

Fundação Getúlio Vargas  
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de Teoria da Probabilidade

Rio de Janeiro  
2021

# Sumário

## 1 Conceitos Básicos

### 1.1 Modelos de Probabilidade

### 1.2 Probabilidade Condicional

## 2 Variáveis Aleatórias Discretas

### 2.1 Função de Probabilidade e Função de Probabilidade Conjunta

### 2.2 Função de Probabilidade Acumulada

### 2.3 Valor Esperança

### 2.4 Variância e Outras Medidas de Dispersão

### 2.5 Covariância e Correlação

## 3 Principais Distribuições Discretas

### 3.1 Processo de Bernoulli

### 3.2 Distribuição Binomial

### 3.3 Distribuição Geométrica

### 3.4 Distribuição Binomial Negativa

### 3.5 Processo de Poisson

### 3.6 Distribuição Hipergeométrica

## 4 Variáveis Aleatórias Contínuas

### 4.1 Distribuições Contínuas

### 4.2 Valor Esperado e Variância

## 5 Principais Distribuições Contínuas

### 5.1 Distribuição Uniforme

### 5.2 Distribuição Exponencial

- 5.3 Distribuição Gama
- 5.4 Distribuição Normal
- 5.5 Taxa de Falhas
- 6 Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais
  - 6.1 Função de Densidade Conjunta
  - 6.2 Distribuições Marginais e Condicionais; Covariância e Correlação
  - 6.3 Funções de Variáveis Contínuas
- 7 Somas e Médias de Variáveis Aleatórias
  - 7.1 Somas das Principais Distribuições Aleatórias
  - 7.2 Lei dos Grandes Números
  - 7.3 Teorema Central do Limite (TCL)
  - 7.4 Aplicação à Estatística: Distribuição Amostral de uma Proporção
- 8 Outras Distribuições Amostrais
  - 8.1 Estimação de Parâmetros
  - 8.2 Estimadores pontuais da variância
  - 8.3 Erro Quadrático Médio
  - 8.4 Distribuição Qui-quadrado
  - 8.5 Distribuição t de Student

# 1 Conceitos Básicos

## 1.1 Modelos de Probabilidade

**Definição 1** *Dois eventos  $A$  e  $B$  são chamados de **mutuamente exclusivos** se não podem ocorrer simultaneamente, isto é, se  $A \cap B = \emptyset$ .*

**Definição 2** *Uma **probabilidade** é uma função que associa a cada evento  $A$  um número  $P(A)$  de forma que:*

1. Para todo evento  $A$ ,  $0 \leq Pr(A) \leq 1$ ;
2.  $P(S) = 1$ ;
3. Se  $A$  e  $B$  são eventos mutuamente excludentes então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Corolário 0.0.1 (Lei do Complemento)**

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

*Em outras palavras, a probabilidade de um evento ocorrer mais a probabilidade de ele não ocorrer dá 100%*

**Corolário 0.0.2**  $P(\emptyset) = 0$ , isto é se um evento é impossível, sua probabilidade deve ser 0.

**Corolário 0.0.3 (Lei da Adição)**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## 1.2 Probabilidade Condicional

**Definição 3** *Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos com  $P(A) \neq 0$ . A probabilidade condicional de  $B$  dado  $A$  é*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

**Corolário 0.0.4 (Lei da Multiplicação)**

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(B|A) \cdot P(B)$$

## Probabilidade Total e Teorema de Bayes

**Corolário 0.0.5 (Lei da Probabilidade Total)** *Suponha que  $B_1, B_2, \dots, B_n$  formam uma partição de  $S$ . Então*

