

Resumo de Cálculo em uma Variável Complexa

Sumário

Números Complexos e propriedades

Exponencial, Limite e Derivada

Equações de Cauchy-Riemann

Cauchy-Riemann, Eq. de Laplace e Integral

Teorema da integral de Cauchy

Fórmulas da integral de Cauchy para domínios multi-conexos

Cauchy, Liouville e Morera

Teorema de Laurent

Números Complexos e propriedades

Propriedades 1 As seguintes propriedades valem para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:

(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$

(b) $z + w = w + z$

(c) $0 + z = z$

(d) $z + (-z) = 0$

(e) $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$

(f) $zw = wz$

(g) $1 \cdot z = z$

(h) $z \cdot z^{-1} = 1$ se $z \neq 0$

(i) $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$

Definição 1 Um número complexo z é da forma $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, que podemos escrever como um par de variáveis de \mathbb{R}^2 de forma que $z = (x, y)$.

Definição 2 (Soma e produto nos complexos) Seja $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$, $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, definimos soma e produto, para manter consistência com as propriedades acima, da seguinte forma

$$z + w = (x + a, y + b)$$

$$z \cdot w = (xa - yb, xb + ya)$$

Definição 3 (O Módulo) Seja $z = x + iy$ um complexo, então o **módulo** (“tamanho”) de um número complexo é definido por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definição 4 (O Conjugado) Seja $z = x + iy$ um complexo, então o **conjugado** de um número complexo é definido por

$$\bar{z} = x - iy$$

Propriedades 2 (Propriedades do conjugado) As seguintes propriedades valem para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ e $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$

(b) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ se $w \neq 0$

(c) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ e $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

(d) $z \in \mathbb{R}$ se e somente se $\bar{z} = z$

(e) z é imaginário puro se e somente se $\bar{z} = -z$

Definição 5 (A Forma Polar) Seja $z = x + iy$ com $z \neq 0$, então podemos escrever z como

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Com as seguintes propriedades

$$1. r = |z|$$

$$2. \cos(\theta) = \frac{x}{|r|}$$

$$3. \sin(\theta) = \frac{y}{|r|}$$

Teorema 1 Seja $n \in \mathbb{Z}_{++}$ e $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Então

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Exponencial, Limite e Derivada

Definição 6 (Função exponencial) Seja $z \in \mathbb{C}$ com $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Definição 7 (Cosseno e seno complexo) Para $z \in \mathbb{C}$, vamos definir

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Propriedades 3 (Cos e sen) Seja $z = x + iz$, $x, y \in \mathbb{R}$. Então

$$(a) \cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$(b) \sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

$$(c) |\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$$

$$(d) |\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$$

Definição 8 (Função logaritmo) Seja $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ ¹

$$Ln(z) = \ln |z| + i\text{Arg}(z)$$

$$\ln(z) = \ln |z| + i\arg(z)$$

Definição 9 (Limite) Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto de acumulação de $D \subset \mathbb{C}$ e seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

Quando para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$z \in D - \{z_0\} \text{ e } |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - l| < \varepsilon$$

Definição 10 (Continuidade) Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$. Dizemos que f é **contínua** em z_0 se para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$z \in D - \{z_0\} \text{ e } |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

¹Aqui: $\text{Arg}(z) = \theta$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ e $\arg(z) = \theta$

Definição 11 (Diferenciabilidade) Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$ ponto de acumulação de D . Se existe o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

dizemos que f é diferenciável em z_0 (ou derivável) e denotamos o limite acima por $f'(z_0)$.

Definição 12 (Funções Analíticas) Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, f é dita **analítica** no domínio D se f é diferenciável em todos os pontos de D . E também é dita **analítica em um ponto** $z_0 \in D$ se f é analítica em uma vizinhança de z_0 .

Equações de Cauchy-Riemann

Teorema 2 (Cauchy-Riemann (ida)) Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida e contínua em alguma vizinhança de $z = x + iy$ e suponha f diferenciável em z . Então, as derivadas parciais de u e v existem e satisfazem²

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

Corolário 2.1 Se f é analítica em um domínio D , então as derivadas parciais de u e v existem em D e

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

$$f' = u_x + iv_x \quad e \quad f' = v_y - iu_y$$

Teorema 3 (Cauchy-Riemann (volta)) Se as funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de variáveis $x, y \in \mathbb{R}$ tiverem derivadas parciais contínuas que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em algum domínio D , então a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D , com $z = x + iy$.

Cauchy-Riemann, Eq. de Laplace e Integral

Teorema 4 (Eq. de Laplace) Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em um domínio D , (e as derivadas segundas de u e v existem e são contínuas)³, então ambas u e v satisfazem a equação de Laplace.

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Teorema 5 (Trigonométricas e logaritmo) Seja $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, temos que vale que

$$\sin'(z_1) = \cos(z_1)$$

$$\cos'(z_1) = -\sin(z_1)$$

$$\ln'(z_2) = \frac{1}{z_2}$$

²Chamadas aqui de **Equações de Cauchy-Riemann**

³Mais adiante, veremos que a parte em parenteses não é necessária.

