



## Informações

Prática: Modelagem de sistemas por diagrama de blocos , Introdução ao Simulink e Análise dos Ganhos de um Controlador PID, Ident Matlab, Controle PID por funções de otimização

### ***Análise dos ganhos de um controlador PID.***

#### ***Prática 1***

Desenvolva uma diagrama de blocos em simulink para análise de desempenho dos ganhos de um controlador PID cuja função de transferência seja :

$$\frac{1}{(s + 1)^5}$$

utilize um set point unitário e tempo de simulação igual a 100 seg.

Responda as seguintes questões:

- Utilizando-se apenas de um ganho proporcional igual a 1,607, como se comporta o sistema ?
- Utilizando-se apenas de um ganho integral igual a 0,358 como se comporta o sistema ?
- Qual o comportamento do sistema para a utilização conjunta dos ganhos especificados em a e b ?
- Como o sistema se comporta caso seja inserido apenas um ganho derivativo igual a 1,803 ?  
Porque isto ocorre?
- Qual o comportamento do sistema se utilizarmos apenas o ganho proporcional especificado em a e o ganho derivado especificado em d ?
- Utiliza-se agora das três ações de controle especificadas em a,b e d e comente sobre a melhoria do sistema.

## *Sintonia por métodos tradicionais.*

### 1- Sintonia de controladores PID

Se dispomos do modelo do processo a ser controlado, não é difícil de fazer a sintonia dos ganhos do controlador de forma a obtermos a resposta desejada, mas, quando não dispomos do modelo do processo, precisamos de algumas técnicas, baseadas na resposta do sistema a ser controlado.

A sintonia de controladores é um campo interessante de estudos, e que possui muita aplicação prática. Existem, atualmente, algumas regras empíricas e matemáticas que nos permitem buscar um bom desempenho de um dado processo, sem que a sua segurança fique comprometida. O ganho do controlador está relacionado com a “agressividade” com que responde às excitações do processo, portanto, para cada processo há um conjunto de ganhos do controlador, seja ele, P, PI ou PID que atenderá de forma satisfatória as necessidades do processo. Os métodos que serão abordados nos dão uma “sintonia grossa”, necessitando, posteriormente, de uma “sintonia fina”, para chegarmos o processo no ponto adequado de funcionamento. O entendimento é mais ou menos o seguinte: os métodos fazem com que acertamos o alvo, agora, para atingirmos a mosca, nós damos um jeito.

#### 1.1. Alguns métodos de sintonia

- Em malha aberta para sistemas
  - Auto-ajustáveis
    - Ziegler-Nichols (1º método);
    - Cohen-Coon.
  - Não-auto-ajustáveis
    - Ziegler-Nichols (1º método);
- Em malha fechada
  - Ziegler-Nichols (2º método).

##### 1.1.1. Métodos que utilizam malha aberta para obtenção dos ganhos do controlador do sistema a ser controlado.

Nestes métodos, utilizamos o sistema que desejamos controlar, em malha aberta, aplicando em sua entrada um degrau de excitação, e observamos a sua resposta. Baseados no gráfico de resposta tiram-se alguns valores que irão aproximar a resposta de um sistema do primeiro grau com um retardo de tempo.

Em malha aberta existem dois tipos de sistemas: os **auto-ajustáveis** e os **não-auto-ajustáveis**. Os primeiros referem-se aos sistemas em malha aberta que tendem a um determinado valor quando excitados por um degrau em sua entrada, por exemplo, velocidade no eixo de um motor CC quando aplicada uma tensão Vcc, os últimos referem-se aos sistemas em malha aberta que tendem a aumentar de amplitude quando excitados por um degrau em sua entrada, por exemplo, posição de um motor CC quando aplicada uma tensão Vcc. Como a velocidade é constante, a posição não é definida, sendo que, cada volta do eixo, equivale a uma posição de  $2\pi$  radianos e, portanto, tende a aumentar. Os gráficos de resposta correspondentes a cada caso são os seguintes:

