

Resumo de Curvas e Superfícies

Sumário

Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco (Week 1)

Difeomorfismo e Reparametrização (Week 2)

Ângulo e Curvatura (Week 3)

Movimento Rígido e Teorema Fundamental (Week 4)

Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco (Week 1)

Definição 1 Uma **curva parametrizada** em \mathbb{R}^n é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sendo $I \subset \mathbb{R}$ aberto.

Definição 2 O conjunto imagem de γ , $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ é dito o **traço** de γ .

Definição 3 (Vetor tangente) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ com $\gamma_i(y)$ diferenciáveis $\forall i, i = 1 \dots n$, o vetor

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

é chamado **vetor tangente** de γ em t

Definição 4 (Curvas regulares) Seja $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável. Diz-se que γ é **regular**, quando $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Definição 5 (Reta tangente) Seja γ uma curva regular, então a **reta tangente** de γ no ponto $t_0 \in I$ é aquela que contém o ponto $\gamma(t_0)$ e é paralela ao vetor $\gamma'(t_0)$, ou seja

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0)$$

Definição 6 (Comprimento de arco) O **comprimento de arco** de α , de $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$ definido por $L_a^b(\alpha)$ é

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definição 7 Se $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma c.p.¹, sua **velocidade no ponto** $\gamma(t)$ é $\|\gamma'(t)\|$, e a curva é dita com **velocidade unitária** se $\|\gamma'(t)\| = 1$, $\forall t \in (a, b)$ e é parametrizada por comprimento de arco.

Teorema 1 Toda curva regular pode ser reparametrizada por comprimento de arco.

Difeomorfismo e Reparametrização (Week 2)

Definição 8 (Difeomorfismo) Dado os conjuntos abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Uma bijeção $f : U \rightarrow V$ é dita **difeomorfismo** quando f e f^{-1} são diferenciáveis.

Definição 9 (Reparametrização) A curva $\beta(s)$ é dita uma **reparametrização** de $\alpha(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular quando dados $I_0 \subset \mathbb{R}$ e $\phi : I_0 \rightarrow I$ difeomorfismo. Temos $\beta(S) = \alpha(\phi(S))$.

Definição 10 Seja $\alpha(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\beta(S) : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Então

- $\beta(S)$ é uma reparametrização positiva de α se $\phi'(S) > 0$, $\forall S$
- $\beta(S)$ é uma reparametrização negativa de α se $\phi'(S) < 0$, $\forall S$

Definição 11 Qualquer reparametrização de uma c.p. regular é regular (i.e. difeomorfismos preservam regularidade).

Proposition 1 A função L (comprimento de arco) é um difeomorfismo.

Definição 12 Toda curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ admite reparametrização por comprimento de arco.

¹curva parametrizada

Ângulo e Curvatura (Week 3)

Definição 13 (Função Ângulo) Dada uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow S^1$, onde S^1 é o círculo de \mathbb{R}^2 com centro na origem e raio 1, diz-se que $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função-ângulo** de γ , quando

$$\gamma(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), \quad \forall s \in I$$

Definição 14 (Curvatura) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ unit-speed. Designando-se o vetor tangente de α em $s \in I$ por $T(s)$, podemos afirmar que a curva $T(s) : I \rightarrow S^1$ admite função ângulo

$$T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), \quad \forall s \in I$$

Dá a curvatura de α em $s \in I$ é definida por

$$K(s) = \theta'(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

Movimento Rígido e Teorema Fundamental (Week 4)

Teorema 2 (Função-ângulo diferenciável) Seja $\gamma : I \rightarrow S^1$ uma curva diferenciável. Então, γ admite uma função ângulo $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, a qual é diferenciável. Além disso, toda função-ângulo de γ , a qual é diferenciável, difere de θ por uma constante.

Corolário 2.1 Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e seja $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$ a parametrização por comprimento de arco de α , a curvatura de α em $t \in I$ é $K_\alpha(t)$, e, por definição é a curvatura de β em $\theta^{-1}(t)$, isto é

$$K_\alpha := K_\beta(\theta^{-1}(t))$$

Definição 15 (Diedro de Frenet) Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Dado $s \in I$, o vetor $N(s) = JT(s)$ é dito o vetor normal de α em $s \in I$. A base ortonormal de \mathbb{R}^2 formado por $T(s)$ e $N(s)$ é chamada **Diedro de Frenet** em s .

Definição 16 (Movimento Rígido) $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita **movimento rígido**, quando preserva distancia, isto é, para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}^2$

$$\|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\|$$

Teorema 3 Seja $\Phi : A + p_0$ um movimento rígido direto de \mathbb{R}^2 e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Então, $\beta = \Phi \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular de \mathbb{R}^2 , parametrizada por comprimento de arco, tal que

$$K_\alpha(s) = K_\beta(s) \quad \forall s \in I$$

Teorema 4 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Planas) Sejam I um intervalo aberto da reta e $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

1. Então existe uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, unit-speed, cuja função curvatura coincide com K .
2. Além disso, para toda $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, unit-speed, que cumpre $K_\beta = K$, existe um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha = \Phi \circ \beta$