

## Resumo de Cálculo em uma Variável Complexa

### Sumário

Números Complexos e propriedades

Exponencial, Limite e Derivada

Equações de Cauchy-Riemann

Cauchy-Riemann, Eq. de Laplace e Integral

Teorema da integral de Cauchy

Fórmulas da integral de Cauchy para domínios multi-conexos

Cauchy, Liouville e Morera

Teorema de Laurent

Resíduos

# Números Complexos e propriedades

**Propriedades 1** As seguintes propriedades valem para quaisquer  $z, w, t \in \mathbb{C}$ :

(a)  $z + (w + t) = (z + w) + t$

(b)  $z + w = w + z$

(c)  $0 + z = z$

(d)  $z + (-z) = 0$

(e)  $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$

(f)  $zw = wz$

(g)  $1 \cdot z = z$

(h)  $z \cdot z^{-1} = 1$  se  $z \neq 0$

(i)  $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$

**Definição 1** Um número complexo  $z$  é da forma  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  e  $i = \sqrt{-1}$ , que podemos escrever como um par de variáveis de  $\mathbb{R}^2$  de forma que  $z = (x, y)$ .

**Definição 2 (Soma e produto nos complexos)** Seja  $z = (x, y)$  e  $w = (a, b)$ ,  $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ , definimos soma e produto, para manter consistência com as propriedades acima, da seguinte forma

$$z + w = (x + a, y + b)$$

$$z \cdot w = (xa - yb, xb + ya)$$

**Definição 3 (O Módulo)** Seja  $z = x + iy$  um complexo, então o **módulo** (“tamanho”) de um número complexo é definido por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Definição 4 (O Conjugado)** Seja  $z = x + iy$  um complexo, então o **conjugado** de um número complexo é definido por

$$\bar{z} = x - iy$$

**Propriedades 2 (Propriedades do conjugado)** As seguintes propriedades valem para quaisquer  $z, w \in \mathbb{C}$ :

(a)  $\bar{\bar{z}} = z$ ,  $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$  e  $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$

(b)  $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$  se  $w \neq 0$

(c)  $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$  e  $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

(d)  $z \in \mathbb{R}$  se e somente se  $\bar{z} = z$

(e)  $z$  é imaginário puro se e somente se  $\bar{z} = -z$

**Definição 5 (A Forma Polar)** Seja  $z = x + iy$  com  $z \neq 0$ , então podemos escrever  $z$  como

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Com as seguintes propriedades

$$1. r = |z|$$

$$2. \cos(\theta) = \frac{x}{|r|}$$

$$3. \sin(\theta) = \frac{y}{|r|}$$

**Teorema 1** Seja  $n \in \mathbb{Z}_{++}$  e  $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ . Então

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

## Exponencial, Limite e Derivada

**Definição 6 (Função exponencial)** Seja  $z \in \mathbb{C}$  com  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , então

$$e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

**Definição 7 (Cosseno e seno complexo)** Para  $z \in \mathbb{C}$ , vamos definir

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

**Propriedades 3 (Cos e sen)** Seja  $z = x + iz$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Então

$$(a) \cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$(b) \sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

$$(c) |\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$$

$$(d) |\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$$

**Definição 8 (Função logaritmo)** Seja  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ <sup>1</sup>

$$Ln(z) = \ln |z| + i\text{Arg}(z)$$

$$\ln(z) = \ln |z| + i\arg(z)$$

**Definição 9 (Limite)** Seja  $z_0 \in \mathbb{C}$  um ponto de acumulação de  $D \subset \mathbb{C}$  e seja  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Dizemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

Quando para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que

$$z \in D - \{z_0\} \text{ e } |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - l| < \varepsilon$$

**Definição 10 (Continuidade)** Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in D$ . Dizemos que  $f$  é **contínua** em  $z_0$  se para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que

$$z \in D - \{z_0\} \text{ e } |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

---

<sup>1</sup>Aqui:  $\text{Arg}(z) = \theta$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi]$  e  $\arg(z) = \theta$

**Definição 11 (Diferenciabilidade)** Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in D$  ponto de acumulação de  $D$ . Se existe o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

dizemos que  $f$  é diferenciável em  $z_0$  (ou derivável) e denotamos o limite acima por  $f'(z_0)$ .

**Definição 12 (Funções Analíticas)** Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  é dita **analítica** no domínio  $D$  se  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $D$ . E também é dita **analítica em um ponto**  $z_0 \in D$  se  $f$  é analítica em uma vizinhança de  $z_0$ .

## Equações de Cauchy-Riemann

**Teorema 2 (Cauchy-Riemann (ida))** Seja  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  definida e contínua em alguma vizinhança de  $z = x + iy$  e suponha  $f$  diferenciável em  $z$ . Então, as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  existem e satisfazem<sup>2</sup>

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

**Corolário 2.1** Se  $f$  é analítica em um domínio  $D$ , então as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  existem em  $D$  e

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

$$f' = u_x + iv_x \quad e \quad f' = v_y - iu_y$$

**Teorema 3 (Cauchy-Riemann (volta))** Se as funções reais  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  de variáveis  $x, y \in \mathbb{R}$  tiverem derivadas parciais contínuas que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em algum domínio  $D$ , então a função complexa  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  é analítica em  $D$ , com  $z = x + iy$ .

