OBSERVADORES DE ESTADO

1. Motivação

- Um controlador por realimentação de estados necessita que todos os estados do sistema sejam conhecidos a todo instante de tempo.
- Frequentemente nem todos os estados do sistema estão disponíveis.
- Usualmente somente as saídas do sistema são conhecidas e, assim, somente as saídas estão disponíveis para realimentação.
- **O que fazer para solucionar esse problema?**

  Utilizar um modelo do sistema para estimar os estados pro meio das saídas do sistema.

  - Estimativa do vetor de estados $\mathbf{x}(t) \to \hat{\mathbf{x}}(t)$
  - Controle é alterado de $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ para $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$
- **Questões:**
  1) Como calcular a estimativa do vetor de estados?
  2) Esse esquema frunciona?

2. Problema do observador de estados

- Dado o modelo do sistema LIT de ordem n,

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1}$$

  - Dinâmica do modelo não é exatamente igual á realidade $\Rightarrow$ matrizes $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ e $\hat{\mathbf{D}}$ do modelo são conhecidas mas apresentam erros em relação à dinâmica do sistema real, ou seja, em relação às matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$.
  - Vetor de entradas $\mathbf{u}(t)$ é conhecido.
  - Vetor de saídas $\mathbf{y}(t)$ são medidos
  - Vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ é desconhecido para $t \geq 0$.
- **Objetivo** $\Rightarrow$ desenvolver um sistema dinâmico cujo vetor de estados, $\hat{\mathbf{x}}(t)$, é conhecido e igual ao vetor $\mathbf{x}(t)$ para todo tempo $t \geq 0$.

- Existem duas abordagens:
  1) Observador em malha aberta.
  2) Observador em malha fechada.

3. Observador em malha aberta

- Como se conhece o modelo do sistema, ou seja, as matrizes $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ e $\hat{\mathbf{D}}$ $\Rightarrow$ pode-se simular o sistema usando o modelo em paralelo com o sistema real.

- Usando a equação dos estados do modelo

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \tag{2}$$

  - Nesse caso tem-se que $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ para todo $t \geq 0$ desde que a condição inicial do vetor de estados, $\mathbf{x}(0)$, seja conhecida e que as matrizes $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ e $\hat{\mathbf{D}}$ do modelo sejam iguais às matrizes do sistema real **A**, **B**, **C** e **D**.

  - Um esquema do observador em malha aberta é mostrado na Figura 1.

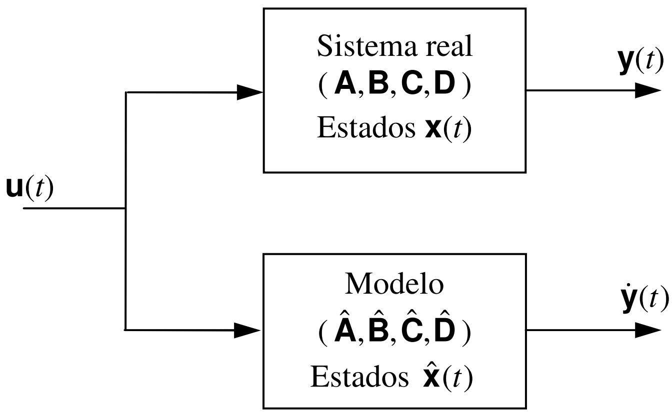

Figura 1. Esquema do observador em malha aberta mostrando também o sistema real.

- **Problemas**
  - Não se conhece a condição inicial $\mathbf{x}(0)$
  - O modelo apresenta erros e não é igual ao sistema real.

- **Análise**
  - Uma análise do desempenho do observador em malha aberta pode ser realizada analisando as equações de estado do sistema e do modelo.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & (3) \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) & (4) \end{cases}$$

- Erro de estimação dos estados:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)} \tag{5}$$

Deseja-se que $\tilde{\mathbf{x}}(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.

- A dinâmica do erro de estimação dos estados é obtida subtraindo a eq. (4) da eq. (3)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \left(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t)\right) + \left(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}\right)\mathbf{u}(t) \tag{6}$$

- Assumindo que os erros entre as matrizes $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}$ e $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ são desprezíveis, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right) \Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) \tag{7}$$

A solução dessa equação é dada por:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{\mathbf{A}t}\tilde{\mathbf{x}}(0)} \tag{8}$$

- **Se $\mathbf{x}(0)$ for conhecido então $\tilde{\mathbf{x}}(0) = 0$ $\Rightarrow$ isso garante que $\tilde{\mathbf{x}}(t) = 0$, para todo $t \geq 0$ $\Rightarrow$ situação não realista;**

- **Situação mais realista $\Rightarrow$ se $\mathbf{x}(0)$ não é conhecido então $\tilde{\mathbf{x}}(0) \neq 0$ $\Rightarrow$ assim, somente se os pólos da matriz $\mathbf{A}$ forem estáveis é possível garantir que $\tilde{\mathbf{x}}(t) \to 0$, para $t \to \infty$.**

➢ Conclusão:

- Observador em malha aberta depende da dinâmica do sistema.
- Observador em malha aberta não funciona direito.

