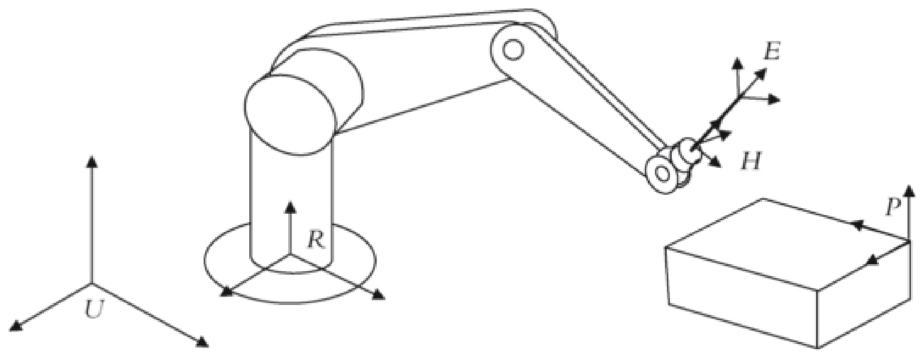
Robótica
Introdução a cinemática de orientação
Ângulos de Euler e RAG

Prof. Leonardo Paiva
Universidade Federal de Lavras

Inversa de matrizes de transformação

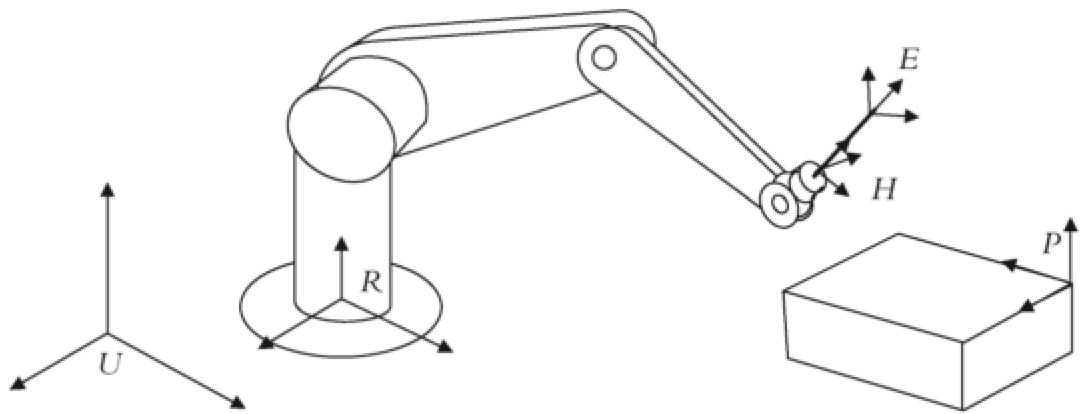


Dado o robô da figura acima, considere que ele esta sendo movido na direção P, a fim de se fazer um furo na peça.

A posição da base em relação ao sistema de referência U é descrita por um referencial R, a mão do robô é descrita pelo referencial H, e o atuador final (o fim da broca usada para fazer o furo) é descrito pelo referencial E. A posição da peça é descrita pelo referencial P.

A localização de onde o furo será feito em relação a U é feita por dois caminhos independentes: um por meio da peça e outro pelo robô:

Logo: $T_E^U = T_R^U T_H^R T_E^H = T_P^U T_E^P$



$$T_E^U = T_R^U T_H^R T_E^H = T_P^U T_E^P$$

Em relação a equação de localização do ponto em relação ao sistema de referencia, quais as transformações conhecidas ??

REPRESENTAÇÃO DA MATRIZ DE ROTAÇÃO (ORIENTAÇÃO) USANDO ÂNGULOS DE EULER

O teorema da rotação de Euler (de 1775) afirma que a orientação de um quadro de coordenadas 3D em relação a outro pode ser descrita por “ *rotação sucessiva em torno de três eixos, de modo que não haja duas rotações sucessivas em torno do mesmo eixo”*.

No entanto, existem doze permutações diferentes de rotações em torno de três eixos que atendem aos critérios de Euler: XYX, XYZ, XZX, XZY, YXY, YXZ, YZX, YZY, ZXY, ZXZ, ZYX, ZYZ.

