如下，其参数都是 C^r 函数。

$$F = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{5}$$

纤维丛的定义了包含三个拓扑空间 B M Y 和一个投影映射 p ：基空间 M 是全空间 B 的投影 $p(B) = M$；基空间上每一个点 x 对应着这个投影在全空间 B 里的原像 $p^{-1}(x)$，这原像与丛空间 Y 同胚，称为这点上的丛；基空间上每一点存在着一个邻域 U，直积空间 $U \times Y$ 与 U 的投影原像 $p^{-1}(U)$ 同胚。在直观上可以想象二维曲面 M，每一点 x 上都有一根 $p^{-1}(x)$ 的纤维，这些纤维互不相交，全体构成三维空间 B。B 中的每一点都可以沿着纤维对应到 M 的同一个点上（称为投影），全空间上点的邻域在纤维上和投影到基空间上仍然是它们的邻域。不要把基空间 M 想象成一把刷子的底部，M 应该看成是全空间的一个横截面，密实的纤维集束穿过这个横截面向两边无限延伸。每根纤维都像直线 Y 的弯曲变形。纤维丛的数学模型也可以用来描述物理空间中的场。

微分流形和纤维丛，若以欧几里德三维空间中的曲面和纤维集束几何体来看，都不难想象其图像。不过它们是在抽象的点集拓扑空间上有严格的定义，从而能够在上面推广微积分的应用。这些都是现代微分几何课程的内容，这里的简略介绍，希望通过较精确的数学定义，让大家可以想象这些概念。

【扩展阅读】

1. 冯·诺依曼关于量子理论的数学基础，算子环，遍历理论的研究 http://www.kepu.net.cn/gb/basic/szsx/2/25/2_25_1008.htm

2. 钱诚德,高等量子力学 http://course.zjnu.cn/huangshihua/book/%E9%92%B1%E8%AF%9A%E5%BE%B7_%E9%AB%98%E7%AD%89%E9%87%8F%E5%AD%90%E5%8A%9B%E5%AD%A6.pdf

3. 关肇直等，张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979

4. 维基百科，流形http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B5%81%E5%BD%A2

5. 程代展，系统与控制中的近代数学基础，北京：清华大学出版社，2007 http://product.dangdang.com/9350967.html

7 重修微积分 7——测度

计量是数学的肇始。无论是称重量，量尺寸，度面积，计体积，结果都是从 0 到无穷大的一个数。计算时多将整体划分成比较规范的部分，分别测量累加而成。不因测量的方法不同而异。所以计量必须具备几点：它是非负的数量，空无为 0，划分后计量之和等于总体，不因测量方法而变。在无限可分世界里任何的计量，就必须把这性质推广到无穷的集合。抽象集合中的测度 $\mathbf{m}$，就是将集合的子集映射到 $[0,\infty]$ 区间的函数，空集对应着 0，测度有着可数可加性，即：

$$m(\phi)=0,\quad m(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n),\ \ E_i\cap E_j=\phi\ \ \forall i\neq j \tag{6}$$

在不同坐标系下表示集合的点，测度值要保持对坐标变换的不变性。注意，无穷大这里也可以是个测度的量值，这让它适用于一些无穷的情况，比如说没有尽头的直线长度，无边无际的平面面积和无限空间的体积等等。例如，集合的势也是一个测度，满足 0 的对应和可数可加性，对于有限集，这测度是集合中元素的数量，对无穷集，这测度是无穷大。人们的计数其实是从这个测度开始的。

显然对于同一个集合，可以定义不同含义的测度。学习数学的抽象，这是要适应的思想方法。

这个系列介绍过收敛、拓扑、距离、范数、内积、测度等数学的概念，在集合的基础上定义它们的性质。在同一个基础集合上，往往有多种具体的结构和映射符合这些定义的性质，它们的抽象都属同一概念。这情形与物理等自然科学很不同，让有些学者觉得不习惯和不确定。在思想方法上，自然科学本质是归纳的，研究的都是具体一类的事物，从中抽象发现一些共有的性质，形成了概念。虽然有时用抽象的语言来定义，也因此逻辑推理，但隐在定义之后的具体一类事物，始终是最终的裁判，当推理的结论逸出接受的范围，就放弃原有的概念代之以新的解读。而数学的本质是演绎，虽然许多概念的形成来自归纳，但不同定义的概念在逻辑上必须是一致的，等价的，或是由论域的局限或推广。数学研究的是由这些共同性质定义下的概念，在演绎下的共同表现，不论概念所指的具体对象的类别有多大的不同，所得的结论从具体对象来看会如何不可思议。就抽象所聚焦的概念而言，它们都是一样的，拥有共同推理而得的性质。在数学最高的权威是逻辑而不是事实。所以要构造数学概念的直观图像，必须习惯用多种不同类别的具体对象（在数理逻辑上称之为模型）来想象抽象的概念，了解不同模型的局限，而不要被它所左右。自然科学关心物质世界里的真。数学关心的是思维世界里的真。只有确信思维中逻辑推理的结论是真实可靠的，才能利用数学概念作为工具，来了解、表达和推测物质世界里的真实。

让我们从测度的定义出发，看当逻辑与事实冲突时，数学家和自然科学家的不同处理。

实践经验告诉我们，将一个物体分割成几部分，分别测量它们的重量和体积，它们之和一定会等于整体。这已经成了无可置疑的真理。很不幸，经验不能

代替逻辑，因为经验只涉及到有穷的世界，当我们把物体看成无穷可分时，无穷集合的任意分割，并非都能如此。在定义了一些集合测度后的空间里，并非所有的集合都可以参与保有这样性质的测度。

