

46) Se G é um grupo de ordem par, mostre que existe $a \in G$ em G tal que $a^2 = e$.

Suponha por absurdo, Combinando cada elemento com seu inverso

$$g^2 \neq e \Leftrightarrow g \neq g^{-1} \Leftrightarrow \text{temos um par } (g, g^{-1}).$$

Tal que, $g \neq g^{-1}$, temos um elemento que não tem par: o elemento neutro, pois $e^{-1} = e$, entao ~~é par~~ para termos um número par de elementos ~~par~~ precisa existir outros elementos que também não tenha par. No caso $\exists g_0 \neq g \cdot g_0^2 = e$.

47) Se H é um subconjunto de G que é fechado em relação à operação de G , prove que H é um subgrupo de G . Mostre ainda que a conclusão pode ser falsa se H é infinito.

Temos que provar primeiro que H é um grupo.

- Possui elemento neutro: Como H é fechado $\forall l \in H$, $\exists k \in N$ t.g. $l^k = e \in H$, pois $l \in H, l^2 \in H, \dots, l^k \in H$.
- H é fechada.
- Elemento inverso: $\forall l \in H$, temos que $\exists k \in N$ t.g. $l^k = e \Rightarrow l^{-k} = l^{k-1} \cdot l = e \Rightarrow l^{-1} = l^{k-1}$, ou seja l possui elemento inverso.

Logo, H é subgrupo de G . Se H fosse infinito não necessariamente ~~não~~ possui inverso ou elemento neutro.

(99) Seja G um grupo qualquer. Dados $a, b \in G$, mostre que

(a) as amboz ordens de b e $\varphi_a(b) = ab\bar{a}^1$ são iguais.

(b) as ordens de ba e ab são iguais.

(a) $K = \text{ord}(b)$, então $b^K = e$. Segue que

$$(ab\bar{a}^1)^K = (ab\bar{a}^1)(ab\bar{a}^1)\dots(ab\bar{a}^1)$$

$$= a b^K \bar{a}^1$$

$$= a e \bar{a}^1 = e$$

(Volta análoga).

(b) Seja $K = \text{ord}(ab)$, $(ab)^K = e$

~~$$(ab)^K = (ba)^K = e$$~~

$$\Leftrightarrow a(ba)^K b = ab$$

$$\text{Dai, } a(ba)^K b = a(ba)(ba)\dots(ba)b$$

$$= (ab)(ab)\dots(ab)ab$$

$$= (ab)^K ab = ab.$$

(Volta análoga).

SI Em um grupo G , dão elementos $a, b \neq e$ satisfazem $a^5 = e$ e $aba^{-1} = b^2$. Determine a ordem de b .

$$b^2 = a^{-1}ba \Rightarrow b = a^{-1}b^2a$$

$$\begin{aligned} \text{Note que, } (aba^{-1})^n &= (aba^{-1})(aba^{-1})\dots(aba^{-1}) \\ &= ab^n a^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dai, } b^{32} &= (aba^{-1})^{16} \\ &= ab^{16}a^{-1} \\ &= a(ab^{-1})^8a^{-1} \\ &= a^2(ab^{-1})^4a^{-2} \\ &= a^3b^4a^{-3} \\ &= a^4b^2a^{-4} \\ &= a^5b^1a^{-5} \\ &= b \end{aligned}$$

Portanto $b^{31} = e$ e $\text{ord}(b) = 31$.

(S2) Prove: Se um grupo G possui um único elemento a de ordem 2, então $a \in Z(G)$. (aquele $Z(G)$ é o centro de G).

$$Z(G) = \{z \in G \mid g z g^{-1} = z \ \forall g \in G\}$$

Tome g qualquer de G . Seja
 $x = gag^{-1}$.

Então, $x^2 = gag^{-1} \cdot gag^{-1} = \cancel{gag^{-1}} \cancel{g^{-1}}$

$$= g a^2 g^{-1}$$

$$= g e g^{-1} = e$$

Logo, a $\text{ord}(x) = 2 \Rightarrow x = a \Rightarrow a \in Z(G)$, x não pode ter ordem 1, pois daí $gag^{-1} = e \Rightarrow ga = g \Rightarrow a = e$, absurdamente pois daí $G = \{e\}$.