**Corolário 0.0.6 (Teorema de Bayes)** *Suponha que  $B_1, B_2, \dots, B_n$  formam uma partição de  $S$ . Então*

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

## Independência

**Definição 4** *Dois eventos (não impossíveis)  $A$  e  $B$  são ditos **independentes** se o conhecimento de um deles não afeta a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se*

$$P(B|A) = P(B)$$

## 2 Variáveis Aleatórias Discretas

### 2.1 Função de Probabilidade e Função de Probabilidade Conjunta

**Definição 5** *Se  $X$  é uma variáveis aleatórias discretas, definimos a **função de probabilidade de  $X$**  por*

$$p_X(x) = P(X = x)$$

**Definição 6** *Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias discretas, definimos a **função de probabilidade conjunta de  $X$  e  $Y$**  por*

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \text{ e } Y = y)$$

## Independência de Variáveis Aleatórias Discretas

**Definição 7** Dizemos que  $X$  e  $Y$  são variáveis ***independentes*** exatamente quando

$$P(X = i \text{ e } Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$$

**Corolário 0.0.7**  $X$  e  $Y$  são independentes se, e somente se, a distribuição condicional de  $X$  dado  $Y = j$  é idêntica à distribuição marginal de  $X$  (qualquer que seja  $j$  possível). De fato, temos:

$$P(X = i | Y = j) = \frac{P(X = i \text{ e } Y = j)}{P(Y = j)} = P(X = i)$$

## 2.2 Função de Probabilidade Acumulada

### Definição

**Definição 8** A ***função de distribuição*** (ou ***função de probabilidade acumulada***) de  $X$  é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

**Corolário 0.0.8** Se  $F$  é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta:

- i.  $F$  é não-decrescente;
- ii.  $F(-\infty) = 0$  e  $F(+\infty) = 1$  (ou seja,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ );
- iii.  $F$  é constante por partes (isto é, uma função-escada).

**Corolário 0.0.9** Se  $F$  é uma função de distribuição acumulada de uma variável aleatória, então

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

## Quantis

**Definição 9** *O  $q$ -quantil de uma variável aleatória  $X$  é qualquer valor  $x_q$  onde a função acumulada "acerta" por  $q$  ou "passa" por  $p$ . Formalmente:*

$$F(x_q-) \leq q \leq F(x_q)$$

## 2.3 Valor Esperança

### Intuição e Definição

**Definição 10** *Se  $X$  é uma variável aleatória discreta, definimos o **valor esperado** (ou esperança matemática, ou expectativa, ou média, ou valor médio) de  $X$  por*

$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot p(x)$$

*isto é,  $E(X)$  é uma média ponderada dos valores de  $X$ , com pesos iguais às respectivas probabilidades destes valores. Ocasionalmente, escrevemos  $\mu_X = E(X)$*

*A esperança é uma medida de posição ou de tendência central (valores grandes de  $X$  acarretam  $E(X)$  grande; valores pequenos de  $X$  acarretam  $E(X)$  pequeno).*

### Propriedades (Caso Unidimensional)

**Corolário 0.0.10** *Se  $Y = f(X)$ , temos*

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{x \in S} f(x) \cdot p(x)$$

**Corolário 0.0.11** *Sejam  $a$  e  $b$  constantes quaisquer. Então:*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

### Propriedades (Caso Bidimensional)

**Corolário 0.0.12** *Se  $Z = f(X, Y)$  então*

$$E(Z) = E(f(X, Y)) = \sum_{x,y} f(x, y)p_{X,Y}(x, y)$$

**Corolário 0.0.13** *Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  constantes quaisquer. Então*

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

**Corolário 0.0.14** *Se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .*

## 2.4 Variância e Outras Medidas de Dispersão

### Definição

**Definição 11** *Duas medidas de dispersão comuns são o **desvio médio**, definidos por*

$$DM(X) = E(|X - E(X)|)$$

*e a **variância**, definida por*

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

*Ao invés da variância, podemos medir a dispersão de  $X$  pelo seu **desvio-padrão***