巴拿赫-塔斯基（Banach Tarski）举了一个例子。大致说来，他用分别沿 X，Y 两轴左转或右转某个特殊的角度（例如 $arccos(1/3)$）的操作，形成包含 4 种旋转 a, a^{-1}, b, b^{-1} 的运算序列。这些有限步运算序列生成了一个具有无穷个元素的群 H。在序列中刨去相邻反向相消的旋转，可以证明每个序列与群 H 中的元素一一对应。这个群里的元素可以按生成时，第一个的旋转操作分别为 a, a^{-1}, b, b^{-1} 而分成不相交的 4 组及单位元 e 组。实心球中的质点，在这群每个元素对应的旋转操作序列作用下，形成一条旋转轨迹质点相连的链。利用选择公理，在每个链条都可以选出一个点来代表，这些点的集合记为 M，球中所有的质点都在 M 中某点所在的轨迹链条中。这些轨迹链条依对应的 4 个群组也分成 4 组，将这些轨迹链条的第一个质点取出放在对应于群的 e 组，其余链条中的质点对应到起始旋转分别为 a, a^{-1}, b, b^{-1} 的群组，它们是互不相交的 5 个组，可以看成球被分割成 5 堆。现在将对应 a^{-1} 组那堆整体做 a 的旋转，经过这旋转后的这堆包含有对应着所有 a^{-1}, b, b^{-1} 组及部分 e 组的质点，对 b^{-1} 组那堆整体做 b 的旋转，得到类似的结果，不难想象将它们与剩下的 a,b 和 e 组可以组装成没有缝隙与原来一样的两个球，详见【2】。

这个例子很有名，称为“分球悖论”或者“巴拿赫-塔斯基定理”，因为进行分类时，用了选择公理（AC）在无穷集合中挑选，上世纪二十年代，大家是用来反对 AC 的。经过多年争论后，人们发现这里的证明在逻辑上无懈可击，选择公理在数学基础上很重要，是必须保护的不可或缺。而在物质世界中球不可能由无限的质点组成，所以这模型并不与现实冲突。想要继续应用抽象的测度理论，那么只能归结为人们在无穷的世界里的直觉错了。

为什么是不可思议？因为人们觉得将一个球切碎分割成 5 堆，组成球的元素分成了 5 个集合，球的重量和体积是这 5 个集合的总和，一堆元素刚性旋转不会改变重量和体积，即使装配成的球没有缝隙，它们也不该有两个球的重量和体积。

重量和体积都是测度，与经验的冲突在于这种分割不满足可加性。但如果这种怪异分割而成的 5 个集合是不可测度的，那么就没有理由说什么可加性了。一个球和两个球之间就失去了这个有限测度量的联系。至于一个球和两个球的元素数量，因为它们都是无穷的集合，在有限的世界对岸，集合论早就告诉我们，无穷集合和两倍的集合，它们的元素是可以一一对应的。这例子告诉我们，测度有时只能定义在空间的一部分集合上，这些集合称为可测集，它们包括空集，对可数个并，及补集运算封闭，称为 $\boldsymbol{\sigma}$ 代数。在这 σ 代数之外的集合，对测度没有定义，称为不可测集。

在实数空间，我们定义开区间 (a, b) 的测度为 $|b-a|$，以开区间生成的 σ 代数称为波雷尔 **(Borel)** 集。在实数空间以开区间测度和定义延拓出来的测度称

为长度。在 n 维欧几里德空间，可以同样地从定义矩形区间的面积延拓出 2 维的测度，以及 n 维的体积，这样定义的测度称为勒贝格测度。在不致混淆时，简称为测度，或长度、面积、体积。

波雷尔集包含着 $\mathbb{R}^n$ 空间通常拓扑下的所有空集、全体、开集、闭集、单点、以及它们的各种交和并。在理论上，不可测的集合虽然也有无穷多，你可以想象的却很难，因为它们不存在你的经验中，它必须用逻辑依赖选择公理来构造。

柯尔莫哥洛夫将公理化概率论定义在概率空间上，用样本的集合代表事件，它们构成空间里的 σ 代数，概率则是对集合取值在 0 到 1 之间的测度。

测度为 0 的集合叫做零测集，它在应用中扮演了重要的角色，比如说你突然有个天才的发现，只是它适用的情况在参数中是零测集，如果参数值是随机分布的，那你几乎都没有用武之地。在积分里，如果引起麻烦的地方，比如说无界、间断处等等是零测集，那也可以忽略它们。

$\mathbb{R}^n$ 空间中的一个点的集合，可以包含在任意小的区间里，它的勒贝格测度小于任何正数，所以它只能为 0。从测度的定义可知，可数个零测集的并集仍然是零测集，所以有理数集合是实数空间 $\mathbb{R}$ 上的零测集。

有个古老的疑问："点没有长度，为什么它们组成线段却有了长度？"有人回答，因为这里的点有无穷多，0 乘无穷大可以是非零的数。上面例子说明，这理由对可数多的无穷大不成立。是不是因为线段有不可数的点所致？下面例子说明，在直线上不可数点集的总长度也可能是零。

> 康托集是这样构造的，记 $C_0 = [0,1]$，将这区间三等分，取走中间一块 $(1/3,2/3)$，留下的部分 $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$；分别在留下的区间 $[0,1/3]$ 及 $[2/3,1]$ 中，再次取走各区间中间 1/3 的那块，得到 C_2；如此重覆得到 C_n，$n = 0,1,2,\cdots$；它们的极限 C 称为康托集。C 是不可数的，因为它的点必须选自无穷序列 Cn 中左边或右边部分，即 2 的可数幂。Cn 测度是 $(2/3)n$，当 n 趋向无穷大时，它趋向 0，所以 C 的勒贝格测度是 0.

当一个区间无穷地缩小到一个点，区间的长度也无限地趋向 0，区间的长度和覆盖线段的区间数总在有限世界这一边，没有尺寸的点和无穷多个点是在实无穷的彼岸，我们不能指望用点和点数来解答线段长度的问题。不同维数空间中几何体的测量也是如此。看个例子。

> 英国人很早在测量海岸线长度时，发现所用的尺度越短，海岸线的长度越长，那么到底什么是曲线的长度？二维空间的曲线，显然不能用一维区间来覆盖，而二维的勒贝格测度（面积）是零。实践中用尺子丈量曲线，微积分里用折线来逼近曲线长度，都是用二维空间的园来覆盖曲线，然后计算这些覆盖直径的和。对于不同覆盖所计算的下确界，称为曲线的长度。测量所用的尺子越短，计算出来的长度越长，这反映了近似逼近的过程。这个单调递增的数列极限可能是有限的量，也可能是无穷大。

在 n 维欧几里德空间，任何集合 A 都可以被一族可数的开集覆盖，这族开覆盖测度和的下确界称为集合 A 的外测度，记为 $m^*(A)$。外测度对所有集合都

有定义，保持有测度的非负性，对集合包含关系的单调性，和次可数可加性。当集合 A 是可测时，外测度等于它的测度。

$$m^*(A) \geq 0,\ m^*(\phi) = 0, \quad A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B),$$

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n),\ \ E_i \cap E_j = \phi\ \ \forall i \neq j$$

