Fundação Getúlio Vargas
Curvas e Superfícies
Wellington Silva

Abstract of surves and surfaces
Last update: April 26, 2021

Resumo de Curvas e Superfícies

Sumário

Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco

Difeomorfismo e Reparametrização

Ângulo e Curvatura

Teorema Fundamental das Curvas Planas

Curvas Regulares no $\mathbb{R}^3$

Teorema Fundamental das Curvas Espaciais

Superfícies Regulares

Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco

Definição 1 *Uma **curva parametrizada** em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ sendo $I \subset \mathbb{R}$ aberto.*

Definição 2 *O conjunto imagem de γ, $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ é dito o **traço** de γ.*

Definição 3 (Vetor tangente) *Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ com $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ com $\gamma_i(y)$ diferenciáveis $\forall i, i = 1 \ldots n$, o vetor*

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

*é chamado **vetor tangente de** γ em t*

Definição 4 (Curvas regulares) *Seja $\gamma(t) : I \to \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável. Diz-se que γ **é regular**, quando $\gamma'(t) \neq 0,\ \forall t \in I$.*

Definição 5 (Reta tangente) *Seja γ uma curva regular, então a **reta tangente de** γ no ponto $t_0 \in I$ é aquela que contém o ponto $\gamma(t)$ e é paralela ao vetor $\gamma'(t)$, ou seja*

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda\gamma'(t_0)$$

Definição 6 (Comprimento de arco) *O **comprimento de arco de** α, de $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$ definido por $L_a^b(\alpha)$ é*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definição 7 *Se $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ é uma c.p.[1], sua **velocidade no ponto** $\gamma(t)$ é $\|\gamma'(t)\|$, e a curva é dita com **velocidade unitária** se $\|\gamma'(t)\| = 1,\ \forall t \in (a, b)$ e é parametrizada por comprimento de arco.*

Teorema 1 *Toda **curva regular** pode ser reparametrizada por **comprimento de arco**.*

Difeomorfismo e Reparametrização

Definição 8 (Difeomorfismo) *Dado os conjuntos abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Uma bijeção $f : U \to V$ é dita **difeomorfismo** quando f e f^{-1} são diferenciáveis.*

Definição 9 (Reparametrização) *A curva $\beta(s)$ é dita uma **reparametrização** de $\alpha(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ regular quando dados $I_0 \subset \mathbb{R}$ e $\phi : I_0 \to I$ difeomorfismo. Temos $\beta(S) = \alpha(\phi(S)))$.*

Definição 10 *Seja $\alpha(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ r $\beta(S) : (c, d) \to \mathbb{R}^2$. Então*

- *$\beta(S)$ é uma reparametrização positiva de α se $\phi'(S) > 0,\ \forall S$*
- *$\beta(S)$ é uma reparametrização negativa de α se $\phi'(S) < 0,\ \forall S$*

Definição 11 *Qualquer reparametrização de uma c.p. regular é regular (i.e. difeomorfismos preservam regularidade).*

Propriedade 1 *A função L (comprimento de arco) é um difeomorfismo.*

Definição 12 *Toda curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ admite reparametrização por comprimento de arco.*

[1] curva parametrizada

Ângulo e Curvatura

Definição 13 (Função Ângulo) *Dada uma curva diferenciável $\gamma : I \to S^1$, onde S^1 é o círculo de $\mathbb{R}^2$ com centro na origem e raio 1, diz-se que $\theta : I \to \mathbb{R}$ é uma **função-ângulo** de γ, quando*

$$\gamma(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s)),\ \forall s \in I$$

Definição 14 (Curvatura) *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}$ unit-speed. Designando-se o vetor tangente de α em $s \in I$ por $T(s)$, podemos afirmar que a curva $T(s) = I \to S^1$ admite função ângulo*

$$T(s) = (cos(\theta(s)), sen(\theta(s)),\ \forall s \in I$$

*Daí a **curvatura** de α em $s \in I$ é definida por*

$$K(s) = \theta'(s) = det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

Teorema Fundamental das Curvas Planas

Teorema 2 (Função-ângulo diferenciável) *Seja $\gamma : I \to S^1$ uma curva diferenciável. Então, γ admite uma função ângulo $\theta : I \to \mathbb{R}$, a qual é diferenciável. Além disso, toda função-ângulo de γ, a qual é diferenciável, difere de θ por uma constante.*

Corolário 2.1 *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seja $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$ a parametrização por comprimento de arco de α, a curvatura de α em $t \in I$ é $K_\alpha(t)$, e, por definição é a curvatura de β em $\theta^{-1}(t)$, isto é*

$$K_\alpha := K_\beta(\theta^{-1}(t))$$

Definição 15 (Diedro de Frenet) *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Dado $s \in I$, o vetor $N(s) = JT(s)$ é dito o vetor normal de α em $s \in I$. A base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formado por $T(s)$ e $N(s)$ é chamada **Dietro de Frenet** em s.*