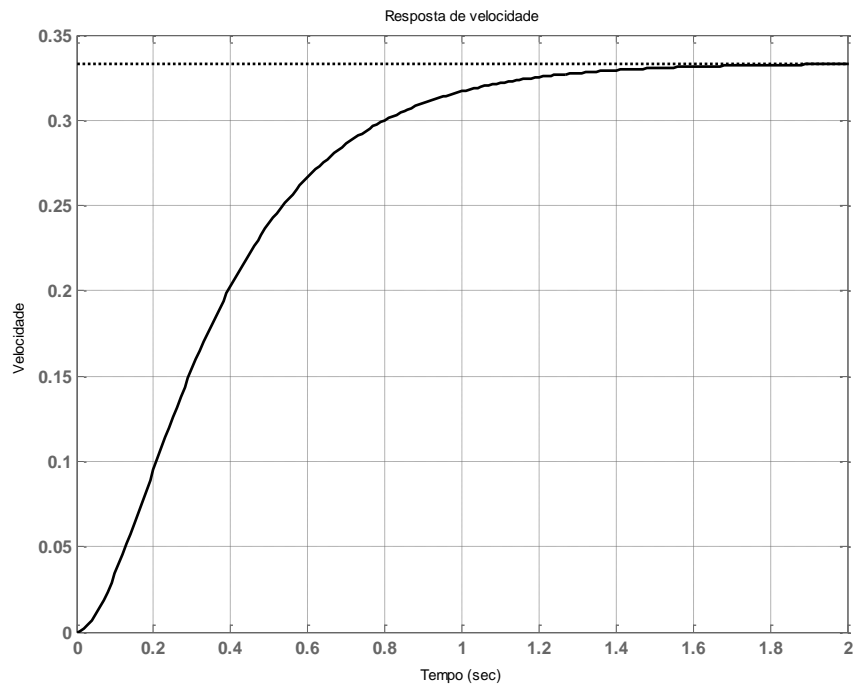


GRÁFICO I

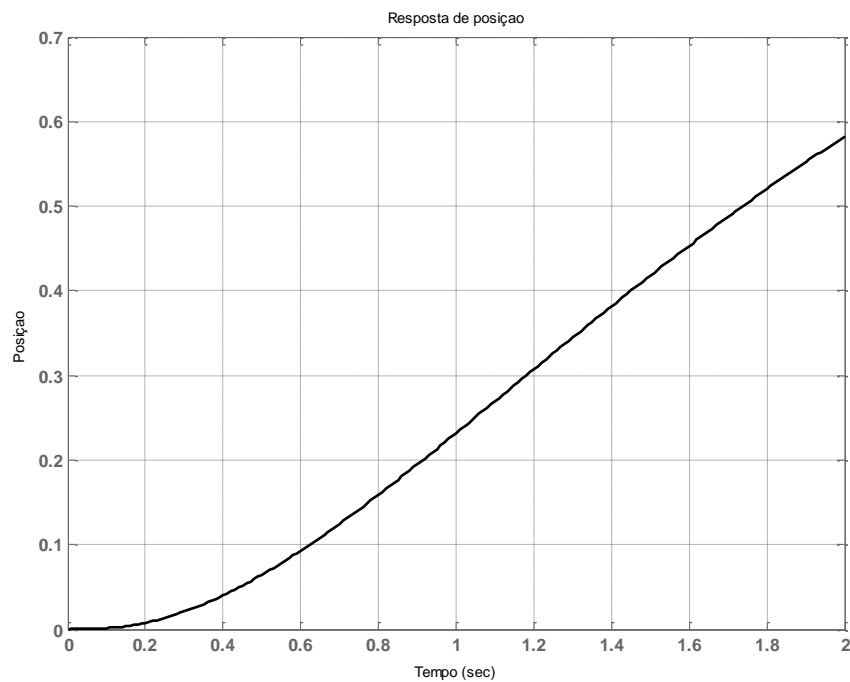


GRÁFICO II

Para os sistemas do tipo auto-ajustáveis (gráfico I) e não-auto-ajustáveis (gráfico II), as funções de transferência de primeira ordem com retardo de tempo que aproximam das dinâmicas desses sistemas são:

$$\frac{K \cdot e^{-T \cdot s}}{\tau s + 1} \quad (I) \quad \text{e} \quad \frac{K \cdot e^{-T \cdot s}}{s} \quad (II)$$