Definição 13 (Integral) Seja $C \in \mathbb{C}$ uma curva e $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ com D contendo a curva C , então a integral de f na curva C é definida por

$$\int_C f(z)dz := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(w_m) \Delta z_m$$

Onde $\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$ e w_m é um ponto de C no arco que liga z_m a z_{m-1} . Em particular quando $z(a) = z(b)$ temos uma curva fechada e denotamos a integral como

$$\oint_C f(z)dz$$

Propriedades 4 (Propriedades da Integral) Consequências diretas da definição de integral

1. **Linearidade:**

$$\int_C \alpha f_1(z) + \beta f_2(z)dz = \alpha \int_C f_1(z)dz + \beta \int_C f_2(z)dz$$

2. **Caminho inverso:**

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz$$

Em que $-C$ é a curva parametrizada no sentido contrário a C .

3. **Partição da Curva:**

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

Onde $C = C_1 \cup C_2$

Teorema 6 Seja $f(z) = u(z) + iv(z)$ uma função analítica em torno da curva C . Podemos escrever

$$\int_C f(z)dz = \int_C G + i \int_C H \quad (1)$$

Em que $G, H : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com

$$G(x, y) := (u(x, y), -v(x, y))$$

$$H(x, y) := (v(x, y), u(x, y))$$

e D contém a curva C , por Cauchy-Riemann os jacobianos J_G e J_H são simétricos i.e. G e H são conservativos e as integrais da Equação 1 são independentes de caminho.

Teorema da integral de Cauchy

Teorema 7 Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua e seja C uma curva contida em D com início z_0 e fim z_1 . Dada uma parametrização “crescente” $z(t)$ de C , $t \in [t_0, t_1]$, temos

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \cdot z'(t)dt$$

Teorema 8 (Integral de Cauchy) *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua e seja C uma curva contida em D com início e fim iguais. Então*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Teorema 9 *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua e sejam C e \tilde{C} curvas em $D \subset \mathbb{C}$ com pontos inicial z_0 e final z_1 . Então*

$$\int_C f(z)dz = \int_{\tilde{C}} f(z)dz$$

Lema 10 (ML inequality) *Seja f contida num domínio D contendo a curva C . Suponha $M \geq 0$ t.q. $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$ e denote por L o comprimento de C . Então*

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$$

Teorema 11 (TFC complexo) *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um domínio (aberto simplesmente conexo) e $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua. Sejam $z_0, z_1 \in D$ e C uma curva contida em D com ponto inicial z_0 e final z_1 . Seja $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$. Então*

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Teorema 12 (Integral indefinida) *Se f é analítica em um aberto simplesmente conexo D , então existe F definida em D tal que $F' = f$ em D .*

Fórmulas da integral de Cauchy para domínios multi-conexos

Teorema 13 (Duplamente Conexos) *Seja $D \subset \mathbb{C}$ duplamente conexo com C_1 “borda exterior” e C_2 “borda interior” com ambas as curvas orientadas no sentido anti-horário. Suponha D^* aberto contendo D e $f : D^* \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Então*

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

Teorema 14 (Multi-conexo (generalização do caso anterior)) *Se f for analítica em D^* multi-conexo com C_1, \dots, C_n “borda interior” e C “borda exterior”, onde todas são orientadas no sentido anti-horário. Então*

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z)dz$$

Teorema 15 (Teorema da Integral de Cauchy) *Suponha f analítica em um domínio simplesmente conexo D . Então, $\forall z_0 \in D$ e qualquer curva simples $C \subset D$ que contorna z_0 no sentido anti-horário, temos*

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

ou de maneira equivalente,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Teorema 16 (Teorema da Integral de Cauchy para derivada) *Suponha f analítica em um domínio simplesmente conexo D . Então, $\forall z_0 \in D$ e qualquer curva simples $C \subset D$ que contorna z_0 no sentido anti-horário, a n -ésima derivada de $f(z_0)$ é*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Cauchy, Liouville e Morera

Teorema 17 (Desigualdade de Cauchy) *Suponha f analítica num domínio simplesmente conexo contendo C (fechado simples) com z_0 no “interior”. Seja $M \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq n! \frac{M}{r^n} \end{aligned}$$

Onde, M é cota superior para $|f(z)|$ no círculo \hat{C} centrada em z_0 de raio $r > 0$ e que esteja “dentro” de C .

Teorema 18 (Teorema de Liouville) *Se uma função inteira (analítica em todo \mathbb{C} é limitada em valor absoluto de \mathbb{C} , então essa função é constante.*

Teorema 19 (Teorema de Morera (recíproca de Cauchy)) *Se f é contínua em um domínio simplesmente conexo D e se*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para cada curva fechada simples em D , então f é analítica em D .

Teorema de Laurent

Teorema 20 (Teorema de Laurent) *Seja $f(z)$ analítica em um domínio entre dois círculos concêntricos C_1 e C_2 com centro z_0 . Então, $f(z)$ pode ser representado pela **série de Laurent***

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

para z no anel definido por C_1 e C_2 em que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) (z - z_0)^{m-1} dz, \quad m \geq 1, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Com C qualquer curva fechada simples orientada no sentido anti-horário contida no anel C_1, C_2

Definição 14 (Singularidade) *Dizemos que z_0 é uma **singularidade** de uma função complexa f se f não está definida em z_0 ou não é analítica em z_0*