Fundação Getúlio Vargas
Curvas e Superfícies
Wellington Silva

Abstract of surves and surfaces
Last update: June 07, 2021

Resumo de Curvas e Superfícies

Sumário

Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco

Definição 1 *Uma **curva parametrizada** em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ sendo $I \subset \mathbb{R}$ aberto.*

Definição 2 *O conjunto imagem de γ, $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ é dito o **traço** de γ.*

Definição 3 (Vetor tangente) *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ com $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ com $\gamma_i(y)$ diferenciáveis $\forall i, i = 1 \ldots n$, o vetor*

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

*é chamado **vetor tangente de** γ em t*

Definição 4 (Curvas regulares) *Seja $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável. Diz-se que γ **é regular**, quando $\gamma'(t) \neq 0,\ \forall t \in I$.*

Definição 5 (Reta tangente) *Seja γ uma curva regular, então a **reta tangente de** γ no ponto $t_0 \in I$ é aquela que contém o ponto $\gamma(t)$ e é paralela ao vetor $\gamma'(t)$, ou seja*

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0)$$

Definição 6 (Comprimento de arco) *O **comprimento de arco de** α, de $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$ definido por $L_a^b(\alpha)$ é*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definição 7 *Se $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ é uma c.p.[1], sua **velocidade no ponto** $\gamma(t)$ é $\|\gamma'(t)\|$, e a curva é dita com **velocidade unitária** se $\|\gamma'(t)\| = 1,\ \forall t \in (a, b)$ e é parametrizada por comprimento de arco.*

Teorema 1 *Toda **curva regular** pode ser reparametrizada por **comprimento de arco**.*

Difeomorfismo e Reparametrização

Definição 8 (Difeomorfismo) *Dado os conjuntos abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Uma bijeção $f : U \to V$ é dita **difeomorfismo** quando f e f^{-1} são diferenciáveis.*

Definição 9 (Reparametrização) *A curva $\beta(s)$ é dita uma **reparametrização** de $\alpha(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ regular quando dados $I_0 \subset \mathbb{R}$ e $\phi : I_0 \to I$ difeomorfismo. Temos $\beta(S) = \alpha(\phi(S)))$.*

Definição 10 *Seja $\alpha(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ r $\beta(S) : (c, d) \to \mathbb{R}^2$. Então*

- *$\beta(S)$ é uma reparametrização positiva de α se $\phi'(S) > 0,\ \forall S$*
- *$\beta(S)$ é uma reparametrização negativa de α se $\phi'(S) < 0,\ \forall S$*

Definição 11 *Qualquer reparametrização de uma c.p. regular é regular (i.e. difeomorfismos preservam regularidade).*

Propriedade 1 *A função L (comprimento de arco) é um difeomorfismo.*

Definição 12 *Toda curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ admite reparametrização por comprimento de arco.*

[1] curva parametrizada

Ângulo e Curvatura

Definição 13 (Função Ângulo) *Dada uma curva diferenciável* $\gamma : I \to S^1$*, onde* S^1 *é o círculo de* $\mathbb{R}^2$ *com centro na origem e raio 1, diz-se que* $\theta : I \to \mathbb{R}$ *é uma* ***função-ângulo*** *de* γ*, quando*

$$\gamma(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s)),\ \forall s \in I$$

Definição 14 (Curvatura) *Seja* $\alpha : I \to \mathbb{R}$ *unit-speed. Designando-se o vetor tangente de* α *em* $s \in I$ *por* $T(s)$*, podemos afirmar que a curva* $T(s) = I \to S^1$ *admite função ângulo*

$$T(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s)),\ \forall s \in I$$

Daí a ***curvatura*** *de* α *em* $s \in I$ *é definida por*

$$K(s) = \theta'(s) = det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

Teorema Fundamental das Curvas Planas

Teorema 2 (Função-ângulo diferenciável) *Seja* $\gamma : I \to S^1$ *uma curva diferenciável. Então,* γ *admite uma função ângulo* $\theta : I \to \mathbb{R}$*, a qual é diferenciável. Além disso, toda função-ângulo de* γ*, a qual é diferenciável, difere de* θ *por uma constante.*

