

Resumo de Curvas e Superfícies

Sumário

Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco

Difeomorfismo e Reparametrização

Ângulo e Curvatura

Teorema Fundamental das Curvas Planas

Curvas Regulares no \mathbb{R}^3

Teorema Fundamental das Curvas Espaciais

Superfícies Regulares

Superfícies e Atlas

Espaços topológicos \mathbb{R}^n Parte I

Espaços topológicos \mathbb{R}^n Parte II

Primeira forma fundamental

Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco

Definição 1 Uma **curva parametrizada** em \mathbb{R}^n é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sendo $I \subset \mathbb{R}$ aberto.

Definição 2 O conjunto imagem de γ , $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ é dito o **traço** de γ .

Definição 3 (Vetor tangente) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ com $\gamma_i(t)$ diferenciáveis $\forall i, i = 1 \dots n$, o vetor

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

é chamado **vetor tangente de γ em t**

Definição 4 (Curvas regulares) Seja $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável. Diz-se que γ é **regular**, quando $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Definição 5 (Reta tangente) Seja γ uma curva regular, então a **reta tangente de γ no ponto $t_0 \in I$** é aquela que contém o ponto $\gamma(t_0)$ e é paralela ao vetor $\gamma'(t_0)$, ou seja

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0)$$

Definição 6 (Comprimento de arco) O **comprimento de arco de α** , de $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$ definido por $L_a^b(\alpha)$ é

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definição 7 Se $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma c.p.¹, sua **velocidade no ponto $\gamma(t)$** é $\|\gamma'(t)\|$, e a curva é dita com **velocidade unitária** se $\|\gamma'(t)\| = 1$, $\forall t \in (a, b)$ e é parametrizada por comprimento de arco.

Teorema 1 Toda **curva regular** pode ser reparametrizada por **comprimento de arco**.

Difeomorfismo e Reparametrização

Definição 8 (Difeomorfismo) Dado os conjuntos abertos $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Uma bijeção $f : U \rightarrow V$ é dita **difeomorfismo** quando f e f^{-1} são diferenciáveis.

Definição 9 (Reparametrização) A curva $\beta(s)$ é dita uma **reparametrização** de $\alpha(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular quando dados $I_0 \subset \mathbb{R}$ e $\phi : I_0 \rightarrow I$ difeomorfismo. Temos $\beta(S) = \alpha(\phi(S))$.

Definição 10 Seja $\alpha(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\beta(S) : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Então

- $\beta(S)$ é uma reparametrização positiva de α se $\phi'(S) > 0$, $\forall S$
- $\beta(S)$ é uma reparametrização negativa de α se $\phi'(S) < 0$, $\forall S$

Definição 11 Qualquer reparametrização de uma c.p. regular é regular (i.e. difeomorfismos preservam regularidade).

Propriedade 1 A função L (comprimento de arco) é um difeomorfismo.

Definição 12 Toda curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ admite reparametrização por comprimento de arco.

¹curva parametrizada

Ângulo e Curvatura

Definição 13 (Função Ângulo) Dada uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow S^1$, onde S^1 é o círculo de \mathbb{R}^2 com centro na origem e raio 1, diz-se que $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função-ângulo** de γ , quando

$$\gamma(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), \forall s \in I$$

Definição 14 (Curvatura) Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ unit-speed. Designando-se o vetor tangente de α em $s \in I$ por $T(s)$, podemos afirmar que a curva $T(s) : I \rightarrow S^1$ admite função ângulo

$$T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), \forall s \in I$$

Daí a **curvatura** de α em $s \in I$ é definida por

$$K(s) = \theta'(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

Teorema Fundamental das Curvas Planas

Teorema 2 (Função-ângulo diferenciável) Seja $\gamma : I \rightarrow S^1$ uma curva diferenciável. Então, γ admite uma função ângulo $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, a qual é diferenciável. Além disso, toda função-ângulo de γ , a qual é diferenciável, difere de θ por uma constante.

Corolário 2.1 Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e seja $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$ a parametrização por comprimento de arco de α , a curvatura de α em $t \in I$ é $K_\alpha(t)$, e, por definição é a curvatura de β em $\theta^{-1}(t)$, isto é

$$K_\alpha := K_\beta(\theta^{-1}(t))$$

Definição 15 (Diedro de Frenet) Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Dado $s \in I$, o vetor $N(s) = JT(s)$ é dito o vetor normal de α em $s \in I$. A base ortonormal de \mathbb{R}^2 formado por $T(s)$ e $N(s)$ é chamada **Diedro de Frenet** em s .

Definição 16 (Movimento Rígido) $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita **movimento rígido**, quando preserva distancia, isto é, para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}^2$

$$\|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\|$$

Teorema 3 Seja $\Phi : A + p_0$ um movimento rígido direto de \mathbb{R}^2 e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Então, $\beta = \Phi \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular de \mathbb{R}^2 , parametrizada por comprimento de arco, tal que

$$K_\alpha(s) = K_\beta(s) \forall s \in I$$

Teorema 4 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Planas) Sejam I um intervalo aberto da reta e $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

1. Então existe uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, unit-speed, cuja função curvatura coincide com K .
2. Além disso, para toda $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, unit-speed, que cumpre $K_\beta = K$, existe um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha = \Phi \circ \beta$

Curvas Regulares no \mathbb{R}^3

Definição 17 (Curvas no \mathbb{R}^3) As curvas diferenciáveis no \mathbb{R}^3 , são definidas de forma análoga ao \mathbb{R}^2 , isto é, uma **curva no \mathbb{R}^3** é uma aplicação diferenciável de um intervalo I (aberto) em \mathbb{R}^3 , da forma

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I$$

Onde x , y e z são diferenciáveis, e a curva é dita **regular** quando

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0), \quad t \in I$$

Propriedade 2 De forma análoga vale para \mathbb{R}^3 que

- Comprimento de arco é invariável por reparametrização.
- Toda curva regular admite reparametrização unit-speed ($\|\alpha'(t)\| = 1$).