将开集的测度定义为集合中两点距离的上确界，我们就由此定义了曲线的长度。在有界的二维区域里的曲线长度有没有可能是无穷大？当然有。下面是一个分形曲线的例子。

Koch 曲线是这样构造的。对单位线段，中间 1/3 用等边三角形的两边来代替，得到四条边的曲线 k=1，对这四条边做同样的替换，得到 k=2 曲线，如此无限重复这个替代过程，它趋向 Koch 曲线。（见图，图像抄自网络）

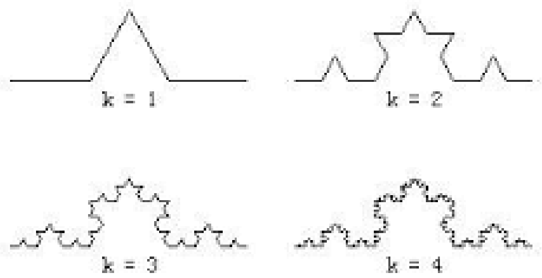

图 1: 分形曲线

可以把这个 k 序列看作测量尺度变小的过程，计算不同 k 时计算的曲线长度 $L(K) = (4/3)^K$，所以 Koch 曲线的长度是无穷大。

对于欧几里德空间 $\mathbb{R}^n$ 中的几何体，集合 A 的 **Hausdorff** 测度 $H^s(A)$ 定义如下：

$$H_d^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|O_i|^s \mid \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i \supset A,\ \ |O_i| \leq d\right\},\ H^s(A) = \lim_{d\to 0} H_d^s(A) \tag{7}$$

$H^s(A)$ 定义在 $\mathbb{R}^n$ 的 Borel 集上，不难验证它满足可数可加性，所以是个带参数 s 的测度。当 s=n 时，$H^s(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的 n 维勒贝格测度（精确地说只差一个与 n 有关的倍因子，因为 Hausdorff 测量的尺子是球，勒贝格是方块）。

在 $\mathbb{R}^n$ 空间，将几何体 A 线性放大 k 倍，其集合记为 $kA = \{kx \mid x \in A\}$，则有 $H^s(kA) = k^s H^s(A)$，这与 k 维几何体的线性放大后，长度、面积和体积比例关系是一致的。注意到对于给定的集合 A，Hausdorff 测度 $H^s(A)$，随着 s 从 n+1 开始减小，其数值从 0，到了一个临界点后，突然跳到无穷大，我们把

这个 s 的临界值，称为几何体的维数，或者 **Hausdorff** 维数。当它是自然数时，这与我们日常中的经验是一致的，但有时它不是一个整数。

作为一个应用的例子，现在我们审视 $\mathbb{R}^n$ 空间里曲线的长度，凡是能够用积分算出有限值长度的，无论在平面或在三维空间，用 Hausdorff 测度可以证明都是一维的曲线。Koch 曲线按照 s=1 来计算是无穷大，所以它可能是更高的维数。分形物体具有自相似结构，注意到如果将 Koch 曲线线性放大 3 倍，可以得到 4 份的原来曲线，根据上述 s 维几何体的线性放大与 Hausdorff 测度的倍数关系，可以算出 $s = ln4/ln3 = 1.26186...$，即 Koch 曲线是 1.26186... 维。前面例子中的康托集，线性放大 3 倍可以得到 2 份原来的康托集，所以它的维数是 $s = ln2/ln3 = 0.63093...$，是分数维的。只有在几何体所在的维度里的测度，才可能是一个正实数值。

如果你好奇，$\mathbb{R}^n$ 空间里一个点的维数是多少？建议你用 Hausdorff 测度公式验算一下，以加深理解。只有 s=0 时，单点的 Hausdorff 测度是 1，k 个点和可数无穷个点，测度是 k 和无穷大，而它们在 s>0 时都是零测集。不可数的点集，在 s=1 时的测度，既可能为 0，如康托集；也可能是正数，如有界区间；也可能是无穷大，如整条直线；还可能没有定义，如不可测集。这也许能给予古老的点与线段长度关系问题，更多一点的认识。

【扩展阅读】

1. 维基百科，测度 `http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B5%8B%E5%BA%A6`

2. Wikipedia,Banach-Tarskiparadox `http://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski_paradox`

   Wikipedia,Hausdorffmeasure `http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorff_measure`

3. 维基百科，维塔利集合 `http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BB%B4%E5%A1%94%E5%88%A9%E9%9B%86%E5%90%88`

8 重修微积分 8——积分

一元非负函数 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分，可以很直观地看成是这函数与 x 轴中 [a，b] 区间所夹的面积。在几何上，牛顿很直观地将 [a，b] 分割成细小的区间 Δx，以此为宽度的小长方块来填充或覆盖逼近这个面积，$\sum_i f(x_i)\Delta x$，当 Δx 趋于零时它趋于这曲线所围的面积，莱布尼茨形象地把这个极限记为：$\int_a^b f(x)dx$ 。多元函数的多重积分是类推到高维体积的度量。

面积和高维体积按照这样计算的本质就是勒贝格测度。积分作为描述物理世界的数学模型，这是它所要求的属性。测度的计算是将整体切割成规范的部分，测算累加而成。上述牛顿的定义是按纵条切割的算法，叫做黎曼积分。面积也可以按横条来切割，把函数的值域区间细分，$\sum_i m(f^{-1}([y_i, y_i + \Delta y]))\Delta y$，算 Δy 趋于零时的极限，这个算法收敛的极限叫勒贝格积分。（数学语言的定义见【1】，直观见图，图像来自网络下载）

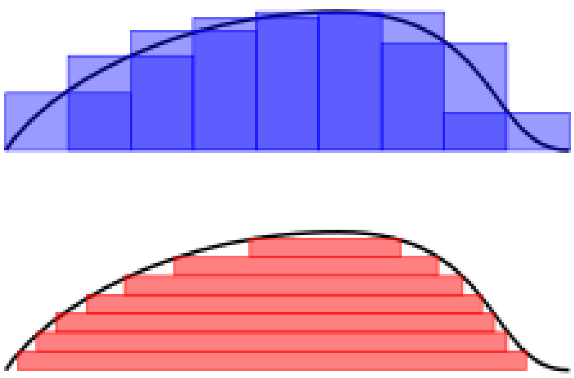

图 2: 黎曼积分与勒贝格积分的直观区别

显然无论是用哪一种算法，它们计算所指的面积或体积是一样的，也应该相等的。将积分作为描述实践对象的数学模型，无论是用哪种测量计算方法，它们必须相等才有实用意义。这些面积或体积作为一种测度，如果按照不同的分割方法（即不同的积分定义）都有计算结果，在逻辑上也可证明是相等的。所以，如果黎曼积分和勒贝格积分都存在，它们相等。