(S3) Seja G um grupo em que a intersecção de todos os subgrupos distintos de $\{e\}$ é distinta de $\{e\}$. Prove que todo elemento de G tem ordem finita.

Suponha que existe um elemento $g \in G$ de ordem infinita. Então, o subgrupo gerado por g é isomórfico a \mathbb{Z} , o grupo dos inteiros sob adição. Como \mathbb{Z} é um grupo infinito, ele tem uma infinidade de subgrupos distintos, cada um gerado por um único inteiro. No entanto, a intersecção desses subgrupos é $\{0\} = \{e\}$ o que contradiz a hipótese. Portanto, todo elemento em G deve ter ordem finita.

(S4) Em cada item, escreva todos os classes laterais à direita e à esquerda de H em G :

(a) $G = \mathbb{Z}_{10}$ e $H = \langle 2 \rangle$

(b) $G = S_3$, o grupo das permutações, e $H = \{\sigma \in S_3 : \sigma(1)=1\}$.

(a) Note que, $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Como $|H|=5$ e $|G|=10$. O número de classes laterais é 2 (Teorema de Lagrange). A esquerda:

$$\bar{0} + H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}$$

$$\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}\}$$

e para direita: $H\bar{0} = \bar{0} + H$ e $H\bar{1} = \bar{1} + H$.

(b) $G = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ e $H = \{(1, 2, 3), (2, 3, 2)\}$. Pelo Teorema de Lagrange temos 3 classes laterais:

$$(1, 2, 3)H = (1, 3, 2)H = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$$

$$(2, 1, 3)H = (3, 1, 2)H = \{(2, 1, 3), (3, 1, 2)\}$$

$$(2, 3, 1)H = (3, 2, 1)H = \{(2, 3, 1), (3, 2, 1)\}$$

Note que, é um grupo abeliano, então as classes à esquerda são iguais às à direita.

(S8) Três gatos A, B, C brincam de pula-sela: um gato pode saltar em um outro, mas não sobre dois outros. É possível que os gatos, após 2016 pulos, voltem à posição relativa inicial? E com 2017 pulos?

Vamos considerar as permutações possíveis

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Note que, $\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = e$. Para 2016, o problema é resolvido com

$$(\sigma_1)^{2016} = (\sigma_1^2)^{1008} = (e)^{1008} = e$$

Para 2017, considere o grupo $\{-1, 1\}$ com a operação de produto, seja o mafismo

$$\varphi: S_3 \rightarrow \{-1, 1\}$$

dado por $\varphi(\sigma_1) = -1$, $\varphi(\sigma_2) = 1$. Daí, sendo π_i : o i -ésimo pulo

$$\varphi(\pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_{2017}) = 1 \iff \varphi(\pi_1) \cdot \varphi(\pi_2) \cdots \varphi(\pi_{2017}) = 1$$

$$\iff (-1)^{2017} = 1 \text{ Abs.}$$

Logo, não é possível para 2017.

6.1 Seja G um grupo. Dados dois elementos $x, y \in G$, o produto $xyx^{-1}y^{-1}$ é chamado de comutante de x e y . Definimos o comutador de G , $K(G)$ como conjunto de todos os produtores de um número finito de comutantes de elementos de G .

(a) Prove que $K(G)$ é um subgrupo normal de G .

(b) Prove que o grupo quociente $G/K(G)$ é abeliano.

(c) Seja $aK, bK \in G/K$,

$$(aK)(bK)(a^{-1}K)(b^{-1}K) = aba^{-1}b^{-1}K = eK$$

Ou seja, $(aK)(bK) = (bK)(aK)$

(a) ~~$\forall x, y, z \in G$~~

$$xyx^{-1}y^{-1} \rightarrow \cancel{z} xyx^{-1}y^{-1}\cancel{z^{-1}}$$

$$\hookrightarrow zxz^{-1}zyz^{-1}z^{-1}x^{-1}z^{-1}zy^{-1}z^{-1}$$

$$= (zxz^{-1})(zyz^{-1})(z^{-1}x^{-1})(z^{-1}y^{-1}z^{-1})$$

67 Seja D_4 o grupo de simetrias do losango (o qual é gerado por uma rotação ρ de 90° no sentido anti-horário e uma reflexão σ em relação a uma das diagonais).

