Homework 1

1、 x^4系数为 2

x^3系数为-1（此处部分同学答案为 1，注意排列 2134 逆序数为 1）

2、 对于行列式中 0 较多的情况，可以考虑直接用定义。

$$\boldsymbol{D} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}$$

其中p_1, p_2, p_3, p_4, p_5为1，2，3，4，5的任意排列，在$\boldsymbol{D}$中位于后三行后三列的元素为零，而在前两行前两列中，取不同行不同列的元素最多只有四个，就是说每一项至少有一个来自后三行后三列，故$\boldsymbol{D} = 0$.

5、（3）第 2 列为 0，则$\boldsymbol{D} = 0$

（4）$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 30$

6、将第$2n$行依次与前一行交换，换至第 2 行，交换$2n-1$次。同理，将第$2n$列交换至第 2 列，交换$2n-1$次，此时

$$\boldsymbol{D}_{2n} = \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x & \dots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & y & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = (x^2 - y^2)\boldsymbol{D}_{2(n-1)}$$

$$\therefore \boldsymbol{D}_{2n} = (x^2 - y^2)^n$$

例1. 求 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$, $b_1b_2\cdots b_n \neq 0$

解：$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - r_1 (i=2,3,\cdots,n+1)} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$

$\xlongequal{c_1 + \frac{c_{i+1}}{b_i} (i=1,2,\cdots,n)} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i} & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1b_2\cdots b_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$

证明 $D_n = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 \\ & a^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix} = (n+1)a^n$

分析：$D_n = 2a\cdot(-1)^{1+1}\cdot D_{n-1} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot a^2\cdot(-1)^{1+1}D_{n-2}$

$= 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2}$

欲证 $D_n = (n+1)a^n$

(1) 验证 $n=1,2$ 时

$D_1 = 2a \quad D_2 = 3a^2$ 成立

(2) 设 $n<k$ 时成立

(3) 当 $n=k$ 时，

$D_k = 2a\cdot D_{k-1} - a^2D_{k-2} = 2a\cdot(k-1+1)a^{k-1} - a^2(k-2+1)a^{k-2}$

$= 2ka^k - (k-1)a^k$

$= (k+1)a^k$