| | | |
|---|---|---|
| UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS | *Universidade Federal de Lavras*<br>*Engenharia de Controle e Automação*<br>*Robótica*<br>*Professor: Leonardo Paiva*<br>*Data:* | *Jacobiano de um Manipulador*<br>*Nota* |
| ***Aluno:*** | | |

**Questão 1)** Determine genericamente o jacobiano para um manipulador planar com três juntas rotacionais.

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \mathbf{J}_3] = \begin{bmatrix} z_0 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_0) & z_1 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_1) & z_2 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$$

**Questão 2)** Determine genericamente o jacobiano para cada uma das cinco anatomias dos manipuladores industriais:

a. Articulado
b. Cartesiano
c. Cilíndrico
d. Esférico
e. SCARA

a. $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} z_0 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_0) & z_1 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_1) & z_2 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_2) \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix}$

b. $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

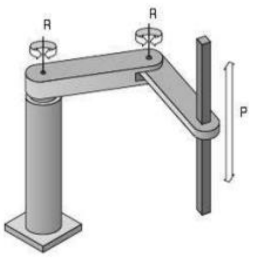
c. $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} z_0 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_0) & z_1 & z_2 \\ z_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} z_0 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_0) & z_1 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_1) & z_2 \\ z_0 & z_1 & 0 \end{bmatrix}$

e. $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} z_0 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_0) & z_1 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_1) & z_2 \\ z_0 & z_1 & 0 \end{bmatrix}$

**Questão 3)**

a) Dado a anatomia do manipulado Scara, bem como as matrizes de transformação homogênea do referido manipulador, obtenha o jacobiano simbólico, considerando os dados apresentados:




$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \mathbf{J}_3]$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 300c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & 300s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & 200c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & 200s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} z_0 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_0) & z_1 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_1) & z_2 \\ z_0 & z_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} z_0 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_0) & z_1 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_1) & z_2 \\ z_0 & z_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_1 = \mathbf{R}_0^1\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_2 = \mathbf{R}_0^2\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_1 = \mathbf{d}_0^1 = \begin{bmatrix} 210c_1 \\ 210s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_3 = \mathbf{d}_0^3 = \begin{bmatrix} 180c_{12} + 210c_1 \\ 180s_{12} + 210s_1 \\ -d_3 \end{bmatrix}$$

$$z_0 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 180c_{12} + 210c_1 \\ 180s_{12} + 210s_1 \\ -d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -180s_{12} - 210s_1 \\ 180c_{12} + 210c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z_1 \times (\mathbf{o}_3 - \mathbf{o}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 180c_{12} \\ 180s_{12} \\ -d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -180s_{12} \\ 180c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -180s_{12} - 210s_1 & -180s_{12} & 0 \\ 180c_{12} + 210c_1 & 180c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Obtenha o jacobiano numérico, considerando os dados apresentados:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -90^\circ \\ 50\,\text{mm} \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1\,^\circ/\text{s} \\ 20\ \text{mm/s} \end{bmatrix}$$

Substituir na expressão acima

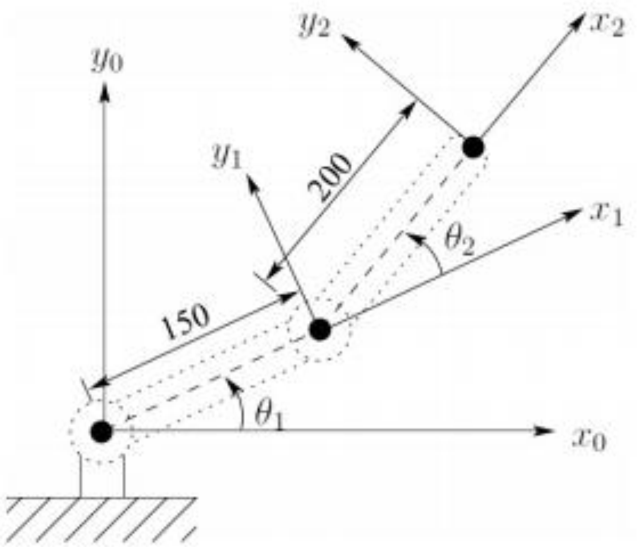
**Questão 4)**

Seja o manipulador planar de dois graus de liberdade (grandezas em mm), determine:

a. O jacobiano do manipulador;

b. As velocidades do órgão terminal, sabendo que:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ \pi/6 \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2\,rad/s \\ 3\,rad/s \end{bmatrix};$$



a. Para este manipulador, a tabela de parâmetros DH é:

| $i$ | $a_i$ | $\alpha_1$ | $d_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| ***1*** | 150 | 0 | 0 | $\theta_1$ * |
| ***2*** | 200 | 0 | 0 | $\theta_2$ * |

As matrizes de transformação homogênea para a cinemática direta deste manipulador são:

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 150c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & 150s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 200c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 200s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & 150c_1 + 200c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & 150s_1 + 200s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Formado por duas juntas rotacionais, o formato do jacobiano deste manipulador é:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2] = \begin{bmatrix} z_0 \times (\mathbf{o}_2 - \mathbf{o}_0) & z_1 \times (\mathbf{o}_2 - \mathbf{o}_1) \\ z_0 & z_1 \end{bmatrix}$$