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

**Corolário 0.0.15** *Sejam  $a$  e  $b$  constantes quaisquer. então*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X)$$

$$DM(aX + b) = |a| \cdot DM(X)$$

**Corolário 0.0.16**

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

**Corolário 0.0.17** *Se  $X$  e  $Y$  são independentes,  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$*



## Desigualdade de Chebyshev

**Teorema 0.1 (Desigualdade de Chebyshev)** *Seja  $X$  uma variável aleatória com valor esperado  $\mu = E(X)$  e desvio-padrão  $\sigma = \sigma(X)$ . Seja  $P = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \mu| < k\sigma\}$  (isto é,  $P$  é o intervalo aberto  $(x - k\sigma, x + k\sigma)$ , um conjunto de valores de  $x$  que estão "perto da média" pelo menos  $k$  desvios-padrão). Então, para qualquer  $k > 0$ , tem-se*

$$P(X \notin P) \leq \frac{1}{k^2}$$

ou seja

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

## 2.5 Covariância e Correlação

**Definição 12** *A **covariância** entre duas variáveis  $X$  e  $Y$  é*

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

**Corolário 0.1.1**

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**Corolário 0.1.2** *Se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$*

**Definição 13** *Outra medida de "variação conjunta" de duas variáveis  $X$  e  $Y$  é a **correlação***

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

## Um pouco de Álgebra Linear

**Corolário 0.1.3** Para quaisquer variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

E se  $X$  e  $Y$  são independentes vale que  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ .

**Corolário 0.1.4**

$$\text{Cov}(aX + b, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$$

**Corolário 0.1.5**

$$\rho(aX + b, Y) = \rho(X, Y) \text{ se } a > 0$$

$$\rho(aX + b, Y) = -\rho(X, Y) \text{ se } a < 0$$

## 3 Principais Distribuições Discretas

### Distribuição

Se os valores assumidos por uma certa variável aleatória  $X$  são equiprováveis dizemos que  $X$  tem um **distribuição uniforme**.

### Brevíssima Revisão de Análise Combinatória

Aqui trata-se de conteúdo do ensino médio em caso de dúvida [see](#).

### 3.1 Processo de Bernoulli

**Definição 14** Um **processo de Bernoulli** é uma sequência de experimentos com as seguintes características:

1. Cada experimento tem apenas dois resultados possíveis, denominados **sucesso e falha**
2. Cada experimento tem a mesma probabilidade  $p$  de sucesso, e cada experimento é completamente independente de todos os outros.

## 3.2 Distribuição Binomial

**Definição 15** *Suponha que o número de experimentos a serem feitos é determinado digamos,  $n$  experimentos. Seja  $X$  a variável aleatória que representa o número de sucessos obtidos nestes  $n$  experimentos. Dizemos que  $X$  tem uma **distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $p$**  (e escrevemos  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ). Nesse caso a função de probabilidade de  $X$  passa a se chamar: *BinomialDen*.*

$$P(X = k) = \text{BinomialDen}(k; n, p)$$

e chamaremos a função acumulada de *BinomialDist*:

$$P(X \leq k) = \text{BinomialDist}(k; n, p)$$

**Corolário 0.1.6**

$$\text{BinomialDen}(k; n, p) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\text{BinomialDist}(k; n, p) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

**Corolário 0.1.7** *Seja  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . Então*

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

## 3.3 Distribuição Geométrica

**Definição 16** *Suponha que realizamos um processo de Bernoulli com probabilidade de sucesso de cada prova  $p > 0$ . Seja  $X$  o número de tentativas feitas até o primeiro sucesso (inclusive). Dizemos que  $X$  tem uma **distribuição geométrica de parâmetro  $p$** , isto é,  $X \sim \text{Geom}(p)$*

**Corolário 0.1.8** *Se  $X \sim \text{Geom}(p)$ , então*

$$P(X = k) = \text{Geom}(k; p) = q^{k-1}p$$

$$P(X \leq k) = 1 - q^k$$

**Corolário 0.1.9** Se  $X \sim \text{Geom}(p)$ , então

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

### 3.4 Distribuição Binomial Negativa

**Definição 17** Suponha que o processo de Bernoulli é repetido até obter  $r$  sucessos. Seja  $X$  o número de tentativas feitas (incluindo o último sucesso). Dizemos que  $X$  tem uma **distribuição binomial negativa de parâmetros  $r$  e  $p$** , isto é,  $X \sim \text{NegBin}(r, p)$ . Note que, a distribuição geométrica é um caso particular dessa.