如果函数具有负值，可以看成它是两个非负函数的相减。也就是两块面积体积或测度的相减，所以上述的结论也适用于一般的情况。

函数 f 在集合 E 上的勒贝格积分，记为 $\int_E f dm$，这里 E 是可测集，f 是 E 上可测函数，m 是 E 上的测度。当 E 是个区间时，它通常也用与黎曼积分相同形式的式子。请注意，对勒贝格积分，它只是沿用黎曼积分的形式记号，不再具有莱布尼茨那种对 dx 的符号解读。在可以缺省所指的测度和集合时，甚至将它

记为 $\int_E f$ 或 $\int f$

因为所有黎曼可积的也是勒贝格可积，而且相等，借用相同积分形式的记法不会引起混淆。当你读论文里公式推导，看到不满足初等微积分相关的定理条件，居然也通行，不是作者不严谨，或误以为应用上不需要严谨，而是式子里指的是勒贝格积分。

勒贝格积分中测度、可测集，可测函数的术语吓住了许多对它们不熟悉的人，不敢使用。其实只要理解这是和黎曼积分一样应用，并具有更宽松应用条件的数学模型就不难了。黎曼积分的区域是可测集，能进行黎曼积分的函数是可测函数。黎曼积分都可写成勒贝格积分。在细节上：当 E 是一维时这里的勒贝格测度就是长度，二维时是面积，高维时是体积类推；说 f 是 E 上的可测函数，其定义是在 E 中 f 函数值大于任给一个数所有点形成的集合，都是可测集。大致说来，可测集包含了非数学专业人可以想象到的任何集合。迄今所知的勒贝格不可测集，都是用选择公理构造出来的无穷世界里的怪胎。如果你在物理或工程应用中涉及勒贝格积分，除非得到惊人违反常识的结果，大约都可放心地认为，你用到的都是可测集和可测函数。你大约还没有足够的运气和能力，构造出不可测集或不可测函数来犯错误。

既然这两种积分都一样，为什么黎曼积分用了几百年后，被称为经典分析而渐渐淡出，上个世纪初发展的勒贝格积分被广泛应用，并看作是近代分析的开端呢？

简单的答案是：应用黎曼积分在积分区域、积分函数及参与其他无穷过程时，有许多限制，而勒贝格积分解决了这些麻烦。它们是对相同应用的不同测算方法，就像原来用木尺丈量土地，现在改为用测距仪来测量一样，更有效的新方法必然会取代旧的，需要的只是熟悉。观念转换需要时间来消化，所读课本需要更新，个人则像是跟了不同师傅学了不同的功夫而已。

观念的不同带来了眼界的不同。经典分析一直徘徊在有限的视野和无穷的梦魇中。站在有穷世界的岸边，用无穷过程来窥视对岸的实无穷。想尽量保持有限世界的直观和逻辑上的严谨。这种囿于有限世界的观念和对无穷实质的回避，使得触及无穷时缩手缩脚，理论结果支离破碎。而勒贝格积分则基于包括有限和实无穷集合的测度研究上，以逻辑为骨架来拟合修正过去经验形成的概念。只要善于纠正陈旧观念形成的误区，在新的直观下，便能欣赏更广阔世界中简洁一致的美。

测度是从 0 到无穷大的量度。在包含着正负无穷大的扩充实数里，它们间的四则运算除了规定 0 乘无穷大仍为 0 外，其他都与中学关于无穷大的知识一致，包括了无穷大减无穷大没有定义。在勒贝格积分中，函数和积分的值域都是定义在这扩充的实数上。不难想象和证明，对于非负可测函数，勒贝格积分都存在。可测函数可以分解成两个非负可测函数之差，所以只要它俩的积分不都是无穷大，可测函数的积分都存在，在应用上都有意义。注意勒贝格积分存在，包括了它的积分值可能是无穷大的情况，所以勒贝格积分通常都存在。而勒贝格

可积函数指的是积分值是有界的，显然，勒贝格可积等价于它是绝对可积的。

黎曼积分是定义在有界区间上有界函数的积分，这时勒贝格积分也有界，所以黎曼可积，勒贝格也是可积的。勒贝格积分定义在任何可测集上，包括可以黎曼积分的区间，和无界的全空间。黎曼积分要推广到无界的区间，它通常被定义为有界区间上积分的对称上下限无穷的扩展，在想象上比较直观，但这是个有疵瑕的形式扩展。例如，对于在 0 点从-1 到 1 的阶跃函数，广义黎曼积分值是 0，勒贝格积分不存在，对于周期函数也是如此。有些书上作为黎曼可积，勒贝格不可积的例子。但阶跃函数的广义黎曼积分，不满足平移不变性，若坐标向左或右平移一点，它的黎曼积分值就不同了。对周期函数如果黎曼积分的上下界不是对称地无穷扩展，它们的极限积分值也不一样。这用于描述物理世界，对应着测量的坐标变化和计算的方法不同，则意味着测算物理量的不同。所以对应于数学模型描述的对象，勒贝格不可积的结论正确地反映了这种不可计量的情况，广义黎曼积分则给出误导的答案。在推广到无穷的区域，广义的黎曼积分无论如何定义都有疵瑕。

黎曼积分最大的问题是，在与取极限、无穷级数、多重积分等运算的交换顺序，必须在很严格的条件下方为可行，这在应用上极不方便。实际上黎曼绝对可积的函数，在绝对值积分的范数下不是个完备的空间，这就像我们只在有理数域谈几何公式和代数应用，处处受到局限。从另一种观点来看，勒贝格积分可以定义为可积空间完备化的手段，它将函数绝对值黎曼积分为范数的计算方法更进，勒贝格可积函数是包含了黎曼可积函数的巴拿赫空间 L^1。【4】

为什么勒贝格积分会带来了这么多的便利？我们先用零测集牛刀小试。

黎曼积分在基本定义中假定被积的函数是连续的有界的，但应用中不一定都那么理想，可能有些间断点的“毛刺”，它的技术处理是分段来积分，然后将它们加起来，绕过这些疵点。在疵点是有限数目时，这样处理没有问题，但如果有无穷多个呢？