Por que 12? Para a primeira rotação tenho 3 eixos para escolher. Para a segunda rotação posso escolher um eixo diferente do primeiro, portanto apenas duas escolhas. Para a terceira rotação posso escolher um eixo diferente do segundo, portanto, novamente, apenas duas opções. O número de escolhas é, portanto, 3x2x2 = 12.

.

REPRESENTAÇÃO DA MATRIZ DE ROTAÇÃO (ORIENTAÇÃO) USANDO ÂNGULOS DE EULER

Podemos dividir essas doze permutações em dois grupos de seis:

Euleriano: envolve a repetição, mas não sucessivamente, de rotações em torno de um eixo específico: XYX, XZX, YXY, YZY, ZXZ ou ZYZ.

Cardaniano: envolve rotações em torno de todos os três eixos: XYZ, XZY, YZX, YXZ, ZXY ou ZYX.

Em robótica de manipuladores o mais comumente usado é a rotação **Euleriana ZYZ**

Euler Angles

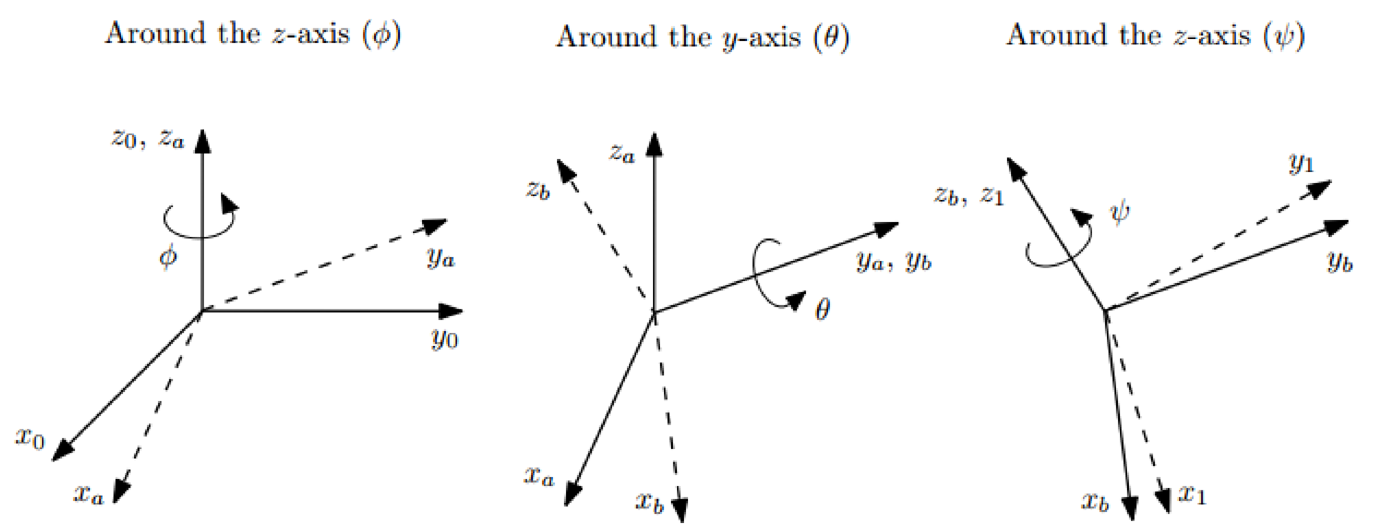


Figure: Euler angle representation by **3** rotations about current axes.

