Robótica
O Jacobiano – Parte 1

Prof. Leonardo Paiva
Universidade Federal de Lavras

PROGRAMA

- CINEMÁTICA DIFERENCIAL DE MANIPULADORES SERIAIS
  - Problemática da Cinemática Diferencial
  - Jacobiano Direto
  - Jacobiano Inverso
  - Exemplos
  - Singularidades

PROBLEMÁTICA

- Qual a relação existente entre as derivadas (velocidades, aceleração) dos eixos de juntas em relação as coordenadas do efetuador final?

- Se a extremidade da mão deve descrever um certo deslocamento (incremento) no espaço durante um dado intervalo de tempo, que deslocamentos (incrementos) devem ter as diversas juntas?

Caminho e Trajetória

- No controle de robôs é mais simples definir “caminhos” do que “trajetórias”!!!

- CAMINHO: Conjunto de pontos no espaço (operacional ou das juntas) que deve ser percorrido em uma determinada ordem;

- TRAJETÓRIA: Define um caminho levando em conta restrições temporais, ou seja, são definidos intervalos de tempo para a evolução entre duas configurações sucessivas;

Relembrando

variáveis das juntas → **CINEMÁTICA DIRETA** → *Posição e orientação do OT com relação ao sistema da base*

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6 \qquad \mathbf{p} = \mathbf{H}(\mathbf{q}) \qquad p_x, p_y, p_z, \phi, \theta, \psi$$

Posição e orientação do OT com relação ao sistema da base → **CINEMÁTICA INVERSA** → *variáveis das juntas*

$$p_x, p_y, p_z, \phi, \theta, \psi \qquad \mathbf{q} = f(\mathbf{p}) \qquad \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$$

O Jacobiano

Para muitas tarefas, precisamos saber a velocidade do órgão através da velocidade de cada junta, e vice-versa.

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

Juntas rotativas $\boldsymbol{\theta_i}$
ou prismáticas $\boldsymbol{d_i}$

Velocidades lineares $\boldsymbol{v_i}$
e angulares $\boldsymbol{\omega_i}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

O Jacobiano

- **Junta prismática:**

  gera **velocidade linear** apenas

- **Junta rotativa:**

  gera **velocidades angular** e **linear**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Jacobiano

- Relaciona as velocidades no espaço das juntas com velocidades no espaço cartesiano

$$d\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{J} \cdot d\vec{\mathbf{q}}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix} \underset{\text{Inversa}}{\overset{\text{Direta}}{\rightleftarrows}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix}$$

Cinemática

Espaço de juntas

Espaço operacional

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \\ \dot{\theta}_6 \end{bmatrix} \overset{\text{Matriz Jacobiana}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

O JACOBIANO

As relações entre velocidades no espaço das juntas e velocidades no espaço cartesiano são dadas pelo ***JACOBIANO***.

Para $\boldsymbol{n}$ GDL:

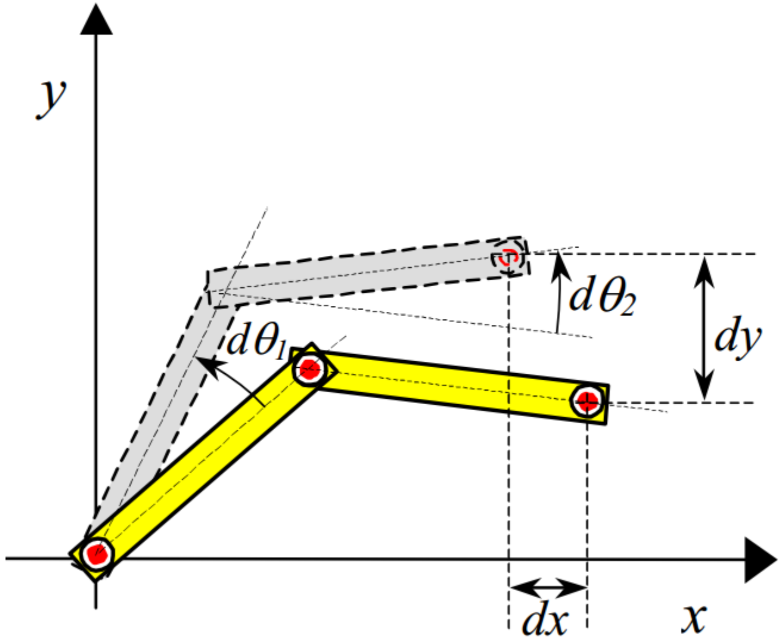
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{6\times 1} = \begin{bmatrix} & & \\ & \mathbf{J}(\mathbf{q}) & \\ & & \end{bmatrix}_{6\times n} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_{n-1} \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