Auto-ajustável

Não-auto-ajustável

Sendo,

$K$  – um determinado ganho;

$\tau$  – O retardo de tempo;

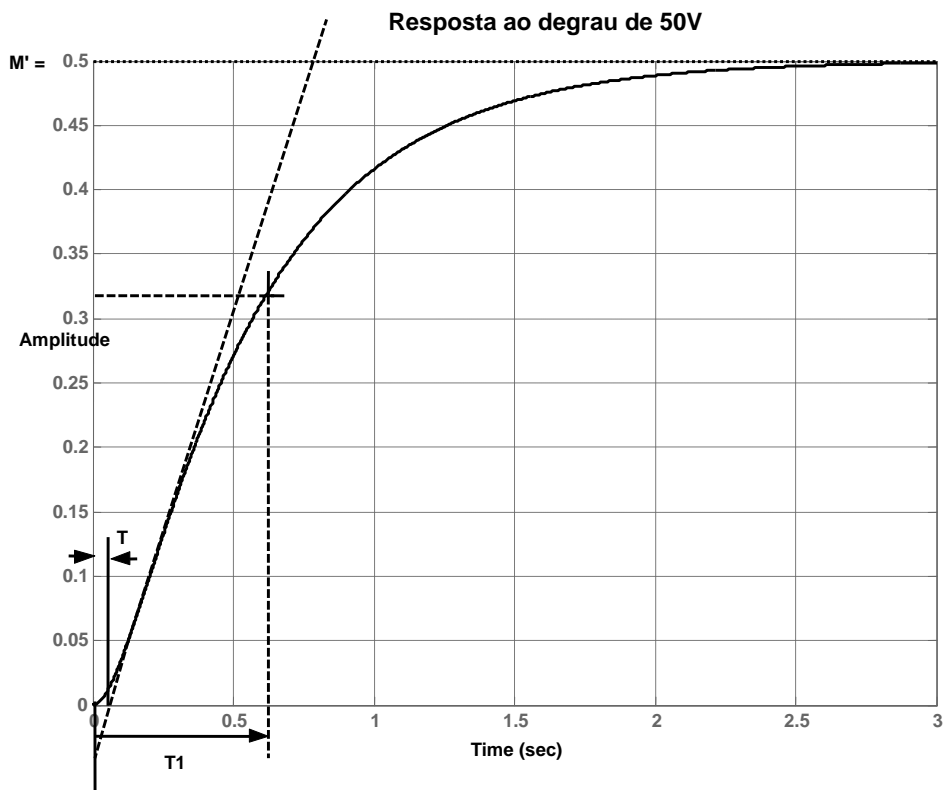
$\tau$  - A constante de tempo do processo.

Os parâmetros das expressões ( I ) e ( II ) são estimados a partir da resposta do processo (gráficos I e II) a uma excitação em degrau na entrada, de magnitude  $M$ .

### 1.1.2. Método de Ziegler-Nichols em malha aberta para sistemas auto-ajustáveis

Utilizando os dados do servomotor CC já considerado, e supondo que não conhecemos a sua planta de velocidade, apenas a sua resposta ( $M'$ ) a um degrau de valor  $M$ , (no caso, vamos considerar  $M=5V$ ) obtemos a curva a seguir.

O método consiste em traçar uma reta tangente, exatamente no ponto de inflexão da curva, ou seja, quando a curva muda de derivada positiva (curva crescente), para derivada negativa (curva decrescente).



Sendo:

$T$  – O retardo de tempo, obtido pelo prolongamento da tangente até cortar o eixo dos tempos;

$T_1$  – Tempo necessário para a resposta atingir 63,2% do valor final.

$M'$  – Valor final obtido pela resposta do sistema.

