GUANGCHUN

computer vision, graphics, mathematics, and programming

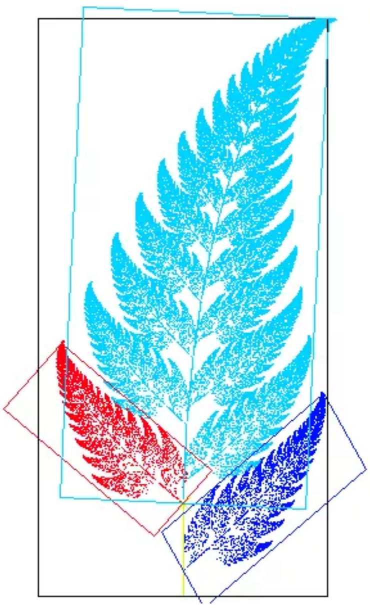
- Home
- 记录
- 收藏
- Tasks
-

Type text to search here...

Home > 计算机图形学 > 仿射变换与齐次坐标

仿射变换与齐次坐标

October 12, 2011 gccheng Leave a comment Go to comments



仿射变换（Affine Transformation）和齐次坐标系（Homogeneous Coordinate)是计算机图形学中经常碰到的基本概念。这篇文章主要讲述什么是仿射变换和齐次坐标系，以及在图形系统中为什么要是用它们。不求全面，只为自己学习理解。

仿射变换其实是另外两种简单变换的叠加：一个是线性变换，一个是平移变换。统一平移变换和线性变换的一种变换我们起了个名字叫“仿射变换”。这个新的变换就不再单纯的是两个线性空间的映射了，而是变成了两个仿射空间的映射关系。为了更好地理解仿射变换，首先就要知道线性变换以及它的不足。在未说明的情况下，下面使用的是卡迪尔坐标系。

所谓线性变换是指两个线性空间的映射，一个变换$\mathcal{L}:\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B}$是线性变换，必须满足两个条件，也就是我们经常说的线性条件：

$$L(u+v)=L(u)+L(v) \qquad \text{additivity}$$

$$L(\alpha u)=alpha L(u) \qquad \text{homogeneity}$$

举个例子说明一下。建设L是一个二维绕原点旋转变换，u和v是旋转角度。我们知道“一次性旋转$u+v$度”和“先旋转u度再旋转v读”达到的效果是一样的；同样地，“一次性旋转αu度”和“旋转α次u度”也是一张的。

线性变换可以用矩阵来表示。假设$p=(x,y)^T$是二维空间中的点，T是一线性变换，那么存在一个矩阵A，使得$p'=(x',y')^T=T(p)=Ap$。上面的旋转变换R，以及缩放S变换都有相应的变换矩阵

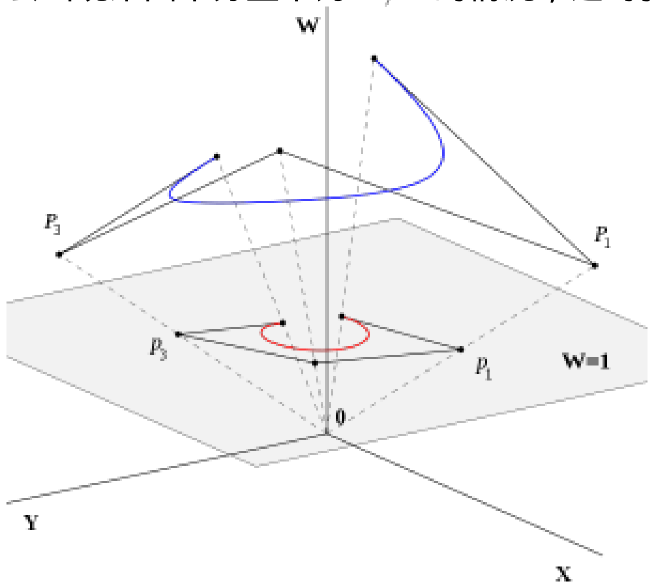
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R(p) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S(p) = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

但是在卡迪尔坐标系中，平移变换却不能用矩阵来表示。一个平移变换T具有如下的形式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T(p) = I \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

我们可以很容易地验证，平移变换T是不能写成两个矩阵乘积形式的。使用[齐次坐标系]很好的解决了这个问题(可能还有其它的原因)。齐次坐标系统其实是用高维坐标来表示一个低维的点，就好比我们用（x,1)来表示一个长度值一样，其实用一个x就可以了，但是用高一维的表示，在有的时候会带来便利。一个N维的卡迪尔坐标系中的一个点$p=(x_1,x_2,...,x_N)$，在齐次坐标系中有无数的N+1维点与之对应，这些点可以描述为$p_H=(\omega x_1,\omega x_2,...,\omega x_N,\omega)$，$\omega$取不同的值，我们变得到齐次坐标系中不同的点。当把这些点映射到$\omega=1$平面（不改变x_i之间比例），我们又降维得到对应的卡迪尔坐标系中的点。在OpenGL中我们是用$(x,y,z,1)$($\omega=1$)来表示一点三维的点，显然这个点与卡迪尔坐标系中的点(x,y,z)是一一对应的。在计算的过程中，会出现第四个分量不为$\omega\neq 1$的情况，这时我们也总是同除以ω使齐次坐标正规



化。 现在回来让我们看看使用齐次坐标时，对应的线性变换是什么形式。假设$p=(x,y,1)^T$是二维点对应的齐次坐标，与上面使用卡迪尔坐标系类似，我们可以得到相应的线性变换如旋转变换R和缩放变换S的矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = R(p) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = S(p) = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

容易验证,(x', y')的值并没有变化。**但是使用齐次坐标后，平移操作便也可以使用矩阵来表示了**（如下），平移量出现在变换矩阵的最右侧。

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

最后，我们给出仿射变换稍微正式点的定义。一个仿射变换**T**，可以表示成一个线性变换**A**后平移**t**：**T**(**p**)=**Ap**+**t**，其中**p**是待变换的点齐次坐标表示。**T**可以表示成如下的形式：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_1 1 & a_1 2 & a_1 3 & t_1 \\ a_2 1 & a_2 2 & a_2 3 & t_2 \\ a_3 1 & a32 & a33 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中，$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 1 & a_1 2 & a_1 3 \\ a_2 1 & a_2 2 & a_2 3 \\ a_3 1 & a32 & a33 \end{bmatrix}$表示线性变换；$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$表示平移变换；右下角的数字可以进行整体缩放，当为1时，表示不进行整体缩放。

仿射变换之所以重要，另一个重要的原因是仿射变换后不改变点的共线/共面性，而且还保持比例，这对图形系统尤其重要。例如，根据这个性质，如果我们要变换一个三角形，只需要对三个定点v1,v2,v3进行变换T就可以了，对于原先边v1v2上的点，变换后一定还在边后T(v1)T(v2)上。

总结一下，仿射变换是线性变换后进行平移变换（其实也是齐次空间的线性变换），使用齐次坐标使得仿射变换可以以统一的矩阵形式进行表示。