Realimentação de estado

- Introdução
- Conceitos básicos
- Controlabilidade
- Alocação de pólos
- Observabilidade

Introdução: Observador

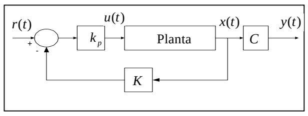
- **A realimentação de estado envolve a medição de todo o vetor de estado, o que nem sempre é possível ou viável economicamente.**
- **A solução é estimar o estado a partir da saída medida.**
- **Utiliza-se o vetor de ganhos calculado como se o estado fosse de fato medido.**
- **Substitui-se o estado pelo estado estimado, multiplicado pelo vetor de ganhos para fechar a malha.**

Estimativa do estado: Observador

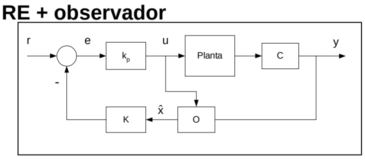
- **O "estimador" de estados foi chamado de observador por Luenberger, o primeiro a apresentar o conceito.**
- **Por esse motivo também é chamado de observador de Luenberger.**
- **A idéia é estimar o vetor de estado a partir do conhecimento da entrada (*u*) e da saída (*y*) da planta.**
- **Para isso utiliza-se o modelo conhecido da planta.**
- **O conceito de observabilidade estabelece a condição para que exista solução para o problema.**

Realimentação incluindo o observador

- **DB realimentação de estado**

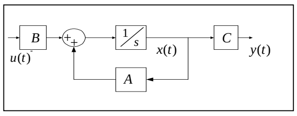


- **DB RE + observador**

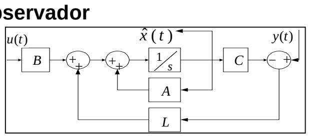


Realimentação incluindo o observador

- **Planta**



- **Observador**



Definição matemática

- **Considerando a planta e o observador**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$
$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

- **Definindo-se o erro**

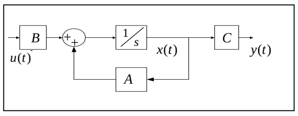
$$\tilde{x}(t) = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}$$
$$\tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0 \Rightarrow \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{(A-LC)t}$$

- **Comportamento do erro depende de autovalores de (A-LC)**

Realimentação incluindo o observador

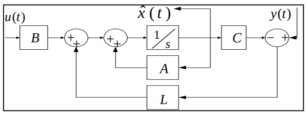
- **Planta**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$



- **Observador**

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$



Considerações

- **Apesar do erro inicial, o erro tende a zero para um vetor *L* bem selecionado.**
- **O vetor *L* deve assegurar a posição dos autovalores da matriz *A-LC* no semi-plano esquerdo do plano complexo para que o erro tenda a zero.**
- **O observador deve ser mais rápido do que a planta, para permitir bom desempenho**
- **Regra prática: 4 vezes mais afastado do eixo real do que a planta.**

Observabilidade

Uma planta linear é dita completamente observável ou simplesmente observável se o seu estado inicial *x(t₀)* pode ser determinado para uma condição de entrada nula, unicamente a partir do conhecimento de sua saída desde o instante t_0 até o instante considerado, posterior a t_0.

É equivalente a dizer que qualquer transição de estado afeta a saída da planta, ou, ainda, se para alguma variável de estado ocorrer uma variação que não traga conseqüências na saída, essa variável de estado é dita não observável.

Definição matemática

- **Considerando o problema dual**

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

$$\dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T v(t)$$
$$n = B^T z$$
$$v = -L^T z$$

- **Este é equivalente a uma realimentação de estado com autovalores de** $A^T - C^T L^T$

Pois:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$
$$u = k_p(r - Kx)$$

$$\dot{x} = Ax + Bk_p(r - Kx)$$
$$\dot{x} = (A - k_p BK)x + k_p Br$$

Definição matemática

- **Se D não for nula, pode-se mostrar que**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$x(t=0) = x_0$$
$$u = r - K\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} + Dr - DK\hat{x})$$
$$\hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

- **Definindo-se o erro**

$$\tilde{x}(t) = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC - LDK)\tilde{x} + LDr$$
$$\tilde{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0 \Rightarrow \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 e^{(A-LC)t}$$

Matriz de observabilidade

A observabilidade vai depender da controlabilidade do problema dual do observador

A matriz de controlabilidade é definida por:

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

e, para o problema dual fica:

$$M = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & A^{2^T} C^T & \cdots & A^{n-1^T} C^T \end{bmatrix}$$

Matriz de observabilidade

Teorema

A planta descrita pela equação de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

é dita observável se e só se o determinante da matriz de observabilidade definida como

$$O^T = \left[C^T \quad A^T C^T \quad A^{2^T} C^T \quad \cdots \quad A^{n-1^T} C^T \right]$$

for não nulo.

