数值分析大作业 2

2018010734 自 92 魏子卜

1、 求解—数值法解微分方程

(1) 根据 Lambert W function 的定义，证明

$$\mathbf{W}'(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{W}(\boldsymbol{z})}}, \boldsymbol{z} \neq -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}}$$

证明：

根据定义，Lambert W 函数是一个多值函数，是 $\mathrm{f(w) = we^{w}}$ 的反函数。

令 $\mathrm{z = f(w)}$ $(f(w) \neq 0)$

则有

$$\mathrm{W}'(\mathrm{z}) = \frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{we^{w} + e^{w}}$$

由于 $\mathrm{z = f(w)}$，W 是 $\mathrm{f(w) = we^{w}}$ 的反函数，所以有 $W(z) = w$，因此有

$$\mathrm{W}'(\mathrm{z}) = \frac{1}{z + e^{W(z)}}$$

当 $f'(w) = 0$ 时，得到 $\mathrm{w} = -1$，即 $z = -\frac{1}{e}$。

综上可得

$$\mathrm{W}'(\mathrm{z}) = \frac{1}{z + e^{W(z)}}, z \neq -\frac{1}{e}$$

得证。

(2) 任意给定 $\mathbf{z} > \mathbf{0}$，根据上面的结果和初始条件 $\mathbf{W_0(0) = 0}$，利用微分方程的数值解法，以任意精度求解 $\mathbf{W_0(\boldsymbol{z})}$，需要同时考虑方法误差和舍入误差。

使用改进欧拉法。

$$\overline{y_{n+1}} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

方法误差

$$\overline{\Delta_{\mathrm{n+1}}} \leq (1 + hM)\Delta_n + \frac{\mathrm{L}}{2}h^2$$

$$\Delta_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{1}{2}h^2M^2\right)\Delta_n + \left(\frac{LM}{4} + \frac{T}{12}\right)h^3$$

其中$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \le M$，$|y^{(2)}(x)| \le L$，$|y^{(3)}(x)| \le T$。

调整为

$$\Delta_{n+1} + \frac{(T+3LM)h^2}{12M+6hM^2} \le \left(1 + hM + \frac{1}{2}h^2M^2\right)\left(\Delta_n + \frac{(T+3LM)h^2}{12M+6hM^2}\right)$$

递推并整理得

$$\Delta_{n+1} \le (1 + hM + \frac{1}{2}h^2M^2)^{n+1}\left(\Delta_0 + \frac{(T+3LM)h^2}{12M+6hM^2}\right) - \frac{(T+3LM)h^2}{12M+6hM^2}$$

舍入误差

$$\overline{\delta_{n+1}} \le (1+hM)\delta_n + \frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

$$\delta_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{1}{2}h^2M^2\right)\delta_n + \left(1 + \frac{hM}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times 10^{-m}$$

调整为

$$\delta_{n+1} + \frac{10^{-m}}{2hM} \le \left(1 + hM + \frac{1}{2}h^2M^2\right)\left(\delta_n + \frac{10^{-m}}{2hM}\right)$$

递推并整理得

$$\delta_{n+1} \le \left(1 + hM + \frac{1}{2}h^2M^2\right)^{n+1}\left(\delta_0 + \frac{10^{-m}}{2hM}\right) - \frac{10^{-m}}{2hM}$$

求解 M、L、T。

$$M = \max\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \max\left|\frac{\partial (e^w+z)^{-1}}{\partial w}\right| = \max|\frac{e^w}{(e^w+z)^2}| \le 1$$

$$L = \max\left|y^{(2)}(x)\right| = \max\left|-\frac{1+W'(z)e^{W(z)}}{\left(z+e^{W(z)}\right)^2}\right| = \max|\frac{z+2e^{W(z)}}{\left(z+e^{W(z)}\right)^3}| \le 2$$

$$T = \max\left|y^{(3)}(x)\right| = \max|\frac{2z+5e^{W(z)}+zW'(z)e^{W(z)}+4W'(z)e^{2W(z)}}{\left(z+e^{W(z)}\right)^4}| \le 9$$

