Fundação Getúlio Vargas
Cálculo em uma Variável Complexa
Wellington Silva

Abstract of calculus in a complex variable
Due: March 23, 2022

Resumo de Cálculo em uma Variável Complexa

Sumário

Números Complexos e propriedades (Week 1)

Propriedades 1 *As seguintes propriedades valem para quaisquer* $z, w, t \in \mathbb{C}$*:*

(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$

(b) $z + w = w + z$

(c) $0 + z = z$

(d) $z + (-z) = 0$

(e) $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$

(f) $zw = wz$

(g) $1 \cdot z = z$

(h) $z \cdot z^{-1} = 1$ *se* $z \neq 0$

(i) $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$

Definição 1 *Um número complexo* z *é da forma* $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ *e* $i = \sqrt{-1}$*, que podemos escrever como um par de variáveis de* $\mathbb{R}^2$ *de forma que* $z = (x, y)$*.*

Definição 2 (Soma e produto nos complexos) *Seja* $z = (x, y)$ *e* $w = (a, b),\ x, y, a, b, \in \mathbb{R}$*, definimos soma e produto, para manter consistência com as propriedades acima, da seguinte forma*

$$z + w = (x + a, y + b)$$
$$z \cdot w = (xa - yb, xb + ya)$$

Definição 3 (O Módulo) *Seja* $z = x + iy$ *um complexo, então o* ***módulo*** *("tamanho") de um número complexo é definido por*

$$\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definição 4 (O Conjugado) *Seja* $z = x + iy$ *um complexo, então o* ***conjurado*** *de um número complexo é definido por*

$$\overline{z} = x - iy$$

Propriedades 2 (Propriedades do conjugado) *As seguintes propriedades valem para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}$*:*

(a) $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ *e* $\overline{zw} = \overline{zw}$

(b) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ *se* $w \neq 0$

(c) $z + \overline{z} = 2Re(z)$ *e* $z - \overline{z} = 2iImg(z)$

(d) $z \in \mathbb{R}$ *se e somente se* $\overline{z} = z$

(e) z *é imaginário puro se e somente se* $\overline{z} = z$

Definição 5 (A Forma Polar) *Seja* $z = x + iy$ *com* $z \neq 0$*, então podemos escrever* z *como*

$$z = r(cos(\theta) + sen(\theta))$$

Com as seguintes propriedades

1. $r = \mid z \mid$

2. $cos(\theta) = \frac{x}{|r|}$

3. $sen(\theta) = \frac{y}{|x|}$

Teorema 1 *Seja* $n \in \mathbb{Z}_{++}$ *e* $z = r(cos(\theta) + isen(\theta))$. *Então*

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Exponencial, Limite e Derivada (Week 2)

Definição 6 (Função exponencial) *Seja* $z \in \mathbb{C}$ *com* $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, *então*

$$e^z := e^x(cos(y) + isen(y))$$

Definição 7 (Cosseno e seno complexo) *Para* $z \in \mathbb{C}$, *vamos definir*

$$cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$sen(z) = \frac{1}{2i}(e^{-iz} - e^{-iz})$$

Propriedades 3 (Cos e sen) *Seja* $z = x + iz,\ x, y \in \mathbb{R}$. *Então*

(a) $cos(z) = cos(x)cosh(y) - isen(x)senh(y)$

(b) $sen(z) = sen(x)cosh(y) + icos(x)senh(y)$

(c) $\mid cosz \mid^2 = cos^2(x) + senh^2(y)$

(d) $\mid senz \mid^2 = sen^2(x) + senh^2(y)$

Definição 8 (Função logaritmo) *Seja* $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$[1]

$$Ln(z) = ln \mid z \mid + iArg(z)$$

$$ln(z) = ln \mid z \mid + iarg(z)$$

Definição 9 (Limite) *Seja* $z_0 \in \mathbb{C}$ *um ponto de acumulação de* $D \subset \mathbb{C}$ *e seja* $f : D \to \mathbb{C}$. *Dizemos que*

$$lim_{z \to z_0} f(z) = l$$

Quando para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que*

$$z \in D - \{z_0\} \text{ e } |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

Definição 10 (Continuidade) *Seja* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in D$. *Dizemos que* f *é* ***contínua*** *em* z_0 *se para todo* $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que*

$$z \in D - \{z_0\} \text{ e } |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

[1]Aqui: $Arg(z) = \theta,\ \theta \in (-\pi, \pi]$ e $Arg(z) = \theta$

Definição 11 (Diferenciabilidade) *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$ ponto de acumulação de D. Se existe o limite*

$$lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

dizemos que f é diferenciável em z_0 (ou derivável) e denotamos o limite acima por $f'(z_0)$.

