



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE LAVRAS**

**GAT 109 - Robótica**

**Trabalho sobre o Manipulador ABB IRB 120**

Wellington Garcia Silva - 201910444

Turma: 22A

**LAVRAS**

**2023**

# Manipulador ABB IRB 120

O objetivo deste trabalho é elaborar um relatório técnico apresentando as principais características do manipulador industrial escolhido, no caso, este é o Manipulador ABB IRB 120.

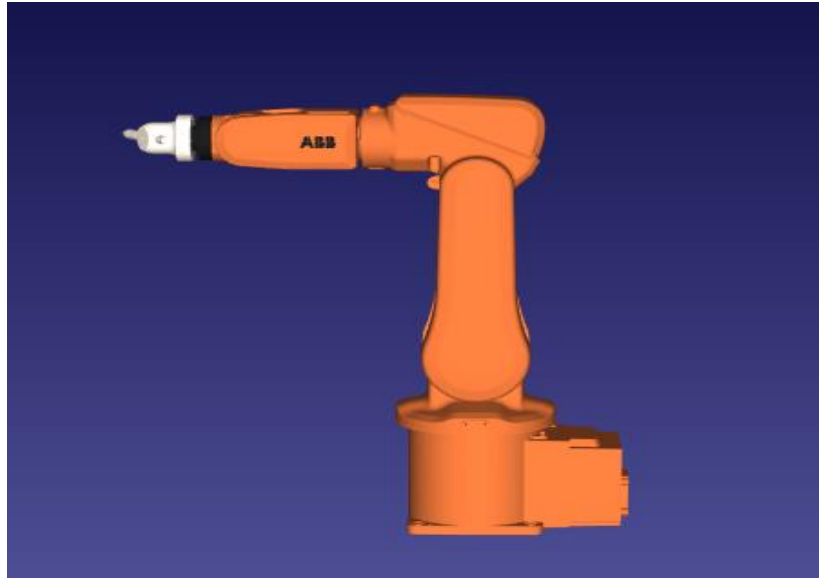


Figura 1 - Manipulador ABB IRB 120. Fonte: RoKiSim.

Ao longo do trabalho, será apresentado informações extraídas direto do datasheet do fabricante e apresentado, por vezes em forma de tabelas, mas isso sempre com explicação do que está sendo mostrado.

A tabela 1 contém as características gerais do manipulador ABB IRB 120.

Marca	ABB
Modelo	IRB 120
Tipo	articulado
Função	pick-and-place
Montagem	de piso
Área de aplicação	para indústrias alimentícias, farmacêuticas e para aplicações médicas
Outras características	compacto, de segurança
Carga máxima	3kg (6,614 lb)
Alcance	580 mm (22.83 in)
Repetibilidade	0,01 mm (0,0004 in)

Peso	25 Kg (55, 1 lb)
------	------------------

Tabela 1 - características do manipulador estudado.

Na tabela 2 estão as informações referente a carga que o robô pode pegar.

<b>Força</b>	<b>Resistência da carga (em operação)</b>	<b>Máx. carga (parada de emergência)</b>
Força z	-250 + 200 N	±250 + 365 N
Torque xy	195 Nm	+400 Nm
Torque z	+85 Nm	+155 Nm

Montado na parede

<b>Força</b>	<b>Resistência da carga(em operação)</b>	<b>Carga Máx. (parada de emergência)</b>
Força xy	+470 N	+735 N
Força z	0 + 200 N	0 + 630 N
Torque xy	240 Nm	450 Nm
torque z	90 Nm	175 Nm

Suspenso

<b>Força</b>	<b>Resistência da carga(em operação)</b>	<b>Carga Máx. (parada de emergência)</b>
Força xy	+265 N	515 N
Força z	265 + 200 N	265 + 365 N
Torque xy	195 Nm	400 Nm
Torque z	+85	155 Nm

Tabela 2 - Carga suportada pelo robô.

A figura 4 mostra as condições de armazenamento do robô e operação.

### Condições de armazenamento

A tabela 3 mostra como pode ser armazenado o robô.

Parâmetro	Valor
Temperatura ambiente mínima	-25° C
Temperatura ambiente máxima	+55° C
Temperatura ambiente máxima (menos de 24 horas)	+70° C
Umidade ambiente máxima	95% em temperatura constante (somente gasoso)

#### Classe de proteção

Parâmetro	Valor
Temperatura ambiente mínima	+5°C i
Temperatura ambiente máxima	+45°C
Temperatura ambiente máxima para robôs com grau alimentício de lubrificação	+35°C ii
Umidade ambiente máxima	Máx. 95% em temperatura constante

Tabela 3 - Características de temperatura do ambiente do manipulador.

i - A baixa temperatura ambiente  $< 10^{\circ}\text{C}$  é, como acontece com qualquer outra máquina, uma fase de aquecimento recomendado para ser executado com o robô. Caso contrário, existe o risco de o robô parar ou funcionar com desempenho inferior devido à viscosidade do óleo e da graxa dependente da temperatura.

ii - Para robôs com lubrificação de qualidade alimentar, se a temperatura ambiente for  $> 35^{\circ}\text{C}$ , entre em contato com a ABB para obter mais informações Informação.

Na tabela 4 contém umidade relativa que este robô pode estar exposto..

Descrição	Umidade Relativa
Robô completo durante a operação, armazenamento e transporte	Máx. em temperatura constante

Tabela 4 - umidade relativa e descrição.

A Figura 2 possui as condições do ambiente que estará o manipulador.


Environment	
Ambient temperature for Robot manipulator:	
During operation	+5°C (41°F) to +45°C (122°F)
Relative transportation and storage	-25°C (-13°F) to +55°C (131°F)
For short periods	up to +70°C (158°F)
Relative humidity	Max 95%
Options	Clean Room ISO class 5 (certified by IPA)** 
Noise level	Max 70 dB (A)
Safety	Safety and emergency stops 2-channel safety circuits supervision 3-position enabling device
Emission	EMC/EMI-shielded

Figura 2 - Condições do ambiente.

Na figura 3 as informações de referentes à parte elétrica.

Conexões elétricas	
Tensão de alimentação Hz	200-600V, 50/60
potência nominal classificação do transformador	3.0 kVA
Consumo de Potência	0.25kW

Figura 3 - Conexões elétrica

A tabela 5 apresenta a equivalência de unidades para conversão

Tabela de conversão

Use a tabela a seguir para converter as unidades usadas neste manual

Unidades quantidade	de	Unidades		
Comprimento	1 m	3.28 ft.	39.37 in	
Peso	1 kg	2.21 lb		
Peso	1 g	0,035 onças		
Pressão	1 bar	100 kPa	14.5 psi	

Força	1 N	0.225 lbf	
Momento	1 Nm	0.738 lbf-ft	
Volume	1 L	0.264 US gal	

Tabela 5 - Conversão de unidades.

A tabela 6 contém o quadro de velocidades que cada junta atinge e seus respectivos limites.

Eixos	Limites (°)	Limites (rad)	Vel. máx. (°/s)	Vel. máx. (rad/s)
Junta 1	+165 a -165	+2.88 a -2.88	250	4.36
Junta 2	+110 a -110	+1.92 a -1.92	250	4.36
Junta 3	+70 a -110	+1.22 a -1.92	250	4.36
Junta 4	+160 a -160	+2.79 a -2.79	320	5.58
Junta 5	+120 a -120	+2.09 a -2.09	320	5.58
Junta 6	+400 a -400	+6.98 a -6.98	420	7.33

Tabela 6 - Quadro de velocidade de cada junta.

Nas figuras 3,4 e 5 estão representando o envelope de trabalho ou área de trabalho do manipulador bem como o tamanho dos links.

## Envelope de trabalho

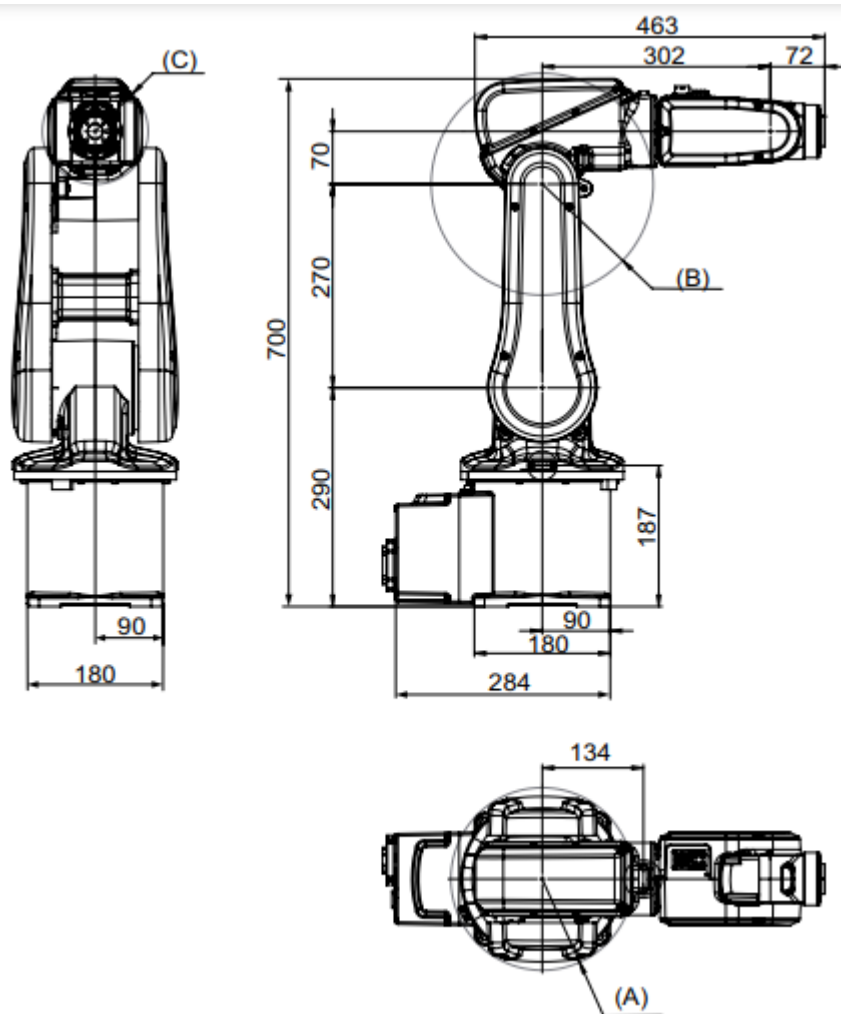


Figura 3 - Tamanho dos links do manipulador.

