Fundação Getúlio Vargas
Cálculo em uma Variável Complexa
Wellington Silva

Abstract of calculus in a complex variable
Last update: May 30, 2022

Resumo de Cálculo em uma Variável Complexa

Sumário

Números Complexos e propriedades

Propriedades 1 *As seguintes propriedades valem para quaisquer* $z, w, t \in \mathbb{C}$*:*

(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$

(b) $z + w = w + z$

(c) $0 + z = z$

(d) $z + (-z) = 0$

(e) $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$

(f) $zw = wz$

(g) $1 \cdot z = z$

(h) $z \cdot z^{-1} = 1$ *se* $z \neq 0$

(i) $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$

Definição 1 *Um número complexo* z *é da forma* $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ *e* $i = \sqrt{-1}$*, que podemos escrever como um par de variáveis de* $\mathbb{R}^2$ *de forma que* $z = (x, y)$*.*

Definição 2 (Soma e produto nos complexos) *Seja* $z = (x, y)$ *e* $w = (a, b),\ x, y, a, b, \in \mathbb{R}$*, definimos soma e produto, para manter consistência com as propriedades acima, da seguinte forma*

$$z + w = (x + a, y + b)$$
$$z \cdot w = (xa - yb, xb + ya)$$

Definição 3 (O Módulo) *Seja* $z = x + iy$ *um complexo, então o* ***módulo*** *("tamanho") de um número complexo é definido por*

$$\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definição 4 (O Conjugado) *Seja* $z = x + iy$ *um complexo, então o* ***conjugado*** *de um número complexo é definido por*

$$\overline{z} = x - iy$$

Propriedades 2 (Propriedades do conjugado) *As seguintes propriedades valem para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}$*:*

(a) $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ *e* $\overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}$

(b) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ *se* $w \neq 0$

(c) $z + \overline{z} = 2Re(z)$ *e* $z - \overline{z} = 2iImg(z)$

(d) $z \in \mathbb{R}$ *se e somente se* $\overline{z} = z$

(e) z *é imaginário puro se e somente se* $\overline{z} = -z$

Definição 5 (A Forma Polar) *Seja* $z = x + iy$ *com* $z \neq 0$*, então podemos escrever* z *como*

$$z = r(cos(\theta) + isen(\theta))$$

Com as seguintes propriedades

1. $r = \mid z \mid$
2. $cos(\theta) = \frac{x}{|r|}$
3. $sen(\theta) = \frac{y}{|r|}$

Teorema 1 *Seja* $n \in \mathbb{Z}_{++}$ *e* $z = r(cos(\theta) + isen(\theta))$. *Então*

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Exponencial, Limite e Derivada

Definição 6 (Função exponencial) *Seja* $z \in \mathbb{C}$ *com* $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, *então*

$$e^z := e^x(cos(y) + isen(y))$$

Definição 7 (Cosseno e seno complexo) *Para* $z \in \mathbb{C}$, *vamos definir*

$$cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$sen(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Propriedades 3 (Cos e sen) *Seja* $z = x + iz,\ x, y \in \mathbb{R}$. *Então*

(a) $cos(z) = cos(x)cosh(y) - isen(x)senh(y)$

(b) $sen(z) = sen(x)cosh(y) + icos(x)senh(y)$

(c) $\mid cos(z) \mid^2 = cos^2(x) + senh^2(y)$

(d) $\mid sen(z) \mid^2 = sen^2(x) + senh^2(y)$

Definição 8 (Função logaritmo) *Seja* $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$[1]

$$Ln(z) = ln \mid z \mid + iArg(z)$$

$$ln(z) = ln \mid z \mid + iarg(z)$$

Definição 9 (Limite) *Seja* $z_0 \in \mathbb{C}$ *um ponto de acumulação de* $D \subset \mathbb{C}$ *e seja* $f : D \to \mathbb{C}$. *Dizemos que*

$$lim_{z \to z_0} f(z) = l$$

Quando para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que*

$$z \in D - \{z_0\} \ e \ |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

Definição 10 (Continuidade) *Seja* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in D$. *Dizemos que* f *é* ***contínua*** *em* z_0 *se para todo* $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que*

$$z \in D - \{z_0\} \ e \ |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

[1] Aqui: $Arg(z) = \theta,\ \theta \in (-\pi, \pi]$ e $arg(z) = \theta$

Definição 11 (Diferenciabilidade) *Seja* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in D$ *ponto de acumulação de* D*. Se existe o limite*

$$lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

dizemos que f *é diferenciável em* z_0 *(ou derivável) e denotamos o limite acima por* $f'(z_0)$*.*