**Corolário 0.1.10** Se  $X \sim \text{NegBin}(r, p)$ , então para  $k \geq r$  ( $k$  inteiro).

$$P(X = k) = p \cdot \text{BinomialDen}(r - 1; k - 1, p) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$$

### 3.5 Processo de Poisson

**Definição 18** A **distribuição de Poisson** dizemos  $X \sim \text{Poi}(\mu)$  que no geral é  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Bin}(k; n, \frac{\mu}{n}) = \text{Poi}(k; \mu)$

**Corolário 0.1.11** Se  $X \sim \text{Poi}(\mu)$ , tem-se

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$E(X) = \text{Var}(X) = \mu$$

### 3.6 Distribuição Hipergeométrica

**Definição 19** De uma caixa com  $r$  bolas "sucesso" e  $N - r$  bolas "falha", extraímos sem reposição  $n$  bolas. Seja  $X$  o número de bolas sucesso. Dizemos que  $X$  tem **distribuição hipergeométrica com parâmetros  $n$ ,  $r$  e  $N$** , isto é,  $X \sim \text{Hip}(n, r, N)$ .

**Corolário 0.1.12** Se  $X \sim \text{Hip}(n, r, N)$ , então

$$P(X = k) = \text{Hip}(k; n, r, N) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq \frac{N-m}{N-1}$$

$$\text{onde } p = \frac{r}{N}$$

## 4 Variáveis Aleatórias Contínuas

### 4.1 Distribuições Contínuas

**Função de Distribuição Acumulada**

**Definição 20** A **função de distribuição acumulada (função de distribuição; fda)** de uma variável aleatória  $X$  é

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

**Corolário 0.1.13** Se  $F(x)$  é a f.d.a. de uma variável real  $X$ , então

$F$  é não-decrescente

$$F(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0 \quad \text{e} \quad F(+\infty) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Note que, no caso contínuo  $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$ , pois  $P(X = a) = 0$ .

## Quantis

**Definição 21** *O  $q$ -quantil de uma variável aleatória  $X$  é qualquer valor  $x_q$  onde a função acumulada "acerta"  $q$ . Formalmente  $F(x_q) = q$*

## Função Densidade de Probabilidade

**Definição 22** *A **função densidade de probabilidade (f.d.p.)** de  $X$  é a derivada da função acumulada:*

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'_X(x)$$

**Corolário 0.1.14** *Dada a f.d.p. de uma variável aleatória contínua  $X$ , encontramos probabilidades pela fórmula*

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

*Em particular, como  $F(-\infty) = 0$ , note que*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

**Corolário 0.1.15** *Se  $f(x)$  é a f.d.p. de uma variável aleatória real  $X$ , então para todo  $x$  real:*

$$0 \leq f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

**Definição 23** *A **moda** de uma variável aleatória é o valor  $x$  onde a densidade  $f(x)$  é máxima.*

## Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Seja  $X$  uma variável aleatória de densidade  $f(x)$  e seja  $Y = h(X)$  onde  $h$  é uma função crescente. Então a densidade  $g(y)$  da variável  $Y$  satisfaz

$$g(y) = \frac{f(x)}{h'(x)} = \frac{f(x)}{\frac{dy}{dx}}$$

onde  $x = h^{-1}(y)$ , ou seja,

$$g(y)dy = f(x)dx$$

## 4.2 Valor Esperado e Variância

### Valor Esperado

**Definição 24** Se  $X$  é uma variável aleatória com densidade  $f(x)$ , definimos seu **valor esperado** (**valor médio**, **esperança**), por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