(a) Quantos elementos de D_4 têm ordem 2?

(b) Liste todos os subgrupos de D_4 .

(a) Temos que $D_4 = \{e, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3\}$. Utilizando a relação $\sigma\rho^m = \rho^m\sigma$, obtemos

$$(\rho^2)^2 = e, (\sigma)^2 = e, (\sigma\rho)^2 = (\sigma\rho)(\rho^{-1}\sigma)$$
$$(\sigma\rho^2)^2 = (\sigma\rho^2)(\rho^2\sigma) = e, (\sigma\rho^3)^2 = (\sigma\rho^3)(\rho^3\sigma) = e$$

Portanto D_4 tem 5 elementos de ordem 2.

(b) Os seguintes conjuntos não são subgrupos de D_4 .

$$\{e\}, \{e, \rho^2\}, \{e, \sigma\}, \{e, \sigma\rho\}, \{e, \sigma\rho^2\}, \{e, \sigma\rho^3\},$$

$$\{\rho, \rho^2, \sigma, \sigma\rho^2\}, \{e, \rho, \rho^2, \rho^3\}$$

(68) Se G é um grupo e $a \in G$, o centralizador de a em G é denotado por $C(a)$ e definido por

$$C(a) = \{x \in G : ax = xa\}$$

(a) Prove que $C(a)$ é um subgrupo de G para todo $a \in G$.

(b) Se $a, x \in G$, prove que $C(xax^{-1}) = xC(a)x^{-1}$.

(a) elemento neutro: $e \in C(a) \therefore ae = ea = a$

$$\begin{aligned} &\cdot \forall x, y \in C(a) \quad ax = xa \Rightarrow a(xy) = (xa)y \Rightarrow xy \in C(a) \\ &\qquad\qquad\qquad \begin{aligned} &ay = ya \Rightarrow \\ &\qquad\qquad\qquad = (xy)a. \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\cdot x \in C(a) \quad \cancel{ax = xa} \Rightarrow x'ax = a \Rightarrow x'a = ax' \Rightarrow x' \in C(a)$$

Com as propriedades acima $C(a) \subseteq G$, $\forall a \in G$.

(b) Se $y \in C(xax^{-1})$, então

$$\begin{aligned} (xax^{-1})y = y(xax^{-1}) &\Rightarrow ax^{-1}y = \cancel{x^{-1}}y \cancel{x}x^{-1} \Rightarrow a(x^{-1}y) = (x^{-1}y)x \\ &\Rightarrow x^{-1}y \in C(a) \\ &\Rightarrow y \in xC(a)x^{-1} \\ &\Rightarrow C(xax^{-1}) \subseteq xC(a)x^{-1} \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

Se $y \in C(a)$, então

$$\begin{aligned} (xyx^{-1})(xax^{-1}) &= xyax^{-1} = xayx^{-1} = (xax^{-1})(xyx^{-1}) \\ &\Rightarrow xyx^{-1} \in C(xax^{-1}) \\ &\Rightarrow xC(a)x^{-1} \subseteq C(xax^{-1}) \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

Por (I) e (II), $C(xax^{-1}) = xC(a)x^{-1}$.

(69) Suponha que, no grupo G , os elementos a e b sejam distintos do elemento neutro e , $a^5 = e$ e $aba^{-1} = b^2$. Calcule a ordem de b .

Temos que, $b = \bar{a}^1 b^2 a$

$$\text{Segundo que, } (aba^{-1})^n = (aba^{-1})(aba^{-1})\dots(aba^{-1}) \\ = a b^n \bar{a}^1.$$

$$\begin{aligned} \text{Temos, } b^{32} &= (aba^{-1})^8 \\ &= a b^8 \bar{a}^1 \\ &= a(a b \bar{a}^1) \bar{a}^1 \\ &= a^2 b^8 \bar{a}^2 \\ &= a^3 (a b^3 \bar{a}^1) \bar{a}^2 \\ &= a^3 b^4 \bar{a}^3 \\ &= a^4 b^2 \bar{a}^4 \\ &= a^5 b \bar{a}^5 \\ &= b \end{aligned}$$

$$\text{Dai, } \text{ord}(b) = 31.$$

71) Seja \mathbb{G} o grupo dos números complexos diferentes de zero com a operação de multiplicação e seja N o subgrupo de \mathbb{G} dos números complexos de módulo 1: $N = \{a+bi \in \mathbb{G} : a^2+b^2=1\}$. Mostre que \mathbb{G}/N é isomórfico ao grupo dos números reais positivos com a operação de multiplicação.