Definição 12 (Funções Analíticas) *Seja* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*,* f *é dita* ***analítica*** *no domínio* D *se* f *é diferenciável em todos os pontos de* D*. E também é dita* ***analítica em um ponto*** $z_0 \in D$ *se* f *é analítica em uma vizinhança de* z_0*.*

Equações de Cauchy-Riemann

Teorema 2 (Cauchy-Riemann (ida)) *Seja* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *definida e contínua em alguma vizinhança de* $z = x + iy$ *e suponha* f *diferenciável em* z*. Então, as derivadas parciais de* u *e* v *existem e satisfazem*[2]

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

Corolário 2.1 *Se* f *é analítica em um domínio* D*, então as derivadas parciais de* u *e* v *existem em* D *e*

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

$$f' = u_x + iv_x \quad e \quad f' = v_y - iu_y$$

Teorema 3 (Cauchy-Riemann (volta)) *Se as funções reais* $u(x, y)$ *e* $v(x, y)$ *de variáveis* $x, y \in \mathbb{R}$ *tiverem derivadas parciais contínuas que satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em algum domínio* D*, então a função complexa* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *é analítica em* D*, com* $z = x + iy$*.*

Cauchy-Riemann, Eq. de Laplace e Integral

Teorema 4 (Eq. de Laplace) *Se* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *é analítica em um domínio* D*, (e as derivadas segundas de* u *e* v *existem e são continuas)*[3]*, então ambas* u *e* v *satisfazem a equação de Laplace.*

$$\nabla u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\nabla v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Teorema 5 (Trigonométricas e logaritmo) *Seja* $z_1 \in \mathbb{C}$ *e* $z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$*, temos que vale que*

$$\sin'(z_1) = \cos(z_1)$$

$$\cos'(z_1) = -\sin(z_1)$$

$$Ln'(z_2) = \frac{1}{z_2}$$

[2]Chamadas aqui de **Equações de Cauchy-Riemann**
[3]Mais adiante, veremos que a parte em parenteses não é necessária.

Definição 13 (Integral) *Seja $C \in \mathbb{C}$ uma curva e $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ com D contendo a curva C, então a integral de f na curva C é definida por*

$$\int_C f(z)dz := \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f(w_m)\Delta z_m$$

Onde $\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$ e w_m é um ponto de C no arco que liga z_m a z_{m-1}. Em particular quando $z(a) = z(b)$ temos uma curva fechada e denotamos a integral como

$$\oint_C f(z)dz$$

Propriedades 4 (Propriedades da Integral) *Consequências diretas da definição de integral*

1. ***Linearidade:***

$$\int_C \alpha f_1(z) + \beta f_2(z)dz = \alpha \int_C f_1(z)dz + \beta \int_C f_2(z)dz$$

2. ***Caminho inverso:***

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

Em que $-C$ é a curva parametrizada no sentido contrário a C.

3. ***Partição da Curva:***

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

Onde $C = C_1 \cup C_2$

Teorema 6 *Seja $f(z) = u(z) + iv(z)$ uma função analítica em torno da curva C. Podemos escrever*

$$\int_C f(z)dz = \int_C G + i\int_C H \tag{1}$$

Em que $G, H : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com

$$\begin{aligned} G(x, y) &:= (u(x, y), -v(x, y)) \\ H(x, y) &:= (v(x, y), u(x, y)) \end{aligned}$$

e D contém a curva C, por Cauchy-Riemann os jacobianos J_G e J_H são simétricos i.e. G e H são conservativos e as integrais da Equação 1 são independentes de caminho.