勒贝格积分告诉我们，如果这些疵点是零测集，把它们刨去换成任何数值，都不影响积分结果。黎曼积分和勒贝格积分如果同时存在，它们的数值必然相等。例如，Dirichlet 函数 D(x)，当 x 是有理数时为 1，无理数时为 0；它在 [0,1] 区间的勒贝格积分为 0，但不是黎曼可积的。我们知道可数个点集是零测集，有理数是可数的，所以是零测集，将这些点的函数值都置换成 0，便是恒为 0 的常数值函数，这时黎曼积分也是 0. 用这个方法“修理”黎曼积分中有疵瑕的函数，便得出黎曼积分的一个重要定理：

> *区间 [a,b] 上函数 f 是黎曼可积的，必须且只需 f 在 [a,b] 上的不连续点是零测集。*

在积分和概率计算中都可以忽略零测集，这引入了常见的一个数学术语“几乎处处”（almost everywhere），简记为“a.e.”。如果两个函数不相等点的集合是零测集，叫做它们是“几乎处处相等”，它们的勒贝格积分相等。因此可以用一个几乎处处相等“良好的”函数来替代它计算。一个函数除了有个零测集外

是有界的，叫做“几乎处处有界”。对积分的所有定理，可以把有界函数的条件换成“几乎处处有界”。闭区间上黎曼可积的函数，当且仅当是几乎处处连续的。

黎曼积分积分号里函数序列取极限，要在很强的条件下才能与积分号交换顺序。而“勒贝格控制收敛定理”说：在积分的集合上，只要它们的绝对值几乎处处不大于一个勒贝格可积函数，它们就几乎处处逐点收敛到一个函数，函数序列取极限就可以与勒贝格积分号交换顺序。

对于几乎处处一致有界的可测函数序列，勒贝格有界收敛定理给出更宽松的收敛要求，它只要这序列是按测度收敛就可以与积分号交换顺序了。什么是“按测度收敛”呢？就是说，这序列函数与其极限函数不同之处，将会趋于零测集。

对于 $\mathbb{R}^n$ 区间上勒贝格可积的函数，Fubini 定理说，它的积分等于任何顺序的多重积分，也就是说可以任意地交换积分顺序。

牛顿—莱布尼茨公式描述了微分与积分的关系。记 $F'(x) = f(x)$，有 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ，直观图像是，F 曲线划分成 n 段折线，计算折线 y 轴上的增量与 x 轴增量之比，其导函数是当 n 趋近无穷大时，这些比值的极限。对这个导函数的积分，可以看成逼近导函数的这些折线比值与 x 轴增量的乘积累加的极限，很明显它是这些折线在 y 轴增量之和，因此等于这曲线在 y 轴数值之差。

在黎曼积分里这个定理要求被积函数在 [a,b] 上是连续的，或说原函数是连续可微的。在勒贝格积分里，我们有：原函数 F 在 [a,b] 上是绝对连续的，等价于它是勒贝格可积函数 f 的不定积分，且有牛顿—莱布尼茨公式关系。F 几乎处处可导，其导数几乎处处等于 f。这结论要比黎曼积分强多了，也更靠近直观想象。

仔细读过这篇文章，必要时将你应用积分推导的公式后面加个“（L）”，表明这是勒贝格积分，那么它“几乎处处”会让你免除许多严格条件限制的烦恼，和数学上不严谨的责难。

勒贝格积分除了与黎曼积分同样应用在 $\mathbb{R}^n$ 上，且有更自由积分区域外，还通用于任何定义有测度的抽象集合，例如随机过程在概率空间上的积分。勒贝格积分极大地提高了你的数学武功，只是你想深入其中纵横自如，则要走出历史旧观念的局限，改练无穷世界的测度基本功。

【扩展阅读】

1. 维基百科，勒貝格積分 `http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8B%92%E8%B2%9D%E6%A0%BC%E7%A9%8D%E5%88%86`

2. 维基百科，维塔利集合`http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BB%B4%E5%A1%94%E5%88%A9%E9%9B%86%E5%90%88`

3. 维基百科，微积分基本定理`http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BE%AE%E7%A7%AF%E5%88%86%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E5%AE%9A%E7%90%86`

4. 关肇直等，张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979

9　重修微积分 9——泛函

算术是从一个或几个具体的数计算另一个数的学问，在这儿，数是已知和不变的。代数等式中有些数虽然未知，但其所指，仍是一个固定的数。在几百年前，只在几何中表示数量的对应，运动则代表着变化。几千年中的算术、几何和运动的研究，人们在三者间交叉借用形象来类比推理，直到 1694 年莱布尼茨终于用了函数这名词，抽象地表达变动的已知数到答案数之间，算法所对应的映射。其后近百年间，由约翰 • 伯努里和他的学生欧拉的推崇，最后到维尔斯特拉斯，确认了必须用函数的概念，把微积分建立在代数而不是几何的基础上。

函数，是我们从小学算术到中学要理解的第一个抽象概念，没过这坎的人，与数理绝缘，后面的课就不能理解了，对数学的认知停留在中世纪。初等微积分是在函数概念的基础上，对变动数极限运算的数学，牛顿称之为“流数术”，在有穷的世界窥测无穷的彼岸。近代分析建立在无穷空间的映射概念上，研究抽象空间结构和算子性质。由此俯视分析理论，能更抽象地构造数学模型，解决微分方程解和函数推广等等难题。理科生在这里，必须再过一个坎，走进抽象无穷的世界，才能理解现在的数学，而不是停留在二百年前的旧时光里。

算术的眼界局限在数域中。函数表达了数域中变量与映射值的对应关系。经典微积分用函数和极限的概念从数域，跨进实数和欧几里德空间。其运算都基于这个空间的性质。泛函分析将函数作为变量，研究它所在的空间和算子。在这里，一个函数也只看成集合上的一个点。

将讨论的对象抽象成集合中的点，点与点之间的相邻关系和点间运算对应关系，是集合上设定了的性质。数学的空间是定义有这些性质的集合，在这些设定条件下来讨论数学问题，而不再借助任何其他背景。在我们介绍过的空间里，由粗到精的包含关系顺序是：拓扑空间，T^2 空间，距离空间，赋范空间，巴拿赫空间，希尔伯特空间。这些空间都只是抽象的类，可在相应的各类里设定具体的拓扑、距离、范数或内积。L^2 和 l^2 空间，欧几里德空间，实数空间则是常见具体化的希尔伯特空间。初等微积分局限在实数空间和欧几里德空间里，泛函分析研究抽象的空间，特别是赋范空间、巴拿赫空间和希尔伯特空间的结构和线性运算性质。下面带你领略这里的风光。