## Working range

The illustration shows the unrestricted working range of the robot.

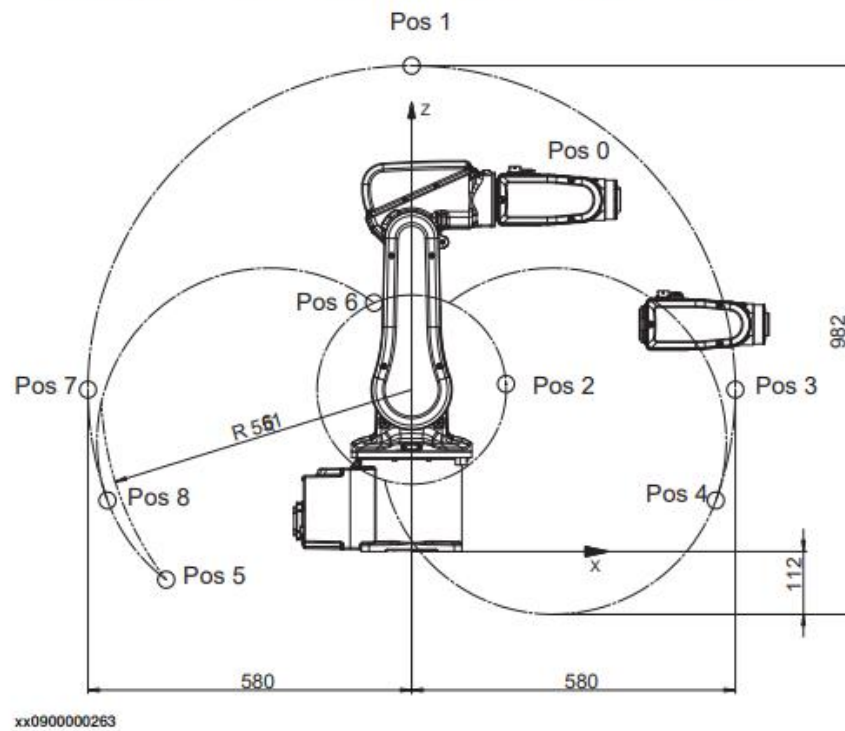


Figura 4 - Envelope de trabalho.

## Turning radius

The turning radius of robot is shown in the figure.

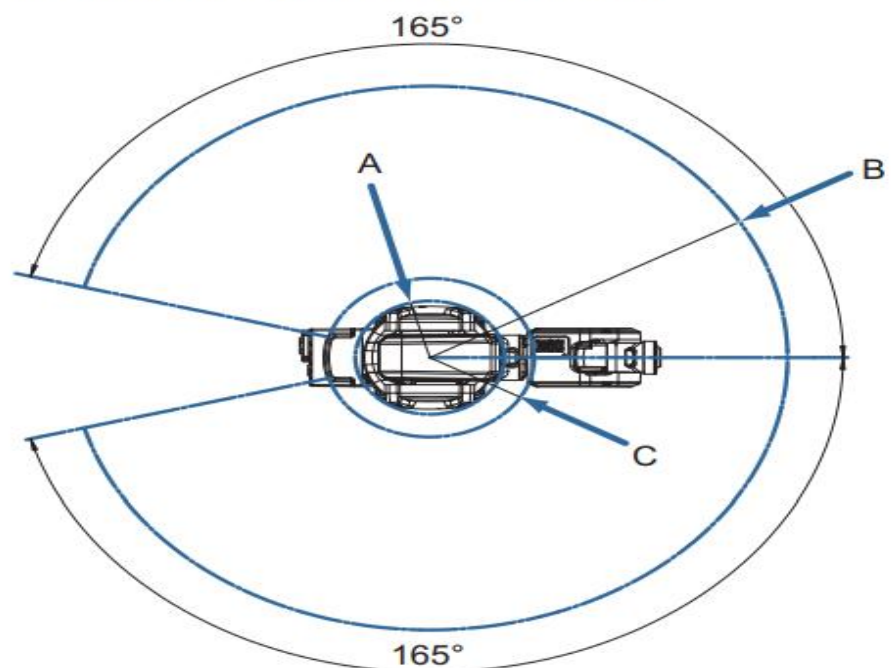


Figura 5 - Vista superior do envelope de trabalho.



## Manual movement directions

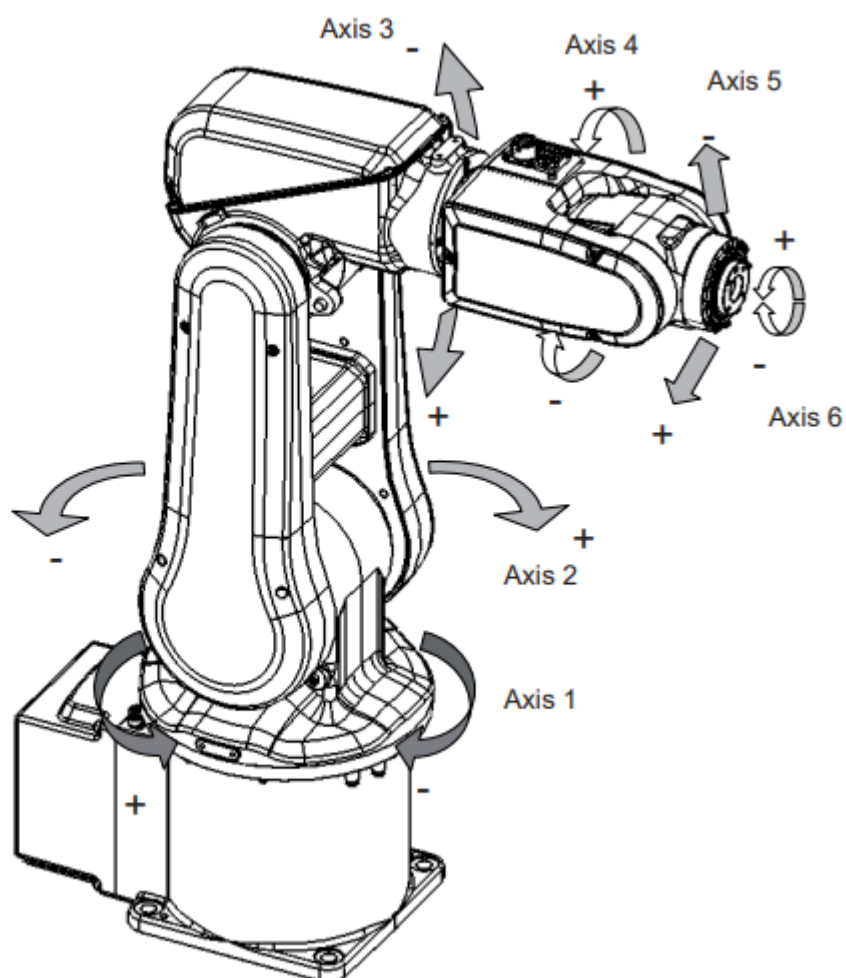


Figura 6 - Ajuste da velocidade durante o início de funcionamento.

Posição o	Posição no centro do punho (mm)		Ângulos (°)	
	X	Z	Eixo 2	Eixo 3

A	302 mm	630 mm	0°	0°
B	0 mm	870 mm	0°	-77°
C	169 mm	300 mm	0°	+70°
D	580 mm	270 mm	+90°	-77°
E	545 mm	91 mm	+110°	-77°
F	-440 mm	-50 mm	-110°	-110°
G	-67 mm	445 mm	-110°	+70°
H	-580 mm	270 mm	-90°	-77°
J	-545 mm	91 mm	-110°	-77°

Tabela 7 - Posicionamento do centro do pulso.

## Movimento do robô

A tabela 8 especifica os tipos e amplitudes de movimento em cada eixo.

Localização do movimento	Tipo de movimento	Range de movimento
eixo 1	Movimento de rotação	+165° to -165°
eixo 2	Movimento do braço	+110° to -110°
eixo 3	Movimento do braço	+70° to -110°
eixo 4	Movimento do pulso	+160° to -160°
eixo 5	Movimento de curvatura	+120° to -120°
eixo 6	Movimento de rotação	+400° a -400° (padrão) +242 rotações a -242 rotações no máximo i

Tabela 8

i A faixa de trabalho padrão para o eixo 6 pode ser estendida alterando os valores dos parâmetros no software.

A opção 610-1 Eixo independente pode ser usada para redefinir o contador de voltas após o eixo ter

foi girado (não há necessidade de "rebobinar" o eixo).

Figura 13 - Movimento de cada um dos eixos.

Ajustando a velocidade e aceleração durante o aquecimento

Dependendo do quão frio o ambiente está e do programa que está sendo usado, o

a velocidade pode precisar ser aumentada até atingir o máximo. A tabela mostra exemplos de como ajustar a velocidade:

Ciclos de trabalho	AccSet	Velocidade
3 ciclos de trabalho	20, 20	v100 (100 mm/s)
5 ciclos de trabalho	40, 40	v400 (400 mm/s)
5 ciclos de trabalho	60, 60	v600 (600 mm/s)
5 ciclos de trabalho	100, 100	v1000 (1000 mm/s)
Mais de 5 ciclos de trabalho	100, 100	Max.

Tabela 9 - Ciclos de trabalho do manipulador

Se o programa consistir em grandes movimentos do punho, é possível que a reorientação velocidade, que é sempre alta em velocidades predefinidas, precisa ser incluída no aumentando

## **Resumo de TCC**

O texto a seguir é um resumo de um TCC (Trabalho de Conclusão de Curso) de um aluno de Engenharia de Controle e Automação da UFOP (Universidade Federal de Ouro Preto), de autoria de Marcos Paulo Torre, em que este apresenta aplicação do robô estudando a integração de uma mão robótica multi-dedos utilizando o framework ROS (Robot Operating System). A seguir, o resumo.