A constante de tempo  $\tau$  será dada por  $T_1 - T$ . Para isso, considera-se a resposta como sendo do primeiro

grau e, portanto, é dada por:  $\omega(t) = M' \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ . Se  $t = \tau$  então,

$$\omega(t) = M' \cdot (1 - e^{-1}) = M' \cdot (1 - 0,368) = 0,632 \cdot M'$$

O valor de k, ganho da função de transferência do modelo aproximado, será dado por:  $k = \frac{M'}{M}$ .

Observe que, se estamos falando de resposta real de um sistema, a determinação deste ponto não é tarefa fácil, e o ajuste dos ganhos do controlador é muito sensível à determinação desse ponto.

E os ganhos para os controladores serão dados conforme a seguinte tabela:

| Tipo de controlador | Kp                         | Ti              | Td            |
|---------------------|----------------------------|-----------------|---------------|
| P                   | $\frac{\tau}{T}$           | $\infty$        | 0             |
| PI                  | $0,9 \cdot \frac{\tau}{T}$ | $\frac{T}{0,3}$ | 0             |
| PID                 | $1,2 \cdot \frac{\tau}{T}$ | $2 \cdot T$     | $0,5 \cdot T$ |

Tabela - I

### Exemplo resolvido

Baseando-se no gráfico da resposta de velocidade do sistema já estudado acima, determine:

- a – O modelo aproximado do sistema (determinação de T,  $\tau$  e k;
- b – Os ganhos para um controlador PID utilizando Ziegler-Nichols (1º método);

Resolução:

#### Item a

Do gráfico de resposta de velocidade dado acima, tiramos:

Para a obtenção dos tempos a seguir, utilizou-se regra de três com o valor medido com régua e o valor indicado no gráfico.

$$T \cong 0,054 \text{ seg} \quad (\text{retardo de tempo}).$$

$$T1 \cong 0,622 \text{ seg}$$

$$\tau = T1 - T = 0,622 - 0,054 = 0,568 \text{ seg} \quad (\text{constante de tempo})$$

$$K = \frac{M'}{M} \cong \frac{0,5}{5} = 0,1$$

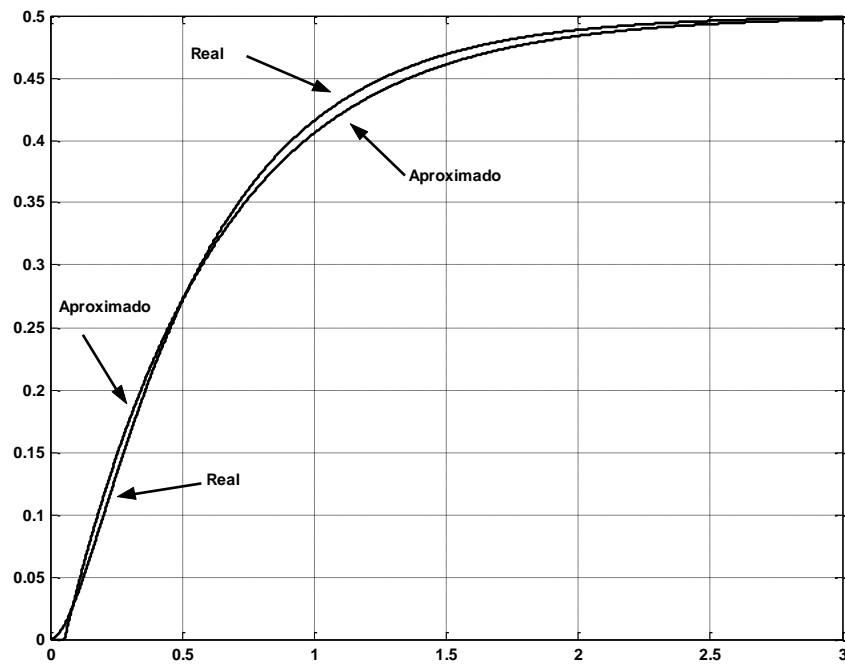
$$\text{Modelo aproximado: } \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K \cdot e^{-T \cdot s}}{\tau \cdot s + 1} = \frac{0,1 \cdot e^{-0,054 \cdot s}}{0,568 \cdot s + 1}$$

Modelo obtido das equações diferenciais da planta de velocidade e dos dados do servomotor CC fornecido:

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{0,01}{(0,01s + 0,1) \cdot (0,5s + 1)}.$$

Observe que, o modelo determinado, analiticamente, é um sistema de segunda ordem, enquanto que o obtido do gráfico é um modelo de primeira ordem mais retardo de tempo.