两个距离空间中的映射称为算子。这篇只讨论赋范空间的线性算子。回顾一下赋范空间定义，它是线性空间，是以向量长度为范数导出了距离的距离空间。在这距离定义下，如果它对收敛还是完备的，则称为巴拿赫空间（Banach space）。大家熟悉的欧几里德空间 $\mathbb{R}^n$，是有穷维的巴拿赫空间，其线性算子在基底下表示为矩阵。无穷维巴拿赫空间中线性算子的研究，是泛函分析的中心内容。

在分析中，函数是数与数的对应关系，是实数或复数间的映射，泛函则是以函数为自变量，对应于实数或复数值的映射。一般地说，从距离空间到数域的映射称为泛函。数域也是赋范空间，所以线性泛函也是一种线性算子。

例 9.1: 函数的定积分是个线性泛函。下面 $L(f)$ 和 $K(f)$ 都定义了 $L^1[0,1]$ 空间上的一个泛函。(在 [0,1] 上绝对可积函数的空间上)

$$L(f)=\int_0^1 f(t)dt \quad \forall f\in L^1[0,1] \qquad K(f)=\int_0^1 f(t)e^{-t}dt \quad \forall f\in L^1[0,1] \tag{8}$$

先介绍线性泛函的一些性质，以此来揭示赋范空间、巴拿赫空间和希尔伯特空间的结构。

对线性算子 T，如果存在着一个正数 c，对其定义域上所有的点都有 $\|Tx\|\le c\|x\|$，称这个算子是有界的，这个 c 的下确界称为线性算子 **T** 的范数。对于线性算子，连续性与有界性是等价的。有界的算子总是把微小的变化映射成微小的差异，把有界的集合映射成有界的像。

泛函的连续性在应用上很重要，例如用一个收敛的函数序列来计算泛函作用下极限值，只有对连续泛函这样的逼近才有意义。欧几里德空间的线性泛函，可以表示成一个内积，它总是连续和有界的。但在赋范空间，并非所有的线性泛函都是有界或连续的。

例 9.2: 闭区间 [0,1] 上连续可微函数集合 $C^1[0,1]$，以 $\|x\|=\max_{0\le t\le 1}\|x(t)\|$ 为范数构成赋范空间。函数在 0 点的导数是这空间的一个线性泛函。它不是连续的。因为对函数序列 $x_n(t)=\frac{1}{n}\sin(nt), n\ge 1$，有 $\|x_n\|=\frac{1}{n}\to 0,\ n\to\infty$，即 $x_n\to 0$，但是 ${x_n}'=\cos(n0)=1,\ n\ge 1$，它并不趋于 0。所以它不是连续的，也不是有界的。

在某些线性距离空间，甚至没有非零的有界线性泛函。但是对赋范空间，我们却有足够多的有界线性泛函。

Hahn-Banach 延拓定理：如果赋范空间的线性子空间上，定义有一个有界线性泛函，那么可以把它延拓到全空间，延拓后的算子也是个有界线性泛函，在原来子空间的映射保持不变，而且它的范数与延拓前是一样的。

取 X 中任何一个非零点 x_0，它的数乘张成一维的线性子空间，在这子空间上定义一个有界线性泛函，使得 $f(x_0)=\|x_0\|$，应用这个定理，可以将它延拓到全空间，并且有 $\|f\|=1$，这说明对于任何一个赋范空间，都有不比它向量少的有界线性泛函。

记赋范空间 X 上所有的有界线性泛函的集合为 X^*，不难验证 X^* 在算子的范数下是一个巴拿赫空间。X^* 叫做 X 的对偶空间，也称为共轭空间。X^* 的对偶空间 X^{**}，自然也是个巴拿赫空间。那么 X^{**} 与 X 是什么关系？

对于 X 上的点 x，可以定义 X^* 上的泛函：$L_x(f)=\overline{f(x)},\ \forall f\in X^*$

显然，Lx 是线性的，而且 $\|Lx\|=\|x\|$，是有界的。这说明 X 到 X^{**} 间有个一一的，线性的，并且保持范数相等的映射，即 X 等价于 X^{**} 的一个线性子空间。如果这个映射还是满的，即 X 等价于 X^{**}，则称为 X 是自反的，记为 X=X^{**}，自反的赋范空间必定是个巴拿赫空间。

例 9.3：函数空间 $L^p[0,1], p>1$ 是自反的，它上面的线性泛函 $f(\cdot)$ 表示为

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt,\quad x\in L^p[0,1],\ y\in L^q[0,1],\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

它的对偶空间是 $L^q[0,1]$ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

自反巴拿赫空间与对偶空间互为有界线性泛函的关系，让我们联想起内积的关系。所以就用内积的符号来表示线性泛函，$f(x)=\langle x,f\rangle$，对它们间的线性性质与内积形式上完全一样，只不过这里左右矢量是在不同的空间。特别地，从线性算子范数的定义，有与内积完全相同的 Schwarz 不等式 $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|$

希尔伯特空间 H 是定义了内积，并以此导出范数的巴拿赫空间。由上面巴拿赫空间与对偶空间的内积表示，及 Schwarz 不等式，很自然地会猜测：H 空间的对偶空间是否是它自己？确实如此。H 中任何一点，都可以用内积定义 H 空间上的一个有界线性泛函，这说明 H 是 H* 的子集。**Riesz** 表现定理则证明，H 空间上，任何一个有界线性泛函 $f\in H^*$，都对应着空间中的一个点 $y\in H$，使得 $f(x)=\langle x,f\rangle,\forall x\in H$，而且 $\|f\|=\|y\|$，这说明 H^* 是 H 的子集。所以 $H=H^*$。

Hahn-Banach 延拓定理证明了每一个巴拿赫空间，它的有界线性泛函构成了它的对偶的巴拿赫空间，有界线性泛函算子间的作用可以用内积的式子来表示。Riesz 表现定理则肯定了希尔伯特空间的对偶空间就是它自己。Hahn-Banach 延拓定理可以放宽到，具有线性的距离空间附加上一些条件，泛函分析的教科书介绍这方面的内容。