O desenvolvimento deste trabalho tem por objetivo realizar a integração entre um braço robótico industrial e uma mão robótica multi-dedos utilizando o framework ROS (Robot Operating System). O braço robótico industrial, modelo IRB 120, é o menor da categoria desenvolvido pela ABB Corporation. A mão robótica, modelo Barret tHand BH8-282, é fabricada pela empresa Barrett e possui matrizes de toque nas pontas dos dedos e na palma da mão, além de um sensor de força e torque no punho. Devido a ambos os equipamentos possuírem controladores nativos e independentes, se faz necessária a utilização de mais uma camada para permitir a integração entre os mesmos. Dessa maneira, o framework ROS será utilizado tanto como sistema auxiliar, quanto como sistema central para efetuar o controle e permitir a comunicação entre os equipamentos. Serão abordadas duas soluções distintas. A primeira utiliza o software proprietário da ABB, o RobotStudio, para efetuar a programação do robô. O interfaceamento entre o braço e a mão se dá através de uma placa microcontrolada Arduino Uno, imersa no ambiente do ROS através de um pacote de comunicação denominado rosserial. A segunda maneira permite uma integração mais direta, eliminando a necessidade de utilização da placa microcontrolada. O braço robótico terá sua trajetória planejada por um ambiente de controle de movimento denominado MoveIt!. A comunicação entre o robô físico e o ROS é feita através de um socket, responsável por enviar o vetor de pontos gerador da trajetória e receber o estado real das juntas. A comunicação entre a mão robótica e o ROS, em ambos os casos, é realizada por um barramento CAN, através do protocolo CANopen, e implementada através de um pacote de controle mantido pela empresa Robotnik, denominado hand\_controller. No final, são discutidos os resultados apontando as vantagens e desvantagens das duas abordagens levadas em consideração no presente trabalho.

Outro exemplo de trabalho utilizando o manipulador em questão foi outro TCC, também pela UFOP, de Amanda Tonel Lima, de título: Teleoperação do manipulador robótico ABB IRB 120 e BarrettHand BH8-282 utilizando o dispositivo háptico Geomagic Touch X e ROS. A seguir, o resumo.

A teleoperação de robôs tem recebido maior atenção nos últimos anos, principalmente devido à variedade de aplicações em ambientes remotos ou perigosos. Com isso, há uma crescente demanda por interfaces mais eficientes e naturais entre o operador e o robô. Dispositivos hápticos permitem que o usuário tenha uma interação com o ambiente remoto por meio de uma força mecânica fornecida pelo controle. O operador é capaz de encostar ou manipular um objeto virtual e sentir uma resposta na forma de força. Diversos estudos e experimentos mostram que a realimentação de força melhora significativamente o desempenho do operador. Neste trabalho é desenvolvido um sistema de teleoperação com háptica do conjunto manipulador robótico industrial ABB IRB 120 e mão robótica BarrettHand BH8-282, utilizando o dispositivo háptico Geomagic Touch X e o Robot Operating System (ROS). A validação do sistema é realizada em software de simulação, assegurando o correto funcionamento dos algoritmos e a segurança dos equipamentos. Posteriormente, o sistema é implementado nos dispositivos reais, comprovando o desempenho por meio de testes experimentais em laboratório. Para validar o sistema diante do usuário, um grupo de participantes foi submetido a um teste em simulação e um questionário de avaliação da experiência, cujos resultados comprovam a usabilidade do sistema e a aceitação da realimentação de força.

d) Em robótica, o termo "singularidade" refere-se a uma condição ou configuração específica em que um robô manipulador ou um sistema robótico perde parte ou a totalidade da sua capacidade de movimento ou controle. Isso ocorre quando as juntas (articulações) de um robô ou as variáveis de estado do sistema se alinham de tal forma que resultam em problemas matemáticos ou físicos que tornam difícil ou impossível a continuação do movimento planejado.

Ao realizar as três simulações solicitadas, foi possível observar o movimento do pulso. Vale notar que para cada simulação, foi mudado o manipulador. Para o manipulador usado neste trabalho, o ABB IRB 120, a simulação específica foi a IRB120\_WristSingularity, em que o pulso do manipulador fez vários giros em torno do eixo de rotação, as outras juntas permaneceram imóveis.

A singularidade é quando não se consegue determinar os ângulos feitos pelo manipulador, ou seja, por exemplo, quando se está trabalhando com para determinar cartesiano euler, há condições em que não é possível separar os ângulos de euler, somente a soma deles.

### **Formulação Matemática:**

Em termos matemáticos, uma singularidade ocorre quando o Jacobiano da cinemática direta do robô se torna singular. O Jacobiano é uma matriz que relaciona as velocidades das juntas (ângulos ou posições das articulações) às velocidades cartesianas (posição e orientação no espaço de trabalho) do efetuador do robô. Quando o determinante do Jacobiano se torna zero, temos uma singularidade. A fórmula é a seguinte:

$$\det(J)=0$$

## **Manipulador Articulado de 6 Graus de Liberdade (6-DOF):**

Em um braço robótico mais complexo, como um braço industrial de 6 graus de liberdade, as singularidades podem ocorrer em várias configurações.

Por exemplo, quando o braço está totalmente estendido ou quando os punhos estão alinhados com o cotovelo, pode haver singularidades.

Por que ocorrem singularidades:

Singularidades ocorrem devido à natureza geométrica e cinemática dos manipuladores robóticos. Quando certas configurações são alcançadas, as juntas podem se alinhar de tal forma que a matriz Jacobiana se torna singular. Isso pode acontecer em braços robóticos com muitos graus de liberdade, e é importante gerenciar essas situações durante o planejamento de movimento para evitar problemas operacionais.

Aspectos comuns para as singularidades em três simulações especificadas:

Sem informações específicas sobre as simulações mencionadas, é difícil apontar os aspectos comuns para as singularidades. No entanto, em geral, os aspectos comuns para singularidades em várias simulações podem incluir:

Número de graus de liberdade: Manipuladores robóticos com muitos graus de liberdade têm maior probabilidade de encontrar singularidades, especialmente em configurações complexas.

Configuração geométrica: Certas configurações de juntas podem levar a alinhamentos que resultam em singularidades.

Planejamento de trajetória: Métodos inadequados de planejamento de trajetória podem levar a manipuladores robóticos atingindo configurações singulares.

Para lidar com singularidades, técnicas como reconfiguração de trajetória, otimização de Jacobiana e métodos de controle adaptativo podem ser empregadas, dependendo das características específicas do sistema robótico em questão.

# Singularidades

- Exemplos:

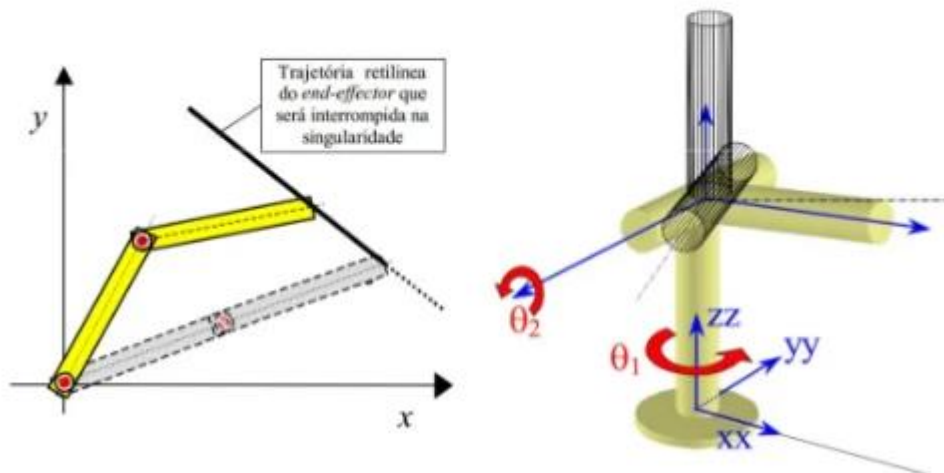


Figura 7 - exemplo singularidade fonte: [1]

## Singularidades

- O Jacobiano inverso mesmo quando identificado por uma expressão analítica, pode nem sempre ficar definido para todos os valores das variáveis de junta (configurações do manipulador)!!!
- EX:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{L_1 \sin \theta_2} \begin{bmatrix} C_{12} & S_{12} \\ -\frac{L_1 C_1 + L_2 C_{12}}{L_2} & -\frac{L_1 S_1 + L_2 S_{12}}{L_2} \end{bmatrix}$$

$\theta_2$  for  $0^\circ$  ou  $180^\circ$

Figura 8 - Singularidade Fonte:[1]

e) Nesta opção de está 3 tipos de configuração do manipulador. Estas configurações têm em comum vários ângulos, isto pode ser observado ao se trocar os índices, (1, 2 ou 3). Vale notar que ao fazer a troca, o robô permanece na mesma posição que estava, porém o que muda é somente os ângulos estabelecidos da junta 6, que são

0, 360 ou -360, ou seja, são posição inicial, já que os ângulos são equivalentes e a sexta junta se refere a garra do manipulador, assim, não importa como esta garra vai estar orientada (0, 360 ou -360) ao atingir o alvo, porque vai cumprir com o mesmo objetivo, o que não é possível para os demais juntas.

f) Nesta área é apresentada 3 opções de frames, sendo estas: base frame, tool frame e world frame. Também é mostrado 2 opções de seleção: translação e rotação em que é possível selecionar qual eixo x,y ou z. Desta forma, se por exemplo for selecionado a translação no eixo x, e em “show references frames” (na parte superior do software) selecionar tool e base 0, e movimentar o círculo com o mouse de forma circular, podemos verificar a movimentação ao longo do eixo x (vetor vermelho), como será mostrado através da sequência de imagens.

