Notas de aulas pelos slides (para A2)

Distribuição de média e variância amostrais

- Se $X_1,\dots,X_n \sim \text{Normal}(\mu,\sigma^2)$, então

$$\bar{X}_n \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$S_n^2 \sim \text{Gama}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2\sigma^2}\right)$$

- Seja $Y \sim$ Qui-quadrado(m) e $Z \sim$ Normal$(0,1)$ e

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{m}}}$$

então X é uma t de Student com n graus de liberdade, e

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, \quad x \in (-\infty,\infty)$$

- Se $\hat{\sigma}' = \sqrt{\frac{\left(\sum(X_i-\bar{X}_n)^2\right)^2}{n-1}}$ (estimador), então

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n-\mu)}{\hat{\sigma}'} \sim \text{Student}(n-1)$$

Intervalos de confiança

- Seja $\mathbf{X} = \{X_1,\dots,X_n\}$, cada uma com p.d.f. $f(x|\theta)$, e considere $g(\theta)$. Sejam $A(\mathbf{X})$ e $B(\mathbf{X})$ estatísticas tais que

$$P\{A(\mathbf{X}) < g(\theta) < B(\mathbf{X})\} \geq \gamma$$

Então $I(\mathbf{X}) = (A(\mathbf{X}), B(\mathbf{X}))$ é um intervalo de confiança de $100.\gamma\%$

- Definimos intervalos de confiança unilateral, pondo $A(\mathbf{X}) = -\infty$ ou $B(\mathbf{X}) = \infty$ na definição acima.

- Seja $\mathbf{X} = \{X_1,\dots,X_n\}$, cada uma com p.d.f $f(x|\theta)$ e $V(\mathbf{X},\theta)$ uma v.a. com mesma distribuição para todo $\theta \in \Omega$.
Diz-se que $V(X,\theta)$ é uma quantidade pivotal.

- Seja $X = \{X_1,\dots,X_n\}$, tome $0<\gamma<1$ e $\gamma_1 < \gamma_2$ de modo que $\gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$, e seguindo certas condições

$$A(\mathbf{X}) = r(G^{-1}(\gamma_1), \mathbf{X})$$
$$B(\mathbf{X}) = r(G^{-1}(\gamma_2), \mathbf{X})$$

são os limites de um intervalo de confiança $100.\gamma\%$ para $g(\theta)$.

Testes de hipóteses

- Seja Ω um espaço de parâmetros e defina $\Omega_0, \Omega_1 \subset \Omega$ de modo que $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$ e $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$

definimos

$$H_0 := \theta \in \Omega_0$$
$$H_1 := \theta \in \Omega_1$$

H_0 é a hipótese nula e H_1 é a hipótese alternativa. Se H_0, dizemos que rejeitamos a hipótese nula. Por outro lado, se $\theta \in \Omega_0$ dizemos que não rejeitamos ou falhamos em rejeitar H_0.

- Hipótese simples e hipótese compostas.

- Uma hipótese da forma $H_0: \theta \leq \theta_0$ (ou $\theta \geq \theta_0$) é dita unilateral, enquanto hipóteses da forma $H_0: \theta \neq \theta_0$ são ditas bilaterais.

- O conjunto

$$S_1 := \{x : |\bar{X}_n - \mu_0| \geq c\},$$

é chamado de região crítica do teste.

- Seja δ um procedimento de aceitação / rejeição. A função poder é definida

$$\pi(\theta|\delta) := P(\mathbf{X} \in S_1|\theta) = P(T \in R|\theta), \quad \theta \in \Omega$$

- Tipos de erros

Nome	Erro cometido
Erro tipo I	Rejeitar H_0 quando ela é **verdadeira**.
Erro tipo II	Falhar em rejeitar H_0 quando ela é **falsa**.

- Dizemos que um teste, δ, tem tamanho ou nível de significância $\alpha(\delta)$, com

$$\alpha(\delta) := \sup_{\theta\in\Omega_0} \pi(\theta|\delta)$$

- Para cada t, seja δ_t o teste que rejeita H_0 se $T \geq t$. Então, quando $T = t$, o p-valor vale

$$p(t) := \sup_{\theta\in\Omega_0} \pi(\theta|\delta_t) = \sup_{\theta\in\Omega_0} P(T \geq t|\theta),$$

ou seja, o p-valor é o tamanho do teste δ_t.

Razões de verossimilhanças

- Intervalos de confiança e testes são equivalentes

- Se um conjunto aleatório $w(\mathbf{X})$ satisfaz

$$P(g(\theta_0) \in w(\mathbf{X})|\theta = \theta_0) \geq \gamma, \ \forall \theta_0 \in \Omega$$

então chamamos $w(\mathbf{X})$ de um conjunto de confiança para $g(\theta)$.

- Se $w(\mathbf{X})$ é um conjunto de confiança para uma função de interesse $g(\theta)$. Então $\forall g_0$ assumido por $g(\theta)$, $\exists\ \delta_{g_0}$, de nível α_0 que rejeita
$$H_0 : g(\theta) = g_0 \iff g(\theta_0) = g_0 \in w(\mathbf{X}).$$

- A estatística

$$\Lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_0} f_n(x \mid \theta)}{\sup_{\theta \in \Omega} f_n(x \mid \theta)},$$

é chamada uma estatística de razão de verossimilhança. Um teste de razão de verossimilhança, δ_K é um teste que rejeita H_0 se $\Lambda(x) \leq K$ para K constante.

- Pelo Teorema de Wilks, à medida que a amostra aumenta ($n \to \infty$), então
$$-2 \log \Lambda(x) \xrightarrow{d} \chi^2(k).$$

Teste t

-