**Corolário 0.1.16** Se  $Y = h(X)$ , então

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

**Corolário 0.1.17** Sejam  $a$  e  $b$  constantes quaisquer. Então

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

### Variância

**Definição 25** A **variância** e o **desvio-padrão** de uma variável aleatória  $X$  com densidade  $f(x)$  e média  $E(X) = \mu$  são

$$Var(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

**Corolário 0.1.18**

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

**Teorema 0.2 (Desigualdade de Chebyshev)** *Esse teorema está definido em 2.4, de forma igual.*

## 5 Principais Distribuições Contínuas

### 5.1 Distribuição Uniforme

**Definição 26** *Dizemos que a variável aleatória  $X$  tem **distribuição uniforme no intervalo  $[a, b]$**  (denotada por  $X \sim U[a, b]$ ) quando sua densidade é dada por*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \text{ se } a \leq x \leq b \text{ e } f(x) = 0, \text{ caso contrário}$$

**Corolário 0.2.1**

$$E(X) = Med(X) = \frac{b+a}{2} \text{ e } Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

### 5.2 Distribuição Exponencial

Suponha que eventos ocorram de acordo com um processo de Poisson à taxa média de  $\lambda$  eventos por unidade de tempo. Dado um certo intervalo  $[0, t]$ , seja  $X$  o número de eventos ocorridos neste intervalo.

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

**Definição 27** *Dizemos que a variável aleatória  $T$  tem **distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda$**  (denotada por  $T \sim Exp(\lambda)$ ) se sua densidade é dada por*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \text{ se } t \geq 0 \text{ e } f(t) = 0 \text{ caso contrário}$$

*e sua função de distribuição acumulada é*

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ se } t \geq 0 \text{ e } F(t) = 0 \text{ se } t < 0$$

**Corolário 0.2.2** *Se  $T \sim Exp(\lambda)$ , então*



$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$Med(T) = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

**Corolário 0.2.3** *Se  $T \sim Exp(\lambda)$  e  $Y = aT$ , então  $Y \sim Exp(\frac{\lambda}{a})$*

**Corolário 0.2.4** *Se  $T \sim Exp(\lambda)$ , então  $\lambda T \sim Exp(1)$*

### 5.3 Distribuição Gama

**Definição 28** *Para  $\alpha > 0$ , definimos a função  $\Gamma(\alpha)$  como*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

**Corolário 0.2.5** *Sempre que  $\Gamma(\alpha)$  convergir vale que*

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

**Corolário 0.2.6** *Se  $n$  é natural*

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

**Corolário 0.2.7**

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

## Distribuição Gama

Mantendo o processo de Poisson da Distribuição exponencial, seja  $Z$  o **tempo de ocorrência do  $n$ -ésimo evento** e  $X$  o número de ocorrências no intervalo  $[0, t]$ , temos

$$P(Z \leq t) = 1 - P(X < n) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

**Definição 29** *Seja  $\alpha, \lambda > 0$ . Dizemos que a variável  $Z$  tem **distribuição Gama de parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$**  (denotamos  $Z \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$  se sua densidade é dada por*

$$\text{GammaDen}(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \text{ se } t \geq 0$$

$$\text{GammaDen}(t) = 0, \text{ caso contrário}$$

**Corolário 0.2.8** *Se  $Z \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ , então  $E(Z) = \frac{\alpha}{\lambda}$ ,  $\text{Var}(Z) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$  e  $\text{Moda}(Z) = \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$*

**Corolário 0.2.9** *Se  $X \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$  e  $Z = \lambda X$ , então  $Z \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$ .*

## 5.4 Distribuição Normal

**Definição 30** *Dizemos que uma variável aleatória  $X$  tem distribuição normal com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  (denotado por  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ), quando sua f.d.p. é dada por*

$$f(x) = \text{NormalDen}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

**Corolário 0.2.10** *Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ .*

**Corolário 0.2.11** *Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então  $E(X) = \text{Moda}(X) = \text{Med}(X) = \mu$  e  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .*