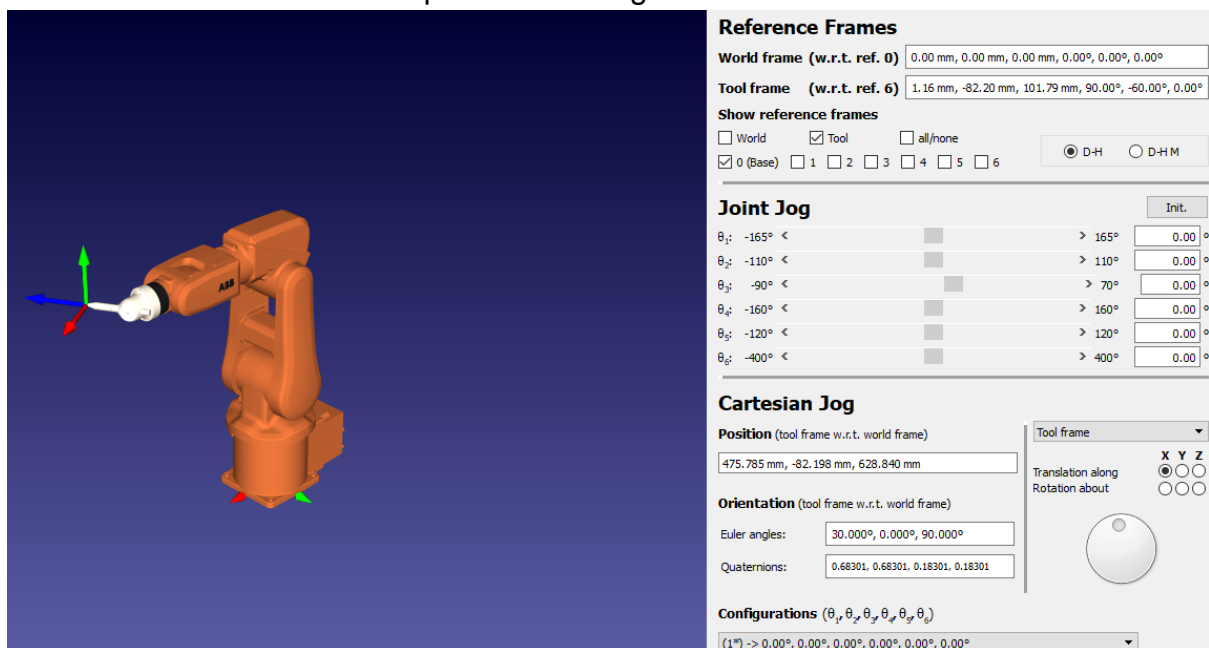


Figura 9 – Robô em determinada posição.

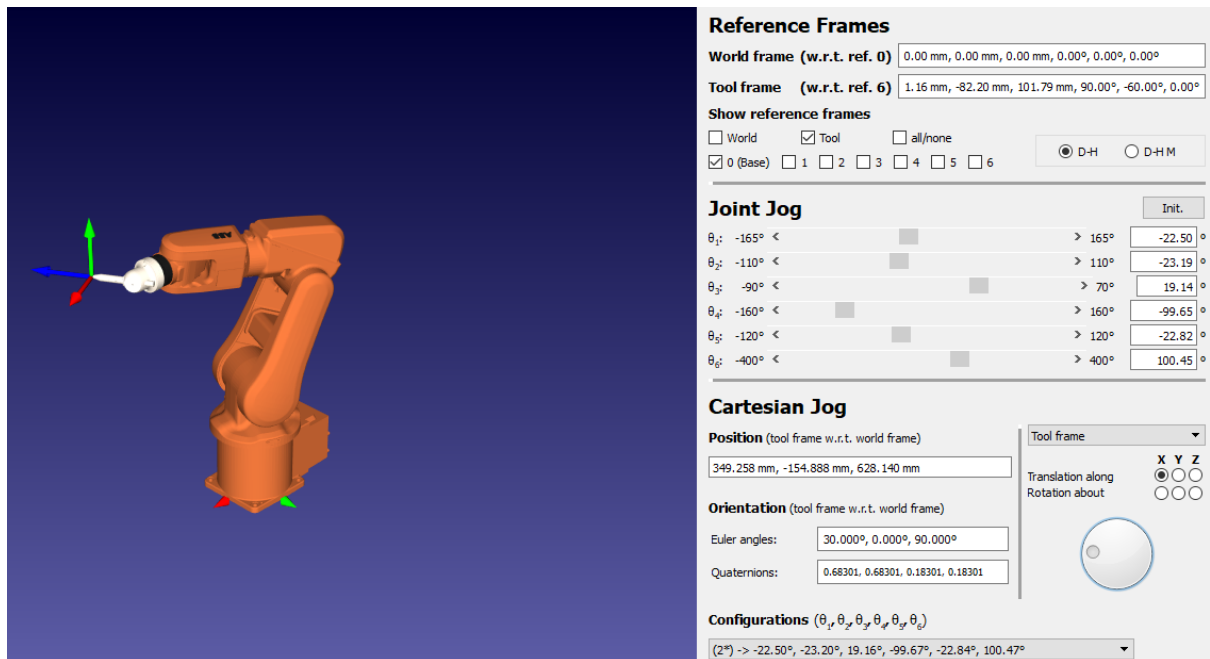


Figura 10 – Robô em determinada posição.

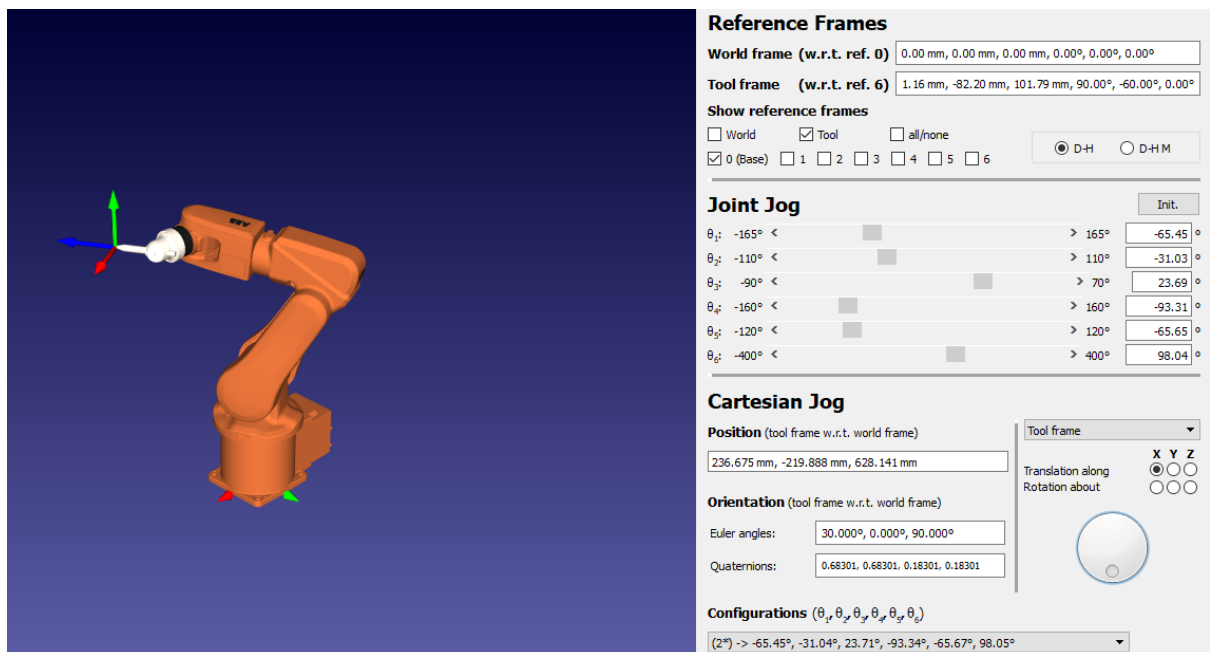


Figura 11 - Robô em determinada posição.



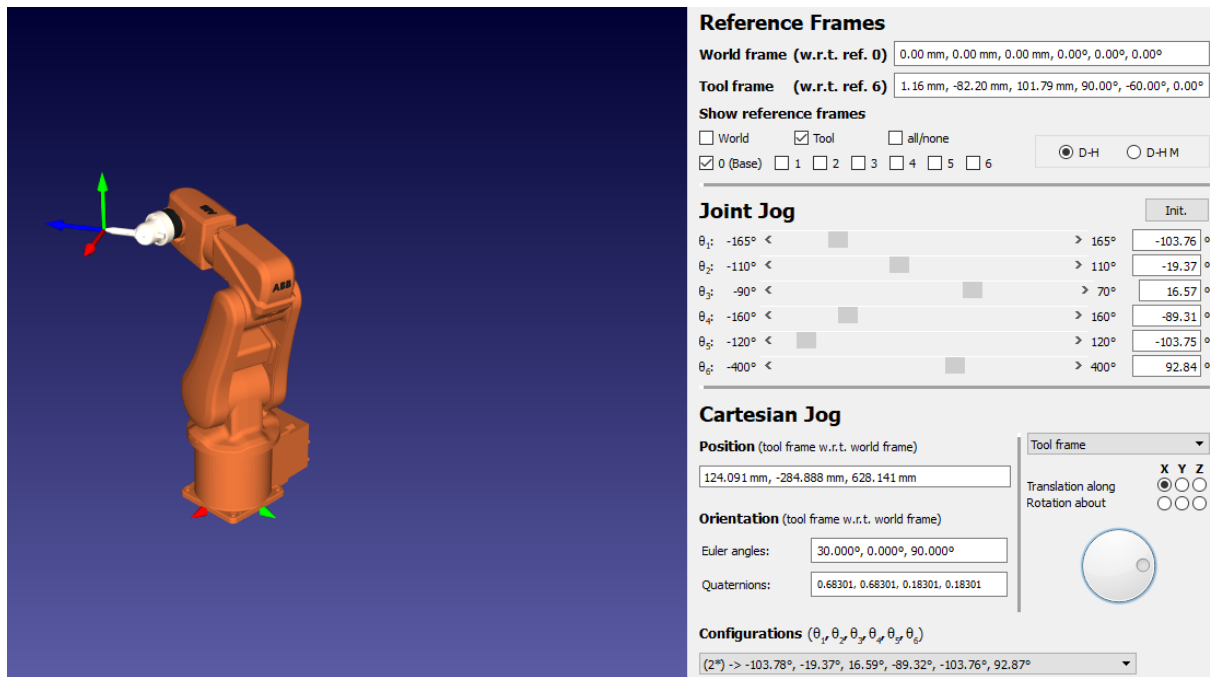


Figura 12 - Robô em determinada posição

Estas quatro imagens mostram 4 posições escolhidas do mouse, sendo que este foi movimentado em sentido anti-horário. É interessante notar como se comportam os demais eixos para isto é preciso observar em cada imagem, em Joint Jog, os valores numéricos, assim se sabe os movimentos que as juntas fizeram para cumprir com o movimento do mouse, que neste caso é a translação em x. O movimento feito pelo manipulador seria algo como se o punho estivesse se movendo para trás.