4. <u>Observador em malha fechada</u>

➢ Uma forma óbvia de resolver o problema do observador em malha aberta é usar a informação disponível dos sensores (saídas $\mathbf{y}(t)$).

➢ Definindo o erro de estimação das saídas do sistema:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)} \tag{9}$$

Como $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ e $\hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t)$, então:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \left(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t)\right) + \left(\mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}\right)\mathbf{u}(t) \tag{10}$$

Assumnido que o erro entre as matrizes $\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}$ e as matrizes $\mathbf{C,D}$ é desprezível.

$$\boxed{\tilde{\mathbf{y}}(t) \cong \mathbf{C}\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right) \cong \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}(t)} \tag{11}$$

- O erro de estimação das saídas pode ser realimentado na dinâmica do modelo do sistema para melhorar a estimativa do vetor de estados.

- **Dinâmica do observador de estados em malha fechada:**

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\tilde{\mathbf{y}}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases}} \tag{12}$$

onde $\mathbf{L}$ é a **matriz de ganhos do observador**.

- Dimensão da matriz $\mathbf{L} \Rightarrow n\text{x}p$, onde n é a ordem do sistema e p é o número de saídas.

- Um esquema do observador em malha fechada é mostrado na Figura 2 e um diagrama de blocos representando a estrutura do observador é mostrado na Figura 3.

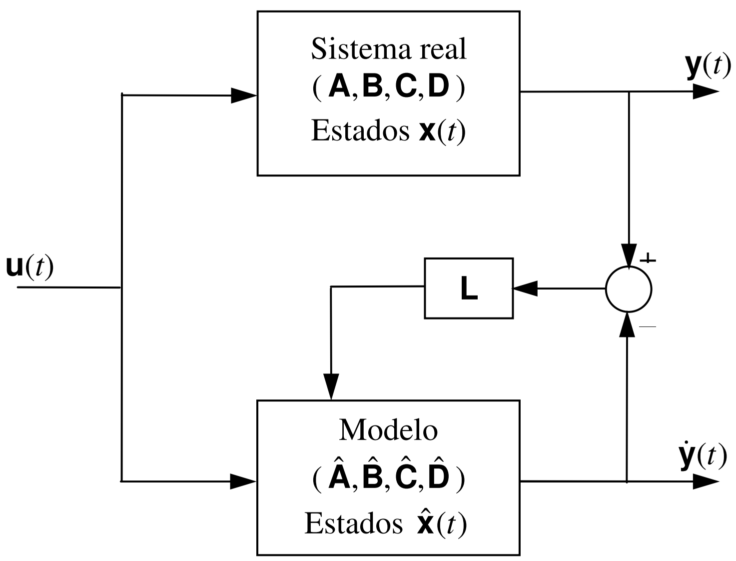

Figura 2. Esquema do observador em malha aberta mostrando também o sistema real.