$$R_{ZYZ} := R_{z,\phi}\, R_{y,\theta}\, R_{z,\psi}$$

Euler Angles

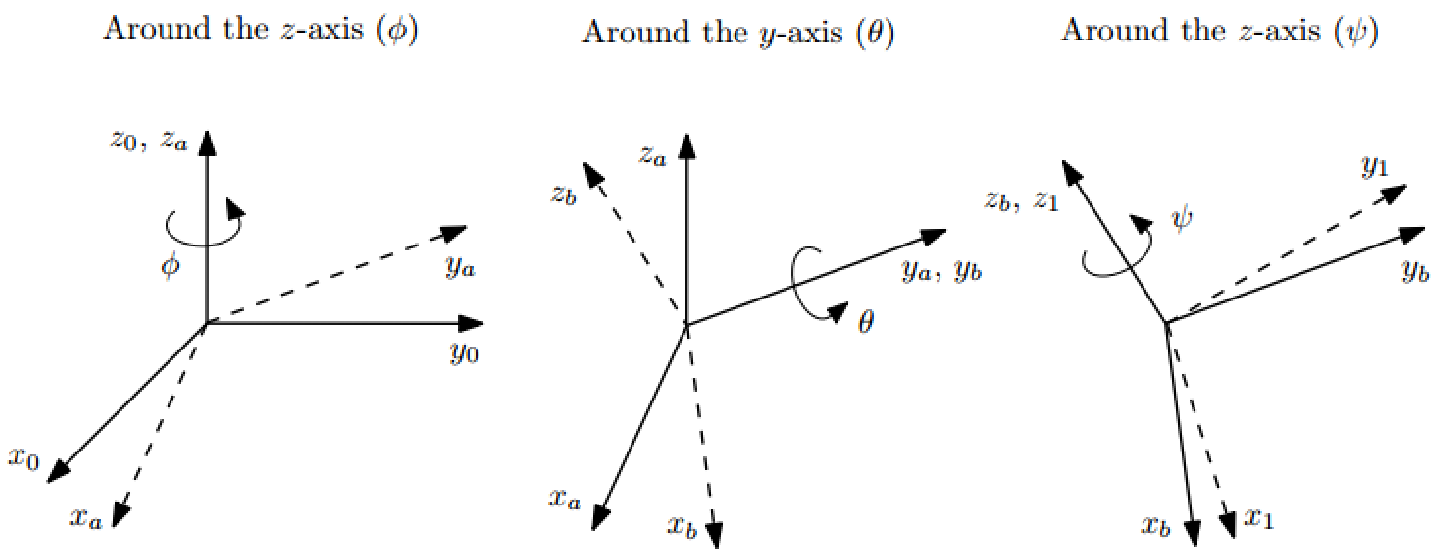


Figure: Euler angle representation by **3** rotations about current axes.

$$\boldsymbol{R_{ZYZ}} := \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{R_{y,\theta}\, R_{z,\psi}}$$