Teorema da integral de Cauchy

Teorema 7 *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua e seja C uma curva contida em D com início z_0 e fim z_1. Dada uma parametrização "crescente" $z(t)$ de C, $t \in [t_0, t_1]$, temos*

$$\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)).z'(t)dt$$

Teorema 8 (Integral de Cauchy) *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua e seja C uma curva contida em D com início e fim iguais. Então*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Teorema 9 *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua e sejam C e $\tilde{C}$ curvas em $D \subset \mathbb{C}$ com pontos inicial z_0 e final z_1. Então*

$$\int_C f(z)dz = \int_{\tilde{C}} f(z)dz$$

Lema 10 (ML inequality) *Seja f contida num domínio D contendo a curva C. Suponha $M \geq 0$ t.q. $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$ e denote por L o comprimento de C. Então*

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$$

Teorema 11 (TFC complexo) *Seja $D \subset \mathbb{C}$ um domínio (aberto simplesmente conexo) e $f : D \to \mathbb{C}$ analítica com derivada contínua. Sejam $z_0, z_1 \in D$ e C uma curva contida em D com ponto inicial z_0 e final z_1. Seja $F : D \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$. Então*

$$\int_C f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$

Teorema 12 (Integral indefinida) *Se f é analítica em um aberto simplesmente conexo D, então existe F definida em D tal que $F' = f$ em D.*

Fórmulas da integral de Cauchy para domínios multi-conexos

Teorema 13 (Duplamente Conexo) *Seja $D \subset \mathbb{C}$ duplamente conexo com C_1 "borda exterior" e C_2 "borda interior" com ambas as curvas orientadas no sentido anti-horário. Suponha $D^\star$ aberto contendo D e $f : D^\star \to \mathbb{C}$ analítica. Então*

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

Teorema 14 (Multi-conexo (generalização do caso anterior)) *Se f for analítica em $D^\star$ multi-conexo com $C_1, \ldots, C_n$ "borda interior" e C "borda exterior", onde todas são orientadas no sentido anti-horário. Então*

$$\int_C f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)dz$$

Teorema 15 (Teorema da Integral de Cauchy) *Suponha f analítica em um domínio simplesmente conexo D. Então, $\forall z_0 \in D$ e qualquer curva simples $C \subset D$ que contorna z_0 no sentido anti-horário, temos*

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

ou de maneira equivalente,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Teorema 16 (Teorema da Integral de Cauchy para derivada) *Suponha f analítica em um domínio simplesmente conexo D. Então, $\forall z_0 \in D$ e qualquer curva simples $C \subset D$ que contorna z_0 no sentido anti-horário, a n-ésima derivada de $f(z_0)$ é*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Cauchy, Liouville e Morera

Teorema 17 (Desigualdade de Cauchy) *Suponha f analítica num domínio simplesmente conexo contendo C (fechado simples) com z_0 no "interior". Seja $M \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \frac{n!}{2\pi} \left|\oint_C \frac{f(z_0)}{(z - z_0)^{n+1}} dz\right| \\ &\leq n! \frac{M}{r^n}\end{aligned}$$

Onde, M é cota superior para $|f(z)|$ no círculo $\hat{C}$ centrado em z_0 de raio $r > 0$ e que esteja "dentro" de C.

Teorema 18 (Teorema de Liouville) *Se uma função inteira (analítica em todo $\mathbb{C}$) é limitada em valor absoluto de $\mathbb{C}$, então essa função é constante.*

Teorema 19 (Teorema de Morera (recíproca de Cauchy)) *Se f é contínua em um domínio simplesmente conexo D e se*

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

para cada curva fechada simples em D, então f é analítica em D.

Teorema de Laurent

Teorema 20 (Teorema de Laurent) *Seja f(z) analítica num domínio entre dois círculos concêntricos C_1 e C_2 com centro z_0. Então, f(z) pode ser representado pela* ***série de Laurent***

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^m}$$

para z no anel definido por C_1 e C_2 em que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,\ n \geq 0,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)(z - z_0)^{m-1} dz,\ m \geq 1,\ m \in \mathbb{Z}$$

Com C qualquer curva fechada simples orientada no sentido anti-horário contida no anel C_1, C_2.