Portanto, para as demais opções de translação ou rotação, x, y ou z é possível fazer algo semelhante ao exemplo anterior selecionado uma destas opções.

## Segunda Parte do Trabalho

Para a segunda parte deste trabalho, será continuado o trabalho com o manipulador ABB IRB 120, sendo que nesta seção será calculado o valor da velocidade de cada junta individualmente.

A seguir será apresentado um esquema no Rokisin contendo os vetores de cada frame do manipulador.

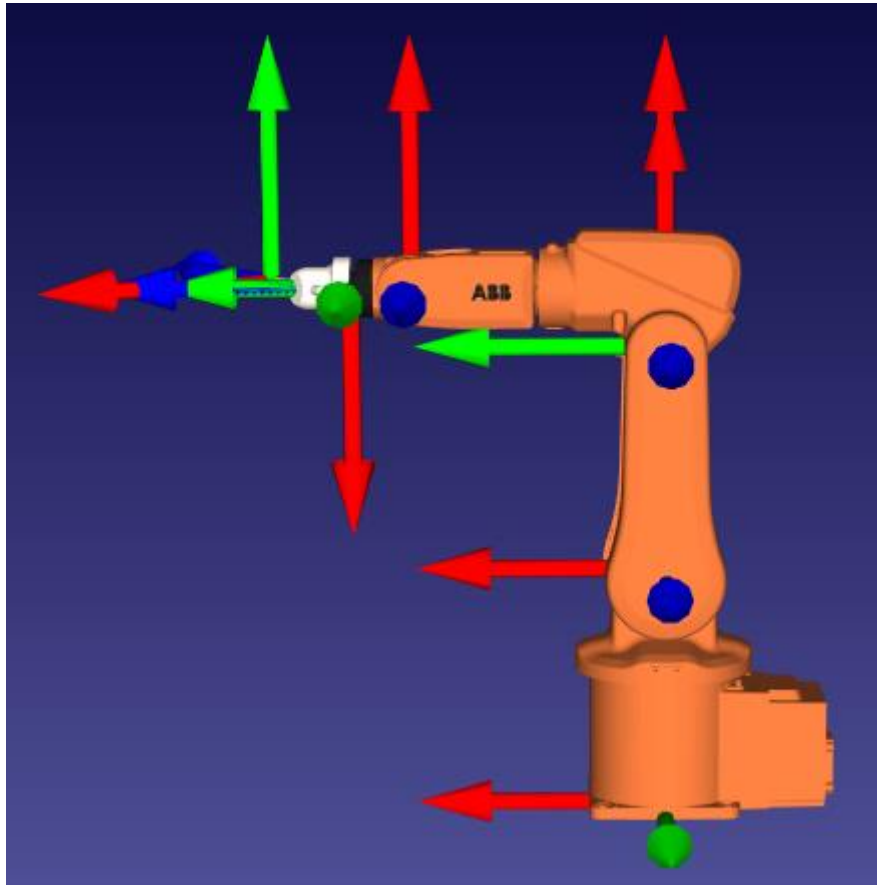


Figura 13 – Manipulador ABB IRB 120 com os vetores x, y e z.

### Tabela de Denavit-Hartenberg

A seguir, será apresentado a tabela de Denavit-Hartenberg para o manipulador em questão já contendo os valores das distâncias entre os eixos e os ângulos de rotação dos eixos x e z. Esta tabela foi gerada conforme o software RoKiSim e as figuras já apresentadas da parte do trabalho do manual do fabricante.

Link	a	alfa	d	teta
0-1	0	-90	d1 = 103	$\Theta_1^*$
1-2	a2 = 270	0	0	$\Theta_2^* + 90$
2-3	a3 = 70	-90	0	$\Theta_3^*$
3-4	0	90	d4 = 302	$\Theta_4^*$
4-5	0	-90	0	$\Theta_5^*$
5-6	0	0	d6 = 72	$\Theta_6^* + 180$

Tabela 10 – Tabela da Denavit-Hartenberg do manipulador ABB IRB 120.

Para o exemplo, se considerou assumir todos os valores de juntas ( $\Theta = 0$ ), ou seja, fez-se  $\Theta_1 = 0$ ,  $\Theta_2 = 0$ ,  $\Theta_3 = 0$ ,  $\Theta_4 = 0$ ,  $\Theta_5 = 0$ ,  $\Theta_6 = 0$ , uma vez que todas as juntas possuem rotação por serem rotacionais.

A sequência de figuras a seguir representam os passos para se determinar o jacobiano do manipulador com as matrizes obtidas no MATLAB, bem como os códigos desenvolvidos neste software.

Na primeira imagem tem-se a função de cada transformação junta a junta.

```

clc;
clear;

A01 = denavit(0,103,0,-90); %teta,d,a,alfa
A02 = A01*denavit(90,0,270,0);
A03 = A02*denavit(0,0,70,-90);
A04 = A03*denavit(0,302,0,90);
A05 = A04*denavit(0,0,0,-90);
A06 = A05*denavit(180,72,0,0);

```

Figura 15 – Obtenção das matrizes de transformação do manipulador.

Logo adiante, são apresentadas as matrizes de rotação do manipulador referente a cada junta do robô, partindo da base até o efetuador final.

$$\begin{aligned}
 R01 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0; \\ 0 & 0 & 1; \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 R02 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0; \\ 0 & 0 & 1; \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 R03 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1; \\ 0 & -1 & 0; \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 R04 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0; \\ 0 & 0 & 1; \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 R05 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1; \\ 0 & -1 & 0; \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura16 – Matrizes de rotação obtidas.

Em sequência são mostradas as matrizes que representam a distância em x, y e z de cada transformação junta a junta, ou seja, o deslocamento  $d_0^n$ , sendo esta a última coluna de cada matriz de transformação.

$$\begin{aligned}
 K &= \begin{bmatrix} 0; \\ 0; \\ 1 \end{bmatrix}; \\
 O0 &= [0;0;0]; \\
 O1 &= [A01(1,4); A01(2,4); A01(3,4)]; \\
 O2 &= [A02(1,4); A02(2,4); A02(3,4)]; \\
 O3 &= [A03(1,4); A03(2,4); A03(3,4)]; \\
 O4 &= [A04(1,4); A04(2,4); A04(3,4)]; \\
 O5 &= [A05(1,4); A05(2,4); A05(3,4)]; \\
 O6 &= [A06(1,4); A06(2,4); A06(3,4)];
 \end{aligned}$$

Figura 17 – Obtenção do deslocamento de cada junta.

$$\begin{aligned}
 O4 &= K \begin{bmatrix} 0; \\ 0; \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} -302 \\ 0 \\ -237 \end{bmatrix} \\
 O0 &\begin{bmatrix} 0; \\ 0; \\ 0 \end{bmatrix} \\
 O5 &= O1 \begin{bmatrix} 0; \\ 0; \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} -302 \\ 0 \\ -237 \end{bmatrix} \\
 O2 &\begin{bmatrix} 0; \\ 2; \\ 0 \end{bmatrix} \\
 O6 &= O3 \begin{bmatrix} 0; \\ 2; \\ 2 \end{bmatrix} \\
 &\quad \begin{bmatrix} -374 \\ 0 \\ -237 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura - 18

Prosseguindo, os Z's que representa o produto da matriz k com as matrizes de rotação  $R_0^n$ , resultando em matrizes 3x1. Vale notar que  $Z_0$  é o produto da rotação  $R_0^0$ , que gera uma matriz identidade, produto com K, resulta em uma matriz semelhante a K.

$$\begin{aligned}
 Z0 &= K \\
 Z1 &= \begin{bmatrix} A01(1,1) & A01(1,2) & A01(1,3); \\ A01(2,1) & A01(2,2) & A01(2,3); \\ A01(3,1) & A01(3,2) & A01(3,3) \end{bmatrix} * K \\
 Z2 &= \begin{bmatrix} A02(1,1) & A02(1,2) & A02(1,3); \\ A02(2,1) & A02(2,2) & A02(2,3); \\ A02(3,1) & A02(3,2) & A02(3,3) \end{bmatrix} * K \\
 Z3 &= \begin{bmatrix} A03(1,1) & A03(1,2) & A03(1,3); \\ A03(2,1) & A03(2,2) & A03(2,3); \\ A03(3,1) & A03(3,2) & A03(3,3) \end{bmatrix} * K \\
 Z4 &= \begin{bmatrix} A04(1,1) & A04(1,2) & A04(1,3); \\ A04(2,1) & A04(2,2) & A04(2,3); \\ A04(3,1) & A04(3,2) & A04(3,3) \end{bmatrix} * K \\
 Z5 &= \begin{bmatrix} A05(1,1) & A05(1,2) & A05(1,3); \\ A05(2,1) & A05(2,2) & A05(2,3); \\ A05(3,1) & A05(3,2) & A05(3,3) \end{bmatrix} * K
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z0} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{z1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{z2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{z3} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{z4} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{z5} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Figura 19 -

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \text{cross}(\mathbf{z0}, (\mathbf{06} - \mathbf{00})) & \text{cross}(\mathbf{z1}, (\mathbf{06} - \mathbf{01})) & \text{cross}(\mathbf{z2}, (\mathbf{06} - \mathbf{02})) & \text{cross}(\mathbf{z3}, (\mathbf{06} - \mathbf{03})) & \text{cross}(\mathbf{z4}, (\mathbf{06} - \mathbf{04})) & \text{cross}(\mathbf{z5}, (\mathbf{06} - \mathbf{05})) \\ \mathbf{z0} & \mathbf{z1} & \mathbf{z2} & \mathbf{z3} & \mathbf{z4} & \mathbf{z5} \end{bmatrix}$$

Figura 20 – Jacobiano do manipulador com a velocidade de cada articulação.