Definição 16 (Movimento Rígido) $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *é dita **movimento rígido**, quando preserva distancia, isto é, para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}^2$*

$$\|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\|$$

Teorema 3 *Seja $\Phi : A + p_0$ um movimento rígido direto de $\mathbb{R}^2$ e $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Então, $\beta = \Phi \circ \alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é uma curva regular de $\mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco, tal que*

$$K_\alpha(s) = K_\beta(s)\ \forall s \in I$$

Teorema 4 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Planas) *Sejam I um intervalo aberto da reta e $K : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.*

1. *Então existe uma curva diferenciavel $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, unit-speed, cuja função curvatura coincide com K.*
2. *Além disso, para toda $\beta : I \to \mathbb{R}^2$, unit-speed, que cumpre $K_\beta = K$, existe um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha = \Phi \circ \beta$*

Curvas Regulares no $\mathbb{R}^3$

Definição 17 (Curvas no $\mathbb{R}^3$) *As curvas diferenciáveis no $\mathbb{R}^3$, são definidas de forma análoga ao $\mathbb{R}^2$, isto é, uma **curva no** $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável de um intervalo I (aberto) em $\mathbb{R}^3$, da forma*

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in I$$

*Onde x, y e z são diferenciáveis, e a curva é dita **regular** quando*

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0,0,0),\ t \in I$$

Propriedade 2 *De forma análoga vale para $\mathbb{R}^3$ que*

- *Comprimento de arco é invariável por reparametrização.*
- *Toda curva regular admite reparametrização unit-speed ($\|\alpha'(t)\| = 1$).*

Definição 18 (Curvatura no $\mathbb{R}^3$) *Dada uma curva $\alpha : I \to \mathbb{R}$ regular parametrizada por comprimento de arco, a **curvatura** de α em $s \in I$ é definida como*

$$K_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Definição 19 (2-regular) *Seja uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ unit-speed, e $K_\alpha(s) > 0, \forall s$, ou seja, $\alpha''(s) \neq 0,\ \forall s$. Então dizemos que α é **2-regular**.*

Definição 20 (Triedro de Frenet) *Para α 2-regular, seja $T(s) = \alpha'(s)$ (vetor tangente), $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ (vetor normal) e $B(s) = T(s) \times N(s)$ (vetor binormal). Desse modo estabelecemos um referencial chamado **Triedro de Frenet** formado pelos vetores $\{T(s), N(s), B(s)\}$, onde,*

$$\begin{cases} B(s) = T(s) \times N(s) \\ N(s) = B(s) \times T(s) \\ T(s) = N(s) \times B(s) \end{cases}$$

Definição 21 (Curvatura e Torção) *Seja uma curva α 2-regular em $\mathbb{R}^3$ não necessariamente parametrizada por comprimento de arco, então a **curvatura e a torção** de α são definidas respectivamente como*

$$K_\alpha(t) = \frac{\|\alpha''(t) \times \alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\mathcal{T}(t) = \frac{\langle(\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t)\rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

Teorema 5 *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular unit-speed, então*

$$\alpha \text{ é plana} \Longleftrightarrow \mathcal{T}(s) \equiv 0,\ \forall s \in I$$

Teorema Fundamental das Curvas Espaciais

Teorema 6 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Espaciais) *Sejam I um intervalo aberto, $K : I \to \mathbb{R}$ uma função positiva diferenciável e $\mathcal{T} : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável*

1. *Então existe uma curva diferenciavel $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, unit-speed, tal que K e $\mathcal{T}$ concedem com a curvatura e torção de α respectivamente*
2. *Além disso, $\forall \beta : I \to \mathbb{R}^3$, unit-speed, que cumpre $K_\beta = K$ e $\mathcal{T}_\beta = \mathcal{T}$ existe um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(s) = \Phi(\beta(s))$*

Superfícies Regulares

Definição 22 (Superfícies Regulares) *Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma **superfície regular**, quando é localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, quando, $\forall p \in S$, exite um difeomorfismo*

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset S$$

onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$ e V é um aberto relativo de S. A aplicação X é dita, então uma parametrização local de S em p.

Definição 23 *Sendo o difeomorfismo de uma superfície da forma*

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \ (u,v) \in V$$

*definimos as **derivadas parciais** de X como sendo*

$$X_u(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)$$

$$X_v(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$

e se X_u e X_v são L.I. então produzem um plano tangente no ponto p.

Propriedade 3 *Se S é uma superfície regular temos que:*

(a) A aplicação $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ é diferenciável de C^∞ quando x, y e z tem derivadas parciais de todas as ordens.

(b) Para todo $q : (u,v) \in U$, a diferencial de X em q, $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva, nesse caso, garante-se a existência do plano tangente T_pS.