

(75) Para cada ação de G em X , represente graficamente a partição em órbitas do conjunto X . Determine também um conjunto de representantes de classe das órbitas.

(e) $G = S^1$ e $X = \mathbb{C}$, com ação dada pelo produto usual

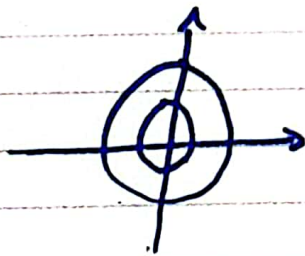
sendo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

com multiplicação usual esta ação corresponde ao morfismo $\alpha: S^1 \rightarrow S_{\mathbb{C}}$ que leva $g = e^{i\theta} \in S^1$ na rotação do plano complexo de ângulo θ no sentido anti-horário com centro na origem. Assim, a órbita de $x \in \mathbb{C}$ é um círculo de raio $|x|$ e centro na origem.

$$S^1 \cdot x = \{x \in \mathbb{C} \mid |z| = |x|\}$$

Note que, as órbitas desta ação formam uma partição do conjunto \mathbb{C} :



76) Mostre que $GL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$. Dica: considere a ação de $GL_2(\mathbb{F}_2)$ sobre os vetores não nulos de \mathbb{F}_2^2 .

Seja os vetores de \mathbb{F}_2^2 não nulos: $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (1, 1)$. Também podemos analisar $GL_2(\mathbb{F}_2)$ que tem $6 = |GL_2(\mathbb{F}_2)| = (2^2 - 1)(2^2 - 2)$ elementos:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$RS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^2S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que, os elementos de $GL_2(\mathbb{F}_2)$ permutam os vetores v_1, v_2, v_3 considerando (R, S) . \Rightarrow Gerando um isomorfismo com S_3 .

(77) Determine a cardinalidade da órbita da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ na ação \cdot por conjugação em $GL_2(\mathbb{F}_5)$.

Lema: Seja \mathbb{F}_q um corpo finito com q elementos.
 Temos:

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{n-1})$$

Proof: Temos que A é uma matriz $n \times n$ invertível se, e só se, suas colunas formam uma base de \mathbb{F}_q . Há $q^n - 1$ escolhas para o primeiro vetor (qualquer vetor exeto o não nulo); há $q^n - q$ escolhas para o segundo vetor (qualquer um que não um dos q múltiplos do primeiro); escolhendo os dois primeiros, há $q^n - q^2$ escolhas para o terceiro (qualquer que não é uma combinação linear dos 2 primeiros), e assim por diante.

Seja $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ pela Fórmula de Classe

$$|X| = \frac{|GL_2(\mathbb{F}_5)|}{|Stab\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)|}.$$

Pelo lema $|GL_2(\mathbb{F}_5)| = (5^2 - 1)(5^2 - 5) = 24 \cdot 20$. Vamos precisar $|Stab\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)|$. Seja então $g \in GL_2(\mathbb{F}_5)$, queremos verificar quando

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{a+b+1} & \overline{a+b+2} \\ \overline{c+d+1} & \overline{c+d+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a+c+1} & \overline{b+d+1} \\ \overline{a+c+2} & \overline{b+d+2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1 \equiv a+c+1 \\ a+b+2 \equiv b+d+1 \\ c+d+1 \equiv a+c+2 \\ c+d+2 \equiv b+d+2 \end{cases} \pmod{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \equiv c \\ a+1 \equiv d \end{cases} \pmod{5}$$

Temos 3 opções para a sendo não nulo e 5 escolhas para b ; daí

$$|X| = \frac{(5^2-1)(5^2-5)}{3 \cdot 5} = \frac{24 \cdot 20}{3 \cdot 5} = 8 \cdot 4 = 32$$

(79) Prove: se $N \trianglelefteq S_4$ então $|N|$ é igual a 1, 4, 12 ou 24

Vamos começar com um conjunto de possibilidades e ir diminuindo. $|S_4| = 4! = 24$, como $N \leq S_4$, então $|N| \mid |S_4|$, em particular

$$|N| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Além disso, sabe-se que as classes de conjugação em S_4 tem tamanhos 1, 3, 6, 6, 8, então um subgrupo normal deve ser escrito como soma dessas classes mais a identidade (e), daí

$$|N| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

(82) Seja G um grupo finito e sejam g_1, \dots, g_n representantes de classe de conjugação de G . Mostre que se $g_i g_j = g_j g_i$.

