数值分析第一次大作业

2018010734 自 92 魏子卜

一、 双线性插值

1、数学推导

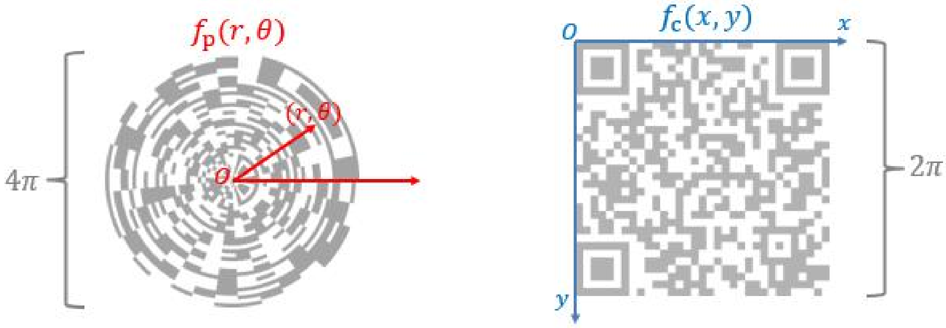
$$f_{\mathrm{p}}(r,\theta)=f_{\mathrm{c}}(x(r,\ \theta),\ y(r,\ \theta))，其中x(r,\theta)=r,\ y(r,\theta)=\theta$$

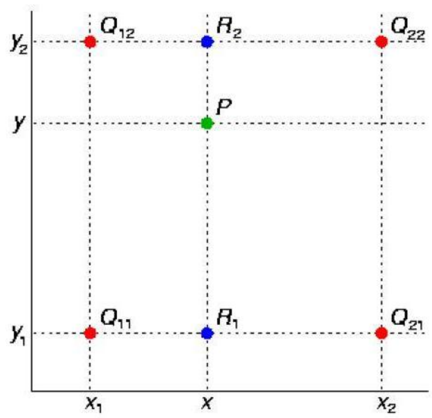
圆形二维码中（x’、y’分别为正方形二维码的横纵坐标）

$$\mathrm{x}=2\pi+\mathrm{x}'\mathrm{cosy}'$$

$$\mathrm{y}=2\pi+\mathrm{x}'\mathrm{siny}'$$

映射到左图后，取(x,y)周围的四个整数点(x_1,y_1)、(x_1,y_2)、(x_2,y_1)、(x_2,y_2)，进行插值。





$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})&=(\mathrm{x}_2-x)(y_2-y)f(x_1,y_1)+(\mathrm{x}_2-x)(y-y_1)f(x_1,y_2)\\&\quad+(x-\mathrm{x}_1)(y_2-y)f(x_2,y_1)+(x-\mathrm{x}_1)(y-y_1)f(x_2,y_2)\end{aligned}$$

2、误差分析

根据二维码的像素值，$h=\frac{4\pi}{2013}$，有$x_2=x_1+h$，$y_2=y_1+h$。

方法误差：

分别在 x、y 方向上计算方法误差

$$\mathrm{R_x}=\frac{1}{2!}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|max|(x-x_1)(x_2-x)|=\frac{h^2}{8}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$$

$$\mathrm{R_y}=\frac{1}{2!}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|max|(y-y_1)(y_2-y)|=\frac{h^2}{8}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|$$

进行直角坐标系和极坐标系的坐标变换

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}-\frac{2sin\theta cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}+\frac{2sin\theta cos\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\sin^2\theta+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{2sin\theta cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}-\frac{2sin\theta cos\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

设$max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right|=max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right|=M$，$max\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|=max\left|\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|=max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\right|=M'$

则有

$$\mathrm{R[f]}=\mathrm{R_x}+R_y=\frac{h^2}{8}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|+\frac{h^2}{8}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|\le\frac{h^2}{4}(2\mathrm{M}+\mathrm{M'})$$

舍入误差：

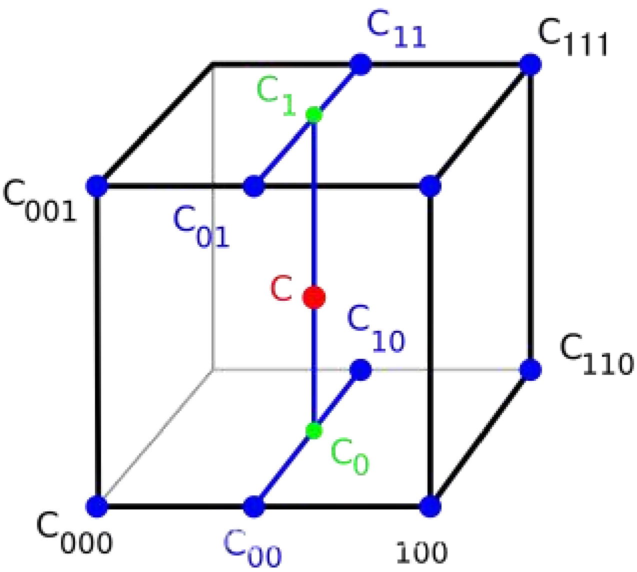
计算像素会进行取整，因此舍入误差为 0.5。

综上，总误差为$\frac{h^2}{4}\left(2\mathrm{M}+\mathrm{M'}\right)+0.5$。

3、作图结果

二、　三线性插值

1、数学推导



$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) =\ & \\
& (x_2-x)(y_2-y)(z_2-z)f(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_1) \\
& + (x_2-x)(y_2-y)(z-z_1)f(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_2) + \\
& (x_2-x)(y-y_1)(z_2-z)f(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{z}_1) \\
& + (x_2-x)(y-y_1)(z-z_1)f(\mathrm{x}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{z}_2) + \\
& (x-x_1)(y_2-y)(z_2-z)f(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_1) \\
& + (x-x_1)(y_2-y)(z-z_1)f(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_1,\mathrm{z}_2) + \\
& (x-x_1)(y-y_1)(z_2-z)f(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2,\mathrm{z}_1) \\
& + (x-x_1)(y-y_1)(z-z_1)f(\mathrm{x}_2,\mathrm{y}_2,\mathrm{z}_2)
\end{aligned}
$$