JACOBIANO – EX: TWO LINKS PLANAR

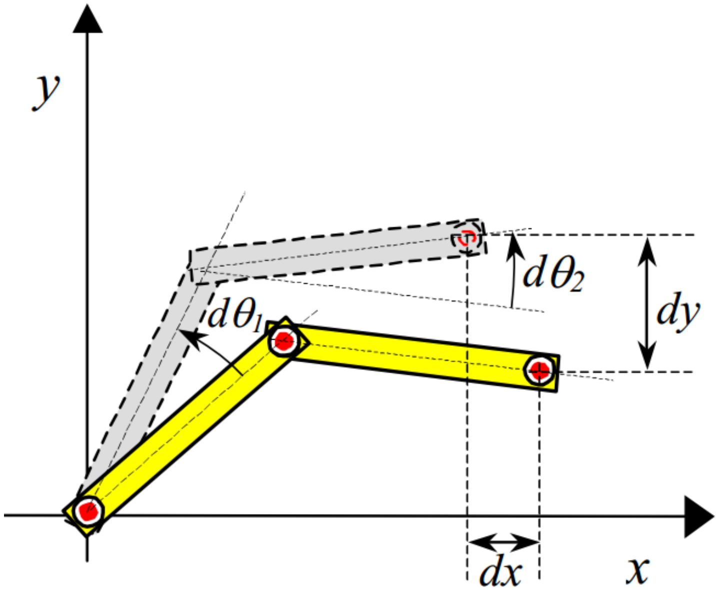
Obtenha o jacobiano simbólico para o manipulador 2DOF planar mostrado na imagem abaixo



Cinemática direta:

$$\begin{cases} x = L_1 C_1 + L_2 C_{12} \\ y = L_1 S_1 + L_2 S_{12} \end{cases}$$

Jacobiano – EX: two links planar



Cinemática direta:

$$\begin{cases} x = L_1C_1 + L_2C_{12} \\ y = L_1S_1 + L_2S_{12} \end{cases}$$

Obtenha o jacobiano numérico considerando os seguintes dados

a1 = a2 = 2 u.m
Θ1 = 30
Θ2 = 50
dΘ1 = 5º/s
dΘ2 = 2º/s

JACOBIANO

- Também pode ser obtido geometricamente por:

$$J = \begin{bmatrix} J_{P1} & \cdots & J_{Pn} \\ J_{O1} & \cdots & J_{On} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{Pi} \\ J_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}, junta\_prism\acute{a}tica \\ \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (p - p_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}, junta\_rotacional \end{cases}$$

- Sendo:
  - z_{i-1} é a terceira coluna de $^{0}R_{i-1}$
  - p é o vetor posição da matriz $^{0}T_{n}$
  - p_{i-1} é o vetor posição da matriz $^{0}T_{i-1}$

O Jacobiano

Para um manipulador de ***n*** GDL:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{J}_{n-1} & \mathbf{J}_n \end{bmatrix}$$

A ***i***-ésima coluna de **J** é dada por:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}$$

(junta rotativa)

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

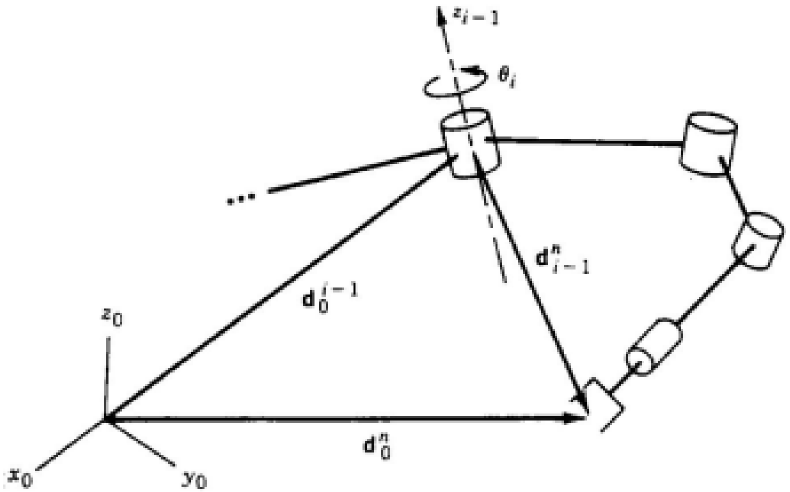
(junta prismática)