Plotando os dois gráficos para um degrau de 5 volts em malha aberta, obtemos:



É bom lembrar que não existe um modelo que represente um sistema 100% a sua dinâmica. O nome “Real” adotado no gráfico refere-se ao modelo obtido das equações diferenciais que regem a dinâmica do servomotor.

#### Item b

$$k_p = 1,2 \cdot \frac{\tau}{T} = 1,2 \cdot \frac{0,568}{0,054} = 10,5$$

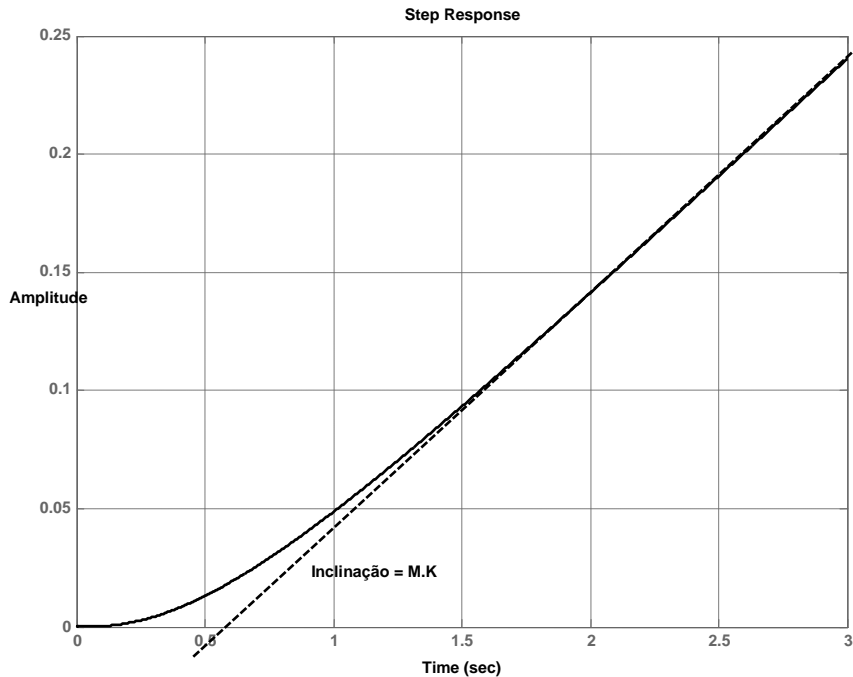
$$T_i = 2 \cdot (0,054) = 0,11 \text{ seg} \Rightarrow k_i = \frac{k_p}{T_i} = \frac{10,5}{0,11} = 95,45 \text{ seg}^{-1}$$

$$T_d = 0,5 \cdot (0,054) = 0,03 \text{ seg} \Rightarrow k_d = k_p \cdot T_d = 10,5 \cdot (0,03) = 0,32 \text{ seg}$$

#### 1.1.3. Método de Ziegler-Nichols em malha aberta para sistemas não-auto-ajustáveis.

Como visto, para esses sistemas a função de transferência aproximada, determinada a partir do gráfico da resposta do sistema é dada por:

$$\frac{K \cdot e^{-T \cdot s}}{s}$$



$K = \frac{\text{Inclinação}}{M}$ , onde M é o degrau aplicado podendo ser unitário (  $M = 1$  ) ou não.

K também é conhecida como taxa de reação

O tempo de retardo T é dado pela intersecção da reta tangente com o eixo dos tempos. No caso acima,

$T \cong 0,578 \text{ seg}$ .