在每个立方体中，给定 x、y 可以令插值表达式为零解出 z，把(x,y,z)

作为表面点。

当z_1、z_2为一正一负时，可以使用下式解得 z。

$$z=\frac{z_2 f(x_1,y_1,z_1)-z_1 f(x_1,y_1,z_2)}{f(x_1,y_1,z_1)-f(x_1,y_1,z_2)}$$

使用上述方法，可以解出 1422 个表面点。同理，给定 x、z 令插值表达式为零解出 y，得到 1430 个表面点。给定 y、z 令插值表达式为零解出 x，得到 2030 个表面点。最终共得到 4882 个分布均匀的表面点，使用点云重建出表面。

2、误差分析

方法误差

分别在 x、y、z 三个方向上计算方法误差，$h=\frac{6}{100}=0.06$，$x_2=x_1+h$，$y_2=y_1+h$，$z_2=z_1+h$。

$$R_x=\frac{1}{2!}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|max|(x-x_1)(x_2-x)|$$

$$=\frac{h^2}{8}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|=4.5\times 10^{-4}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$$

$$R_y=\frac{1}{2!}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|max|(y-y_1)(y_2-y)|$$

$$=\frac{h^2}{8}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|=4.5\times 10^{-4}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|$$

$$R_z=\frac{1}{2!}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|max|(z-z_1)(z_2-z)|$$

$$=\frac{h^2}{8}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|=4.5\times 10^{-4}max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|$$

设$max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|=max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|=max\left|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|=M$

则有

$$R[f]=R_x+R_y+R_z=1.35\times 10^{-3}M$$

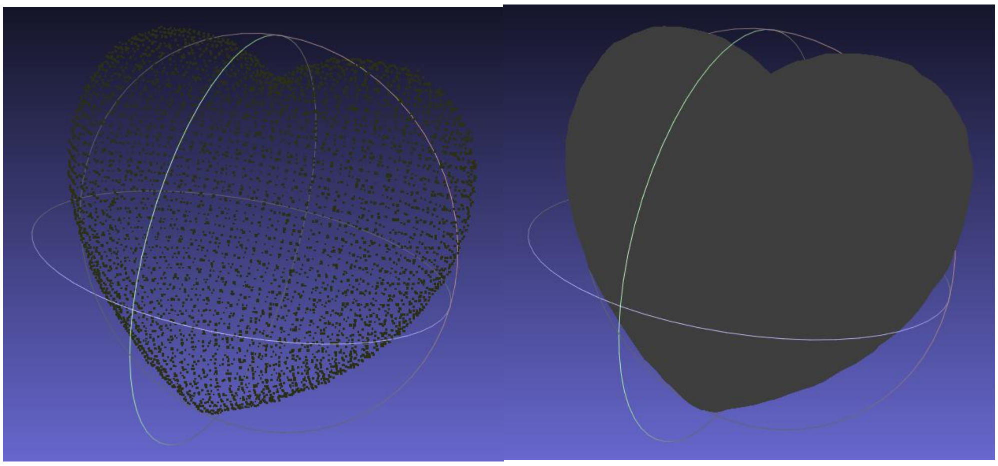
舍入误差

python 浮点数提供 17 位有效数字的精度，其运算精度相对方法误差可以忽略不记。

综上，总误差为 $1.35\times10^{-3}M$。

3、作图结果

插值得到的点云在 processed_sdf.ply 中，重建得到的表面在 reconstruction.ply 中，可见重建效果很好。



三、 最小二乘法

1、数学推导

已知上一题中的 SDF 所对应的表面的点满足

$$(2\mathrm{x}^2+y^2+z^2-1)^3+ax^2z^3+by^2z^3=0$$

将上式改写为

$$\mathrm{a}\phi_1+b\phi_2=\mathrm{Y}$$

其中

$$\phi_1=x^2z^3$$

$$\phi_2=y^2z^3$$

$$\mathrm{Y}=-(2\mathrm{x}^2+y^2+z^2-1)^3$$

最小二乘法

$$[a,b]^{T} = \left([\phi_1,\phi_2][\phi_1,\phi_2]^{T}\right)^{-1}[\phi_1,\phi_2]Y^{T}$$

解得

$$a =- 0.088$$

$$b =- 1.00$$

因此，表面方程为

$$(2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - 0.088x^2z^3 - by^2z^3 = 0$$

四、 总结

这次大作业帮助我复习了插值的基本知识和误差的分析方法，并且锻炼了 python 的代码能力，收获非常大。同时在完成作业的过程中，对图象处理，点云重建等新知识有了更多了解，感到数值分析非常有趣，十分感谢老师和助教精心设计的作业题目以及耐心的答疑，期待下次大作业能做得更好。