Álgebra Linear

André Ribeiro

June 2022

Contents

1 Espaços Vetoriais

Dado um conjunto V e um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, dizemos que V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial se os seguintes axiomas são satisfeitos:

- O operador

$$\begin{aligned} +_V &: V \times V \to V \\ (u, v) &\mapsto u +_V v \end{aligned}$$

  é associativo, comutativo, possui elemento neutro e inverso.

- O operador

$$\begin{aligned} \cdot_V &: \mathbb{K} \times V \to V \\ (a, u) &\mapsto a \cdot_V u \end{aligned}$$

  é compatível com o produto em $\mathbb{K}$ e possui elemento neutro. Este operador é também distributivo com respeito a $+_V$ e $+$, i.e., dados $a, b \in \mathbb{K}$ e $u, v \in V$, temos que

$$(a + b, v) \to (a, v) +_V (b, v) \quad \wedge \quad (a, u +_V v) \to (a, u) +_V (a, v)$$

A partir de agora usaremos as notações usuais de soma e produto, e o contexto deixa claro quando estamos tratando de somas e produtos no corpo ou nos espaços vetoriais.

1.1 Subespaços Vetoriais

Dado V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, dizemos que $F \subset V$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial se valem as propriedades

- $x, y \in F \implies x + y \in F$
- $\alpha \in \mathbb{K},\, x \in F \implies \alpha x \in F$,

Proposição: Se V é $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $F \subset V$ é subespaço então F é $\mathbb{K}$-espaço vetorial

1.2 Somas e Somas Diretas

Sejam U $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $V_1, \cdots, V_n \subset U$ subespaços. Definimos o conjunto $V = \sum V_i$ como

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \cdots + V_n \\ &= \{v_1 + v_2 + \cdots + v_n \mid v_i \in V_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n\} \end{aligned}$$

O conjunto $V \subset U$ é também um subespaço vetorial. Se cada vetor de V pode ser escrito unicamente como uma soma de vetores acima, dizemos que V é soma direta de $V_1, \cdots V_n$, e denotamos por

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$$

Proposição: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $U_1, \cdots U_n \subset V$ subespaços. Então

$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ se, e somente se

- $V = U_1 + \cdots U_n$
- $0 = u_1 + \cdots u_n \iff u_1 = \cdots = u_n = 0$

Proposição: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $U, W \subset V$ subespaços. Então $V = U \oplus W$

- $V = U + W$
- $U \cap W = \{0\}$

2 Espaços Vetoriais Finitos

2.1 Gerador (span)

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S = \{x_1, \cdots, x_k\} \subset V$ subespaço, definimos o espaço gerado por S como o menor espaço vetorial contendo S, (i.e. o conjunto de todas as combinações lineares de seus vetores) denotado por

$$\operatorname{Ger}(S) = \operatorname{span}(S) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j,\ \alpha_j \in \mathbb{K} \right\}$$

Dizemos que V tem dimensão finita se $\exists E \in V$ t.q. $V = \operatorname{span}(E)$, caso contrário V tem dimensão infinita.

2.2 Dependência e Independência Linear

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $S = \{s_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset V$ subespaço. Dizemos que o conjunto de vetores em S é linearmente independente (LI) se

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = 0 \iff a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

O conjunto de vetores é linearmente dependente (LD) se não é LI.

2.3 Base

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Um conjunto $B \subset V$ é uma base de V se $V = \operatorname{span}(B)$ e os vetores de B são LI.

Corolário: Todo espaço vetorial finito tem uma base.

Teorema: Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se B_1 e B_2 são bases para V, então $|B_1| = |B_2|$

2.4 Dimensão

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Definimos a dimensão de V sobre $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V$, como a cardinalidade de qualquer base de V.

Teorema: Sejam U_1, U_2 subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial finito. Então

$$\dim_{\mathbb{K}}(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

3 Transformações Lineares

Sejam U e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Uma transformação linear $T : U \to W$ é uma função que satisfaz, $\forall u, v \in U$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- $T(\alpha u) = \alpha(Tu)$

O conjunto das funções lineares de U em W é denotado por $\mathcal{L}(U, W)$

3.1 Núcleo e Imagem

Definimos o núcleo e a imagem (ou espaço nulo e espaço coluna) de uma transformação $T \in \mathcal{L}(U, W)$, respectivamente, como os conjuntos

$$N(T) = \{v \in U \mid Tv = 0\} \quad \wedge \quad C(T) = \{Tv \mid v \in U\}$$

Teorema: $N(T) \subset U$ e $C(T) \subset W$ são subespaços.