## 5.5 Taxa de Falhas

**Definição 31** *Seja  $T$  o tempo de vida de um equipamento, isto é, o instante da sua primeira falha, cuja f.d.a é  $F(t)$ . A **confiabilidade** deste equipamento é*

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

**Definição 32** *A **taxa média de falhas** de um equipamento em um intervalo  $[t, t + \Delta t]$  é a chance de ele falhar nos próximos  $\Delta t$  dado que ainda não falhou, dividido por  $\Delta t$ , isto é*

$$TMF = \frac{P(T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{(1 - F(t))\Delta t} = -\frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{R(t) \cdot \Delta t}$$

*Tome o limite quando  $\Delta t \rightarrow 0$  e temos então a **taxa instantânea de falhas***

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} TMF = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

## 6 Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

### 6.1 Função de Densidade Conjunta

**Definição 33** *Uma **Função de Densidade Conjunta**  $f(x, y)$  das variáveis  $X$  e  $Y$  é uma função com a seguinte propriedade:*

$$P((X, Y) \in R) = \int \int_R f(x, y) dA$$

*onde  $R$  é um subconjunto qualquer do plano  $XY$  (isto é, uma região dentro do plano  $\mathbb{R}^2$ ). Consequentemente, uma função de densidade conjunta tem de satisfazer as seguintes propriedades básicas:*

$$f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dA = 1$$

**Definição 34** Dada uma função de densidade conjunta  $f(x, y)$ , definimos o **Valor Esperado, Variância e Desvio-Padrão** da variável  $X$  como

$$E(X) = \iint_{\mathbb{R}^2} xf(x, y)dA$$

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

**Definição 35** Quando a função de densidade conjunta é constante dentro de um certo conjunto  $R$  (e 0 fora dele), dizemos que a variável  $(x, y)$  é **distribuída uniformemente** em  $R$ . Neste caso, temos

$$f(x, y) = \frac{1}{Área(R)} \text{ se } (x, y) \in R \text{ e } f(x, y) = 0, \text{ caso contrário}$$

## 6.2 Distribuições Marginais e Condicionais; Covariância e Correlação

**Definição 36** A **Distribuição Marginal** de  $X$  será

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

e a **Distribuição Condicional** de  $X$  dado  $Y$  será

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

**Definição 37** A **Covariância** e a **Correlação** entre duas variáveis  $X$  e  $Y$  são respectivamente

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

**Definição 38** A *Esperança Condicional* de  $X$  na certeza de que  $Y = y$  é

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

**Definição 39** As variáveis  $X$  e  $Y$  são **independentes** quando a densidade conjunta é o produto das marginais, isto é,

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

**Corolário 0.2.12**  $X$  e  $Y$  são **independentes** se, e somente se,  $f(x, y)$  é da forma  $g(x)h(y)$  num retângulo da forma  $[a, b] \times [c, d]$  (e 0 caso contrário; note que este retângulo pode ser "infinito").

**Corolário 0.2.13** Se  $X$  e  $Y$  são **independentes**,  $Cov(X, Y) = 0$  e  $E(X|y) = E(X)$  para valores válidos de  $y$  (isto é, sempre que  $f_Y(y) \neq 0$ ).

**Definição 40** Os gráficos de  $E[X|y]$  (uma função de  $y$ ) e  $E[Y|x]$  (uma função de  $x$ ) são chamados de **curvas de regressão** (de  $X$  sobre  $y$  e vice-versa, respectivamente).