## Cauchy-Riemann, Eq. de Laplace e Integral

**Teorema 4 (Eq. de Laplace)** Se  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  é analítica em um domínio  $D$ , (e as derivadas segundas de  $u$  e  $v$  existem e são contínuas)<sup>3</sup>, então ambas  $u$  e  $v$  satisfazem a equação de Laplace.

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

**Teorema 5 (Trigonométricas e logaritmo)** Seja  $z_1 \in \mathbb{C}$  e  $z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ , temos que vale que

$$\sin'(z_1) = \cos(z_1)$$

$$\cos'(z_1) = -\sin(z_1)$$

$$\ln'(z_2) = \frac{1}{z_2}$$

---

<sup>2</sup>Chamadas aqui de **Equações de Cauchy-Riemann**

<sup>3</sup>Mais adiante, veremos que a parte em parenteses não é necessária.

**Definição 13 (Integral)** Seja  $C \in \mathbb{C}$  uma curva e  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  com  $D$  contendo a curva  $C$ , então a integral de  $f$  na curva  $C$  é definida por

$$\int_C f(z)dz := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(w_m) \Delta z_m$$

Onde  $\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$  e  $w_m$  é um ponto de  $C$  no arco que liga  $z_m$  a  $z_{m-1}$ . Em particular quando  $z(a) = z(b)$  temos uma curva fechada e denotamos a integral como

$$\oint_C f(z)dz$$

**Propriedades 4 (Propriedades da Integral)** Consequências diretas da definição de integral

1. **Linearidade:**

$$\int_C \alpha f_1(z) + \beta f_2(z)dz = \alpha \int_C f_1(z)dz + \beta \int_C f_2(z)dz$$

2. **Caminho inverso:**

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz$$

Em que  $-C$  é a curva parametrizada no sentido contrário a  $C$ .

3. **Partição da Curva:**

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

Onde  $C = C_1 \cup C_2$

**Teorema 6** Seja  $f(z) = u(z) + iv(z)$  uma função analítica em torno da curva  $C$ . Podemos escrever

$$\int_C f(z)dz = \int_C G + i \int_C H \quad (1)$$

Em que  $G, H : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com

$$G(x, y) := (u(x, y), -v(x, y))$$

$$H(x, y) := (v(x, y), u(x, y))$$

e  $D$  contém a curva  $C$ , por Cauchy-Riemann os jacobianos  $J_G$  e  $J_H$  são simétricos i.e.  $G$  e  $H$  são conservativos e as integrais da Equação 1 são independentes de caminho.

## Teorema da integral de Cauchy

**Teorema 7** Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica com derivada contínua e seja  $C$  uma curva contida em  $D$  com início  $z_0$  e fim  $z_1$ . Dada uma parametrização “crescente”  $z(t)$  de  $C$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , temos

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \cdot z'(t)dt$$

**Teorema 8 (Integral de Cauchy)** *Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica com derivada contínua e seja  $C$  uma curva contida em  $D$  com início e fim iguais. Então*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

**Teorema 9** *Seja  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analítica com derivada contínua e sejam  $C$  e  $\tilde{C}$  curvas em  $D \subset \mathbb{C}$  com pontos inicial  $z_0$  e final  $z_1$ . Então*

$$\int_C f(z)dz = \int_{\tilde{C}} f(z)dz$$

**Lema 10 (ML inequality)** *Seja  $f$  contida num domínio  $D$  contendo a curva  $C$ . Suponha  $M \geq 0$  t.q.  $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$  e denote por  $L$  o comprimento de  $C$ . Então*

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$$

**Teorema 11 (TFC complexo)** *Seja  $D \subset \mathbb{C}$  um domínio (aberto simplesmente conexo) e  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  analítica com derivada contínua. Sejam  $z_0, z_1 \in D$  e  $C$  uma curva contida em  $D$  com ponto inicial  $z_0$  e final  $z_1$ . Seja  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $F'(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in D$ . Então*

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

**Teorema 12 (Integral indefinida)** *Se  $f$  é analítica em um aberto simplesmente conexo  $D$ , então existe  $F$  definida em  $D$  tal que  $F' = f$  em  $D$ .*

## Fórmulas da integral de Cauchy para domínios multi-conexos

**Teorema 13 (Duplamente Conexos)** *Seja  $D \subset \mathbb{C}$  duplamente conexo com  $C_1$  “borda exterior” e  $C_2$  “borda interior” com ambas as curvas orientadas no sentido anti-horário. Suponha  $D^*$  aberto contendo  $D$  e  $f : D^* \rightarrow \mathbb{C}$  analítica. Então*