A tabela para os cálculos dos ganhos dos controladores será dada por:

| Tipo de controlador | Kp                | Ti       | Td      |
|---------------------|-------------------|----------|---------|
| P                   | $\frac{1}{T.K}$   | $\infty$ | 0       |
| PI                  | $\frac{0,9}{T.K}$ | $3,33.T$ | 0       |
| PID                 | $\frac{1,2}{T.K}$ | $2.T$    | $0,5.T$ |

Tabela III

### Exemplo comentado

Baseando-se no gráfico da resposta de posição do sistema já estudado (gráfico acima), determine:

- a – O modelo aproximado do sistema. Compare com o modelo real, baseado nas equações diferenciais de posição do servomotor CC;
- b – Os ganhos para um controlador PID a ser utilizado;
- c – Faça a simulação do sistema e tente um ajuste fino nos ganhos, se necessário.

Foi aplicado ao sistema um degrau unitário ( $M=1$ ), portanto,  $K = \text{inclinação} = \frac{0,24}{2,442} = 0,098$

(o ângulo de inclinação é  $\text{tg}^{-1}(0,098) = 5,6^\circ$ )

O retardo de tempo  $T=0,578$  seg

#### Item a

A função de transferência aproximada fica:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K \cdot e^{-T \cdot s}}{s} = \frac{0,098 \cdot e^{-0,578 \cdot s}}{s}$$

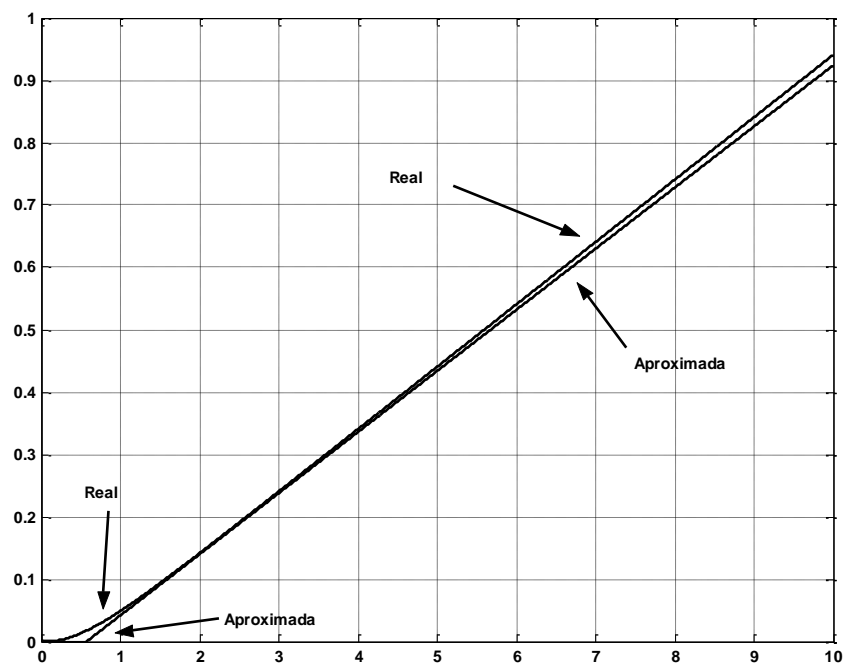
A função de transferência real será:

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{0.01}{(0,01s + 0,1) \cdot (0,5s + 1) \cdot s}$$

Comparando os dois modelos temos:

Código MATLAB

```
J=0.01; b=0.1; K=0.01; R=1; L=0.5;
num=K; den=conv([L R],conv([J b],[1 0]));
t=0:0.001:10;
y1=step(num,den,t);
num=0.098; den=[1 0];
g=tf(num,den);
g.inputdelay=0.578;
y2=step(g,t)
plot(t,y1,'r',t,y2,'b');
grid;
```