(MATLAB: comando obsv(A,C))

Projetando um observador

Se a planta é observável **existe solução para um observador. Como o conceito é dual em relação à controlabilidade, utiliza-se o mesmo comando do MATLAB,**

$$L = place(A', C', polos)';$$

onde indicam-se os pólos desejados para o observador.

Dinâmica final

- **O modelo de estado do sistema incluindo a realimentação de estado e a definição do erro pode ser escrito como**

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \Leftarrow \quad u = r - K\hat{x}$$

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} + BKx - BKx + Br \quad \Leftarrow \quad \tilde{x} = x - \hat{x}$$

$$\dot{x} = (A - BK)x + BK\tilde{x} + Br$$

Dinâmica final usando estado e erro

- **O modelo de estado do sistema de malha fechada incluindo a realimentação de estado e o observador pode ser escrito como**

$$\dot{x} = (A - BK)x + BK\tilde{x} + Br$$ Realimentação de estado

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$ Observador

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ LD \end{bmatrix} r$$

Equaçaõ de saída usando estado e erro

- **Equação de saída**

$$y(t) = Cx(t) + Du \quad \Leftarrow \quad u = r - K\hat{x}$$

$$y(t) = Cx(t) + D(r - K\hat{x})$$

$$y(t) = Cx(t) + Dr - DK\hat{x} + DKx - DKx$$

$$y(t) = (C - DK)x(t) + DK\tilde{x} + Dr$$

$$y(t) = \left[C - DK \quad DK \right] \begin{Bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{Bmatrix} + Dr$$

Pólos malha fechada

- **Os pólos de malha fechada podem ser obtidos pelo determinante de *A***

$$\det(A) = 0 \qquad A = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda I - A - BK & BK \\ 0 & \lambda I - A - LC \end{vmatrix} = 0$$

$$\left| \lambda I - A - BK \right| \left| \lambda I - A - LC \right| = 0 \quad \Leftarrow$$ princípio da separação

Princípio da separação

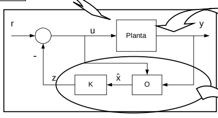
- **O princípio da separação afirma que pode-se projetar separadamente a realimentação como se o vetor de estado estivesse de fato disponível para medição e em seguida projetar o observador. Os pólos resultantes de malha fechada de ambos os módulos serão independentes uns dos outros.**
- **Note que a ordem do sistema agora será dobrada, porque foi incluída a dinâmica do observador, da mesma ordem da planta.**
- **Por isso esse tipo de observador é chamado de ordem completa. Pode-se projetar observadores de ordem reduzida, aproveitando as medições de saída como parte do vetor de estado.**

Malha fechada com estado e estado estimado

- **Seja a equação de realimentação, o modelo de estado da planta e do observador**

$$u = r - K\hat{x}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Dr + DK\hat{x})$$
$$z = K\hat{x}$$

Modelo de Malha fechada

- **Pode-se rescrever o modelo de estado da planta em função de** r **e** $\hat{x}$

$$u = r - K\hat{x}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} + Br$$
$$y = Cx + Du$$

Modelo de Malha fechada

- **Pode-se rescrever o modelo de estado do observador em função de** r **e** $\hat{x}$

$$u = r - K\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} - Dr + DK\hat{x})$$
$$z = K\hat{x}$$

$$y = Cx + Du$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC + LDK)\hat{x} - LDr + Ly + Br$$
$$z = K\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC + LDK)\hat{x} - LDr + LCx + LDr - LDK\hat{x} + Br$$
$$z = K\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC)\hat{x} + LCx + Br$$
$$z = K\hat{x}$$

Equação de saída usando estado e estado estimado

- **Equação de saída**

$$y(t) = Cx(t) + Du \quad \Leftarrow \quad u = r - K\hat{x}$$

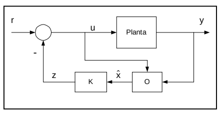
$$y(t) = Cx(t) + D(r - K\hat{x})$$

$$y(t) = Cx(t) + Dr - DK\hat{x}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & -DK \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \hat{x} \end{Bmatrix} + Dr$$