## 6.3 Funções de Variáveis Contínuas

**Teorema 0.3** Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias com densidade  $f_{X,Y}(x, y)$ . Sejam  $W = g(X, Y)$  e  $Z = h(X, Y)$  duas novas variáveis. Então a densidade conjunta de  $W$  e  $Z$  é dada por

$$f_{W,Z}(w, z) = f_{X,Y}(x, y) \cdot |J|$$

onde  $J$  é o Jacobiano da inversa da Transformada  $T : (x, y) \rightarrow (g(x, y), h(x, y))$ :

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix}$$

## 7 Somas e Médias de Variáveis Aleatórias

### 7.0 Motivação

Se motive... e continue.

## 7.1 Somas das Principais Distribuições Aleatórias

**Definição 41** *Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma AAS (Amostragem Aleatória Simples) tomada a partir de uma distribuição de uma v.a.  $X$ . Definimos a **soma da amostra** e a **média amostral** respectivamente por*

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

**Corolário 0.3.1** *Se  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  são independentes, então qualquer combinação linear não-nula  $X = aX_1 + bX_2$ , também terá distribuição normal, a saber,  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  onde  $\mu = a\mu_1 + b\mu_2$  e  $\sigma^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$ . Em suma:*

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \\ X_1 \text{ e } X_2 \text{ independentes} \end{array} \right\} \Rightarrow aX_1 + bX_2 \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

**Teorema 0.4** *Se  $X_1, \dots, X_n$  são amostras independentes da distribuição  $N(\mu, \sigma^2)$  então*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

## 7.2 Lei dos Grandes Números

**Lema 0.5** *Se  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são amostragens aleatórias simples de uma variável  $X$  com  $E(X) = \mu$  e  $\sigma(X) = \sigma$ , então*

$$E(S_n) = n\mu; \quad \text{Var}(S_n) = n\sigma^2; \quad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma$$

$$E(\bar{X}) = \mu; \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}; \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**Teorema 0.6 (Lei dos Grandes Números, Bernoulli, 1713)** *Suponha que  $X$  tem uma distribuição tal que  $\mu = E(X)$  e  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$  são finitos. Seja  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$  onde  $X_1, X_2, \dots, X_n$  são provas independentes com a distribuição  $X$ . Então, para qualquer  $\varepsilon > 0$  fixo, temos:*

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

*quando  $n \rightarrow \infty$ . E também quando  $n \rightarrow \infty$ :*

$$P(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

## 7.3 Teorema Central do Limite (TCL)

### TCL para Distribuição Binomial

**Teorema 0.7 (Aproximação Normal à Distribuição Binomial)** *Seja  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{npq} \text{BinomialDen}([np + a\sqrt{npq}]; n, p) = \phi(a)$$

*onde  $\phi(\alpha) = \text{NormalDen}(\alpha)$  é a densidade da normal padronizada, isto é,*

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2}$$

**Teorema 0.8 (Aproximação Normal à Binomial)** *Seja  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , e sejam  $a$  e  $b$  números inteiros fixos. Defina*

$$a^* = \frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}} \quad e \quad b^* = \frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}$$

*Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq X \leq b) = \int_{a^*}^{b^*} \phi(t) dt$$

## TCL (Caso Geral)

**Teorema 0.9 (Teorema Central do Limite)** *Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  amost-  
ras independentes de uma densidade com valor esperado  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ .  
Seja*

$$X^* = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

*Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq X^* \leq b) = \int_a^b \phi(x) dx$$

*isto é, a distribuição  $X^*$  se aproxima (em áreas) da distribuição normal  
padrão.*

## 7.4 Aplicação à Estatística: Distribuição Amostral de uma Proporção

Não tem nada aqui (só aplicações) pode seguir...