O JACOBIANO

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

z_{i-1} é o vetor unitário que representa $\mathbf{R}_0^{i-1}\mathbf{k}$

o_{i-1} é o vetor que liga a origem O_0 ao sistema O_{i-1}



$$\mathbf{o}_n = \mathbf{d}_0^n$$

$$\mathbf{o}_{i-1} = \mathbf{d}_0^{i-1}$$

$$z_{i-1} = \mathbf{R}_0^{i-1}\mathbf{k}$$

O JACOBIANO

$$\mathbf{o}_n = \mathbf{d}_0^n \qquad \mathbf{o}_{i-1} = \mathbf{d}_0^{i-1} \qquad z_{i-1} = \mathbf{R}_0^{i-1}\mathbf{k}$$

Lembrando da matriz de transformação homogênea...

$$\mathbf{H}_0^n = \mathbf{H}_0^1\mathbf{H}_1^2\cdots\mathbf{H}_{n-2}^{n-1}\mathbf{H}_{n-1}^n \qquad \mathbf{H}_0^n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^n & \boxed{\mathbf{d}_0^n} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\mathbf{o}_n}$$

$$\mathbf{H}_0^{i-1} = \mathbf{H}_0^1\mathbf{H}_1^2\cdots\mathbf{H}_{i-2}^{i-1} \qquad \mathbf{H}_0^{i-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{R}_0^{i-1}} & \boxed{\mathbf{d}_0^{i-1}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\mathbf{o}_{i-1}}$$

$$\boxed{z_{i-1} = \text{terceira coluna de } \mathbf{R}_0^{i-1}}$$

O Jacobiano

Resumindo...
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{J}_{n-1} & \mathbf{J}_n \end{bmatrix}_{6\times n}$$

- Junta rotativa: $$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \times (\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1}) \\ z_{i-1} \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

Velocidade linear

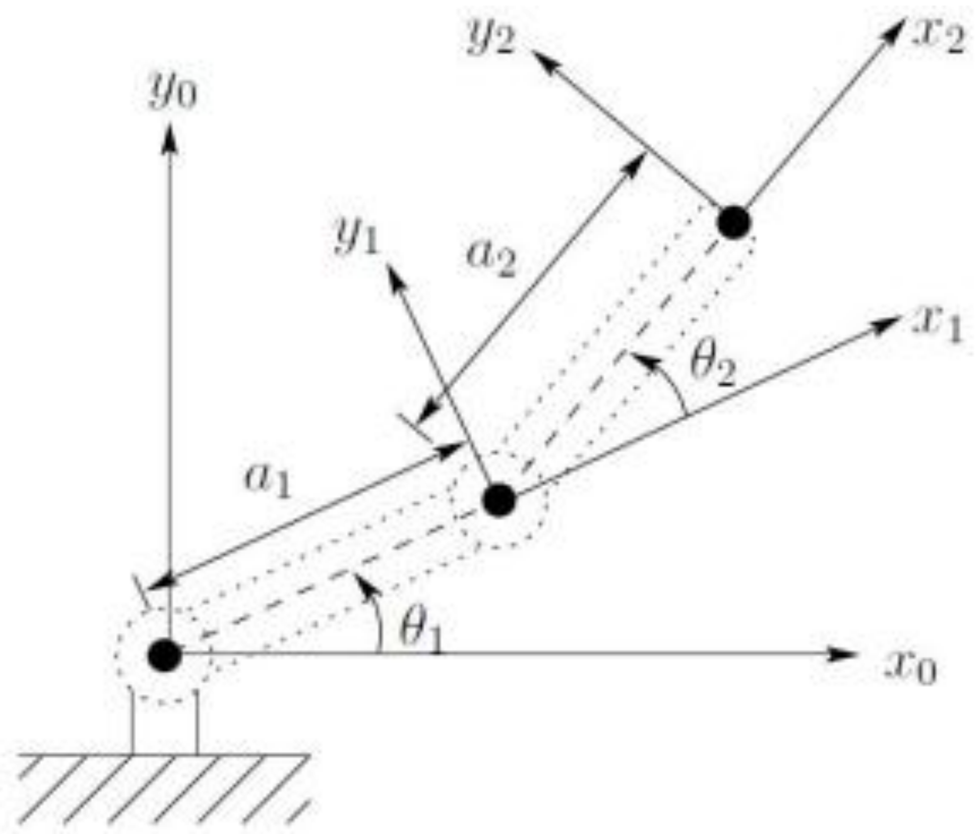
- Junta prismática: $$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}_{6\times 1}$$