综上，取 $M=1$，$L=2$，$T=9$。

于是，方法误差和舍入误差调整为

$$\Delta_{n+1} \le (1 + h + \frac{1}{2}h^2)^{n+1}\left(\Delta_0 + \frac{5h^2}{4+2h}\right) - \frac{5h^2}{4+2h}$$

$$\delta_{n+1} \le \left(1 + h + \frac{1}{2}h^2\right)^{n+1}\left(\delta_0 + \frac{10^{-m}}{2h}\right) - \frac{10^{-m}}{2h}$$

设精度为 t，则总误差为$\frac{1}{2}\times 10^{-t}$，方法误差和舍入误差分别满足

$$\Delta_{\mathrm{n}+1}\leq \frac{1}{4}\times 10^{-t}$$
$$\delta_{\mathrm{n}+1}\leq \frac{1}{4}\times 10^{-t}$$

在具体的求解过程中，首先根据$\Delta_{\mathrm{n}+1}\leq \frac{1}{4}\times 10^{-t}$确定 n，再由$\delta_{\mathrm{n}+1}\leq \frac{1}{4}\times 10^{-t}$确定 m。最终计算的精确到小数点后六位的结果是

$$\mathrm{W}_0(2)=0.852606$$

2、 求解定积分

(1) 给定$\mathbf{a}>\mathbf{0}$，以任意精度求解

$$\int_0^a \boldsymbol{W_0(z)dz}$$

查阅资料可知解析表达式为

$$\int W(z)dz = z\left(W(z)-1+\frac{1}{W(z)}\right)+C$$

设$H(x)=x(W(x)-1+\frac{1}{W(x)})$

因此有

$$\int_0^a W_0(z)dz = H(a)-H(0) = a(W(a)-1+\frac{1}{W(a)})-1$$

将上式改写为

$$y=H(a)=a\left(x-1+\frac{1}{x}\right)$$

则舍入误差为

$$\Delta y\leq max\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right||\Delta x| = a\times max\,(1-\frac{1}{x^2})|\Delta x|$$

于是

$$|\Delta x| = \frac{\Delta y}{a\times max\,(1-\frac{1}{x^2})}$$

根据函数曲线，当 a 增大时，$x=W(a)$增大，Δy增大。

具体的求解过程如下。首先大致解一个$W(a)$的结果，并以此得到

$|\Delta W(a)|$的精度要求。

如 $a = 1$ 时，有

$$W(1) = 0.567143$$

$$|\Delta W(1)| \leq \frac{0.5 \times 10^{-t}}{1 \times \left|1 - \frac{1}{W^2(1)}\right|} = 2 \times 10^{-7}$$

根据此精度要求解出新的$W(1) = 0.567143$，并计算$H(1)$精确到小数点后六位的结果

$$H(1) = 1.330366$$

因此

$$\int_0^1 W_0(z)dz = H(1) - H(0) = 0.330366$$

(2) 给定$\mathbf{a > 0}$，以任意精度求解

$$\int_0^a \sqrt{W_0(z)}dz$$

· 定理

若$f(x)$在$[a,b]$严格单调且连续，$f^{-1}(x)$在$[f(a),f(b)]$或$[f(b),f(a)]$可积，则有

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a)$$

令$y(z) = \sqrt{W_0(z)}$，则有$z = y^2 e^{y^2}$。于是将原函数的积分转化为其反函数的积分，即

$$I = \int_0^a y(z)dz = ay(a) - \int_0^{y(a)} y^2 e^{y^2} dy$$

令$f(y) = y^2 e^{y^2}$，使用复化辛普森公式计算积分。

$$\int_0^{y(a)} y^2 e^{y^2} dy = \frac{h}{6}\left[f(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(y_k) + 4\sum_{k=0}^{n-1} f\left(y_k + \frac{h}{2}\right) + f\big(y(a)\big)\right]$$