Definição 12 (Funções Analíticas) *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f é dita* ***analítica*** *no domínio D se f é diferenciável em todos os pontos de D. E também é dita* ***analítica em um ponto*** *$z_0 \in D$ se f é analítica em uma vizinhança de z_0.*

Equações de Cauchy-Riemann (Week 3)

Teorema 2 (Cauchy-Riemann (ida)) *Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida e continua em alguma vizinhança de $z = x + iy$ e suponha f diferenciável em z. Então, as derivadas parciais de u e v existem e satisfazem*[2]

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

Corolário 2.1 *Se f é analítica em um domínio D, então as derivadas parciais de u e v existem em D e*

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

$$f' = u_x + iv_x \quad e \quad f' = v_y - iu_y$$

Teorema 3 (Cauchy-Riemann (volta)) *Se as funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de variáveis $x, y \in \mathbb{R}$ tiverem derivadas parciais contínuas satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em algum domínio D, então a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D, com $z = x + iy$.*

Cauchy-Riemann, Eq. de Laplace e Integral (Week 4)

Teorema 4 (Eq. de Laplace) *Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em um domínio D, (e as derivadas segundas de u e v existem e são continuas)*[3]*, então ambas u e v satisfazem a equação de Laplace.*

$$\nabla u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\nabla v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Teorema 5 (Trigonométricas e logaritmo) *Seja $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, temos que vale que*

$$\sin'(z_1) = \cos(z_1)$$

$$\cos'(z_1) = -\sin(z_1)$$

$$Ln'(z_2) = \frac{1}{z_2}$$

[2] Chamadas aqui de **Equações de Cauchy-Riemann**

[3] Mais adiante, veremos que a parte em parenteses não é necessária.

Definição 13 (Integral) *Seja $C \in \mathbb{C}$ uma curva e $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ com D contendo a curva C, então a integral de f na curva C é definida por*

$$\int_C f(z)dz := \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f(w_m)\Delta z_m$$

Onde $\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$ e w_m um ponto de C no arco que liga z_m a z_{m-1}. Em particular quando $z(a) = z(b)$ temos uma curva fechada e denotamos a integral como

$$\oint_C f(z)dz$$

Propriedades 4 (Propriedades da Integral) *Consequências diretas da definição de integral*

1. ***Linearidade:***

$$\int_C \alpha f_1(z) + \beta f_2(z)dz = \alpha \int_C f_1(z)dz + \beta \int_C f_2(z)dz$$

2. ***Caminho inverso:***

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

Em que $-C$ é a curva parametrizada no sentido contrário a C.

3. ***Partição da Curva:***

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

Onde $C = C_1 \cup C_2$

Teorema 6 *Seja $f(z) = u(z) + iv(z)$ uma função analítica em torno da curva C. Podemos escrever*

$$\int_C f(z)dz = \int_C G + i\int_C H \tag{1}$$

Em que $G, H : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com

$$\begin{aligned} G(x, y) &:= (u(x, y), -v(x, y)) \\ H(x, y) &:= (v(x, y), u(x, y)) \end{aligned}$$

e D contém a curva C, por Cauchy-Riemann os jacobianos J_G e J_H são simétricos i.e. G e H são conservativos e as integrais da Equação 1 são independentes de caminho.

Teorema da integral de Cauchy (Week 5)

Teorema 7 *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua e seja C uma curva contida em D com início z_0 e fim z_1. Dada uma parametrização "crescente" $z(t)$ de C, $t \in [t_0, t_1]$, temos*

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)).z'(t)dt$$

Teorema 8 (Integral de Cauchy) *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua e seja C uma curva contida em D com início e fim iguais. Então*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Teorema 9 *Seja C e $\tilde{C}$ curvas em $D \subset \mathbb{C}$ com pontos inicial z_0 e final z_1. Então*

$$\int_C f(z)dz = \int_{\tilde{C}} f(z)dz$$