(15) Para cada ação de $G \curvearrowright X$, represente graficamente a partição em órbitas do conjunto $X$. Determine também um conjunto de representantes de classe das órbitas.

(e) $G = S^1$ e $X = \mathbb{C}$, com ação dada pelo produto usual

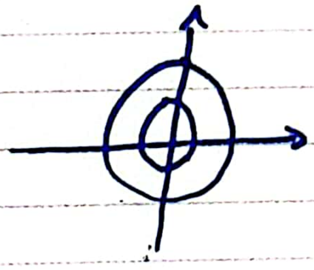
Sendo

$$S_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \{ e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R} \}$$

com multiplicação usual esta ação corresponde ao morfismo $\alpha : S^1 \to S_{\mathbb{C}}$ que leva $g = e^{i\theta} \in S_1$ na rotação do plano complexo de ângulo $\theta$ no sentido anti-horário com centro na origem. Assim, a órbita de $x \in \mathbb{C}$ é um círculo de raio $|x|$ e centro na origem

$$S^1 . x = \{ x \in \mathbb{C} \mid |z| = |x| \}$$

Note que, as órbitas desta ação formam uma partição do conjunto $\mathbb{C}$:



(76) Mostre que $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$. Dica considere a ação de $GL_2(\mathbb{F}_2)$ sobre os vetores não nulos de $\mathbb{F}_2^2$.

Seja os vetores de $\mathbb{F}_2^2$ não nulos: $v_1 = (\bar{1}, \bar{0})$, $v_2 = (\bar{0}, \bar{1})$ e $v_3 = (\bar{1}, \bar{1})$. Tambem podemos avaliar $GL_2(\mathbb{F}_2)$ que tem $6 = |GL_2(\mathbb{F}_2)| = (2^2-1)(2^2-2)$ elementos:

$$I = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & 0 \end{pmatrix} \qquad RS = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \qquad R^2S = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Note que, os elementos de $GL_2(\mathbb{F}_2)$ permutam os vetores $v_1, v_2, v_3$ considerando $(R, S)$. Gerando um isomorfismo com $S_3$.

(77) Determine a cardinalidade da órbita da matriz $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$ na ação por conjugação em $GL_2(\mathbb{F}_5)$.

Lema: Seja $\mathbb{F}_q$ um corpo finito com $q$ elementos. Temos:

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1})$$

Prof: Temos que $A$ é uma matriz $n\times n$ inversível se, e só se, suas colunas formam uma base de $\mathbb{F}_q$. Há $q^n-1$ escolhas para o primeiro vetor (qualquer vetor exceto o não nulo); há $q^n-q$ escolhas para o segundo modelo (qualquer um que não um dos $q$ múltiplos do primeiro); escolhidos os dois primeiros, há $q^n-q^2$ escolhas para o terceiro (qualquer que não é uma combinação linear dos 2 primeiros); e assim por diante.

Seja $X = \left\{\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}\right\}$ pela Formula de Classe

$$|X| = \frac{|GL_2(\mathbb{F}_5)|}{\left|Stab\left(\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}\right)\right|}.$$

Pelo lema $|GL_2(\mathbb{F}_5)| = (5^2-1)(5^2-5) = 24.20$. Vamos precisar $\left|Stab\left(\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}\right)\right|$. Seja então $g \in GL_2(\mathbb{F}_5)$, queremos verificar quando

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \overline{a+b+1} & \overline{a+b+2} \\ \overline{c+d+1} & \overline{c+d+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a+c+1} & \overline{b+d+1} \\ \overline{a+c+2} & \overline{b+d+2} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+1 \equiv a+c+1 \\ a+b+2 \equiv b+d+1 \\ c+d+1 \equiv a+c+2 \\ c+d+2 \equiv b+d+2 \end{cases} \pmod 5$$

$$\iff \begin{cases} b \equiv c \\ a+1 \equiv d \end{cases} \pmod 5$$

Temos 3 ~~4~~ opções para a sendo não nulo e 5 escolhas para b, daí

$$|X| = \frac{(5^2-1)(5^2-5)}{3.5} = \frac{24.20}{3.5} = 8.4 = 32$$

(79) Prove: se $N \trianglelefteq S_4$ então $|N|$ é igual a 1, 4, 12 ou 24.

Vamos começar com um conjunto de possibilidades e ir diminuindo. $|S_4| = 4! = 24$, como $N \leq S_4$, então $|N| \mid |S_4|$, em particular

$$|N| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Além disso, sabe-se que as classes de conjugação em $S_4$ tem tamanhos 1, 3, 6, 6, 8, então um subgrupo normal deve ser escrito como soma dessas classes mais a identidade (o 1), daí

$$|N| \in \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, \cancel{6}, \cancel{8}, 12, 24\}.$$

(82) Seja $G$ um grupo finito e sejam $g_1, \dots, g_n$ representantes de classe de conjugação de $G$. Mostre que se $g_i g_j = g_j g_i$.