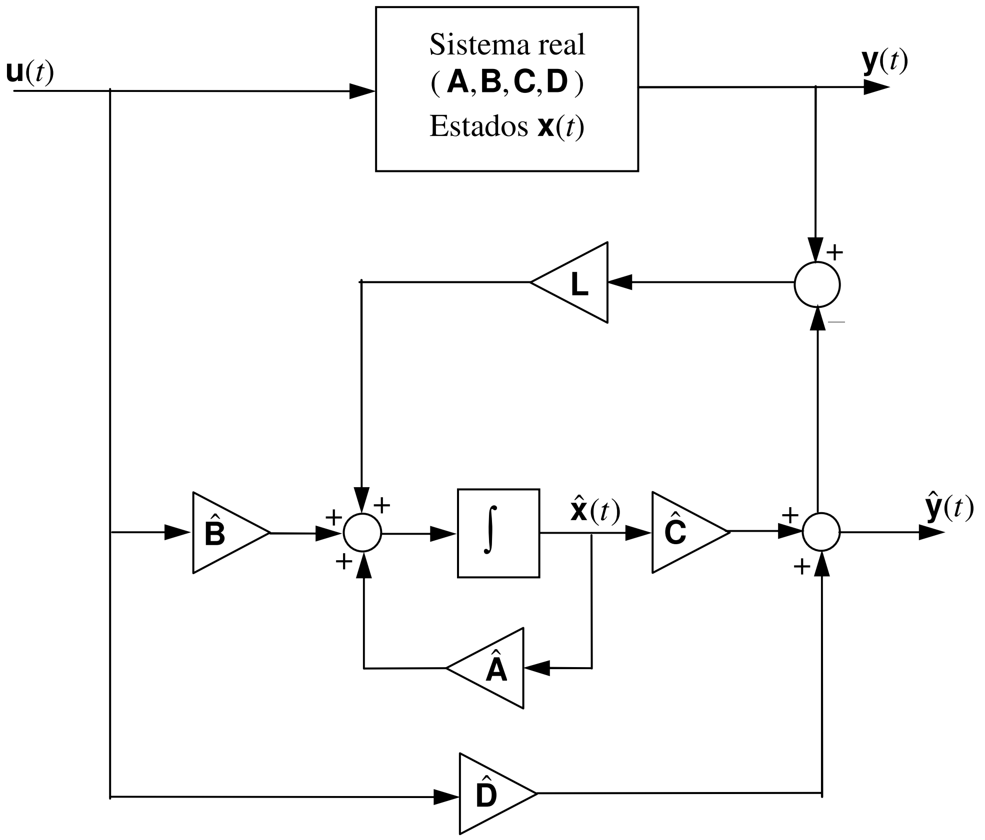

Figura 3. Diagrma de blocos da estrutura do observador de estados em malha fechada.

- A dinâmica do erro de estimação dos estados é obtida subtraindo a equação dos estados do modelo (eq. 12) da equação de estados do sistema real (eq. 3).

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \left(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t)\right) + \left(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}\right)\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\left(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)\right) \tag{13}$$

Substituindo as saídas do sistema real e do modelo pelas suas respectivas equações em função dos estados e das entradas,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \left(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t)\right) + \left(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}\right)\mathbf{u}(t) - \mathbf{L}\left(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t)\right) \tag{14}$$

ou

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \left(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t)\right) + \left(\mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}}\right)\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\left(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\right) - \mathbf{L}\left(\mathbf{D}\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t)\right) \tag{15}$$

Assumindo que os erros entre as matrizes do modelo ($\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{C}}$) e as matrizes do sistema real ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$) são desprezíveis, tem-se:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right) - \mathbf{L}\mathbf{C}\left(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\right) \tag{16}$$

Rearranjando, finalmente tem-se a equação da dinâmica do erro de estimação dos estados:

$$\boxed{\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A_{mf}}\tilde{\mathbf{x}}(t)} \tag{17}$$

Onde $\mathbf{A_{mf}}$ é a matriz da malha fechada do observador de estados.

➢ **Observações:**

- Pode selecionar a matriz $\mathbf{L}$ de forma a melhorar a dinâmica do observador em malha fechada.
- Para se projetar um observador de estados em malha fechada o sistema tem que ser observável.

➢ **Similaridade entre os problemas do observador de estados e o regulador de estados:**

- Regulador ⇒ $\mathbf{A_{mf}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$ → Matriz de ganhos $\mathbf{K}$ é escolhida para que os pólos do sistema em malha fechada sejam os desejados.
- Observador ⇒ $\mathbf{A_{mf}} = \mathbf{A} - \mathbf{LC}$ → Matriz de ganhos $\mathbf{L}$ é escolhida para que os pólos do observador em malha fechada sejam os desejados.
- Os problemas do regulador e do observador de estados são **duais** ⇒ ou seja, são idênticos.

5. Cálculo dos ganhos do observador em malha fechada

➢ Se o sistema definido pelas matrizes ($\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$) for observável ⇒ pólos da matriz do observador em malha fechada ($\mathbf{A} - \mathbf{LC}$) podem ser localizados onde forem desejados.

➢ O método utilizado para calcula a mtriz de ganhos do observador ($\mathbf{L}$) é o mesmo utilizado para calcular os ganhos de um regulador de estados.

➢ Pólos da matriz ($\mathbf{A} - \mathbf{LC}$) e $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})^t$ são iguais.

- $(\mathbf{A} - \mathbf{LC})^t = \mathbf{A}^t - \mathbf{C}^t\mathbf{L}^t$
- Comparando a matriz $(\mathbf{A}^t - \mathbf{C}^t\mathbf{L}^t)$ com a matriz em malha fechada do regulador ($\mathbf{A} - \mathbf{BK}$) ⇒ percebe-se que ambas tem a mesma estrutura.
- Por analogia tem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^t \\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}^t \\ \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}^t \end{cases}$$

- Calcular a matriz de ganhos $\mathbf{L}^t$ para o sistema definido pela matriz $\mathbf{A}^t$ representa o mesmo tipo de problema que calcular a matriz de ganhos de um regulador de estados ($\mathbf{K}$).