Definição 14 (Singularidade) *Dizemos que z_0 é uma* ***singularidade*** *de uma função complexa f, se f não está definida em z_0 ou não é analítica em z_0.*

Resíduos

Definição 15 (Polo) *Um **polo** é uma singularidade na qual os coeficientes não nulos da parte principal da série de Laurent são finitos.*

Definição 16 (Singularidade essencial) *Uma **singularidade essencial** é uma singularidade que não é um polo.*

Teorema 21 *Seja f uma função complexa e z_0 um polo de f. Então,*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

Teorema 22 *Seja z_0 uma singularidade (isolada) essencial de uma função complexa f. Então, f toma todos os valores, com um valor excepcional no máximo, numa vizinhança arbitrariamente pequena de z_0.*

Teorema 23 (Resíduos em polos) *Suponha z_0 um polo simples de f, i.e., z_0 é um polo de ordem $m = 1$. Então, localmente para $z \neq z_0$ podemos **calcular o resíduo** de z_0 em f como*

$$Res_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Ou se f é da forma $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ com p e q analíticas em z_0, em que z_0 é raiz simples de q (ou seja, $q'(z_0) \neq 0$, mas $q(z_0) = 0$) $\forall z \neq z_0$ numa vizinhança de z_0, então

$$Res_{z=z_0} f(z) = b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Teorema 24 *Zeros de funções analíticas complexas não identicamente nulas são isolados.*

Teorema 25 *Se q é analítica e z_0 é raiz de ordem m de q, i.e., $q(z_0) = 0, \ldots, q^{(m-1)}(z_0) = 0$ mas $q^{(m)}(z_0) \neq 0$, então z_0 é **polo de ordem m** de $\frac{1}{q}$.*

Teorema 26 (Teorema dos Resíduos) *Seja C uma curva fechada simples orientada no sentido anti-horário contornando uma quantidade finita de singularidades $z_1, \ldots, z_m$ de uma função complexa f. Então*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res_{z=z_0} f(z)$$

Métodos de resoluções de integrais reais

Definição 17 (Valor principal) *Se f é uma função continua em $(-\infty, \infty)$. Então, o **valor principal de Cauchy** da integral de f em $(-\infty, \infty)$ é definido como*

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x) dx$$

Integrais Trigonométricas

Se queremos calcular uma integral da forma

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta$$

Podemos parametrizar no círculo unitário com a parametrização

$$
\begin{aligned}
z(\theta) &= e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\
d\theta &= \frac{dz}{iz}
\end{aligned}
$$

e pela parametrização podemos reescrever

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
\sin(\theta) &= \frac{1}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 *Calcule*

$$
I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos(\theta)} d\theta
$$

Podemos parametrizar como descrito acima de forma que

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos(\theta)} d\theta \\
&= \int_\alpha \frac{1}{5 + 4 \cdot \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{1}{2i} \int_\alpha \frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})} dz
\end{aligned}
$$

Temos 2 polos $z_1 = -2$ *e* $z_2 = -\frac{1}{2}$*, mas só* z_1 *está na curva, então*

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2i} \int_\alpha \frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})} dz \\
&= \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z) \\
&= \pi \cdot \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})} \\
&= \pi \cdot \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{1}{z+2} \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Exemplo 2 *Calcule*

$$
I = \int_0^{\pi} \frac{1}{2 - \cos(\theta)} d\theta
$$

Aqui temos um problema, o intervalo não é $(0, 2\pi)$*, então temos que reescrever a integral de forma que fique o intervalo desejado. Note que, usando* $\cos(\theta) = \cos(2\pi - \theta)$*, e tomando* $t = 2\pi - \theta$ *podemos reescrever a integral de forma que*

$$
\int_0^{\pi} \frac{1}{2 - \cos(\theta)} d\theta = -\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos(t)} dt = \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos(t)} dt
$$

Ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos(\theta)} d\theta = 2I$$

Agora podemos seguir o método acima,

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos(\theta)} d\theta \\
&= \int_\alpha \frac{1}{2-\frac{1}{2}\cdot(z-\frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} \\
&= -\frac{2}{i} \int_\alpha \frac{1}{z^2-4z-1} dz
\end{aligned}$$

Que tem polos $z_1 = 2-\sqrt{3}$ *e* $z_2 = 2+\sqrt{3}$*, mas só* z_1 *está na curva* α

$$\begin{aligned}
2I &= -\frac{2}{i} \int_\alpha \frac{1}{(z-2+\sqrt{3})(z-2-\sqrt{3})} dz \\
&= -\frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z=2-\sqrt{3}} f(z) \\
&= -4\pi \cdot \lim_{z\to 2-\sqrt{3}} (z-2+\sqrt{3}) \frac{1}{(z-2+\sqrt{3})(z-2-\sqrt{3})} \\
&= -4\pi \cdot \lim_{z\to 2-\sqrt{3}} \frac{1}{z-2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Logo, $I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$