Modelo de estado Malha fechada

- **Portanto o modelo de estado pode ser obtido juntando os modelos de estado da planta e do observador**

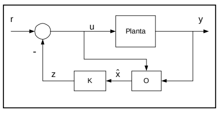


$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \hat{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B \\ B \end{Bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & -DK \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \hat{x} \end{Bmatrix}$$

Modelo de estado Malha fechada

- **Modelo de estado malha fechada**



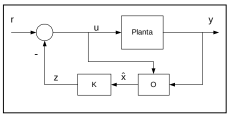
$$A_k = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix}$$
$$B_k = \begin{Bmatrix} B \\ B \end{Bmatrix}$$
$$C_k = \begin{bmatrix} C & -DK \end{bmatrix}$$
$$D_k = 0$$

Modelo do controlador-observador(Heq)

- **Considerando o observador com r=0 (regulador)**

$$\boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x} + DK\hat{x})} \Leftarrow \boxed{u = -K\hat{x}}$$

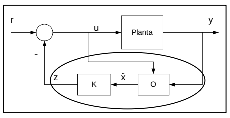
$$\boxed{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} - BK\hat{x} + Ly - LC\hat{x} + LDK\hat{x}}$$



$$\boxed{\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC + LDK)\hat{x} + Ly}$$
$$\boxed{z = K\hat{x}}$$

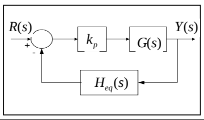
Modelo de estado Heq

- **Considerando o modelo de estado do controlador + observador para r=0**



$$\boxed{\dot{\hat{x}} = (A - BK - LC + LDK)\hat{x} + Ly}$$
$$\boxed{z = K\hat{x}}$$

- **Comparando-se obtém-se o modelo de estado Heq**



$$\boxed{Ah = A - BK - LC + LDK}$$
$$\boxed{Bh = L}$$
$$\boxed{Ch = K}$$
$$\boxed{Dh = 0}$$

Exercício 24.1: Controle de um helicóptero

Para o helicóptero cujo modelo está abaixo, projete um controlador de estado com pólos localizados em -1±j e –2. Analise o desempenho do controlador.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & -0.01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1.4 & 9.8 & -0.02 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 6.3 \\ 0 \\ 9.8 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Obs: Modelo no plano, com vetor de estado composto da variação do "pitch", ângulo do "pitch" da fuselagem e velocidade horizontal. Notar que é um sistema instável. O controle é feito pelo "manche"

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \\ v \end{Bmatrix}$$

Exercício 24.2: Controle  com observador

Para o mesmo helicóptero, projete um controlador de estado com observador e analise o desempenho.

```
clear all
close all
%   Planta
a=[-0.4  0 -0.01
     1     0    0
     -1.4 9.8 -0.02];
b=[ 6.3
      0
     9.8];
c=[0 0 1];
d=0;
sg=ss(a,b,c,d);
```

```
%     Projeto do controlador
m=ctrb(a,b);
disp('Det da controlabilidade : ')
det(m), pause
pcon=[-1-j -1+j  -2];
disp('Vetor de ganhos : ')
k=place(a,b,pcon)
```

```
        %    Projeto do observador
ob=obsv(a,c);
disp('Det da observabilidade : ')
det(ob), pause
pobs=[-4 -3-3*j -3+3*j];
disp('Vetor de ganhos do observador: ')
l=place(a',c',pobs)';
```


Exercício 24.2: Análise do projeto

- Função de transferência da planta
- Função de transferência do controlador
- Função de transferência de malha aberta (HG)
- Lugar das raízes da malha aberta (HG)
- Margens da malha aberta (HG)
- Função de transferência de malha fechada
- Pólos e zeros da planta
- Pólos e zeros do controlador
- Pólos e zeros de malha aberta
- Pólos e zeros de malha fechada
- Análise de desempenho

Exercício 24.3: Proposto

Para a planta cujo modelo de estado está abaixo, determine o vetor de ganhos para que o sistema de malha fechada possua um PSS não maior que 10% e um tempo de estabilização a 2% de 4 segundos.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Usar o seguinte código

- **Programa em MATLAB (parcial)**

```
x=[-10:0.1:-zeta*wn];y=(sqrt(1-zeta^2)/zeta)*x;
xc=[-10:0.1:-zeta*wn];yc=sqrt(wn^2-xc.^2);
plot(x,y,':',x,-y,':',xc,yc,':',xc,-yc,':')
```

Observar que é necessário definir os valores do fator de amortecimento e da freqüência natural.