Se $z_1 = \alpha + \beta i$, $z_2 = \gamma + \delta i$

$$|z_1 z_2| = \sqrt{(\alpha\gamma - \beta\delta)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2}$$

$$= \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)} = |z_1||z_2|$$

Logo, se $\mathbb{G} = \{\alpha + \beta i \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*\}$, então \mathbb{G}/N não é circular de raio $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Definimos $\mathbb{G}/N = \{gN : g \in \mathbb{G}\}$, onde cada gN representa um círculo de raio $|g| = r$. A função $\varphi: \mathbb{G}/N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ dada por $\varphi(z_1 z_2) = |z_1||z_2|$ tem as seguintes propriedades:

• $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| = r \Leftrightarrow z_1, z_2 \in gN$, com $|g| = r$
i.e. $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ se e somente se z_1 e z_2 estão na mesma classe lateral.

• φ é sobjetiva. Para ver isso basta tomar $z = \alpha + 0i$, com $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Temos que $\varphi(z) = \sqrt{\alpha^2} = \alpha$, e $|\alpha|$ percorre todo o conjunto $\mathbb{R}_{>0}$.

Como φ é injetiva e sobjetiva, $\varphi: \mathbb{G}/N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ é isomórfica

72) Seja H um subgrupo normal de um grupo finito G , e seja $m = (G:H)$. Prove que $a^m \in H$, para todo $a \in G$.

Como $H \trianglelefteq G$ é um subgrupo normal, então G/H é um grupo de ordem m . Pelo Teorema de Lagrange, a ordem de qualquer elemento de G/H divide m . Em particular, se $gH \in G/H$, então $(gH)^m = H$. Daí

$$(gH)^m = g^m H = H, \text{ implicando que } g^m \in H.$$

73) Um subgrupo H de um grupo G é dito característico se $\Psi(H) \subset H$ para todo automorfismo $\Psi: G \rightarrow G$.

(a) Prove que se H é um grupo característico de G , então H é normal em G .

(b) Prove que se $M \in N$ são subgrupos característicos de G , então MN também é um subgrupo característico de G .

(a) $\forall g \in G$, como H é característico em G . Queremos mostrar que $gHg^{-1} \subset H$. É a mesma função automórfico de conjugação por g , Ψ_g , que mapeia H em si mesmo:

$$gHg^{-1} = \Psi_g(H) \subset H$$

Logo, H é normal.

(b) ~~$\forall \Psi$~~ , $\Psi(M) \subset M$ e $\Psi(N) \subset N \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Psi(M \cdot N) = \Psi(M) \cdot \Psi(N) \subset M \cdot N.$$

74

Safa G é um grupo finito de ordem n . Uma função $f: G \rightarrow G$ é um pseudomorfismo de G se $f(xy) = f(x)f(y)$ $f(z)$, $\forall x, y, z \in G$.

(a) Se n é ímpar, prove que todo pseudomorismo de G é um endomorfismo de G (morfismo de G em G)

(b) Se n é par, é verdade que todo pseudomorfismo de G é um endomorfismo de G ?

(a) Temos que

$$f(e) = f(e \cdot e \cdot e) = f(e)^3 \Rightarrow (f(e))^2 = e$$

Como $n \equiv 1 \pmod{2}$, G não ter um elemento de ordem 2, já que $2 \nmid n$. Portanto $f(e)^2 = e \Leftrightarrow f(e) = e$. logo

$$f(xy) = f(x \cdot y \cdot e) = f(x)f(y)f(e) = f(x)f(y) = f(x+y) \Rightarrow f \text{ é endomorfismo.}$$

(b) Seja $f: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x + \bar{1}$.

Temos que

$$f(x) + f(y) + f(z) = x + \bar{1} + y + \bar{1} + z + \bar{1} = x + y + z + 3 = f(x+y+z)$$

Logo é pseudomorfismo. Contudo

$$\begin{cases} f(0) = \bar{1} \\ f(\bar{1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(e) \neq e \Rightarrow f \text{ não é endomorfismo.}$$