Note que $g_1, \dots, g_n \in Stab(g_k)$, para todo $k$ nesta ação. Seja $x \in G$, então $x = a g_i a^{-1}$ para algum $a \in G$ e $g_i$. Então $x \in a\, stab(g_k) a^{-1}$ para cada $k$, e mais ~~geralmente~~ genericamente

$$x \in \bigcup_{a \in G} a\, stab(g_k) a^{-1}, \ \forall k.$$

Então $G = \bigcup_{a \in G} a\, stab(g_k) a^{-1}$ para cada $k$. Donde que $G$ seja finito $stab(g_i) = G$ para cada $g_i$.

Agora seja $a, b \in G$, com $a = x g_a x^{-1}$ e $b = y g_b y^{-1}$. Agora

$$\begin{aligned} ab &= x g_a x^{-1} y g_b y^{-1} \\ &= x x^{-1} g_a g_b y y^{-1} \\ &= g_a g_b \\ &= y y^{-1} g_b g_a x x^{-1} \\ &= y g_b y^{-1} x g_a x^{-1} \\ &= b.a \end{aligned}$$

(83) Considere a ação de $D_4$ sobre as $2^4=16$ colorações dos vértices de um quadrado com 2 cores.

(a) Escreva explicitamente as órbitas desta ação.

· A órbita de um único vértice é um conjunto de quatro vértices simétricos entre si
· A órbita de um par de vértices opostos é um conjunto de dois pares simétricos entre si.
· A órbita de um par de vértices adjacentes é um conjunto de quatro pares simétricos entre si.
· A órbita do conjunto de todos os vértices é ela mesma.

(b) Para cada uma destas órbitas $D_4 x$, descreva explicitamente a bijeção com $D_4/Stab(x)$.

· Para a órbita do vetor único, a bijeção é trivial desde que o estabilizador seja o subgrupo trivial

· Para a órbita do par oposto de vértices, a bijeção é dada naturalmente pela ação de $D_4/\langle r^2\rangle \cong C_2$ no conjunto $\{1,2\}$, onde $r$ é uma rotação por $\pi/2$ e $\langle r^2\rangle$ é um subgrupo cíclico gerado por $r^2$. Especificamente, temos:

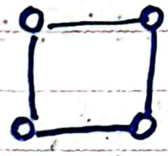
· O elemento de identidade mapeia ambos os pares para si mesmos

· O elemento de não identidade mapeia um para o outro

84) Determine o número de maneiras de pintarmos

(a) os vértices de um quadrado com 7 cores, a menos de rotação

Seja o quadrado:



com apenas a rotação por arestas $G=\{id, \rho, \rho^2, \rho^3\}$
daí

| $g$ | $id$ | $\rho$ | $\rho^2$ | $\rho^3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert X^g \rvert$ | $n^4$ | $n$ | $n^2$ | $n$ |

Logo, o total de colorações é $\frac{7^4+7+7^2+7}{4} = 616.$

(b) os vértices de um quadrado com 7 cores, a menos de rotação e reflexão:

Tendo rotação e reflexão $G=\{id, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma\}$. Daí

| $g$ | $id$ | $\rho$ | $\rho^2$ | $\rho^3$ | $\sigma$ | $\rho\sigma$ | $\rho^2\sigma$ | $\rho^3\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert X^g \rvert$ | $n^4$ | $n$ | $n^2$ | $n$ | $n^3$ | $n^2$ | $n^3$ | $n^2$ |

Logo, o total de colorações é $\frac{7^4+2\cdot 7+3\cdot 7^2+2\cdot 7^3}{8} = 406$

(c) os vértices de um hexágono com 5 cores, a menos de rotação.

Considerando rotações de $60°$ $G=\{id, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5\}$. Daí

| $g$ | $id$ | $\rho$ | $\rho^2$ | $\rho^3$ | $\rho^4$ | $\rho^5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert X^g \rvert$ | $n^6$ | $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $n^2$ | $n$ |

Logo, o total de colorações é $\frac{5^6+2\cdot 5+2\cdot 5^2+5^3}{6} = 2635$

(d) os vértices de um hexágono com 5 cores, a menos de rotação e reflexão.

Sendo $\sigma$ a reflexão em arestas opostas $G = \{id, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma, \rho^5\sigma\}$.

| $g$ | $id$ | $\rho$ | $\rho^2$ | $\rho^3$ | $\rho^4$ | $\rho^5$ | $\sigma$ | $\rho\sigma$ | $\rho^2\sigma$ | $\rho^3\sigma$ | $\rho^4\sigma$ | $\rho^5\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert X^g \rvert$ | $n^6$ | $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $n^2$ | $n$ | $n^4$ | $n^3$ | $n^4$ | $n^3$ | $n^4$ | $n^5$ |

Logo, o total de colorações é $\dfrac{7^6 + 2.7 + 2.7^2 + 7^3 + 3.7^4 + 3.7^5}{12} = 12644$