- **Para calcular a matriz $\mathbf{L}^t$ usam-se os mesmos métodos utilizados para calcular a matriz de ganhos do regulador, mas:**

$$\begin{cases} \text{No lugar der } \mathbf{A} \text{ usa-se } \mathbf{A}^t \\ \text{No lugar de } \mathbf{B} \text{ usa-se } \mathbf{C}^t \\ \text{No lugar de calcular } \mathbf{K} \text{ calcula-se } \mathbf{L}_t \end{cases}$$

- No Matlab pode-se usar as funções *place* ou *acker*.

Localização dos pólos do observador:

- A pergunta que surge naturalmente é **onde se deve localizar os pólos do observador** de estados?

- **Pólos do observador devem ser mais rápidos do que os pólos do regulador de estados ⇒ cerca de 2 a 3 vezes mais rápidos ⇒ parte real dos pólos do observador em malha fechada deve ser 2 a 3 vezes maior do a parte real dos pólos do regulador de estados.**

- Não existe problema de saturação no observador nem de excitação de dinâmicas de alta frequência ⇒observador somente existe dentro do computador.

- Medidas de sensores tem ruídos ⇒ cuidado deve ser tomado ao usar as medidas dos sensores para estimar os estados do sistema.

- Ao se escolher os pólos do observador deve-se considerar:
  - **Pólos** muito **rápidos** (observador com ganhos “altos”) tendem a **acentuar o efeito dos ruídos de medidas** ⇒ estados tendem a seguir as medidas que sempre apresentam ruídos.
  - **Pólos lentos** (observador com ganhos “baixos”) ⇒ estimativas dos **estados** tendem a **seguir o modelo da planta**.
  - Quanto **menor o ganho** do observador ⇒ observador tende a malha aberta e aumenta a tendência de **ignorar as medidas dos sensores**.

- **Observador de estados ótimo ⇒ Filtro de Kalman**
  - Balanceia os efeitos dos ruídos de medidas dos sensores e os erros do modelo.

- Se forem conhecidos os erros de medidas e do modelo ⇒ melhor usar o Filtro de Kalman.

Observações:

1) Os ganhos do observador de estados estabilizam somente o erro de estimação ⇒ se o sistema for instável, então, os estados do sistema tendem a infinito, mas o erro de estimação tenderá a zero.

2) Existem muitas aplicações de estimação de estados além de sistemas de controle ⇒ previsão de mercado financeiro, sensores inteligentes, previsão de consumo de energia etc.

3) Mais detalhes sobre observadores de estado e teoria de estimação exige o conhecimento de processos estocásticos e teoria de otimização.

4) Estimação depende do que se confia mais ⇒ nas medidas dos sensores ou no modelo do sistema.

6. Exemplos

Exemplo 1: Projeto de observador usando método algébrico (caso SISO).

- Dado o sistema SISO:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \end{cases}.$$

- Primeiro deve-se verificar a observabilidade do sistema, assim:

$$\mathbf{M_O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathbf{M_O}) = 2 \Rightarrow \text{sistema é observável.}$$

- Pólos do sistema (autovalores da matriz $\mathbf{A}$):

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -1 & \lambda+2 \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2) - 1 = \lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -0{,}38; \\ \lambda_2 = -2{,}62. \end{cases}$$

⇒ Observa-se que o sistema é estável.

- Observador em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{Ly}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

- Matriz da malha fechada do observador:

$$\mathbf{A_{mf}} = \mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A_{mf}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-l_1 & 1 \\ 1-l_2 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Equação característica da matriz da malha fechada do observador:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A_{mf}}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 + l_1 & -1 \\ -1 + l_2 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = (\lambda + 1 + l_1)(\lambda + 2) - 1 + l_2 = 0$$

assim,

$$\lambda^2 + (3 + l_1)\lambda + (1 + 2l_1 + l_2) = 0$$

Nota-se que pela escolha dos ganhos do observador, l_1 e l_2, pode-se alocar os dois pólos do observador em qualquer posição no plano *s*, como no caso do regulador de estados.