#### Item b

De acordo com a tabela III, o cálculo dos ganhos do controlador PID fica:



$$K_p = \frac{1,2}{(0,578).(0,098)} \cong 21,2$$

$$T_i = 2.T = 2.(0,578) = 1,156 \Rightarrow K_i = \frac{K_p}{T_i} = \frac{21,2}{1,156} \cong 18,3$$

$$T_d = 0,5.T = 0,5.(0,578) = 0,289 \Rightarrow K_d = K_p.T_d = (21,2).(0,289) \cong 6,1$$

### Item c

Fazendo a simulação da planta para estes valores de ganhos e considerando um set-point de posição, por exemplo, 30°, temos:

Código MATLAB

J=0.01; b=0.1; K=0.01; R=1; L=0.5;

Kp=21.2; Ki=18.3; Kd=6.1;

numc=[Kd Kp Ki]; denc=[1 0];

nump=K; denp=conv([L R],conv([J b],[1 0]));

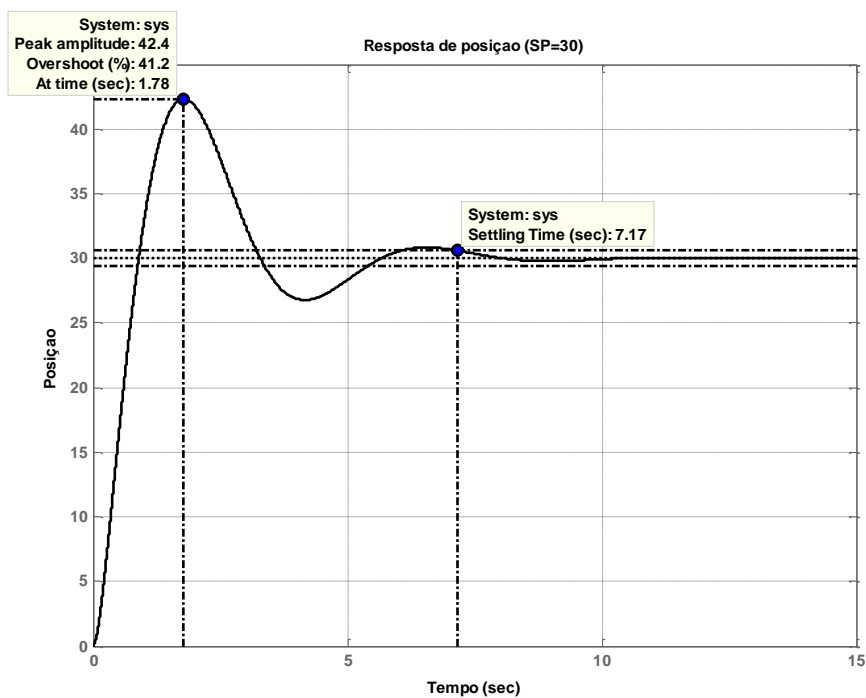
num=conv(numc,nump); den=conv(denc,denp);

[nummf,denmf]=cloop(num,den);

t=0:0.001:15;

step(30\*nummf,denmf,t);

grid;



Observa-se que o overshoot está em cerca de 40% e o tempo de estabelecimento em torno de 7 seg. Este transitório pode ser melhorado aumentando o ganho  $K_d$  e diminuindo  $K_i$ . Por exemplo, passando  $K_d$  de 6,1 para 10 e  $K_i$  de 18,3 para 8, obtemos a resposta descrita no gráfico a seguir. Essa resposta possui um overshoot na faixa de 14% e um tempo de estabelecimento em torno de 6 seg. Observe que são pequenas alterações (ajustes) em torno dos valores determinados pelo método.

**Obs.**

- Lembre-se! Quando diminuimos o valor de  $K_i$  estamos aumentando o valor de  $T_i$  (tempo de integração).
- Nestes exemplos procuramos deixar  $K_p$  constante, uma vez que, tanto  $K_i$  quanto  $K_d$  dependem de  $K_p$ , ficando apenas as variáveis  $T_i$  e  $T_d$  a serem modificadas durante os ajustes. No entanto, nada impede de alterarmos  $K_p$  também. ( $K_i = \frac{K_p}{T_i}$  e  $K_d = K_p \cdot T_d$ ).