Vale notar que todas as articulações são rotacionais, por este motivo foi utilizado a forma semelhante para todas as juntas.

$J =$

0	-340	-70	0	0	0
-374	0	0	0	0	0
0	374	374	0	72	0
0	0	0	-1	0	-1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0

Figura 21 – Jacobiano final para o manipulador estudado.

## Geração de trajetórias das juntas do Manipulador

Daqui em diante, será apresentada a geração da trajetória feita pelo manipulador ABB IRB-120. Para isto, será calculado através de polinômios de 3° para as juntas 1, 2, e 3 e de 5° para as juntas 4, 5 e 6.

Os cálculos constam partindo da posição mínima que o manipulador pode atingir, sendo este o ponto inicial, ou posição inicial, indo até a posição máxima permitida. Para cada junta foi considerada um range diferente, isto com base no software RoKiSim. Para a velocidade inicial e final, considerou-se o robô como velocidade 0, assim ele parte do repouso e termina com velocidade 0. Por fim, para a aceleração, foi arbitrado valores iniciais e finais. Desta maneira, para cada junta foram feitos cálculos para determinar qual equação descreve a posição, velocidade e aceleração ao longo do tempo. Vale lembrar que para a junta 1, 2 e 3 foram adotadas equações de ordem 3, como poderá ver conferido na sequência de imagens para cada uma destas juntas. Além disso, para estas 3 juntas iniciais, não se considerou a aceleração.

### Junta 1 – Polinômio de 3°

Para efetuar cada uma dessas equações, como contas nos cálculos da posição, velocidade e aceleração, na junta 1 por exemplo, se atribuiu primeiramente 0 no tempo para a posição inicial, possibilitando achar o valor do coeficiente C0 para esta junta. Prosseguindo, fez-se o mesmo procedimento para a velocidade, sabendo que esta é a derivada da posição e assim foi encontrado C1. Voltado na equação da posição, que é um polinômio de terceiro grau, porém se adicionou o tempo final que este foi arbitrado como 5 segundos. Gerou-se uma equação com 2 incógnitas, C2 e C3. Na equação da velocidade, também foi atribuído o tempo de 5 segundos, também gerando uma equação com 2 variáveis, C2 e C3. Com as 2 equações, foi montado um sistema de 2 equações e 2 variáveis. Por meio do MATLAB, encontrou-se os valores de C2 e C3 que são os coeficientes faltantes para completar as equações que descrevem o movimento ao longo do tempo das juntas do manipulador, isto por meio de um sistema de equações, com consta na figura 23, por exemplo. Para as demais juntas, o procedimento é idêntico, porém com valores de ângulos diferentes.

*Junta 1*

$$\theta_1 = -165^\circ \quad \theta_2 = 165^\circ \quad t_i = 0, \quad t_f = 5, \quad \dot{\theta}(t_i) = 0 \quad \dot{\theta}(t_f) = 0$$

$$\theta(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3$$

$$\theta(0) = -165 = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + C_3(0)^3$$

$$\boxed{C_0 = -165}$$

$$\dot{\theta}(t) = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = C_1 + 2C_2(0) + 3C_3(0)^2 \rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\theta(5) = 165 = C_0 + C_1(5) + C_2(5)^2 + C_3(5)^3 = 165$$

$$\theta(5) = 165 = -165 + 25C_2 + 125C_3$$

$$\theta(5) = 330 = 25C_2 + 125C_3$$

$$\dot{\theta}(5) = 0 = C_1 + 2C_2(5) + 3C_3(5)^2$$

$$0 = 10C_2 + 75C_3$$

$$\begin{cases} 25C_2 + 125C_3 = 330 \\ 10C_2 + 75C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 25 & 125 \\ 10 & 75 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 330 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore C_0 = -165 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 39,6 \quad C_3 = -5,28$$

$$\theta(t) = C_0 + C_2 t^2 + C_3 t^3 = \begin{cases} \theta(t) = -165 + 39,6t^2 - 5,28t^3 \\ \dot{\theta}(t) = 2C_2 t + 3C_3 t^2 \end{cases}$$

*Junta 2*

Figura 22- Cálculo das equações que descrevem a velocidade, posição do manipulador.

```
clear;clc;
A = [25 125;
     10 75];
B = [330;0];
C = INV(A)*B;
```

Figura 23 – encontrando os coeficientes C2 e C3.

tempo(s)	posição(°)	velocidade(°/s)
0	-165	0
1	-130,68	63,36
2	-48,84	95,04
3	48,84	95,04
4	130,68	63,36
5	165	0

Figura 24 – Valores de posição e velocidade obtidos no intervalo de 0 a 5 segundos.



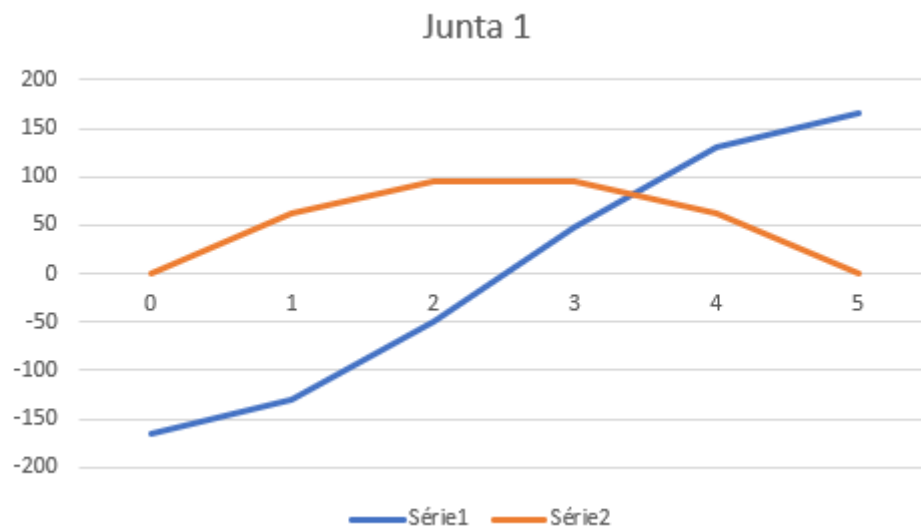


Figura 25 – Curva da posição e velocidade ao longo do tempo.

## Junta 2 – Polinômio de 3°

Junta 2

$$\theta_1 = -110^\circ \quad \theta_2 = 110^\circ \quad t_i = 0,5 \quad t_f = 5,0$$

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$

$$\theta(0) = -110 = c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2 + c_3(0)^3$$

$$\boxed{c_0 = -110}$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = c_1 + 2c_2(0) + 3c_3(0)^2$$

$$\boxed{c_1 = 0}$$

$$\theta(5) = 110 = \cancel{c_0} + 5\cancel{c_1} + 25c_2 + 125c_3$$

$$25c_2 + 125c_3 = 220$$

$$\dot{\theta}(5) = 0 = \cancel{c_1} + 2c_2 \cdot 5 + 3 \cdot 25c_3$$

$$0 = 10c_2 + 75c_3$$

$$\begin{cases} 25c_2 + 125c_3 = 220 \\ 10c_2 + 75c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 25 & 125 \\ 10 & 75 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 220 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$c_0 = -110 \quad c_1 = 0 \quad c_2 = 26,4 \quad c_3 = -3,52$$

$$\begin{cases} \theta(t) = -110 + 26,4 t^2 - 3,52 t^3 \\ \dot{\theta}(t) = 52,8 t - 10,56 t^2 \end{cases}$$

Figura 26 - Cálculo das equações que descrevem a velocidade e posição do manipulador.

```
clear;clc;
A = [25 125;
     10 75];
B = [220;0];
C = INV(A)*B;
```

Figura 27 – Código em MATLAB para determinar os coeficientes C2 e C3.

tempo(s)	posição(°)	velocidade(°/s)
0	-165	0
1	-130,68	63,36
2	-48,84	95,04
3	48,84	95,04
4	130,68	63,36
5	165	0

Figura 28 – Valores de posição e velocidade obtidos no intervalo de 0 a 5 segundos.

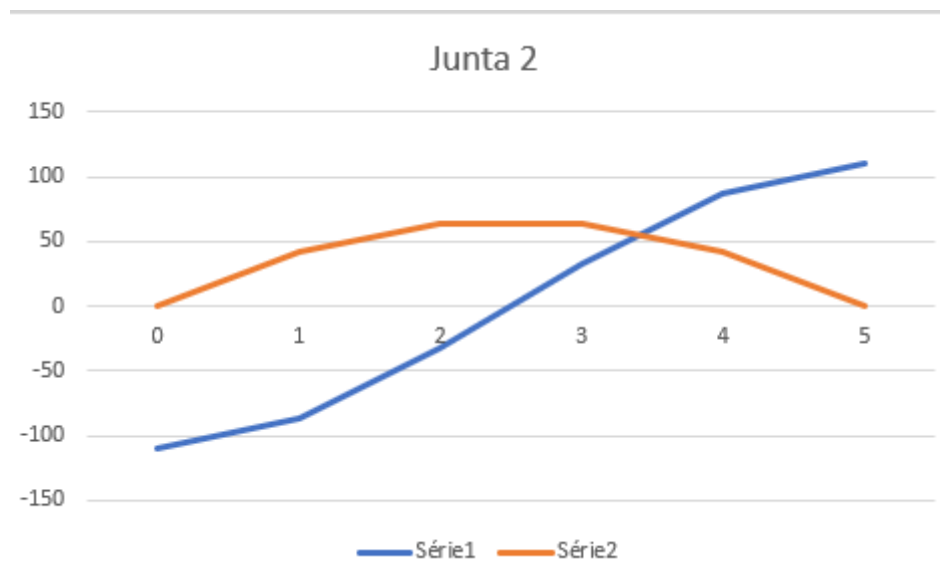


Figura 29 – Curva da posição e velocidade traçada ao longo do tempo.