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

**Teorema 14 (Multi-conexo (generalização do caso anterior))** *Se  $f$  for analítica em  $D^*$  multi-conexo com  $C_1, \dots, C_n$  “borda interior” e  $C$  “borda exterior”, onde todas são orientadas no sentido anti-horário. Então*

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z)dz$$

**Teorema 15 (Teorema da Integral de Cauchy)** *Suponha  $f$  analítica em um domínio simplesmente conexo  $D$ . Então,  $\forall z_0 \in D$  e qualquer curva simples  $C \subset D$  que contorna  $z_0$  no sentido anti-horário, temos*

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

ou de maneira equivalente,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

**Teorema 16 (Teorema da Integral de Cauchy para derivada)** *Suponha  $f$  analítica em um domínio simplesmente conexo  $D$ . Então,  $\forall z_0 \in D$  e qualquer curva simples  $C \subset D$  que contorna  $z_0$  no sentido anti-horário, a  $n$ -ésima derivada de  $f(z_0)$  é*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

## Cauchy, Liouville e Morera

**Teorema 17 (Desigualdade de Cauchy)** *Suponha  $f$  analítica num domínio simplesmente conexo contendo  $C$  (fechado simples) com  $z_0$  no “interior”. Seja  $M \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , temos*

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq n! \frac{M}{r^n} \end{aligned}$$

Onde,  $M$  é cota superior para  $|f(z)|$  no círculo  $\hat{C}$  centrada em  $z_0$  de raio  $r > 0$  e que esteja “dentro” de  $C$ .

**Teorema 18 (Teorema de Liouville)** *Se uma função inteira (analítica em todo  $\mathbb{C}$  é limitada em valor absoluto de  $\mathbb{C}$ , então essa função é constante.*

**Teorema 19 (Teorema de Morera (recíproca de Cauchy))** *Se  $f$  é contínua em um domínio simplesmente conexo  $D$  e se*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para cada curva fechada simples em  $D$ , então  $f$  é analítica em  $D$ .

## Teorema de Laurent

**Teorema 20 (Teorema de Laurent)** *Seja  $f(z)$  analítica em um domínio entre dois círculos concêntricos  $C_1$  e  $C_2$  com centro  $z_0$ . Então,  $f(z)$  pode ser representado pela **série de Laurent***

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

para  $z$  no anel definido por  $C_1$  e  $C_2$  em que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) (z - z_0)^{m-1} dz, \quad m \geq 1, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Com  $C$  qualquer curva fechada simples orientada no sentido anti-horário contida no anel  $C_1, C_2$

**Definição 14 (Singularidade)** *Dizemos que  $z_0$  é uma **singularidade** de uma função complexa  $f$  se  $f$  não está definida em  $z_0$  ou não é analítica em  $z_0$*

## Resíduos

**Definição 15 (Polo)** Um **polo** é uma singularidade na qual os coeficientes não nulos da parte principal da série de Laurent são finitos.

**Definição 16 (Singularidade essencial)** Uma **singularidade essencial** é uma singularidade que não é um polo.

**Teorema 21** Seja  $f$  uma função complexa e  $z_0$  um polo de  $f$ . Então,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$$

**Teorema 22** Seja  $z_0$  uma singularidade (isolada) essencial de uma função complexa  $f$ . Então,  $f$  toma todos os valores, com um valor excepcional no máximo, numa vizinhança arbitrariamente pequena de  $z_0$ .

**Teorema 23 (Resíduos em polos)** Suponha  $z_0$  um polo simples de  $f$ , i.e.,  $z_0$  é um polo de ordem  $m = 1$ . Então, localmente para  $z \neq z_0$  podemos **calcular o resíduo** de  $z_0$  em  $f$  como

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

Ou se  $f$  é da forma  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  com  $p$  e  $q$  analíticas em  $z_0$  em que  $z_0$  é raiz simples de  $q$  (ou seja,  $q'(z_0) \neq 0$ , mas  $q(z_0) = 0$ )  $\forall z \neq z_0$  numa vizinhança de  $z_0$ , então

$$\text{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

**Teorema 24** Zeros de funções analíticas complexas não identicamente nulas são isolados.

**Teorema 25** Se  $q$  é analítica e  $z_0$  é raiz de ordem  $m$  de  $q$ , i.e.,  $q(z_0) = 0, \dots, q^{(m-1)}(z_0) = 0$  mas  $q^{(m)}(z_0) \neq 0$ , então  $z_0$  é polo de ordem  $m$  de  $\frac{1}{q}$ .

**Teorema 26 (Teorema dos Resíduos)** Seja  $C$  uma curva fechada simples orientada no sentido anti-horário contornando uma quantidade finita de singularidades  $z_1, \dots, z_m$  de uma função complexa  $f$ . Então

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}_{z=z_j} f(z)$$