## 8 Outras Distribuições Amostrais

### 8.1 Estimação de Parâmetros

**Definição 42** *Um **estimador**  $\hat{\theta}$  de um parâmetro  $\theta$  (da distribuição  $X$ , isto  
é, da população) é uma função das observações da amostra, isto é*

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

**Definição 43** *Um estimador  $\hat{\theta}$  é **não-viesado** quando*

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

*E o viés de um estimador é dado por*

$$\text{Viés}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$



**Definição 44** Um estimador  $\hat{\theta}_1$  é dito **mais eficiente** do que  $\hat{\theta}_2$  quando

$$Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$$

**Definição 45** Um(a sequência de) estimador(es)  $\hat{\theta}$  é dito **consistente** quando,  $\forall \varepsilon > 0$  fixo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) = 0$$

**Definição 46** Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Viés(\hat{\theta}) = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$$

então  $\hat{\theta}$  é consistente.

## 8.2 Estimadores pontuais da variância

### Média Conhecida

Suponha que a média  $\mu = E(X)$  é conhecida, e queremos saber o valor de  $\sigma^2 = Var(X)$ , um possível estimador para  $E((X - \mu)^2)$  é

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$$

Este é um estimador não-viesado.

### Média Desconhecida

**Definição 47** A **variância da amostra** é um estimador

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

**Corolário 0.9.1**  $S^2$  é um **estimador** não viesado de  $\sigma^2$ , isto é

$$E(S^2) = \sigma^2$$

**Corolário 0.9.2**

$$\text{Var}(S^2) = \frac{(n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^2}{n(n-1)}$$

onde

$$\mu_4 = E((X - \mu)^4)$$

**Corolário 0.9.3** Se  $\mu_4 < \infty$ , então  $S^2$  e a variância verdadeira  $\sigma^2$  são ambos estimadores consistentes de  $\sigma^2$

### 8.3 Erro Quadrático Médio

**Definição 48** O erro quadrático médio de um estimador  $T$  de um parâmetro  $\theta$  é

$$EQM(T; \theta) = E((T - \theta)^2)$$

**Corolário 0.9.4**

$$EQM(T; \theta) = \text{Var}(T) + (\text{Viés}(T))^2$$

### 8.4 Distribuição Qui-quadrado

**Lema 0.10** Se  $Z \sim N(0, 1)$ , então  $\mu_4(Z) = 3$ .

**Lema 0.11** Se  $X$  é normal, então

$$\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \quad e \quad \text{Var}(\sigma^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

**Definição 49** A distribuição  $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$  é também chamada de **qui-quadrado** com  $n$  graus de liberdade, cuja notação é

$$Y \sim X^2(n)$$

**Corolário 0.11.1** A distribuição de  $S^2$  é determinada por

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2(n-1)$$

**Corolário 0.11.2** Se  $Y \sim X^2(n)$ , então  $Z = \sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1}$  é aproximadamente  $N(0, 1)$  (especialmente para  $n$  grande).

## 8.5 Distribuição t de Student

**Definição 50** Sejam  $Z \sim N(0, 1)$  e  $X \sim X^2(n)$  variáveis independentes. A distribuição da variável

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$$

É chamado de **t de Student com n graus de liberdade** (notação:  $T \sim t(n)$ )

**Corolário 0.11.3** A densidade de  $T \sim t(n)$  é

$$f(t) = TDen(t; n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

**Corolário 0.11.4** Se  $T \sim t(n)$ , então

$$E(T) = 0 \quad \forall n \geq 2$$

$$Var(T) = \frac{n}{n-2} \quad \forall n \geq 3$$

$$Med(T) = 0 \quad \forall n \geq 1$$

Nos demais casos não existe.

**Teorema 0.12** Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma AAS da variável aleatória normal  $X$ . Então  $\bar{X}$  e  $S^2$  são independentes, e

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

## Dado em aula

### Gerar variável aleatória

**Teorema 0.13** Seja  $F$  uma função de distribuição cumulativa continua e estritamente crescente.

1. Se  $U \sim \text{Unif}(0, 1)$  e  $X = F^{-1}(U)$ . Então  $X$  é uma variável aleatória com função de distribuição cumulada  $F$ .
2. Se  $X$  é uma variável aleatória com função de distribuição cumulativa  $F$ . Então  $F(X) \sim \text{Unif}(0, 1)$ .