- Escolhendo os pólos da malha fechada em $\lambda_1 = -5$ e $\lambda_2 = -6$, a equação característica desejada para om observador em malha fechada é dada por:

$$(\lambda + 5)(\lambda + 6) = \lambda^2 + 11\lambda + 30 = 0\,.$$

Comparando a equação característica desejada com a equação característica em função dos ganhos do observador, tem-se:

$$\begin{cases} 3 + l_1 = 11 \\ 1 + 2l_1 + l_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = 8 \\ l_2 = 13 \end{cases}.$$

- A matriz da malha fechada fica $\Rightarrow$ $\mathbf{A_{mf}} = \begin{bmatrix} -1-l_1 & 1 \\ 1-l_2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -12 & -2 \end{bmatrix}.$

<u>Exemplo 2:</u> Fórmula de Ackerman.

- Dado o mesmo sistema do exemplo anterior.

- Nesse caso deve-se utilizar as matrizes $\mathbf{A}^t$, $\mathbf{C}^t$ e $\mathbf{M}_O^t$ no lugar das matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{M_C}$ na fórmula de Ackerman.

- Usando os mesmos pólos desejados para o observador do exemplo anterior, tem-se:

$$p(s) = s^2 + 11s + 30 \Rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{A}^t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^2 + 11\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + 30\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 11 \\ 11 & -22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$

- Aplicando a Fórmula de Ackerman usando-se a matriz de observabilidade no lugar da matriz de controlabilidade, tem-se:

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}\mathbf{M}_O^{-1}\mathbf{P} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 21 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^t = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 29 & 21 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} = [8 \quad 13]$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

- Observa-se que obviamente obtém-se o mesmo resultado anterior.

<u>**Exemplo 3:**</u> Simulação do observador de estados dos exemplos 1 e 2.

- Condição incial:

  Sistema "real" $\Rightarrow$ $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix}$

  Para o observador assume-se condição inicial não conhecida $\Rightarrow$ adota-se $\mathbf{x}(0) = 0$.

- Entrada $\Rightarrow$ $\mathbf{u}(t)$ = onda quadrada com amplitude variando entre 0 e 2.

- Figura 4 apresenta o resultado da simulação da planta e do observador.