Euler Angles

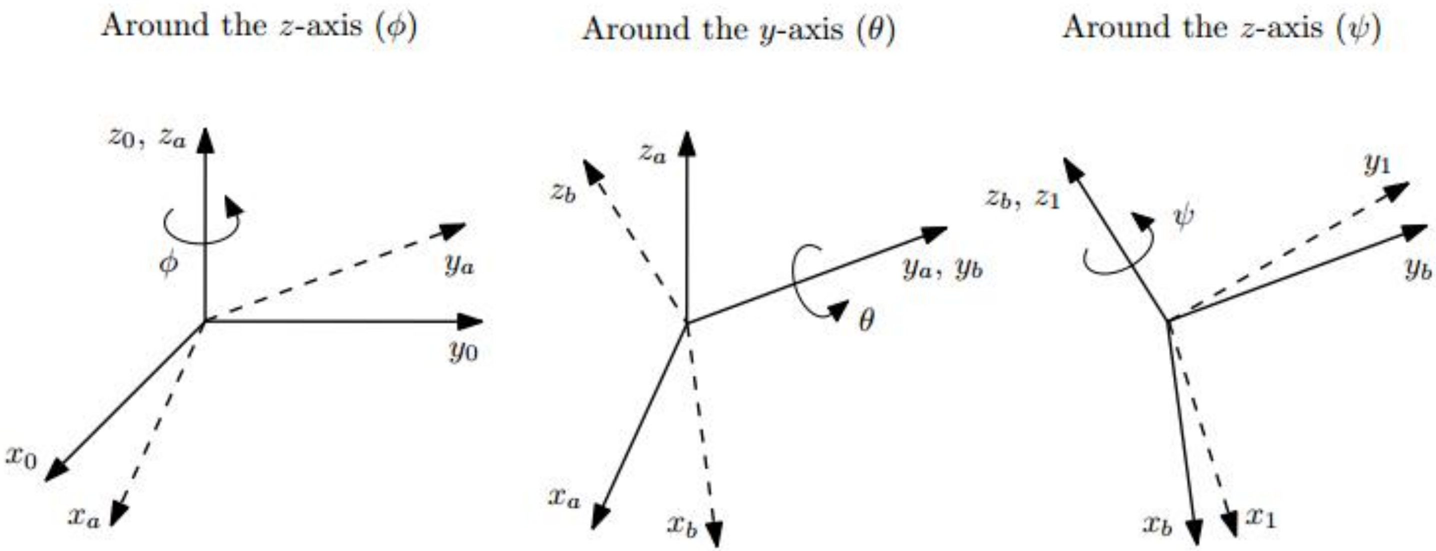


Figure: Euler angle representation by **3** rotations about current axes.

$$R_{ZYZ} := \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} R_{z,\psi}$$

Euler Angles

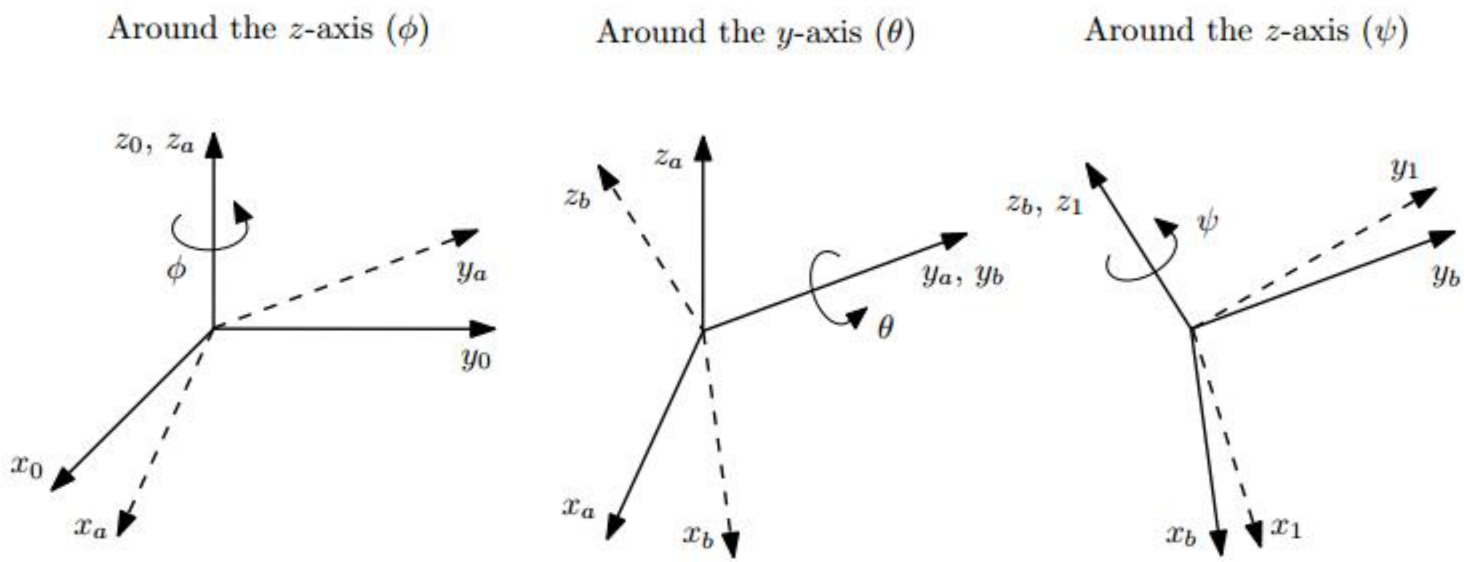


Figure: Euler angle representation by 3 rotations about current axes.