距离空间中收敛的要求比较强，用泛函我们可以定义一种比较弱的“功能性”的收敛。

比如说，赋范空间 X 中的序列 (x_n) 收敛于 x_0，指 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|$

这有时称为强收敛，弱收敛则定义为这序列对所有的有界线性泛函都有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0),\ \ \forall f\in X^*$$

X^* 中序列 (f_n) 弱 * 收敛于 f_0，则是满足

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f_0(x),\ \ \forall x\in X$$

显然强收敛隐含着弱收敛，弱收敛未必能强收敛，下面是个例子。

例 9.4：希尔伯特 H 的任何正交归一基 e_n，不难从向量在这个基上分解的无穷序列和中得到，$\lim_{n\to\infty}\langle x,e_n\rangle=0,\ \forall x\in H$

由 Riesz 表现定理得知，这表明这基的序列弱收敛于 0，但是所有基向量的范数都是 1，所以它不可能强收敛于 0.

【扩展阅读】

1. 关肇直等，张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979

2. 程代展，系统与控制中的近代数学基础，北京：清华大学出版社，2007
`http://product.dangdang.com/9350967.html`

10 重修微积分 10——算子

算术是从给定条件和已知数，得出符合条件数值，计算的学问。算法用给定的条件，构造性地定义了从已知数到得数的映射。算术所在的数域仅仅是抽象空间包含的一个实例。近代分析把抽象空间作为给定条件，定义在空间的映射称为算子，研究它们的一般性质。

例如，迭代算法是用相同的子算法，把得数作为下次计算的已知数，一次次地迭代计算来逼近结果的计算方法。抽象空间里的压缩映像是能够应用于这类计算的算法。

距离空间 $(X\ d)$ 具有如下性质的映射称为压缩映像 $T: X \to X,\ \ d(Tx, Ty) \leq ad(x,y),\ a \in (0,1), \forall x, y \in X$。这里的 $d(x,y)$ 是 x 和 y 间的距离，如差值的绝对值及范数等等。应用压缩映像不断地迭代计算，能够逼近至多一个不动点。巴拿赫不动点原理说，压缩映像 T 在完备距离空间 X 中，有唯一的不动点 x，即 $Tx = x$. 有了压缩映像 T，在 X 中任取一点 x_0，令 $x_{n+1} = Tx_n, n = 0, 1\cdots$，它将收敛于一个不动点 x. 重要的原理都是简单和直观的。这个定理在分析中是个强有力的工具，以此可以证明空间和流形上的各种的反函数定理，它不仅可用来定性地证明常微分方程解的存在和唯一性，而且是解方程迭代算法的基础。

压缩映像是个算子，可以是线性也可以是非线性的。但在分析中，研究最多并最富有成果的是无穷维空间的线性算子。

为什么要研究无穷维空间的线性算子呢？因为物理的动态系统从初始状态开始的变化，微分方程由状态函数映射成微分关系和边界条件，工程系统由输入转变成输出，都可以看成一个算子作用在函数空间进行变换。出自叠加原理应用和近似的简化，这些算子也多是线性的。微分和积分作为算子是线性的，它们与其他因子组合而成的算子，例如傅立叶变换，拉普拉斯变化等积分变换，线性常微分方程，数理方程，这些数学工具都是无穷空间的线性算子。

数学上，代数关心的是集合中元素在运算映射下的性质。分析则研究这些代数运算在无穷空间中变动极限的性质。这就要考虑集合所在空间的拓扑性质，和了解在这些代数运算角度下空间的结构。上一篇，我们用有界线性泛函的内积形式，揭示了巴拿赫空间以及希尔伯特空间的对偶关系。这里要介绍线性算子的基本性质。

请注意，空间的线性，是集合中的元素对线性运算封闭，例如连续函数集合是线性空间，因为连续函数的数乘和相加仍然是连续函数。而算子的线性，则是算子的映射对空间上的线性运算保持不变的关系，即线性组合的映像等于组合中元素映像的线性组合，例如积分是在闭区间连续函数空间上的线性算子，线性常微分方程的系数可以是非线性的函数。线性算子必须作用在线性空间上，而线性空间上的算子可以是非线性的。

复习一下这里要用到的几个空间的概念。距离空间在集合任意两点中定义有距离，以此定义开球和邻域，生成空间的拓扑。赋范空间是线性空间，是以向

量长度为范数导出了距离的距离空间。在这距离定义下，如果它对收敛还是完备的，则称为巴拿赫空间（Banach space）。希尔伯特空间是定义有内积的巴拿赫空间。这篇谈定义在赋范空间上的线性算子。线性代数课程讨论问题在欧几里德空间，它是有穷维的巴拿赫空间 $\mathbb{R}^n$，其线性算子在基底下表示为矩阵，它只是局限在有穷维的表现，我们对比地来介绍一般的线性算子。

上篇说过，对线性算子 T，如果存在着一个正数 c，对其定义域上所有的点都有 $\|Tx\| \leq c\|x\|$，则这个算子是有界的。这个 c 的下确界称为线性算子 T 的范数。

欧几里德空间上的线性算子都是连续的和有界的，这在巴拿赫空间未必成立。

例 10.1: 闭区间 [0,1] 上连续函数集合 C[0,1]，以 $\|x\|_\infty = \max_{0\leq t\leq 1}|x(t)|$ 为范数构成巴拿赫空间。定义在 C[0,1] 到 C[0,1] 的微分算子 D，是这空间上的线性算子，它的定义域是在 C[0,1] 中所有连续可微函数构成的线性子空间。D 不是有界的。因为函数序列$x_n(t)|x_n(t) = e^{-nt}, n \geq 1$ 在 C[0,1] 中，有 $\|xn\|_\infty = 1$，不难推出它是个有界的集合（这集合中任何两点的距离都小于 2），但是 $Dx_n(t) = \frac{d}{dt}x_n(t) = -nx_n(t)$ 的集合，却是 C[0,1] 中的无界集。算子 D 将有界的集合映射成无界的像，所以它是无界的算子。

线性算子是否有界，还取决于映射所在空间的拓扑。微分算子 D 定义在另一范数的空间，可以是有界的。

例 10.2:连续函数集合 $C[0,1]$ 以范数 $\|x\|_\infty$,构成巴拿赫空间。记函数 x 的导数为 x',连续可微函数集合 $C^1[0,1]$ 的范数定义为 $\|x\|1 = \|x\|_\infty + \|x\ \|_i nfty$，它也是个巴拿赫空间。