Corolário 2.1 *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e seja* $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$ *a parametrização por comprimento de arco de* α*, a curvatura de* α *em* $t \in I$ *é* $K_\alpha(t)$*, e, por definição é a curvatura de* β *em* $\theta^{-1}(t)$*, isto é*

$$K_\alpha := K_\beta(\theta^{-1}(t))$$

Definição 15 (Diedro de Frenet) *Seja* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Dado* $s \in I$*, o vetor* $N(s) = JT(s)$ *é dito o vetor normal de* α *em* $s \in I$*. A base ortonormal de* $\mathbb{R}^2$ *formado por* $T(s)$ *e* $N(s)$ *é chamada* ***Dietro de Frenet*** *em s.*

Definição 16 (Movimento Rígido) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é dita* ***movimento rígido****, quando preserva distancia, isto é, para quaisquer* $p, q \in \mathbb{R}^2$

$$\|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\|$$

Teorema 3 *Seja* $\Phi : A + p_0$ *um movimento rígido direto de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Então,* $\beta = \Phi \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^2$ *é uma curva regular de* $\mathbb{R}^2$*, parametrizada por comprimento de arco, tal que*

$$K_\alpha(s) = K_\beta(s)\ \forall s \in I$$

Teorema 4 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Planas) *Sejam I um intervalo aberto da reta e* $K : I \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável.*

1. *Então existe uma curva diferenciavel* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$*, unit-speed, cuja função curvatura coincide com K.*
2. *Além disso, para toda* $\beta : I \to \mathbb{R}^2$*, unit-speed, que cumpre* $K_\beta = K$*, existe um movimento rígido* $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $\alpha = \Phi \circ \beta$

Curvas Regulares no $\mathbb{R}^3$

Definição 17 (Curvas no $\mathbb{R}^3$) *As curvas diferenciáveis no $\mathbb{R}^3$, são definidas de forma análoga ao $\mathbb{R}^2$, isto é, uma **curva no** $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável de um intervalo I (aberto) em $\mathbb{R}^3$, da forma*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I$$

*Onde x, y e z são diferenciáveis, e a curva é dita **regular** quando*

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0,0,0),\ t \in I$$

Propriedade 2 *De forma análoga vale para $\mathbb{R}^3$ que*

- *Comprimento de arco é invariável por reparametrização.*
- *Toda curva regular admite reparametrização unit-speed ($\|\alpha'(t)\| = 1$).*

Definição 18 (Curvatura no $\mathbb{R}^3$) *Dada uma curva $\alpha : I \to \mathbb{R}$ regular parametrizada por comprimento de arco, a **curvatura** de α em $s \in I$ é definida como*

$$K_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Definição 19 (2-regular) *Seja uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ unit-speed, e $K_\alpha(s) > 0, \forall s$, ou seja, $\alpha''(s) \neq 0,\ \forall s$. Então dizemos que α é **2-regular**.*

Definição 20 (Triedro de Frenet) *Para α 2-regular, seja $T(s) = \alpha'(s)$ (vetor tangente), $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ (vetor normal) e $B(s) = T(s) \times N(s)$ (vetor binormal). Desse modo estabelecemos um referencial chamado **Triedro de Frenet** formado pelos vetores $\{T(s), N(s), B(s)\}$, onde,*

$$\begin{cases} B(s) = T(s) \times N(s) \\ N(s) = B(s) \times T(s) \\ T(s) = N(s) \times B(s) \end{cases}$$

Definição 21 (Curvatura e Torção) *Seja uma curva α 2-regular em $\mathbb{R}^3$ não necessariamente parametrizada por comprimento de arco, então a **curvatura e a torção** de α são definidas respectivamente como*

$$K_\alpha(t) = \frac{\|\alpha''(t) \times \alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\mathcal{T}(t) = \frac{\langle(\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t)\rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