Um mapa linear $T : U \to W$ é sobrejetivo se $C(T) = W$ e é injetivo se, $\forall u, v \in U$, temos

$$Tu = Tv \iff u = v$$

Proposição: Seja $T \in \mathcal{L}(U, W)$. Então T é injetiva se, e somente se, $N(T) = \{0\}$

Teorema: Se $\dim_{\mathbb{K}} U < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(U, W)$ então $\dim_{\mathbb{K}} C(T) < \infty$ e

$$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} C(T) + \dim_{\mathbb{K}} N(T)$$

Corolário: Se U e W são $\mathbb{K}$-espaços com dimensão finita com $\dim U > \dim W$, então nenhum mapa linear de U para W é injetivo. Analogamente, se $\dim U < \dim W$, então nenhum mapa linear de U para W é sobrejetivo.

3.2 Matriz de uma transformação linear

Seja $T \in \mathcal{L}(U, W)$, e suponha que $(u_1, \cdots, u_n)$ e $(w_1, \cdots, w_m)$ são bases de U e W, respectivamente. Podemos então escrever cada Tu_k unicamente como combinação linear dos w_j

$$Tu_k = \sum_{j=1}^{m} a_{j,k} w_j$$

com $k = 1, \cdots, n$ e $a_{j,k} \in \mathbb{K}, \forall j, k$. A matriz $m \times n$ cujas entradas são compostas pelos a's é chamada matriz da transformação linear T, denotada por

$$M(T, (u_1, \cdots, u_n), (w_1, \cdots, w_m)) = M(T) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

É fácil mostrar que, dados $T, S \in \mathcal{L}(U, W)$ e $c \in \mathbb{K}$, temos que

- $M(T + S) = M(T) + M(S)$
- $M(cT) = cM(T)$

Seja $\mathbb{M}(m, n, \mathbb{K}) = \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{m\times n}$ o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. Com as operações acima, o conjunto $\mathbb{K}^{m\times n}$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Note que a matriz cujas entradas são todas 0 representa a identidade aditiva desse espaço. Consideremos agora, um $\mathbb{K}$-espaço V, $(v_1, \cdots, v_p)$ uma base e as aplicações lineares $S : U \to V$, $T : V \to W$. Então TS é uma aplicação de U para W. Com a multiplicação usual de matrizes, temos também que

$$M(TS) = M(T)M(S)$$

Seja $(u_1, \cdots, u_n)$ uma base de U. Se $u \in U$, então

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

A matriz de u é definida por

$$M(u) = M(u, (u_1, \cdots, u_n)) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

3.3 Aplicações inversíveis

Proposição: Uma aplicação linear é invertível se, e somente se, é injetiva e sobrejetiva

Dizemos que dois espaços vetoriais são isomorfos se existe uma bijeção entre eles, i.e. uma aplicação linear invertível de um espaço para o outro.

Teorema: Dois espaços vetoriais finitos são isomorfos se, e se somente se, tem mesma dimensão.

Proposição: A aplicação $M : \mathcal{L}(U, W) \to \mathbb{K}^{m\times n}$ é invertível, i.e. $\mathcal{L}(U, W) \cong \mathbb{K}^{m\times n}$

Note que uma base para o espaço das matrizes $m \times n$ são as matrizes com 1 em uma entrada e 0 nas outras. Com isso, temos que $\dim \mathbb{K}^{m\times n} = mn$. Como esse espaço é isomorfo ao dos funcionais lineares, $\dim \mathcal{L}(U, W) = mn$.

Teorema: Seja U um $\mathbb{K}$-espaço de dimensão finita. Se $T \in \mathcal{L}(U)$, então as seguintes definições são equivalentes