微分算子 D 也是 $C^1[0,1]$ 空间到 $C[0,1]$ 上的线性算子，有

$$\|Dx\|_\infty = \|x\ \|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|x\ \|_\infty = \|x\|_1, \forall x \in C^1[0,1]$$

这说明 $C^1[0,1]$ 空间中有界的集合，在算子 D 映射下在 $C[0,1]$ 上仍然是有界的，所以它是这空间里有界的算子。

尽管赋范空间中线性算子不一定是有界的，但有界性和连续性却是等价的，甚至只要在某一点上连续，它们就有了全体的连续性和有界性。

在欧几里德空间，线性算子 T，用下面的内积式子，可以定义它的对偶算子 T^*，

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall y \in \mathbb{R}^m \tag{9}$$

用矩阵表示，T^* 是 T 的共轭转置矩阵。对于赋范空间，我们也对线性算子用相同的方法定义其对偶算子。不过从空间 X 到 Y 的算子不一定对全空间都有定义，例如在微分算子 T 在连续函数空间 $C[0,1]$，只对其中连续可微的函数有定义。上述的定义只限在各自的定义域里。

算子 T 的定义域记为 $D(T)$。如果 $D(T)$ 是稠集，即空间 X 中任何一个点，都可以表示为 $D(T)$ 中点序列的极限，T 则称为是稠定的。赋范空间 X 到巴拿

赫空间 Y 上的有界线性算子，如果是稠定的，它可以唯一地（按连续性）延拓到整个空间，成为定义在 X 上的有界算子，且算子的范数与原来的相等。

如果 T 的值域充满了 Y 的全空间，则称为是满的。如果 $D(T)$ 中的序列 (x_n) 当 $x_n \to x\, Tx_n \to y$，有 x 也在 $D(T)$ 中，$Tx = y$，则称 T 是闭的。闭算子定义域中所有的点 x 与对应像 Tx 的组合 (x, Tx)，在 $X \times Y$ 空间中是个闭集。

如果 T 是两个希尔伯特空间中的线性算子，T 是稠定的则 T^* 是闭的，如果 T 还是闭的，则 T^* 也是稠定的，而且有 $T^{**} = T$。

欧几里德空间上的线性算子，可以表达成矩阵 A，其范数 $\|A\|$ 是它与共轭转置矩阵相乘 A'A 最大特征值的开平方值，它们的全体也是个欧几里德空间。相应的，赋范空间 X 到巴拿赫空间 Y 上的有界线性算子，所有这些有界线性算子 $L(X, Y)$，在算子的范数下也是巴拿赫空间。

微分方程可以看成算子 T 作用在线性距离空间的点上，等于另一空间的点（函数，初始或边界条件），例如 Tu = v。应用算子理论研究微分方程，解的存在性对应着算子 T 有右逆，解的唯一性对应着算子 T 有左逆，所以 T 的逆算子存在意味着解的存在和唯一性。解的稳定性说，当参数、边界或初始条件变化很小时，解也应该变化很小，这对应着逆算子的连续性即有界性。在未知是否有逆时，稳定性的要求表达成算子的开映像性质，而微分方程解对初值一致连续性则表达成算子族的一致有界性。

这些问题，对于巴拿赫空间 X 到 Y 的线性算子 T，都已经有了很好的答案。

开映像定理：如果 T 是闭的和满的，对于任意小的 $\epsilon > 0$，有相应的 $\delta > 0$，使得

$$\forall y \in Y,\ \|y\| < \delta \Rightarrow \exists x \in D(T),\ \|x\| < \epsilon,\ y = Tx \tag{10}$$

简言之，开集的像是开的。

巴拿赫逆算子定理：如果 T 是闭的，满的，一一对应的，则它的逆算子存在且是有界的。

闭图像定理：如果 T 是闭的，定义域是 X 全空间，则 T 是有界的。

共鸣定理：如果一族有界线性算子在 X 上是逐点有界的，那它们也是一致有界的。

上述这几个是泛函分析中线性算子的基本定理。它们都还有在更广泛的线性距离空间，附加上一些条件的版本。有兴趣请看泛函分析的教科书。

线性算子的这些性质，让线性微分方程成为描述世界强有力的工具。在这种线性描述下，逆算子的存在，证明了一切的变化都可以由已知的原理、参数、边界和初始条件唯一地确定；逆算子的连续性保证了一切的误差都是可以无限地消减。这个关于无穷过程线性数学利器的成功应用，让人们相信世界是确定性的，无穷可分的，差不多是线性的，几乎忘记了为了能够应用这个利器，曾经省却了一些细节，作过了一些假设，即使非线性的研究也只往这方向靠，忽略本

质不同难以想象的部分，直至非线性动力系统以混沌、分叉、孤立子突兀在眼前，打破了幻想，在数学上揭示了系统上不确定的机制。

三百多年前，微积分以函数为阶梯从无穷小分析的思路，把人们带进了想象中的无穷世界。由线性联系着微观机制和宏观的表现，线性系统的叠加原理所惠，让它成为研究动态和连续系统最强有力的工具。短短的三百年时间，研究函数科学的分析，成为数学最大的分支。在这无穷可分几乎是线性的世界里，数学分析是撰写自然律法的笔墨文书，是从事理工研究必不可少的工具。我们对世界的认知，其实是符号的象征和想象的产物，数学工具极大地影响着研究者对事物构造的想象和规律的理解，进而推及大众。计算机的出现，将可能改变世界的图像，影响着数学研究方向和对世界的认知。世界也许将回到有穷分立的结构，非线性将是主流，复杂和不确定系统或成为富饶的主题。但无论怎么改变，数学都是人们用逻辑来及远的工具，指使计算机的方向，描绘世界的画笔。现在的计算机在科研中，还基本是分析计算的工具，图像表达的机器和记忆搜索的助手。人们还未找到代替叠加原理超越线性，组合分立研究结果的方法，还在等待着一个革命性的思想，来指引怎样用计算机来描述，理解和控制我们的世界。在这之前，数学分析仍然统治着物理和工程的世界，理科生还离不开这时代战士必备的这个武器。

【扩展阅读】

1. 关肇直等，张恭庆，冯德兴，线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979

2. 程代展，系统与控制中的近代数学基础，北京：清华大学出版社，2007 `http://product.dangdang.com/9350967.html`