## Junta 3

*Junta 3*

$$\theta_1 = -90^\circ \quad \theta_2 = 70^\circ \quad t_i = 0s \quad t_f = 5s$$

$$\theta(t) = C_0 + C_1(t) + C_2(t)^2 + C_3(t)^3$$

$$\theta(0) = -90 = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + C_3(0)^3$$

$$\boxed{C_0 = -90}$$

$$\dot{\theta}(t) = C_1 + 2C_2t + 3C_3t^2$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = C_1 + 2 \cdot 0 \cdot C_2 + 3 \cdot 0 \cdot C_3$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

$$\theta(5) = \cancel{-90} + \cancel{C_1(5)} + C_2(5)^2 + C_3(5)^3 = 70$$

$$160 = 25C_2 + 125C_3$$

$$\dot{\theta}(5) = 0 = \cancel{C_1} + 2 \cdot 5 \cdot C_2 + 3 \cdot 25 \cdot C_3$$

$$0 = 10C_2 + 75C_3$$

$$\begin{cases} 25C_2 + 125C_3 = 160 \\ 10C_2 + 75C_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 25 & 125 \\ 10 & 75 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 160 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$C_0 = -90 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 13,2 \quad C_3 = -2,56$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t) = -90 + 13,2t^2 - 2,56t^3 \\ \dot{\theta}(t) = 26,4t - 7,68t^2 \end{array} \right.$$

Figura 30 - Cálculo das equações que descrevem a velocidade, posição do manipulador.

```
clear;clc;
A = [25 125;
     10 75];
B = [160;0];
C = INV(A)*B;
```

Figura 31 – Código em MATLAB para determinar os coeficientes C2 e C3.

tempo(s)	posição(°)	velocidade(°/s)
0	-90	0
1	-73,36	30,72
2	-33,68	46,08
3	13,68	46,08
4	53,36	30,72
5	70	0

Figura 32 – Valores de posição e velocidade obtidos no intervalo de 0 a 5 segundos.

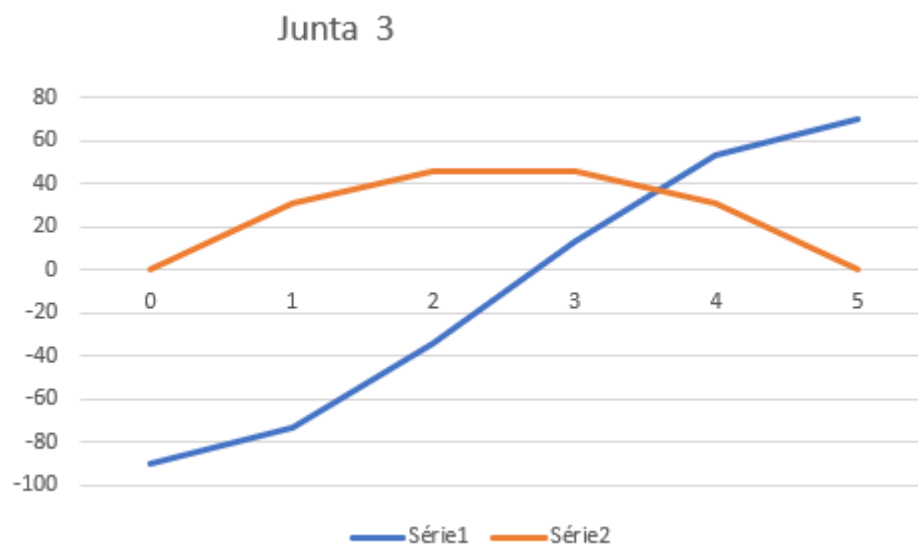


Figura 33 – Curva da posição e velocidade ao longo do tempo.

## Junta 4 - Polinômio de 5°

A partir da junta 4, será adotada o polinômio de 5° para descrever o movimento, sendo o procedimento muito semelhante ao feito nas juntas de 1 a 3, uma das exceções é que nestas 3 últimas juntas, será considerado a aceleração e esta foi arbitrada em alguns valores.

Junta 4

$$\theta_i = -160 \quad \theta_f = 160 \quad t_i = 0$$

$$t_f = 5 \text{ seg} \quad \ddot{\theta}_i = 5\% \quad \ddot{\theta}_f = -5\%$$

$$\dot{\theta}_i = 0 \quad \dot{\theta}_f = 0$$

$$\theta(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5$$

$$\theta(0) = -160 = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + C_3(0)^3 + C_4(0)^4 + C_5(0)^5$$

$$\boxed{C_0 = -160}$$

$$\dot{\theta}(t) = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + 4C_4 t^3 + 5C_5 t^4$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = C_1 + 2C_2(0) + 3C_3(0)^2 + 4C_4(0)^3 + 5C_5(0)^4$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2C_2 + 6C_3 t + 12C_4 t^2 + 20C_5 t^3$$

$$\ddot{\theta}(0) = 5 = 2C_2 + 6C_3(0) + 12C_4(0)^2 + 20C_5(0)^3$$

$$\boxed{C_2 = 2,5}$$

$$\theta(5) = -160 + C_2(5)^2 + C_3(5)^3 + C_4(5)^4 + C_5(5)^5$$

$$\theta(5) = -160 + 25C_2 + 125C_3 + 625C_4 + 3125C_5 = 160$$

$$62,5 + 125C_3 + 625C_4 + 3125C_5 = 320$$

$$125C_3 + 625C_4 + 3125C_5 = 257,5$$

$$\dot{\theta}(5) = 0 = 2 \cdot 5 \cdot C_2 + 3 \cdot (5)^2 C_3 + 4 \cdot (5)^3 C_4 + 5 \cdot (5)^4 C_5$$

$$\dot{\theta}(5) = -5 = 2 \cdot (2,5) + 6 \cdot C_3(5) + 12 \cdot C_4(5)^2 + 20 \cdot C_5(5)^3$$

$$30C_3 + 300C_4 + 2500C_5 = -10$$

$$\begin{cases} \theta(t) = 125C_3 + 625C_4 + 3125C_5 = 257,5 \\ \dot{\theta}(t) = 75C_3 + 500C_4 + 3125C_5 = -25 \\ \ddot{\theta}(t) = 30C_3 + 300C_4 + 2500C_5 = -10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta(t) = 125C_3 + 625C_4 + 3125C_5 = 257,5 \\ \dot{\theta}(t) = 75C_3 + 500C_4 + 3125C_5 = -25 \\ \ddot{\theta}(t) = 30C_3 + 300C_4 + 2500C_5 = -10 \end{cases}$$

$$C_1 = -160 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 2,5 \quad C_3 = 23,6$$

$$C_4 = -7,18 \quad C_5 = 0,5744$$

$$\begin{cases} \theta(t) = -160 + 2,5t^2 + 23,6t^3 - 7,18t^4 + 0,5744t^5 \\ \dot{\theta}(t) = 5t + 47,2t^2 - 29,52t^3 + 2,972t^4 \\ \ddot{\theta}(t) = 5 + 94,4t - 88,56t^2 + 11,88t^3 \end{cases}$$

Figura 34 - Cálculo das equações que descrevem a velocidade, posição do manipulador.

```
clear;clc;

D = [125 625 3125;
     75 500 3125;
     30 300 2500];
E = [257.5;-25;-10];
F = INV(D)*E;
```

Figura 35 – Código em MATLAB para determinar os coeficientes C2 e C3.

tempo(s)	posição(°)	velocidade(°/s)	aceleração(°/s*s)
0	-160	0	5
1	-140,1856	50,752	71,928
2	-56,2592	110,592	35,464
3	59,8592	109,392	-35,464
4	141,7856	48,352	-71,928
5	160	0	-5

Figura 36 – Valores de posição e velocidade obtidos no intervalo de 0 a 5 segundos.

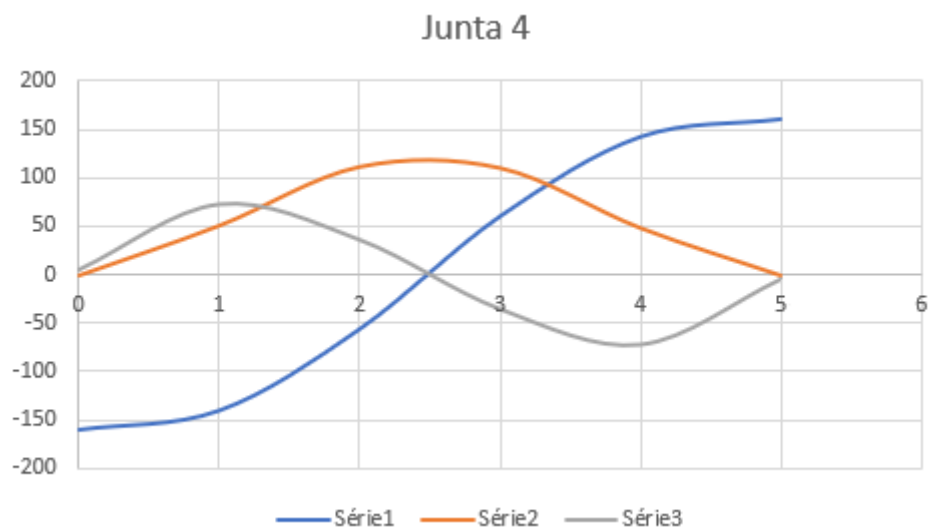


Figura 37 – Curva da posição e velocidade ao longo do tempo.