Teorema 5 *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular unit-speed, então*

$$\alpha \text{ é plana} \iff \mathcal{T}(s) \equiv 0,\ \forall s \in I$$

Teorema Fundamental das Curvas Espaciais

Teorema 6 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Espaciais) *Sejam I um intervalo aberto, $K : I \to \mathbb{R}$ uma função positiva diferenciável e $\mathcal{T} : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável*

1. *Então existe uma curva diferenciavel $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, unit-speed, tal que K e $\mathcal{T}$ concedem com a curvatura e torção de α respectivamente*
2. *Além disso, $\forall \beta : I \to \mathbb{R}^3$, unit-speed, que cumpre $K_\beta = K$ e $\mathcal{T}_\beta = \mathcal{T}$ existe um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(s) = \Phi(\beta(s))$*

Superfícies Regulares

Definição 22 (Superfícies Regulares) *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma **superfície regular**, quando é localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, quando, $\forall p \in S$, exite um difeomorfismo*

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$$

onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$ e V é um aberto relativo de S. A aplicação X é dita, então uma parametrização local de S em p.

Definição 23 *Sendo o difeomorfismo de uma superfície da forma*

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \ (u,v) \in V$$

*definimos as **derivadas parciais** de X como sendo*

$$X_u(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)$$

$$X_v(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$

e se X_u e X_v são L.I. então produzem um plano tangente no ponto p.

Propriedade 3 *Se S é uma superfície regular temos que:*

(a) A aplicação $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ é diferenciável de C^∞ quando x, y e z tem derivadas parciais de todas as ordens.

(b) Para todo $q : (u,v) \in U$, a diferencial de X em q, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva, nesse caso, garante-se a existência do plano tangente T_pS.

Teorema 7 (Função Inversa) *Seja F diferenciável e $p \in A$ tal que dF_p é injetora. Então existe uma vizinhança $U \subset A$ de p. Tal que $F(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e a restrição F_U é um difeomorfismo de U sobre $F(U)$.*

Superfícies e Atlas

Definição 24 (Definição de Superfície) *O subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ é uma **superfície** se $\forall p \in S$, existe um aberto U em $\mathbb{R}^2$ e um aberto W em $\mathbb{R}^3$ contendo p tal que $S \cap W$ é **homeomorfo** a U.*

Definição 25 (Atlas) *Uma coleção de parametrizações que cobrem uma superfície S é dita **atlas de S** e cada uma das parametrizações é dita uma **carta**.*

Definição 26 (Curvas regulares enquanto subconjuntos) *Diz-se que um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ é uma **curva regular**, quando para cada $p \in C$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $\alpha : I \to \alpha(I) \subset C$ em que $\alpha(I)$ é um aberto relativo de C.*

Definição 27 (Valor Regular) *Dados um aberto $O \subset \mathbb{R}^3$ e uma função diferenciável $\varphi : O \to \mathbb{R}$. Dizemos que $q \in \mathbb{R}$ é **valor regular** de φ quando $\forall p \in \varphi^-1(\{q\}) \subset O$ a derivada*

$$d\varphi_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

é não nula, isto é, $\nabla\varphi(p) \neq 0$

Propriedade 4 *A **imagem inversa** de um valor regular de uma função diferenciável definida em um aberto do $\mathbb{R}^3$, quando não vazia, é uma superfície regular.*

Espaços topológicos $\mathbb{R}^n$ Parte I

Definição 28 (Bola aberta) *Dado $a \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$, a **bola aberta** de centro a e raio r em $\mathbb{R}^n$ é o conjunto*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$

*e respectivamente definimos **bola fechada** como*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \geq r\}$$

Definição 29 (Conjunto Limitado) *Um conjunto é dito **limitado** quando existe uma bola que o contém, ou seja,*

$$\exists a \in \mathbb{R}^n \text{ e } r > 0 \text{ t.q. } X \subset B(a, r)$$

Definição 30 (Aplicação limitada) *Dado um conjunto A uma **aplicação** $f : A \to \mathbb{R}^n$ é dita limitada quando seu conjunto imagem é limitada.*

