Lista 1

① Considere as seguintes funções de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

$$f_0(x) = x \quad f_1(x) = 1/x \quad f_2(x) = 1-x$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1-x} \quad f_4(x) = \frac{x}{x-1} \quad f_5(x) = \frac{x-1}{x}$$

Mostre que o conjunto $G = \{f_0, f_1, \dots, f_5\}$ com a operação de composição de funções é um grupo. Escreva sua tabela de multiplicação e decida se é abeliano ou não.

Montando a tabela:

$*$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	x	$1/x$	$1-x$	$1/(1-x)$	$x/(x-1)$	$(x-1)/x$
f_1	$1/x$	x	$1/(1-x)$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$
f_2	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	x	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$1/x$
f_3	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	$1/x$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	x
f_4	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	$1/x$	x	$1-x$	$\frac{1-x}{x}$
f_5	$\frac{x-1}{x}$	$1/x$	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x}{x-1}$	x

1. (Associatividade) Note que,

$$(f \circ g) \circ h\,(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$$

e

$$f \circ (g \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

2. Sendo f_0 o elemento neutro note que

$$f_0 \circ g = g \circ f_0 = g \,, \ \forall g \in G$$

3. (Inverso) O ~~~~ elemento inverso desse grupo é a função inversa. Note que, pela tabela que para $\forall g \in G$ temos que $g^{-1} \in G$

4. (Comutatividade) ~~B~~ Pela tabela note que, não vale a comutatividade, do contrário, a tabela seria espelhada.

Logo, G é um grupo, mas não abeliano.

② Sejam ρ e σ os geradores usuais do grupo simétrico S_3. Determine explicitamente:

ⓐ $\rho^3 = e$

ⓑ
$$\begin{aligned} \sigma\rho\sigma &= \rho^2\sigma\sigma \\ &= \rho^2 e \\ &= \rho^2 \end{aligned}$$

ⓒ
$$\begin{aligned} \rho\sigma^{-1}\rho &= \rho\sigma\rho^2 \\ &= \rho\sigma\rho\rho \\ &= \rho^3\sigma\rho \\ &= \sigma\rho \\ &= \rho^2\sigma \end{aligned}$$

ⓓ
$$\begin{aligned} \sigma\cdot\rho^{2000}\sigma^{29}\rho^{-31}\sigma^{222222210928} &= \sigma\rho^2\sigma\rho^{-1} \\ &= \sigma\rho^2\sigma\rho^2 \\ &= \sigma^2\rho\rho^2 \\ &= e \end{aligned}$$

③ Determine quais dos seguintes itens são grupos. (dizendo se é abeliano). E caso não seja indicar os contra exemplos.

ⓐ $(\mathbb{R}, *)$ em que $x * y := xy + x + y$

1. $(a*b)*c = (ab+a+b)*c$
$= (ab+a+b)c + (ab+a+b) + c$
$= (bc+b+c)a + a + (bc+b+c)$
$= a*(bc+b+c)$
$= a*(b*c)$

2. Se existe e elemento neutro de G vale que, $\forall x \in G$
$e * x = ex + e + x = x$
$\Rightarrow e(1+x) = x - x$
$\Rightarrow e = 0$
e temos que
$x * e = ex + x + e$
$= 0x + x + e$
$= x$

3. Seja $x \in G$, se existe x^{-1} deve valer que
$x * x^{-1} = xx^{-1} + x + x^{-1} = e$
$\Rightarrow x^{-1}(1+x) = -x$
$\Rightarrow x^{-1} = -\frac{x}{1+x} \in \mathbb{R}.$

4. $\forall a, b \in G,$
$a*b = ab + a + b$
$= ba + b + a$
$= b * a$

~~Logo, é um grupo abeliano.~~
Note que, -1 <u>não</u> possui inverso logo não é um grupo.

/ : /

(b) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ em que $x * y := xy + x + y$

Pelo item anterior, é um grupo abeliano.

(c) $(G, \cdot)$ em que $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^{2023} = 1\}$

~~Não satisfaz a existência de elemento inverso, se $z = -1 \in G$ mas~~

0. Para quaisquer elementos $z_1, z_2 \in G$,

$$\cancel{z_1^{2023} z_2^{2023} = (z_1 . z_2)^2}$$

$$(z_1 . z_2)^{2023} = z_1^{2023} . z_2^{2023} = 1 . 1 = 1$$

1. Desde que a associatividade da multiplicação nos complexos vale, este grupo é também associativo

2. Seja e um elemento neutro do grupo, temos que, $\forall z \in G$, vale que

$$\cancel{(z.e) \; z^{2023}}$$

$$\cancel{z.e = z}$$

$$\cancel{\Rightarrow z^{2023} . e^{2023}}$$

$$z.e = e.z = 1 \quad e \quad e^{2023} = 1$$

O e que satisfaz isso é $e = 1$.