Note que $g_1, \dots, g_n \in \text{Stab}(g_k)$, para todo k e toda ação. Seja $x \in G$, então $x = a g_i a^{-1}$ para alguma $a \in G$ e g_i . Então $x \in a \text{Stab}(g_k) a^{-1}$ para cada k , e mais genericamente

$$x \in \bigcup_{a \in G} a \text{Stab}(g_k) a^{-1}, \forall k.$$

Então $G = \bigcup_{a \in G} a \text{Stab}(g_k) a^{-1}$ para cada k . Onde que G seja finito $\text{Stab}(g_i) = G$ para cada g_i .

Agora seja $a, b \in G$, com $a = x g_a x^{-1}$ e $b = y g_b y^{-1}$. Agora

$$ab = x g_a x^{-1} y g_b y^{-1}$$

$$= x x^{-1} g_a g_b y y^{-1}$$

$$= g_a g_b$$

$$= y y^{-1} g_b g_a x x^{-1}$$

$$= y g_b y^{-1} x g_a x^{-1}$$

$$= b.a$$

(83) Considere a ação de D_4 sobre as $2^4 = 16$ colorações dos vértices de um quadrado com 2 cores.

(a) Escreva explicitamente as órbitas desta ação.

- A órbita de um único vértice é um conjunto de quatro vértices simétricos entre si.
- A órbita de um par de vértices opostos é um conjunto de dois pares simétricos entre si.
- A órbita de um par de vértices adjacentes é um conjunto de quatro pares simétricos entre si.
- A órbita do conjunto de todos os vértices é ela mesma.

(b) Para cada uma destas 5 órbitas $D_4 \cdot x$, determine explicitamente a bijecção com $D_4 / \text{Stab}(x)$.

• Para a órbita do vértice único, a bijecção é trivial onde que o estabilizador $\text{Stab}(x)$ é o trivial subgrupo.

• Para a órbita do par oposto de vértices, a bijecção é dada naturalmente pela ação de $D_4 / \langle \pi^2 \rangle \cong C_2$ no conjunto $\{1, 2\}$, onde π é uma rotação por $\pi/2$ e $\langle \pi^2 \rangle$ é um subgrupo cíclico gerado por π^2 . Explicitamente, temos:

• O elemento de identidade mapeia ambos os pares para si mesmos.

• O elemento de não identidade mapeia um para o outro.

- 84) Determine o número de maneiras de pintarmos
(a) Os vértices de um quadrado com 7 cores, a menos de rotações

Seja o quadrado

Com apenas a rotações por ângulos $G = \{e, r, r^2, r^3\}$

g	e	r	r^2	r^3
$ x^g $	n^4	n	n^2	n

Logo, o total de colorações é $\frac{7^4 + 7 + 7^2 + 7}{4} = 616$

- (b) Os vértices de um quadrado com 7 cores, a menos de rotações e reflexão

$G = \{e, r, r^2, r^3, \sigma, \sigma r, \sigma r^2, \sigma r^3\}$

g	e	r	r^2	r^3	σ	σr	σr^2	σr^3
$ x^g $	n^4	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n

Logo, o total de colorações é $\frac{7^4 + 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7}{8} = 322$

- (c) Os vértices de um hexágono com 5 cores, a menos de rotações

Com apenas rotações temos $G = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$

g	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5
$ x^g $	n^6	n	n^2	n^3	n^2	n

Logo, o total de colorações é $\frac{5^6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 5^3}{6} = 2635$

- (d) Os vértices de um hexágono com 5 cores, a menos de rotações e reflexão.

Seja r rotação e σ reflexão

g	e	r	r^2	r^3	r^4	r^5	σ	σr	σr^2	σr^3	σr^4	σr^5
$ x^g $	n^6	n	n^2	n^3	n^2	n	n^3	n^4	n^3	n^4	n^3	n^4

Logo, o total de cores é $\frac{5^6 + 3 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5}{12} = 1505$

(e) Os vértices de um tetraedro com 5 cores, a menor de rotações.

g	e	120°	140°	180°
x ²	n ⁴	n ²	n ²	n ²

$$\text{logo, o total } \frac{n^4 + 4n^2 + 4n^2 + 3n^2}{12} = \frac{5^4 + 11 \cdot 5^2}{12} = 75$$

(f) Os vértices de um cubo com 5 cores, menor rotações.

g	e	{90°, 180°, 270°}	{120°, 240°}	{180°}
x ²	n ⁸	n ² n ⁴ n ²	n ⁴ n ⁴	n ⁴

$$\text{logo, o total é } \frac{n^8 + 6n^2 + 12n^4}{24} = \frac{5^8 + 6 \cdot 5^2 + 12 \cdot 5^4}{24} = 16725$$