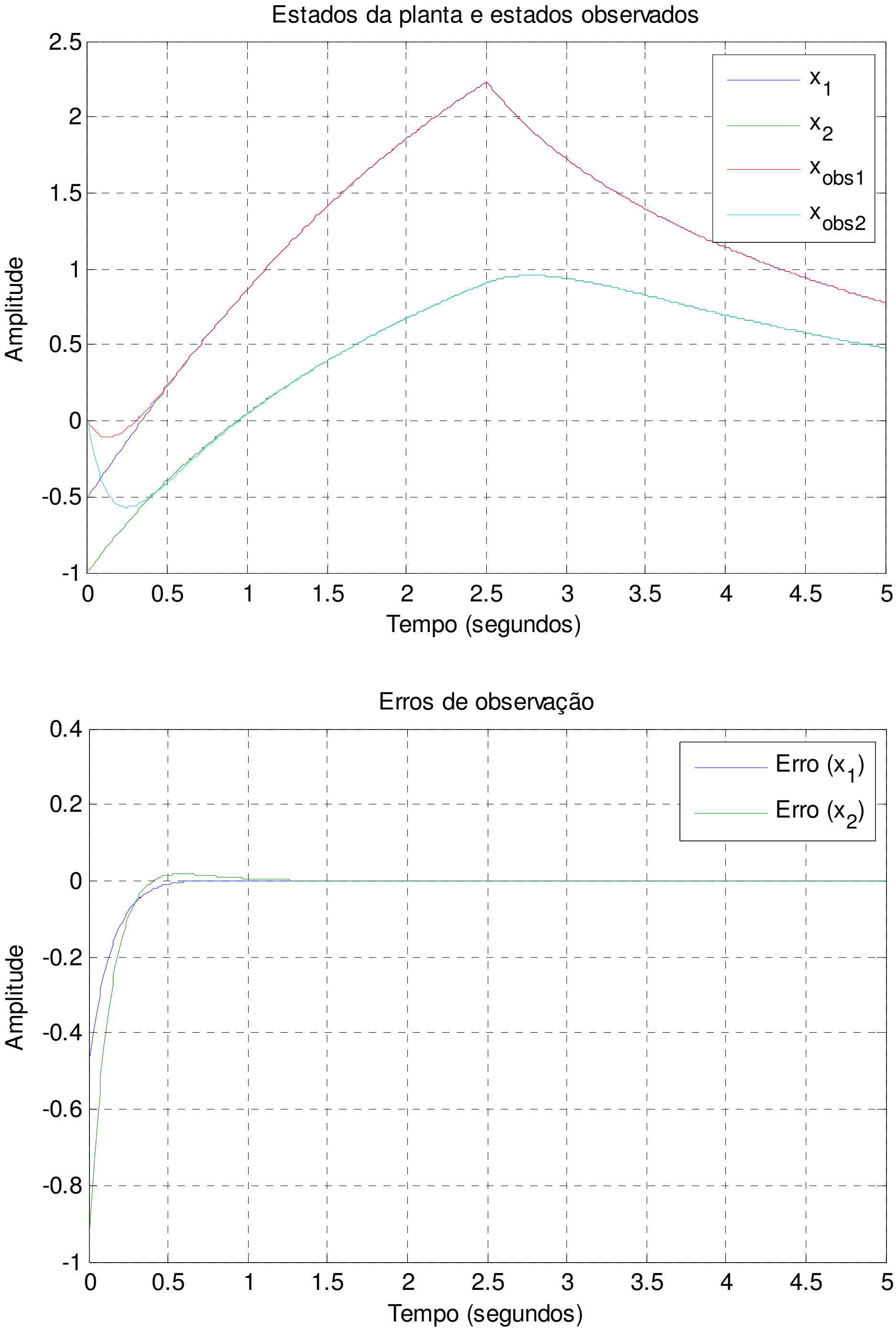

Figura 4. Simulação do observador de estados.

- Figura 5 apresenta o resultado da simulação do observador e da planta usando um erro de modelagem nas matrize $\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = 1{,}1\mathbf{A} \\ \hat{\mathbf{B}} = 0{,}9\mathbf{B} \end{cases}$