3. $\forall z \in G$, $\exists z^{-1}$ tal que

$$z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$$

Para tal tomemos $z^{-1} = z^{2022}$. Por definição,

$$z . z^{2022} = z^{2023} = 1$$

4. Desde que a multiplicação seja comutativa nos complexos, vale que o grupo é abeliano.

3

~~3) Determine quais dos~~

d) $(G,+)$ em que $G = \{ a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q} \}$

0. Seja $x_1, x_2 \in G$, $\exists a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ tais que, $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{3}$, $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{3}$

$$x_1 + x_2 = a_1 + b_1\sqrt{3} + a_2 + b_2\sqrt{3}$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3}$$

Como a soma de racionais é racional $x_1 + x_2 \in G$.

1. Desde que a soma nos reais seja associativa, a soma é associativa em G.

2. Se existe um elemento neutro e, vale que $\forall x = a + b\sqrt{3}$

$$x + e = x$$
$$\Rightarrow a + b\sqrt{3} + e = a + b\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow e = 0 + 0\sqrt{3} = 0$$

é um elemento neutro de G.

3. $\forall x = a + b\sqrt{3} \in G$, queremos verificar se $\exists x^{-1} = a^{-1} + b^{-1}\sqrt{3}$, tal que

$$x + x^{-1} = x^{-1} + x = e,$$

ou seja,

$$a + b\sqrt{3} + a^{-1} + b^{-1}\sqrt{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow a^{-1} = -a \text{ e } b^{-1} = -b,$$

pois b é coeficiente de um termo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e a é $\mathbb{Q}$. Logo, $x^{-1} = -x$ é elemento inverso de x.

4. Como $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, $\forall a, b$, e a soma é comutativa em $\mathbb{R}$ em particular é comutativa em G.

Daí G é um grupo abeliano.

ⓔ $(G, +)$ em que $G = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}$ e b é ímpar$\}$

0. Seja $a/b, x/y \in G$, temos que

$$a/b + x/y = \frac{ay + xb}{by}$$

temos que $ay + xb, by \in \mathbb{Z}$, mas by não é ímpar, e sim par, pois produto de ímpares é ímpar. Daí $(G, +)$ não é grupo.

ⓕ $(G, \cdot)$ em que $G = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}$ e b é ímpar$\}$

0. Seja $a/b, x/y \in G$, o produto

$$a/b \cdot x/y = \frac{ax}{by}$$

Analogamente ao item anterior by é par. Então $(G, \cdot)$ não é um grupo.

ⓖ $(\mathbb{R}^3, \times)$ em que $\times$ denota o produto vetorial.

O produto vetorial não é associativo de fato, seja um contra exemplo, i, j, k a base padrão do $\mathbb{R}^3$

$$(a \times b) \times c = (i \times j) \times k$$
$$= k \times k = 0$$
$$a \times (b \times c) = i \times (j \times k)$$
$$= i \times -i = -k$$

Logo, $(\mathbb{R}^3, \times)$ não é um grupo.

(h) $(G, \circ)$ em que $G = \{ f : [0,1] \to [0,1] \mid f$ é uma bijeção continuação$\}$.

0. Seja $f, g \in G$, temos que $f \circ g \in G$ pois é bijetora e tem domínio igual a imagem.

1. Para funções bijetoras a composição de funções é associativa.

2. Se existe um elemento neutro $f_e \in G$, $\forall f \in G$

$$(f \circ f_e)(x) = f(x)$$

A função $f_e(x)$ que igual elementos é a Identidade.

3. Como $\forall f \in G$ é bijetora possui função inversa tal que,

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$$

4. Seja $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ e $g^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ que existem pelas propriedades anteriores vale que,

(a) $$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}$$
$$= g \circ Id \circ g^{-1}$$
$$= g \circ g^{-1} = Id$$

(b) $$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ g \circ g^{-1} \circ f^{-1}$$
$$= f \circ Id \circ f^{-1}$$
$$= f \circ f^{-1} = Id$$

Daí, $g \circ f$ e $f \circ g$ são ambos ~~invos~~ inversos da outra e $(G, \circ)$ é um grupo abeliano.

CamScanner

⑤ Seja G um grupo. Mostre que se $(a.b)^2 = a^2.b^2$ $\forall a, b \in G$ então é abeliano.

Suponha por absurdo que não vale que G é abeliano, ou seja, $\exists a, b, \in G$ tais que $ab \neq ba$. Daí temos que

$$(a\ b)^2 = a\,b\,a\,b$$
$$\neq a\,a\,b\,b$$
$$= a^2 . b^2$$

Logo, deve valer a implicação se $(ab)^2 = a^2 b^2, \forall a, b \in G$ então G é abeliano.

⑦ Seja $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais.

ⓐ Mostre que $M_n(\mathbb{R})$ com soma é um grupo abeliano

0. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, vale que $A+B \in M_n(\mathbb{R})$

1. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, sendo que a soma de reais é real, e para $\{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}$ matrizes $n \times n$ vale que $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}\ \forall ij$. ~~Vale que~~, Logo, $A+(B+C) = (A+B)+C$

2. $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, queremos que $\exists E = \{e_{ij}\} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que,

$$A+E = A$$

Podemos escrever uma matriz como seus elementos $A = \{a_{ij}\}$, se E é neutro $a_{ij} + e_{ij} = a_{ij}\ \forall ij$. Logo, $e_{ij} = 0\ \forall ij$.