(a) T é invertível

(b) T é injetiva

(c) T é sobrejetiva

4 Autovalores e Autovetores

4.1 Invariantes

Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço, $T \in \mathcal{L}(V)$ e $U \subset V$ subespaço. Dizemos que U é invariante sob T se

$$u \in U \implies Tu \in U, \forall u \in U$$

Em outras palavras, U é invariante sob T se $T_{|U}$ é um operador em U. Note que $\{0\}$ e V são invariantes triviais, e é fácil verificar que os espaços $N(T)$ e $C(T)$ são invariantes sob T. O caso mais simples de subespaço invariante é quando $\dim U_1 = 1$. Nesse caso, dado $u \in V$ temos

$$U_1 = \{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$$

Temos que todos subespaços de dimensão 1 de V são dessa forma. Se U_1 é invariante sob T, então

$$Tu = \lambda u$$

Esse caso particular tem enorme importância. Dizemos que um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de $T \in \mathcal{L}(V)$ se $\exists u \in V \setminus \{0\}$ tal que $Tu = \lambda u$. Portanto T tem subespaço invariante de dimensão 1 se, e somente se, possui um autovalor. Perceba que

$$Tu = \lambda u \iff (T - I\lambda)u = 0$$

portanto λ é um autovalor se, e somente se $T - I\lambda$ não é invertível (i.e. não é bijetiva). O vetor u que satisfaz essa equação é chamado autovetor de T correspondente a λ. O conjunto de autovetores associados a λ é dado por $N(T - I\lambda) \subset V$

Teorema: Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ são autovalores distintos de T e $v_1, \cdots, v_m$ são os autovetores correspondentes (diferentes de 0). Então $(v_1, \cdots, v_m)$ é L.I.

Corolário: Cada operador em V tem no máximo $\dim V$ autovalores.

4.2 Polinômios aplicados a operadores

Se $T \in \mathcal{L}(V)$, definimos

$$T^m = \underbrace{T \cdots T}_{m \text{ vezes}}$$

Por conveniência $T^0 = I$. Definimos também

$$T^{-m} = (T^{-1})^m$$

É fácil verificar que valem as propriedades

$$T^n T^m = T^{n+m} \quad \wedge \quad (T^n)^m = T^{nm}$$

com $m, n \in \mathbb{Z}$ se T é invertível e $m, n \in \mathbb{N}$ caso contrário. Se $T \in \mathcal{L}(V)$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ é um polinômio dado por

$$p(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j z^j,\ z \in \mathbb{K}$$

então $p(T)$ é o operador definido por

$$p(T) = \sum_{j=1}^{n} a_j T^j$$

Fixado um $T \in \mathcal{L}(V)$, a função

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathcal{P}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{L}(V) \\ p &\mapsto p(T) \end{aligned}$$

é linear. Se $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, então pq é o polinômio definido por

$$(pq)(z) = p(z)q(z)$$

É fácil verificar que

$$(pq)(T) = p(T)q(T),\ T \in \mathcal{L}(V)$$

5 Espaço de Produto Interno

5.1 Motivação

A motivação do conceito de produto interno vem da norma. Como a norma não é linear, injetamos linearidade nela com o produto interno. Definimos o produto escalar nos vetores do $\mathbb{R}^n$

$$x, y \in \mathbb{R}^n \implies x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

e podemos definir a norma a partir disso

$$\|x\|^2 = x \cdot x$$

Note que o produto escalar satisfaz, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

- $x \cdot x \geq 0$ e $x \cdot x = 0 \iff x = 0$
- $\cdot : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é linear, $x \cdot y = x^T y$
- $x \cdot y = y \cdot x$

O produto interno é uma generalização do produto escalar. Antes das definições, precisamos analisar o caso complexo. Para os vetores de $\mathbb{C}^n$, temos

$$z \in \mathbb{C}^n \implies \|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j}$$

Como queremos que $\|z\|^2 = z \cdot z$, o produto interno de $z, w \in \mathbb{C}^n$ deve ser algo da forma

$$z_1 \overline{w_1} + \cdots + z_n \overline{w_n}$$

Note que se queremos o produto interno de w e z, a expressão acima é substituída pelo seu conjugado. Com essas motivações, podemos definir produtos internos sobre $\mathbb{K}$-espaços, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.2 Produto Interno

Seja V um $\mathbb{K}$-espaço. Um produto interno em V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \to \mathbb{K}$ que leva um par de vetores (u, v) em V em um escalar $\langle u, v \rangle$ do corpo $\mathbb{K}$, satisfazendo as seguintes propriedades

- $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in V \ \wedge \ \langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$
- $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$, $\forall u, v, w \in V$
- $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in V$
- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, $\forall u, v \in V$

Note que a condição de simetria conjugada no caso real torna-se apenas simetria. O conjunto $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado espaço vetorial de produto interno (*inner-product space*).