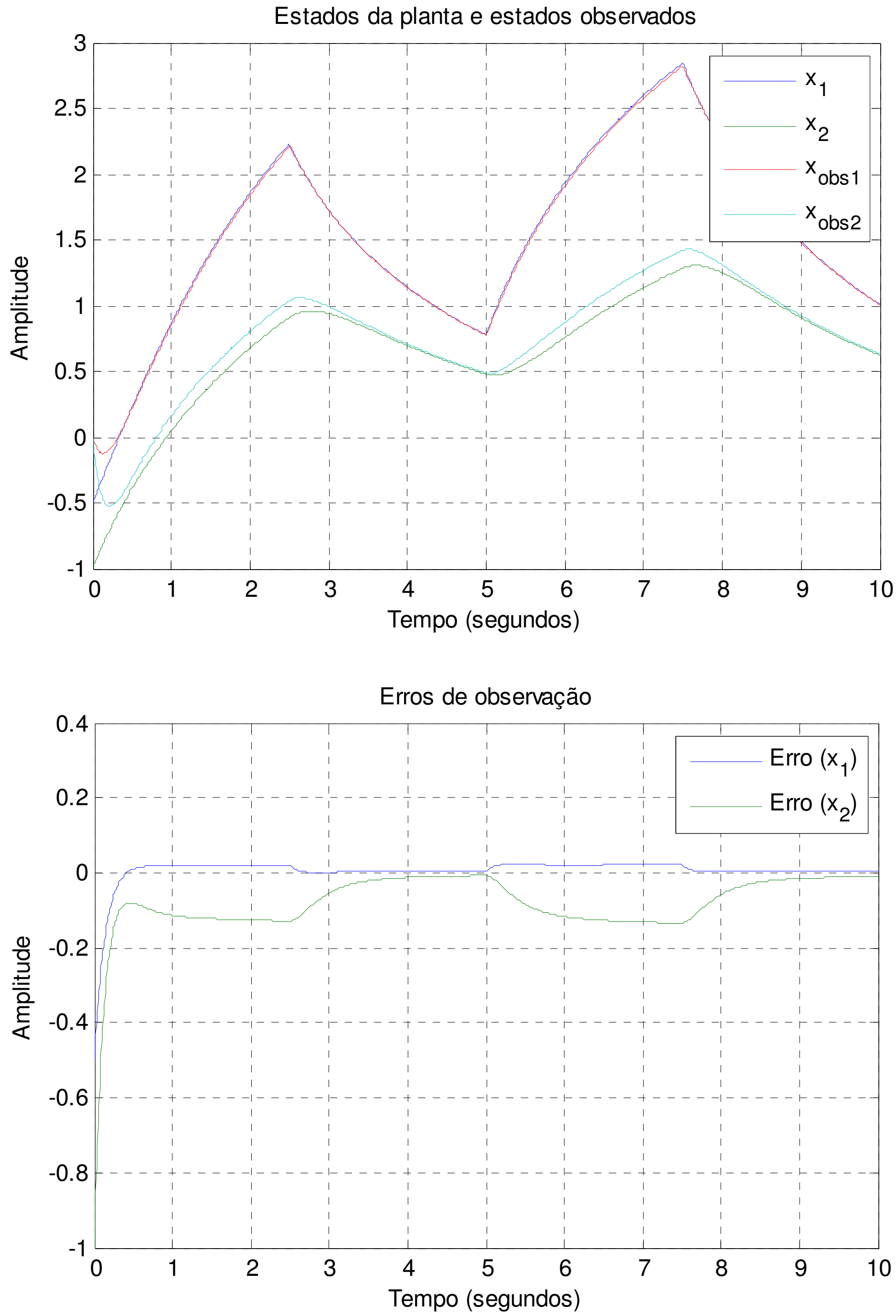

Figura 5. Simulação do observador de estados com erro nas matrizes do modelo da planta.

<u>**Exemplo 4:**</u> Projeto de observador usando o método algébrico (caso MIMO).

- Dado o sistema SISO:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

- Primeiro deve-se verificar a observabilidade do sistema, assim:

$$\mathbf{M_O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}(\mathbf{M_O}) = 2 \Rightarrow \text{sistema é observável.}$$

- Pólos do sistema (autovalores da matriz $\mathbf{A}$):

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -2. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Observa-se que o sistema é marginalmente estável, ou seja, instável.

- Observador em malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{Ly}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) \end{cases}$$

- Matriz do observador em malha fechada:

$$\mathbf{A_{mf}} = \mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A_{mf}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{1,1} & 1 - l_{1,2} \\ -l_{2,1} & -2 - l_{2,2} \end{bmatrix}.$$

- Equação característica da malha fechada do observador:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A_{mf}}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + l_{1,1} & -1 + l_{1,2} \\ l_{2,1} & \lambda + 2 + l_{2,2} \end{bmatrix} = (\lambda + l_{1,1})(\lambda + 2 + l_{2,2}) + l_{2,1} - l_{2,1} l_{1,2} = 0$$

assim,

$$\lambda^2 + (2 + l_{1,1} + l_{2,2})\lambda + (2l_{1,1} + l_{2,1} + l_{1,1} l_{2,2} - l_{2,1} l_{1,2}) = 0$$

- Escolhendo os pólos da malha fechada de acordo com um sistema tipo Bessel com tempo de assentamento igual a 0,5 segundos, ou seja, pólos aproximadamente em:

$$p_{2,3} = \frac{-4 \pm 2{,}3j}{0{,}5} = -8 \pm 4{,}6j$$

Equação característica da malha fechada desejada para o observador:

$$(\lambda + 8 + 4{,}6j)(\lambda + 8 - 4{,}6j) = \lambda^2 + 16\lambda + 85{,}16 = 0 .$$

Comparando a equação característica desejada com a equação característica em função dos ganhos do observador, tem-se:

$$\begin{cases} 2 + l_{1,1} + l_{2,2} = 16 \\ 2l_{1,1} + l_{2,1} + l_{1,1}l_{2,2} - l_{2,1}l_{1,2} = 85{,}16 \end{cases} .$$

Como se tem 4 ganhos e somente duas equações pode-se escolher arbitrariamento o valor de dois ganhos e calacular os outros dois $\Rightarrow$ escolhendo $l_{2,1} = l_{2,2} = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} 2 + l_{1,1} = 16 \\ 2 + l_{1,1} + l_{2,1} = 85{,}16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_{1,1} = 14 \\ l_{2,1} = 57{,}16 \end{cases}$$

- A matriz da malha fechada fica $\Rightarrow$ $\mathbf{A}_{\mathbf{mf}} = \begin{bmatrix} -l_{1,1} & 1 - l_{1,2} \\ -l_{2,1} & -2 - l_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -57{,}16 & -2 \end{bmatrix}$.

7. Exercícios

1) Deseja-se medir a velocidade de um carro tendo-se como base a medida de aceleração proveniente de um acelerômetro e a medida da velocidade média das rodas. A medida de velocidade das rodas é obtida pela medida de sua rotação, assim, etá sujeita a erros devido a deslizamentos da roda e erros devido a buracos e "calombos" no pavimento. Um acelerômetro é um sensor que apresenta muito ruído de medida, além de um erro constante ("bias"). Assim, para medir a velocidade correta do carro deve-se estimar também a "bias" da medida de aceleração para poder eliminá-la. Um modelo simples do carro para o observador pode ser descrito como se segue.