3. $\forall A = \{a_{ij}\} \in M_n(\mathbb{R})$, queremos que $\exists B = \{b_{ij}\}$ tal que

$$A+B = E = 0_{n \times n}$$

Ou seja, $b_{ij} = -a_{ij}$, $\forall ij$

4. Sendo $A = \{a_{ij}\}, B = \{b_{ij}\} \in M_n(\mathbb{R})$, deve valer $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}\ \forall ij$, que é válido para a soma em $\mathbb{R}$.

ⓑ Quais os seguintes conjuntos é um subconjunto de $(M_n(\mathbb{R}), +)$?

(i), (iii), (iv) e (vii).

~~Aproximando $V(z,\sigma,\rho)$~~

~~Nossa aproximação para~~
Nosso objetivo é aproximar $W(z,\sigma,\rho)$ com

$$\hat{W}(z,\sigma,\rho) = \sum_{j=j_L}^{j_U} W_j$$

e $V(z,\sigma,\rho)$ com

$$\hat{V}(z,\sigma,\rho) = \sum_{K=K_L}^{K_U} V_K$$

onde j_L, j_U e K_L, K_U são limites escolhidos. O fato de que um ~~log~~ $\partial \log W_j$ é monotônico decrescente implica que $\log W_j$ é estritamente convexo como função de j e, portanto que o W decai mais rápido que geometricamente em qualquer lado de j_{max}. O erro de aproximação pode, portanto, ser limitado por somas geométricas:

$$W(z,\sigma,\rho) - \hat{W}(z,\sigma,\rho) < W_{j_L-1}\frac{1-r_L^{j_L-1}}{1-r_L} + W_{j_U-1}\frac{1}{1-r_U}$$

onde $$r_L = \exp\left(\frac{\partial \log W_j}{\partial j}\right)\Bigg|_{j=j_L-1}$$

e $$r_U = \exp\left(\frac{\partial \log W_j}{\partial j}\right)\Bigg|_{j=j_U+1}$$

* O mesmo tipo de limite pode construído para $V(z,\sigma,\rho) - \hat{V}(z,\sigma,\rho)$ em termos de $V_{ent}(K)$. Na prática esses limites geométricos são muito "conservadores", então simplesmente escolhemos $j_L < j_{max} < j_U$

8) Em um grupo G, dois elementos satisfazem $a^5 = e$ e $a^3 b = b a^3$. Prove que $ab = ba$.

Começando com

$$a^3 b = b a^3$$

$$\Leftrightarrow a^{-3} a^3 b = a^{-3} b a^3$$

$$\Leftrightarrow b = a^{-3} b a^3$$

$$\Leftrightarrow b = a^2 b a^3 \quad \text{(usando que } a^5 = e\text{)}$$

$$\Leftrightarrow ab = a^3 b a^3$$

$$\Leftrightarrow ab = b a^3 a^3 \quad \text{(usando que } a^3 b = b a^3\text{)}$$

$$\Leftrightarrow ab = b e a = ba$$

⑨ Determine o centro e o subgrupo derivado do exercício 1.

Os elementos $\{f_0, f_1, f_2\}$ formam um centro, segundo a tabela. E $\{f_0, f_1\}$ formam um subgrupo de G.

(12) Sejam $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$. Mostre que se A e B são conjugados em $GL_2(\mathbb{R})$, então $\det A = \det B$ e $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$. Mostre que a recíproca não é verdadeira.

Sendo A e B conjugados, ou seja, $\exists P \in G$ tal que $A = PBP^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \det(PBP^{-1}) \\
&= \det P \det B \det P^{-1} \\
&= \det P \det P^{-1} \det B \\
&= \det(PP^{-1}B) \\
&= \det(IB) \\
&= \det(B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} A &= \operatorname{tr}(PBP^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(BPP^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(BI) \\
&= \operatorname{tr} B
\end{aligned}$$

Não vale a volta, temos o contra exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. $\nexists P \in G$ t.q.

$A = PBP^{-1}$.

15) Seja G um grupo. Se $(ab)^i = a^i b^i$ para 3 inteiros i consecutivos e $\forall a, b \in G$, prove que G é abeliano.

Seja $i = j, j+1, j+2$ esses inteiros tais que, $(ab)^i = a^i b^i$, $\forall a, b \in G$. Podemos escrever

$$\cancel{(ab)}$$

$$\underbrace{ab \ldots ab}_{j+2} = \underbrace{a \ldots a}_{j+2} \underbrace{b \ldots b}_{j+2}$$

$$\Rightarrow abab(ab)^j = aa(a^j b^j)bb$$

$$\Rightarrow abab = aabb$$

$$\Rightarrow (ab)^2 = a^2 b^2$$

Pela questão 5) segue o resultado