$$R_{ZYZ} := \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Euler Angles

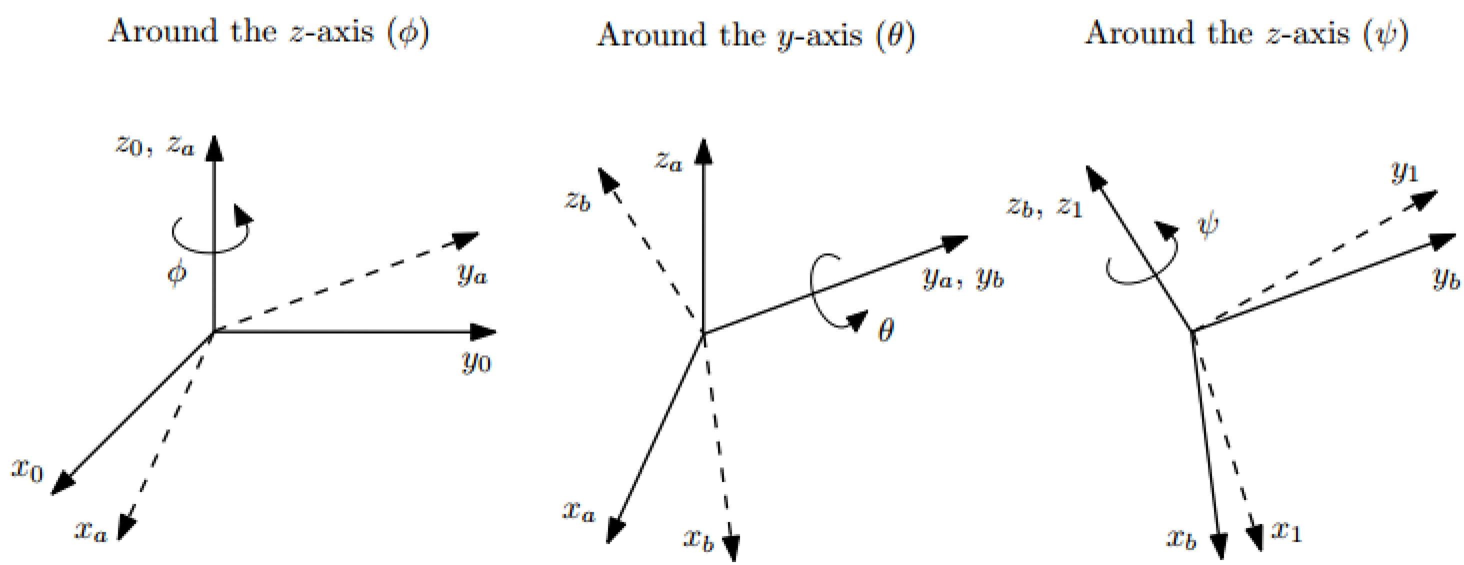


Figure: Euler angle representation by **3** rotations about current axes.

$$\boldsymbol{R_{ZYZ}} := \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

Given the rotation matrix $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

How to find angles ϕ, θ, ψ?

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{ZYZ} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

Given the rotation matrix $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

How to find angles ϕ, θ, ψ?

$$R = R_{ZYZ} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \\ {r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \\ {r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Case 1: $r_{33} = \pm 1$

$$r_{13} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = 0$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \\ {r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Case 1: $r_{33} = \pm 1$

$$r_{13} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = 0$$

$$r_{33} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1, \quad \sin\theta = 0$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) & 0 \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \\ {r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Case 1: $r_{33} = \pm 1$

$$r_{13} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = 0$$

$$r_{33} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1, \quad \sin\theta = 0$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{?}{\rightarrow} \begin{bmatrix} \cos(\phi+\psi) & -\sin(\phi+\psi) & 0 \\ \sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \\ {r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Case 1: $r_{33} = \pm 1$

$$r_{13} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = 0$$

$$r_{33} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = 1, \quad \sin\theta = 0$$

$$\theta = 0, \quad \phi + \psi = \text{atan2}\,(Y, X) = \text{atan2}\,(r_{21}, r_{11})$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \\ {r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Case 2: ${r_{33}}^2 < 1$

$${r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 \neq 0, \quad \{{r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 \neq 0\}$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{?} \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \\ {r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Case 2: ${r_{33}}^2 < 1$

$${r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 \neq 0, \quad \{{r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 \neq 0\}$$

$$r_{33} = \cos\theta, \quad \{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1\}$$

Determining Euler Angles from a Rotation Matrix

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \overset{?}{\rightarrow} \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \\ {r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 + {r_{33}}^2 &= 1 \end{aligned}$$

