Fundação Getúlio Vargas
Curvas e Superfícies
Wellington Silva

Abstract of surves and surfaces
Due: March 14, 2021

Resumo de Curvas e Superfícies

Sumário

Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco (Week 1)

Definição 1 *Uma **curva parametrizada** em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ sendo $I \subset \mathbb{R}$ aberto.*

Definição 2 *O conjunto imagem de γ, $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ é dito o **traço** de γ.*

Definição 3 (Vetor tangente) *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ com $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ com $\gamma_i(y)$ diferenciáveis $\forall i, i = 1 \ldots n$, o vetor*

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

*é chamado **vetor tangente de** γ em t*

Definição 4 (Curvas regulares) *Seja $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável. Diz-se que γ **é regular**, quando $\gamma'(t) \neq 0, \ \forall t \in I$.*

Definição 5 (Reta tangente) *Seja γ uma curva regular, então a **reta tangente de** γ no ponto $t_0 \in I$ é aquela que contém o ponto $\gamma(t)$ e é paralela ao vetor $\gamma'(t)$, ou seja*

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0)$$

Definição 6 (Comprimento de arco) *O **comprimento de arco de** α, de $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$ definido por $L_a^b(\alpha)$ é*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definição 7 *Se $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ é uma c.p.[1], sua **velocidade no ponto** $\gamma(t)$ é $\|\gamma'(t)\|$, e a curva é dita com **velocidade unitária** se $\|\gamma'(t)\| = 1, \ \forall t \in (a, b)$ e é parametrizada por comprimento de arco.*

Teorema 1 *Toda **curva regular** pode ser reparametrizada por **comprimento de arco**.*

Difeomorfismo e Reparametrização (Week 2)

Definição 8 (Difeomorfismo) *Dado os conjuntos abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Uma bijeção $f : U \to V$ é dita **difeomorfismo** quando f e f^{-1} são diferenciáveis.*

Definição 9 (Reparametrização) *A curva $\beta(s)$ é dita uma **reparametrização** de $\alpha(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ regular quando dados $I_0 \subset \mathbb{R}$ e $\phi : I_0 \to I$ difeomorfismo. Temos $\beta(S) = \alpha(\phi(S)))$.*

Definição 10 *Seja $\alpha(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ r $\beta(S) : (c, d) \to \mathbb{R}^2$. Então*

- *$\beta(S)$ é uma reparametrização positiva de α se $\phi'(S) > 0, \ \forall S$*
- *$\beta(S)$ é uma reparametrização negativa de α se $\phi'(S) < 0, \ \forall S$*

Definição 11 *Qualquer reparametrização de uma c.p. regular é regular (i.e. difeomorfismos preservam regularidade).*

Proposition 1 *A função L (comprimento de arco) é um difeomorfismo.*

Definição 12 *Toda curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ admite reparametrização por comprimento de arco.*

[1] curva parametrizada

Ângulo e curvatura (Week 3)

Definição 13 (Função Ângulo) *Dada uma curva diferenciável* $\gamma : I \to S^1$, *onde* S^1 *é o círculo de* $\mathbb{R}^2$ *com centro na origem e raio 1, diz-se que* $\theta : I \to \mathbb{R}$ *é uma **função-ângulo** de* γ, *quando*

$$\gamma(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s)),\ \forall s \in I$$

Definição 14 (Curvatura) *Seja* $\alpha : I \to \mathbb{R}$ *unit-speed. Designando-se o vetor tangente de* α *em* $s \in I$ *por* $T(s)$, *podemos afirmar que a curva* $T(s) = I \to S^1$ *admite função ângulo*

$$T(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s)),\ \forall s \in I$$

Daí a curvatura de α *em* $s \in I$ *é definida por*

$$K(s) = \theta'(s) = det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

Ângulo (Week 4)

Teorema 2 (Função-ângulo diferenciável) *Seja* $\gamma : I \to S^1$ *uma curva diferenciável. Então,* γ *admite uma função ângulo* $\theta : I \to \mathbb{R}$, *a qual é diferenciável. Além disso, toda função-ângulo de* γ, *a qual é diferenciável, difere de* θ *por uma constante.*

Corolário 2.1 *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e seja* $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$ *a parametrização por comprimento de arco de* α, *a curvatura de* α *em* $t \in I$ *é* $K_\alpha(t)$, *e, por definição é a curvatura de* β *em* $\theta^{-1}(t)$, *isto é*

$$K_\alpha := K_\beta(\theta^{-1}(t))$$