Velocidade angular

- De $\mathbf{H}_0^n$ e $\mathbf{H}_0^{i-1}$: $\mathbf{o}_n = \mathbf{d}_0^n \quad \mathbf{o}_{i-1} = \mathbf{d}_0^{i-1} \quad z_{i-1} = \mathbf{R}_0^{i-1}\mathbf{k}$

Exercício 1

Calcule o jacobiano para o manipulador planar de 2GDL



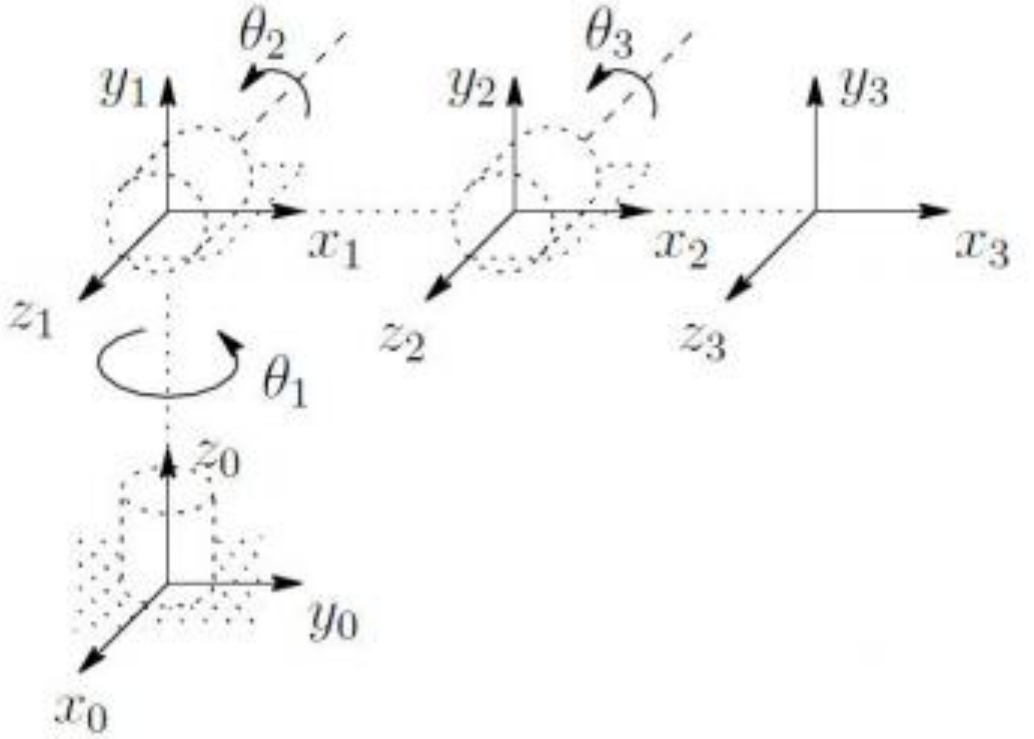
Exercício 1 continuação

Obtenha o jacobiano numérico considerando os seguintes dados

a1 = a2 = 2 u.m
$\Theta 1 = 30$
$\Theta 2 = 50$
$d\Theta 1 = 5º/s$
$d\Theta 2 = 2º/s$

EXERCÍCIO 2

Para o robô articulado, calcule o jacobiano considerando



Exercício 2 (continuação)

Obtenha o Jacobiano numérico considerando os seguintes dados:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90^\circ \\ 30^\circ \\ -60^\circ \end{bmatrix} \qquad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\ {}^\circ/s \\ 3\ {}^\circ/s \\ 1\ {}^\circ/s \end{bmatrix}$$