Todos os termos do jacobiano podem ser obtidos a partir das matrizes da cinemática direta. Assim,

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z_1 = \mathbf{R}_0^1\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_1 = \mathbf{d}_0^1 = \begin{bmatrix} 150c_1 \\ 150s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{o}_2 = \mathbf{d}_0^2 = \begin{bmatrix} 150c_1 + 200c_{12} \\ 150s_1 + 200s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo os produtos vetoriais, temos que

$$z_0 \times (\mathbf{o}_2 - \mathbf{o}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 150c_1 + 200c_{12} \\ 150s_1 + 200s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150s_1 - 200s_{12} \\ 150c_1 + 200c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_1 \times (\mathbf{o}_2 - \mathbf{o}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 150c_1 + 200c_{12} - 150c_1 \\ 150s_1 + 200s_{12} - 150s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200s_{12} \\ 200c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo estes cálculos na matriz $\mathbf{J}$, obtém-se:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -150s_1 - 200s_{12} & -200s_{12} \\ 150c_1 + 200c_{12} & 200c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b. As velocidades do órgão terminal com relação à base são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$

Dos dados do exercício, sabe-se que:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \pi/4 \\ \pi/6 \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2rad/s \\ 3rad/s \end{bmatrix}$$

Então,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -150\sin(\pi/4) - 200\sin(5\pi/12) & -200\sin(5\pi/12) \\ 150\cos(\pi/4) + 200\cos(5\pi/12) & 200\cos(5\pi/12) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -299{,}25 & -193{,}19 \\ 157{,}83 & 51{,}76 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -299{,}25 & -193{,}19 \\ 157{,}83 & 51{,}76 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1178{,}07mm/s \\ 470{,}94mm/s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5rad/s \end{bmatrix}$$

**Questão 5)** Para um manipulador articulado, determine as velocidades do órgão terminal com relação à base do robô, sabendo que as matrizes de transformação homogênea da cinemática direta são:

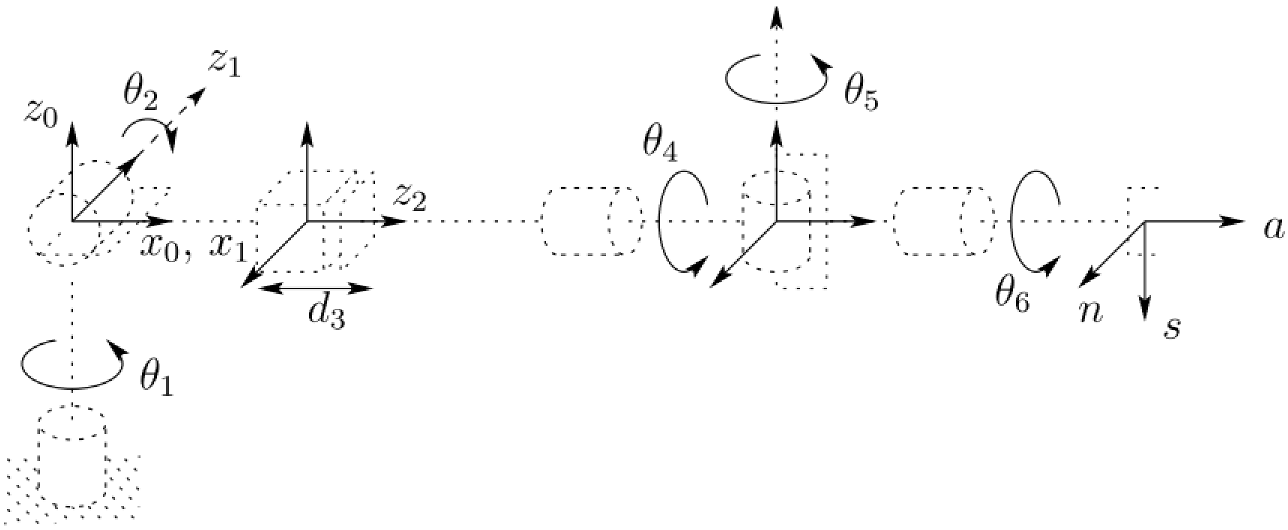
$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 100c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 100s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 50c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & 50s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E que as variáveis de posição angular e velocidades angulares das juntas são:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi/2 \\ \pi/2 \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 4rad/s \\ 3rad/s \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Mesma metodologia dos exercícios anteriores...**

**Questão 6)** Considere o manipulador de Stanford com seus associados as coordenadas de Denavit Hartenberg




| Link | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ | $\theta_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | $-90$ | $\theta^\star$ |
| 2 | $d_2$ | 0 | $+90$ | $\theta^\star$ |
| 3 | $d^\star$ | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | $-90$ | $\theta^\star$ |
| 5 | 0 | 0 | $+90$ | $\theta^\star$ |
| 6 | $d_6$ | 0 | 0 | $\theta^\star$ |

Calcule o jacobiano simbólico para o referido manipulador

Se houver dúvidas, resolução em sala de aula