$$\dot{v}(t) = a(t) - b(t) + w_1(t)$$
$$\dot{b}(t) = w_2(t)$$
$$\omega(t) = v(t) / R + r(t)$$

onde $v(t)$ é a velocidade do carro, $a(t)$ é a aceleração obtida pelo acelerômetro, $b(t)$ é a "bias" presente na medida de aceleração, $\omega(t)$ é a velocidade de rotação das rodas, R é o raio das rodas, $w_1(t)$ é o ruído de medida da aceleração, $w_2(t)$ é o ruído da "bias" e $r(t)$ é o ruído de medida da velocidade média das rodas. Nota-se que nesse modelo tem-se os seguintes aspectos:

- A aceleração real do carro é dada por $a(t) - b(t)$;

- Diversos efeitos foram desprezados, tais como, escorregamento das rodas no solo, curvas feitas pelo veículo etc;
- Todos os ruídos têm distribuição gaussiana e apresentam média zero;
- A forma como a "bias" é modelada consiste de uma técnica muito utilizada para estimar valores constantes. Nota-se que o ruído da "bias" tem média zero, assim, a derivada da "bias" apresenta na média um valor igual a zero. Uma grandeza que apresenta derivada zero é uma constante.

Utilize os seguintes valores numéricos para resolver esse problema: R = 0,4m; σ_{w1} = 0,25m/s^2; σ_{r1} = 2rad/s; b = 1m/s^2 ("bias"). Observa-se que o desvio padrão da "bias", σ_{w2}, é um parâmetro de projeto, portanto você deve obter o melhor valor para esse parâmetro. A melhor forma para obter o valor ótimo de σ_{w2} é através de simulações com diferentes valores.

a) Coloque o sistema na forma de espaço dos estados. Qual é o sinal de entrada do sistema e qual é o sinal de saída do sistema? Como é o modelo do carro real?

b) Calcule os pólos e zeros do sistema.

c) Verifique a observabilidade do sistema.

d) Calcule os ganhos do observador para localizar os seus pólos em $-2 \pm 1j$.

e) Simule a resposta do sistema e do observador para uma condição inicial do estado do sistema real igual a $[0, 0]^t$ e condição inicial do observador igual a $[2, 0{,}2]^t$. Para esse caso assuma que todos os ruídos são iguais a zero. Faça um gráfico com as saídas do sistema real e do observador e outro gráfico com os estados do sistema real e do observador. Para esse item você pode e deve usar o Simulink. Utilize esse transitório para obter o melhor valor para σ_{w2}. Comente os resultados obtidos da estimativa da velocidade do sistema.

f) Simule a resposta do observador para um sinal de entrada na forma de dois pulsos um positivo e outro negativo, ambos de amplitude 4m/s^2 e duração de 10 segundos. O primeiro pulso é o positivo e o segundo pulso é o negativo. O primeiro pulso inicia em 10 segundos e o segundo pulso inicia em 60 segundos. A duração total do transitório é de 80 segundos. Para construir essa entrada utilize o "Repeated Sequence Interpolated" do Simulink. Assuma que todos os ruídos são iguais a zero. Nesse caso pode-se assumir que as condições iniciais do sistema real e do observador são ambas iguais a zero, pois o carro parte do repouso. Para esse item você pode e deve usar o Simulink. Comente os resultados obtidos da estimativa da velocidade do sistema.

g) Repita os transitórios dos itens (e) e (f) usando os desvios padrão dos ruídos dados. Apresente os gráficos e comente os resultados.

2) Dado o avião F8 cuja dinâmica é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & -1{,}5 & 0 & 0{,}0057 \\ -12 & 12 & -0{,}8 & -0{,}0344 \\ -0{,}8524 & 0{,}2904 & 0 & -0{,}0140 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}16 & 0{,}6 \\ -19 & -2{,}5 \\ -0{,}0115 & -0{,}0087 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Pede-se:

a) Verifique a observabilidade do sistema.

b) Assumindo que somente as saídas do sistema são conhecidas, projeto um observador de estados de modo a localizar os pólos do observador de acordo com um sistema padrão tipo Bessel com pólos que apresentam tempo de resposta 2 vezes menor que os pólos do avião F8.

c) Faça um modelo no Simulink que implementa o observador e o avião F8.

d) Simule o observador e o avião usando as seguintes condições:

- Condição inicial para o avião: $\theta = -1^{\circ}$, $\gamma = 1^{\circ}$ e os outros estados iguais a zero.
- Condição inicial para o observador: todos os estados iguais a zero;
- Entradas na forma de degrau: $\delta e = 2$ e $\delta f = 1$.

Faça os gráficos dos estados da planta, dos estados do observador e dos erros de observação dos estados.

- Principais comandos do Matlab a serem utilizados:
  - eig;
  - obsv;
  - place.