## Junta 5

Junta 5

$$\theta_i = -120^\circ \quad \theta_f = 120^\circ \quad t_i = 0 \quad t_f = 5 \quad \ddot{\theta}_i = 5\% \quad \ddot{\theta}_f = 0,5\%$$

$$\theta(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + c_5 t^5$$

$$\theta(0) = -120 = c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2 + c_3(0)^3 + c_4(0)^4 + c_5(0)^5$$

$$\boxed{c_0 = -120}$$

$$\dot{\theta}(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + 5c_5 t^4$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = c_1 + 2c_2(0) + 3c_3(0)^2 + 4c_4(0)^3 + 5c_5(0)^4$$

$$\boxed{c_1 = 0}$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + 20c_5 t^3$$

$$\ddot{\theta}(0) = 5 = 2c_2 + 6c_3(0) + 12c_4(0)^2 + 20c_5(0)^3$$

$$\boxed{c_2 = 2,5}$$

$$\theta(5) = 120 = -120 + 2,5(5)^2 + 125c_3 + 625c_4 + 3125c_5$$

$$177,5 = 125c_3 + 625c_4 + 3125c_5$$

$$125c_3 + 625c_4 + 3125c_5 = 177,5$$

$$\dot{\theta}(5) = 0 = 2,5 + 75c_3 + 500c_4 + 3125c_5$$

$$75c_3 + 500c_4 + 3125c_5 = -2,5$$

$$\ddot{\theta}(5) = 5 = 5 + 30c_3 + 300c_4 + 2500c_5$$

$$30c_3 + 300c_4 + 2500c_5 = -10$$

$$\begin{cases} 125c_3 + 625c_4 + 3125c_5 = 177,5 \\ 75c_3 + 500c_4 + 3125c_5 = -2,5 \\ 30c_3 + 300c_4 + 2500c_5 = -10 \end{cases}$$

$$c_0 = -120 \quad c_1 = 0 \quad c_2 = 2,5 \quad c_3 = 17,2$$

$$c_4 = -5,26 \quad c_5 = 0,4208$$

$$\begin{cases} \theta(t) = -120 + 2,5t^2 + 17,2t^3 - 5,26t^4 + 0,4208t^5 \\ \dot{\theta}(t) = 5t + 51,6t^2 - 21,04t^3 + 2,104t^4 \\ \ddot{\theta}(t) = 5 + 103,2t - 63,12t^2 + 8,416t^3 \end{cases}$$

Figura 38 - Cálculo das equações que descrevem a velocidade, posição do manipulador.



```
clear;clc;

D = [125 625 3125;
     75 500 3125;
     30 300 2500];
E = [177.5;-25;-10];
F = INV(D)*E;
```

Figura 39 – Código em MATLAB para determinar os coeficientes C2 e C3.

tempo(s)	posição(°)	velocidade(°/s)	aceleração(°/s*s)
0	-120	0	5
1	-105,1392	37,664	53,496
2	-43,0944	81,744	26,248
3	43,0944	81,744	-26,248
4	105,1392	37,664	-53,496
5	120	0	-5

Figura 40 – Valores de posição e velocidade obtidos no intervalo de 0 a 5 segundos.

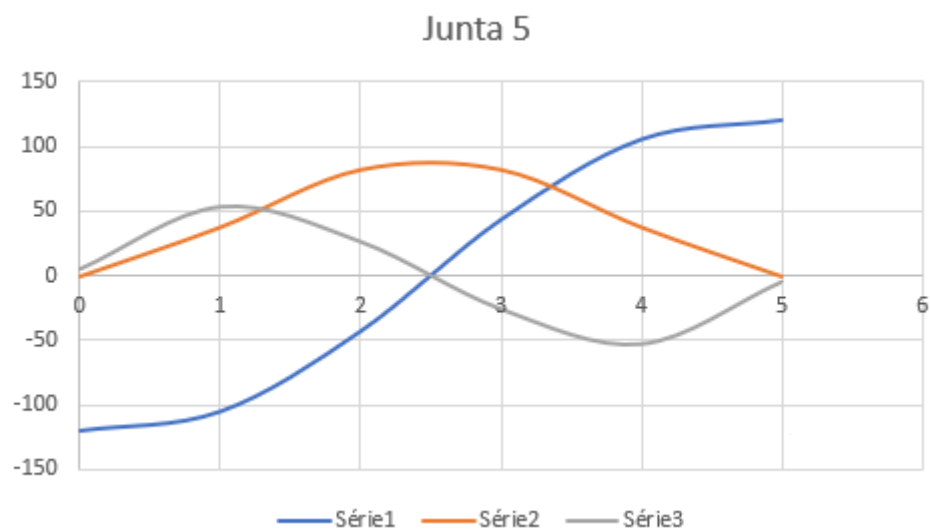


Figura 41– Curva da posição e velocidade ao longo do tempo.

## Junta 6

Junta 6

$$\theta_i = -400^\circ \quad \theta_f = 400^\circ \quad t_i = 0 \quad t_f = 5 \quad \ddot{\theta}_i = 5\% \quad \ddot{\theta}_f = -5\%$$

$$\theta(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5$$

$$\theta(0) = -400 = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + C_3(0)^3 + C_4(0)^4 + C_5(0)^5$$

$$\boxed{C_0 = -400}$$

$$\dot{\theta}(t) = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + 4C_4 t^3 + 5C_5 t^4$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 = C_1 + 2C_2(0) + 3C_3(0)^2 + 4C_4(0)^3 + 5C_5(0)^4$$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2C_2 + 6C_3 t + 12C_4 t^2 + 20C_5 t^3$$

$$\ddot{\theta}(0) = 5 = 2C_2 + 6C_3(0) + 12C_4(0)^2 + 20C_5(0)^3$$

$$\boxed{C_2 = 2,5}$$

$$\theta(5) = 400 = -400 + 2,5(5)^2 + C_3(5)^3 + C_4(5)^4 + C_5(5)^5$$

$$800 = 2,5 \cdot 25 + 125C_3 + 625C_4 + 3125C_5$$

$$125C_3 + 625C_4 + 3125C_5 = 737,5$$

$$\dot{\theta}(5) = 0 = C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + 4C_4 t^3 + 5C_5 t^4$$

$$0 = 2 \cdot (2,5) \cdot 5 + 3 \cdot C_3 \cdot (25) + 4 \cdot C_4 (125) + 5 \cdot C_5 (625)$$

$$0 = 25 + 75C_3 + 500C_4 + 3125C_5$$

$$75C_3 + 500C_4 + 3125C_5 = -25$$

$$\ddot{\theta}(5) = 2C_2 + 6C_3(5) + 12C_4(5)^2 + 20C_5(5)^3 = -5$$

$$-5 = 5 + 30C_3 + 300C_4 + 2500C_5 =$$

$$30C_3 + 300C_4 + 2500C_5 = -10$$

$$\begin{cases} \theta(t) = 125C_3 + 625C_4 + 3125C_5 = 737,5 \\ \dot{\theta}(t) = 75C_3 + 500C_4 + 3125C_5 = -25 \\ \ddot{\theta}(t) = 30C_3 + 300C_4 + 2500C_5 = -10 \end{cases}$$

$$C_0 = -400 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 2,5 \quad C_3 = 62 \quad C_4 = -18,7 \quad C_5 = 1,436$$

$$\begin{cases} \theta(t) = -400 + 2,5t^2 + 62t^3 - 18,7t^4 + 1,436t^5 \\ \dot{\theta}(t) = 5t + 186t^2 - 74,8t^3 + 7,48t^4 \\ \ddot{\theta}(t) = 5 + 372t - 224,4t^2 + 29,92t^3 \end{cases}$$

Figura 42 - Cálculo das equações que descrevem a velocidade, posição do manipulador.

```
clear;clc;

D = [125 625 3125;
     75 500 3125;
     30 300 2500];
E = [737.5;-25;-10];
F = INV(D)*E;
```

Figura 43 – Código em MATLAB para determinar os coeficientes C2 e C3.

tempo(s)	posição(°)	velocidade(°/s)	aceleração(°/s*s)
0	-400	0	5
1	-352,704	123,68	182,52
2	-145,328	275,28	90,76
3	145,328	275,28	-90,76
4	352,704	123,68	-182,52
5	400	0	-5

Figura 44 – Valores de posição e velocidade obtidos no intervalo de 0 a 5 segundos.

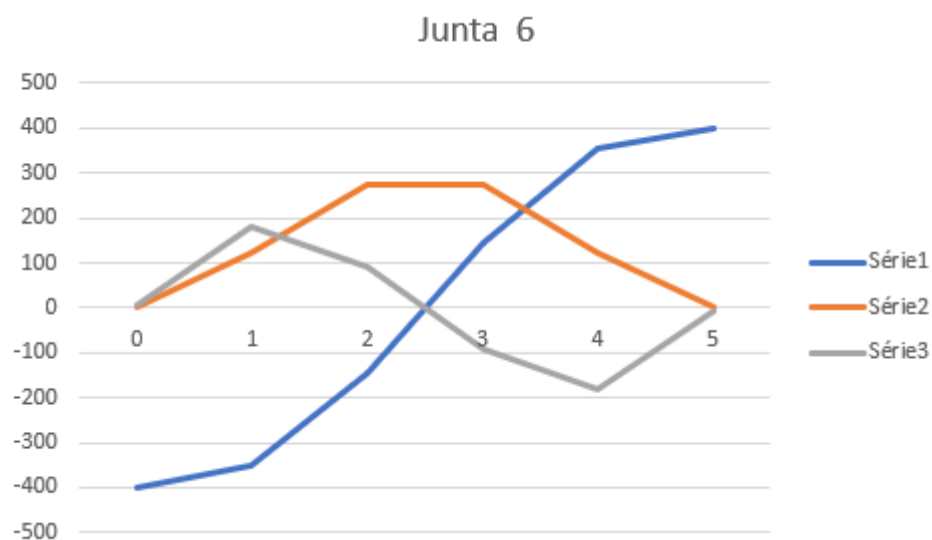


Figura 45 – Curva da posição e velocidade ao longo do tempo.

```
A06 =

0    0    -1   -374
0    1     0     0
1    0     0   -237
0    0     0     1
```

Figura 46 – Matriz de transformação total.

Desta forma, conclui-se este longo trabalho em que foi possível compreender da anatomia do manipulador ABB IRB 120, na segunda parte principalmente sobre com se dá a movimentação de suas partes.

## Fontes Consultadas

<https://www.directindustry.com/pt/prod/abb-robotics/product-30265-565867.html>

<https://www.monografias.ufop.br/handle/35400000/441>

<https://www.monografias.ufop.br/handle/35400000/1355>

[1] Supra, Arpos, 20 de dezembro de 2014, Cinemática Diferencial

<https://pt.slideshare.net/ArpusSupra/cinematica-diferencial>