Case 2: ${r_{33}}^2 < 1$

$${r_{13}}^2 + {r_{23}}^2 \neq 0, \quad \{{r_{31}}^2 + {r_{32}}^2 \neq 0\}$$

$$r_{33} = \cos\theta, \quad \sin\theta = \pm\sqrt{1 - {r_{33}}^2}$$

$$\theta = \operatorname{atan2}(\pm\sqrt{1 - {r_{33}}^2}, r_{33})$$

$$\phi = \operatorname{atan2}(\pm r_{23}, \pm r_{13}), \quad \psi = \operatorname{atan2}(\pm r_{32}, \mp r_{31})$$

Roll, Pitch and Yaw Angles

- Os ângulos cardanianos também são conhecidos como **ângulos de rotação, inclinação e guinada** .

  É confuso que existam duas versões diferentes em uso comum, as sequências XYZ e ZYX. Os livros didáticos não são nada consistentes nesse assunto.

  Se houver algum padrão para a inconsistência é que a comunidade de robôs móveis (drones, veículos terrestres) usa ZYX enquanto a comunidade de manipuladores de robôs usa XYZ.

Roll, Pitch and Yaw Angles

Figure: Yaw (ψ), pitch (θ), roll (ϕ) — **3** rotations about fixed axes x, y, z.

$$R_{xyz} := \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}$$

$$R_{xyz} := \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

$$R_{xyz} := \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

Roll, Pitch and Yaw Angles

$$RPY(\phi,\theta,\psi) = ROT(z,\phi)\ .\ ROT(y,\theta)\ .\ ROT(z,\psi)$$

$$RPY(\phi,\theta,\psi) = \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\phi S\theta S\psi - S\phi C\psi & C\phi S\theta C\psi + S\phi S\psi \\ S\phi C\theta & -S\phi S\theta S\psi + C\phi C\psi & S\phi S\theta C\psi - C\phi S\psi \\ -S\theta & C\theta S\psi & C\theta C\psi \end{bmatrix}$$