Definição 31 (Conjunto aberto) *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito **aberto** quando $\forall a \in A \exists r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$ (e a é dito ponto interior de A).*

Definição 32 (Aplicação aberta) *Diz-se que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é **aberta** quando $\forall A \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto}, f(A) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto.*

Propriedade 5 (Propriedades dos abertos) *Propriedades fundamentais dos conjuntos abertos*

1. *O conjunto vazio e o espaço $\mathbb{R}^n$ são abertos.*
2. *A **intersecção** de uma família finita de abertos é aberta.*
3. *A **união** de uma família qualquer de abertos é aberta.*

Definição 33 (Espaço topológico) *Um espaço topológico é um par (X, T) em que X é um conjunto e T é uma família de subconjuntos de X, chamados abertos, que satisfazem as propriedades acima. Diz-se, então, que a família T define uma topologia*

Teorema 8 *Uma sequência (X_k) em $\mathbb{R}^n$ converge para $a \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\forall r > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ então $x_k \in B(a, r)$.*

Definição 34 (Conjunto fechado) *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito **fechado** quando seu complementar é aberto.*

Propriedade 6 (Propriedades dos fechados) *Propriedades fundamentais dos conjuntos fechados*

1. *O conjunto vazio e o espaço $\mathbb{R}^n$ são fechados.*
2. *A **intersecção** de uma família qualquer de fechados é um conjunto fechado.*
3. *A **união** de uma família finita de fechados é fechado.*

Definição 35 (Aplicação fechada) *Diz-se que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é **fechada** quando leva fechados de $\mathbb{R}^n$ em fechados de $\mathbb{R}^m$.*

Definição 36 (Aderência) *Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é dito **aderente** a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se existe uma sequência de pontos de X que convergem para a.*

Definição 37 (Fecho) *O **fecho** de X, denotado por $\overline{X}$, é o conjunto formado por todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ que são aderentes a X.*

Teorema 9 *$F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\iff \overline{F} = F$.*

Definição 38 (Bordo) *A fronteira (ou bordo) de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X}$.*

Espaços topológicos $\mathbb{R}^n$ Parte II

Definição 39 (Aberto relativo) *Sejam X subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $A \subset X$. Diz-se que A é **aberto relativo** a X ou **aberto relativamente** à X quando existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap C$.*

Definição 40 (Cisão) *Uma **cisão** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição do mesmo em dois conjuntos disjuntos que são ambos, abertos em X, isto é, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que*

- $X = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$
- *A e B abertos em X*

Definição 41 (Conexidade) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito **conexo** se a única cisão que admite é a trivial ($X = X \cup \emptyset$) caso contrario é dito desconexo.*

Definição 42 (Homeomorfismo) *Diz-se que dois espaços (X_1, T_1) e (X_2, T_2). São **homeomorfos** quando existe bijeção $\varphi : X_1 \to X_2$ tal que para quaisquer abertos $A_1 \in T_1$ e $A_2 \in T_2$ tem-se que $\varphi(A_1) \in T_2$ e $\varphi^{-1}(A_2) = T_1$. Logo φ é dito **homeomorfismo**.*

Definição 43 (Continuidade) *Dados $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to Y$ é **contínua** em $a \in X$ se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tal que $x \in X$ e $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.*

Teorema 10 *Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ uma bijeção $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se e só se f e f^{-1} são continuas.*

Definição 44 (Isomorfismo) *É uma aplicação que preserva uma estrutura e pode ser revertida com uma aplicação inversa.*

Primeira forma fundamental

Teorema 11 (Teorema da função inversa) *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciável e $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ isomorfismo. Então, existem abertos $V \subset U$ e $W \subset F(U)$, tais que se $p \in V$, então $F(p) \in W$ e $F|_v : V \to W$ é um difeomorfismo.*

Definição 45 (Vetor tangente) *Dado um ponto p de uma superfície regular S, diz-se que $w \in \mathbb{R}^n$ é um **vetor tangente** a S em p, se existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S,\ \varepsilon > 0$, tal que, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.*