方法误差

复化辛普森公式的方法误差为

$$R[f] = -\frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

即

$$|R[f]| \le \frac{(b-a)h^4}{2880} max\left|f^{(4)}(\xi)\right|$$

其中

$$f^{(4)}(x) = (16x^6 + 112x^4 + 156x^2 + 24)e^{x^2}$$

$f^{(4)}(x)$在$[0,a]$上单调递增。

因此有

$$\begin{aligned} |R[f]| &\le \frac{(b-a)h^4}{2880} max\left|f^{(4)}(\xi)\right| \\ &= \frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(b) \\ &= \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\sqrt{W_0(a)}) \end{aligned}$$

舍入误差

$$I = \int_0^a y(z)dz = ay(a) - \int_0^{y(a)} y^2 e^{y^2} dy$$

$$|\Delta I| = \max\left|a\frac{\partial y}{\partial w}\right||\Delta w| + \max\left|\mathrm{y}^2(\mathrm{a})\mathrm{e}^{y^2(a)}\frac{\partial y}{\partial w}\right||\Delta \mathrm{w}|$$

将$\frac{\partial y}{\partial w} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$代入上式，得到前一项误差

$$\left|a\frac{\partial y}{\partial w}\right||\Delta w| = \left|\frac{a}{2\sqrt{w}}\right||\Delta w| = \left|\frac{a}{2b}\right||\Delta W_0(a)|$$

此外，后一项误差为

$$\Delta \mathrm{f}(\mathrm{y}) \le \max\left|f^{'}(y)\right||\Delta \mathrm{y}| = \left|(2y + 2y^3)e^{y^2}\right||\Delta \mathrm{y}|$$

于是令 $\mathrm{M} = \max|(2y + 2y^3)e^{y^2}|$

同时，后一项的积分上界也存在误差，影响$\Delta h \le \frac{\Delta\sqrt{W_0(a)}}{n}$

因此有

$$|\Delta \mathrm{y_k}| \le |\mathrm{k}||\Delta \mathrm{h}|$$
$$|\Delta(\mathrm{y_k} + \frac{h}{2})| \le |\mathrm{k} + \frac{1}{2}||\Delta \mathrm{h}|$$

根据上述分析和假设，计算辛普森公式累积舍入误差

$$\begin{aligned} |\Delta_n| &\le \frac{h}{6}\left(2\sum_{k=1}^{n-1} Mk|\Delta h| + 4\sum_{k=0}^{n-1} M\left(k + \frac{1}{2}\right)|\Delta h| + nM|\Delta h|\right) \\ &= \frac{h}{6} \times 3n^2 M|\Delta h| = \frac{bM}{2}\Delta\sqrt{W_0(a)} \le \frac{M}{4}\Delta W_0(a) \end{aligned}$$

将前一项与后一项的舍入误差相加，得到总舍入误差

$$|\Delta_n| = \left|\frac{a}{2b}\right| |\Delta W_0(a)| + \frac{M}{4}\Delta W_0(a)$$

综上，得到方法误差和舍入误差

$$|R[f]| \le \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\sqrt{W_0(a)}) \le \frac{1}{4} \times 10^{-t}$$

$$|\Delta_n| \le \left|\frac{a}{2b}\right| |\Delta W_0(a)| + \frac{M}{4}\Delta W_0(a) \le \frac{1}{4} \times 10^{-t}$$

通过方法误差的表达式得到 n，通过舍入误差的表达式求解所需的 $\sqrt{W_0(a)}$精度，最后得到积分的计算结果。

计算得到 n 取 18，即 $h = 0.0418382869$。需要保留的精度为 7。使用第一问得到满足精度要求的$W_0(a) = 0.56714329$，最后计算得到数值积分的结果

$$\int_0^1 \sqrt{W_0(z)}dz = 0.550832$$

3、 总结

在这次数值分析大作业中，我们学习了一个没有解析表达式，但具有广泛应用的 Lambert W 函数，求解了相应的数值解。在第一问中使用改进欧拉法求解微分方程，在第三问中使用辛普森公式求解反函数的数值积分，进行了误差分析，使用 gmpy2 库实现了任意精度的求解。这次大作业是对后半学期理论课程所学内容的良好补充，我收获非常大。