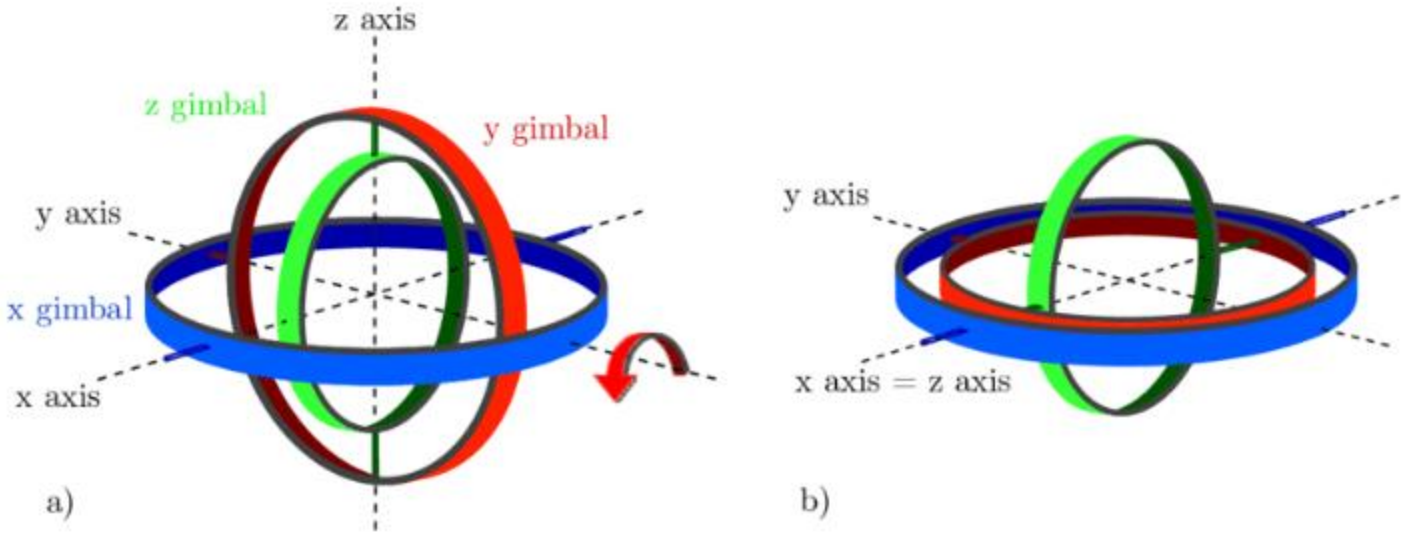
$$\emptyset a = atan2d(ny, nx)$$

$$\emptyset o = atan2d(-nz, (nx * cos(\emptyset a) + ny * sen(\emptyset a))$$

$$\emptyset n = atan2d((-aycos(\emptyset a) + axsen(\emptyset a), (oycos(\emptyset a) - oxsen(\emptyset a))$$

$$\begin{bmatrix} nx & ox & ax & px \\ ny & oy & ay & py \\ nz & oz & az & pz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gimbal Lock


z axis
z gimbal
y gimbal
y axis
x gimbal
x axis
a)
y axis
x axis = z axis
b)

Gimbal Lock

Exercício 1:

1) A posição e orientação final desejada da mão de um robô cartesiano RAG são dadas abaixo. Encontre os ângulos RAG e deslocamentos necessários

$$T_P^R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}354 & -0{,}674 & 0{,}649 & 4{,}33 \\ 0{,}505 & 0{,}722 & 0{,}475 & 2{,}50 \\ -0{,}788 & 0{,}160 & 0{,}595 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Para a mesma posição e orientação, encontre todas as variáveis articulares necessárias se o robô é cilíndrico RAG.

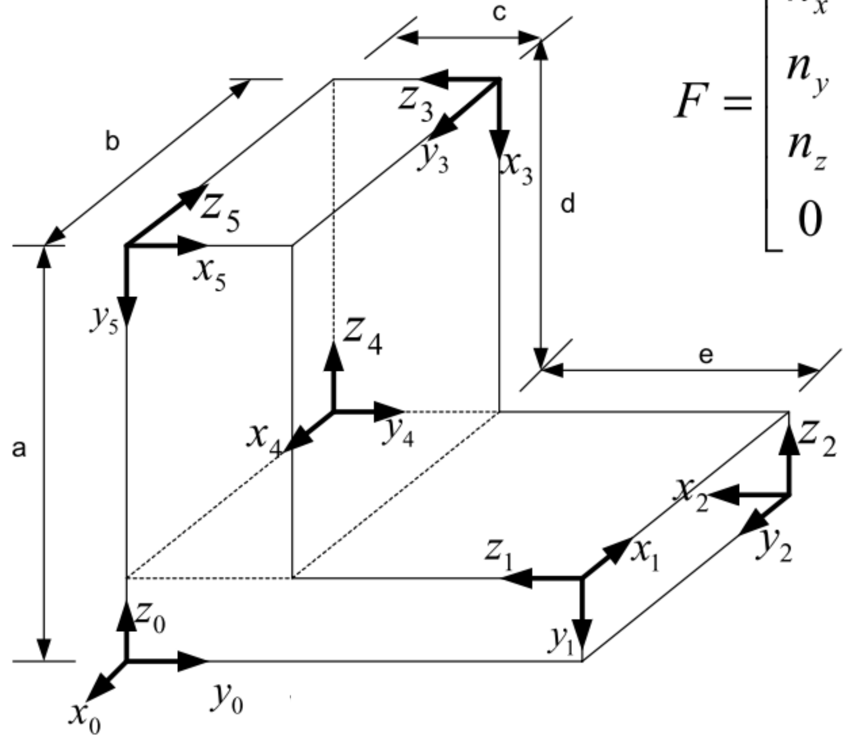
Exercício 2:

A orientação desejada da mão de um robô cartesiano – Euler é dada. Encontre os ângulos de Euler necessários:

$$T_H^R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}579 & -0{,}548 & -0{,}604 & 5 \\ 0{,}540 & 0{,}813 & -0{,}220 & 7 \\ 0{,}611 & -0{,}199 & 0{,}766 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 3:

Para o objeto abaixo, encontre as diversas matrizes 4x4 de transformação homogênea ${}^{0}A_i$ e ${}^{i-1}A_i$ para i=1, 2, 3, 4, 5



$$F = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$