Teorema 12 (Primeira forma fundamental) *Seja S uma superfície regular e $p \in S$. A **primeira forma fundamental** de S em p*

$$I_p : T_pS \to \mathbb{R}$$

é a forma quadrática associada à restrição do produto interno canônico de $\mathbb{R}^3$ ao plano tangente de S em p, T_pS, isto é

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle^2 = \|w\|^2,\ w \in T_pS$$

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to X(U) \subset S$ de S, as funções

$$E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle$$

$$F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle$$

$$G(u,v) = \langle X_v(u,v), X_v(u,v)\rangle$$

São os coeficientes da primeira forma fundamental de S relativos a X, isto é, a matriz de $I_{X(u,v)}$ *com respeito a base* $\{X_u, X_v\}$, *de* $T_{X(u,v)}S$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

E $\forall w = aX_u(u,v) + bX_v(u,v) \in T_{X_(u,v)}S$ *tem-se*

$$I_{X_(u,v)}(w) = a^2E(u,v) + 2abF(u,v) + b^2G(u,v)$$

Teorema 13 (Área) *Seguindo a primeira forma fundamental a área de uma superfície S um certo conjunto D é dada por*

$$A_S(D) = \int_D \sqrt{EG - F^2}dudv$$

Segunda forma fundamental

Definição 46 (Campo) *Dada uma parametrização regular S, chama-se* ***campo*** *em S toda aplicação* $f : S \to \mathbb{R}^3$

Propriedade 7 *Um campo é dito:*

- *unitário, se* $\|f(p)\| = 1,\ \forall p \in S$.
- *tangente, se* $f(p) \in T_pS,\ \forall p \in S$.
- *normal, se* $f(p) \in T_pS^{\perp},\ \forall p \in S$.

Definição 47 (vetor normal) *Sendo S uma superfície, seja*

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to X(U) \subset S$$

$\forall p \in S$ *seja* $q = X^{-1}(p)$, *podemos então definir o vetor normal em S no ponto p como* $N : X(U) \to \mathbb{R}^2$, *como*

$$N(p) = \frac{X_u(q) \times X_v(q)}{\|X_u(q) \times X_v(q)\|}$$

Definição 48 (Superfície orientável) *Uma superfície regular S é* ***orientável*** *quando se pode definir um campo normal unitário e diferenciável.*

Definição 49 (Atlas coerente) *Dada duas parametrizações de A, X e Y e p no conjunto imagem de ambas, então* $Y^{-1} \circ X$ *tem determinante jacobiano maior que 0 em* $X^{-1}(p)$.

Teorema 14 *Uma superfície regular S é* ***orientável*** *se, e só se, admite um atlas coerente.*

Definição 50 (Aplicação normal de Gauss) *Seja S uma superfície regular orientável, N campo normal unitário diferenciável em S, isto é,* $\|N(p)\| = 1, \forall p \in S$

$$N : S\text{(superfície)} \to E_1\text{(esfera de raio 1)}$$

é dita uma ***aplicação normal de Gauss***, $\forall p \in S,\ T_pS = \{N(p)\}^{\perp} = T_{N(p)}E_1$, *temos* dN_p *é um operador linear de* T_pS.

Teorema 15 (Segunda forma fundamental) *Seja S uma superfície regular orientável, N aplicação normal de Gauss de S*

$$I_p(w)\langle -dN_p w, w\rangle, \ w \in T_pS$$

Dado uma parametrização

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V \subset S$$

tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$, temos que, $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\langle N(\alpha(s)), \alpha'(s)\rangle = 0$, então

$$\langle -dN_p w, w\rangle = \langle N(p), \alpha''(0)\rangle$$

e os coeficientes da segunda forma são

$$\begin{aligned} e(u,v) &= \langle -dN_p X_u, X_u\rangle = \langle N \circ X, X_u u\rangle \\ f(u,v) &= \langle -dN_p X_u, X_v\rangle = \langle N \circ X, X_u v\rangle \\ g(u,v) &= \langle -dN_p X_v, X_v\rangle = \langle N \circ X, X_v v\rangle \end{aligned}$$