Definição 18 (Curvatura no \mathbb{R}^3) Dada uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regular parametrizada por comprimento de arco, a **curvatura** de α em $s \in I$ é definida como

$$K_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|$$

Definição 19 (2-regular) Seja uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ unit-speed, e $K_\alpha(s) > 0, \forall s$, ou seja, $\alpha''(s) \neq 0, \forall s$. Então dizemos que α é **2-regular**.

Definição 20 (Triedro de Frenet) Para α 2-regular, seja $T(s) = \alpha'(s)$ (vetor tangente), $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ (vetor normal) e $B(s) = T(s) \times N(s)$ (vetor binormal). Desse modo estabelecemos um referencial chamado **Triedro de Frenet** formado pelos vetores $\{T(s), N(s), B(s)\}$, onde,

$$\begin{cases} B(s) = T(s) \times N(s) \\ N(s) = B(s) \times T(s) \\ T(s) = N(s) \times B(s) \end{cases}$$

Definição 21 (Curvatura e Torção) Seja uma curva α 2-regular em \mathbb{R}^3 não necessariamente parametrizada por comprimento de arco, então a **curvatura** e a **torção** de α são definidas respectivamente como

$$K_\alpha(t) = \frac{\|\alpha''(t) \times \alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$
$$\mathcal{T}(t) = \frac{\langle (\alpha'(t) \times \alpha''(t)), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

Teorema 5 Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva 2-regular unit-speed, então

$$\alpha \text{ é plana} \iff \mathcal{T}(s) \equiv 0, \quad \forall s \in I$$

Teorema Fundamental das Curvas Espaciais

Teorema 6 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Espaciais) Sejam I um intervalo aberto, $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva diferenciável e $\mathcal{T} : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável

1. Então existe uma curva diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, unit-speed, tal que K e \mathcal{T} concedem com a curvatura e torção de α respectivamente
2. Além disso, $\forall \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, unit-speed, que cumpre $K_\beta = K$ e $\mathcal{T}_\beta = \mathcal{T}$ existe um movimento rígido $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(s) = \Phi(\beta(s))$

Superfícies Regulares

Definição 22 (Superfícies Regulares) Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito uma **superfície regular**, quando é localmente difeomorfo a \mathbb{R}^2 . Mais precisamente, quando, $\forall p \in S$, existe um difeomorfismo

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset S$$

onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 e V é um aberto relativo de S . A aplicação X é dita, então uma parametrização local de S em p .

Definição 23 Sendo o difeomorfismo de uma superfície da forma

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in V$$

definimos as **derivadas parciais** de X como sendo

$$X_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)$$

$$X_v(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)$$

e se X_u e X_v são L.I. então produzem um plano tangente no ponto p .

Propriedade 3 Se S é uma superfície regular temos que:

- (a) A aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é diferenciável de C^∞ quando x , y e z tem derivadas parciais de todas as ordens.
- (b) Para todo $q : (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva, nesse caso, garante-se a existência do plano tangente $T_p S$.

Teorema 7 (Função Inversa) Seja F diferenciável e $p \in A$ tal que dF_p é injetora. Então existe uma vizinhança $U \subset A$ de p . Tal que $F(U)$ é aberto em \mathbb{R}^n e a restrição F_U é um difeomorfismo de U sobre $F(U)$.

Superfícies e Atlas

Definição 24 (Definição de Superfície) O subconjunto S de \mathbb{R}^3 é uma **superfície** se $\forall p \in S$, existe um aberto U em \mathbb{R}^2 e um aberto W em \mathbb{R}^3 contendo p tal que $S \cap W$ é homeomorfo a U .

Definição 25 (Atlas) Uma coleção de parametrizações que cobrem uma superfície S é dita **atlas de S** e cada uma das parametrizações é dita uma **carta**.

Definição 26 (Curvas regulares enquanto subconjuntos) Diz-se que um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ é uma **curva regular**, quando para cada $p \in C$, existe um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $\alpha : I \rightarrow \alpha(I) \subset C$ em que $\alpha(I)$ é um aberto relativo de C .

Definição 27 (Valor Regular) Dados um aberto $O \subset \mathbb{R}^3$ e uma função diferenciável $\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $q \in \mathbb{R}$ é **valor regular** de φ quando $\forall p \in \varphi^{-1}(\{q\}) \subset O$ a derivada

$$d\varphi_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

é não nula, isto é, $\nabla \varphi(p) \neq 0$

Propriedade 4 A **imagem inversa** de um valor regular de uma função diferenciável definida em um aberto do \mathbb{R}^3 , quando não vazia, é uma superfície regular.

Espaços topológicos \mathbb{R}^n Parte I

Definição 28 (Bola aberta) Dado $a \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$, a **bola aberta** de centro a e raio r em \mathbb{R}^n é o conjunto

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

e respectivamente definimos **bola fechada** como

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$

Definição 29 (Conjunto Limitado) Um conjunto é dito **limitado** quando existe uma bola que o contém, ou seja,

$$\exists a \in \mathbb{R}^n \text{ e } r > 0 \text{ t.q. } X \subset B(a, r)$$

Definição 30 (Aplicação limitada) Dado um conjunto A uma **aplicação** $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita limitada quando seu conjunto imagem é limitado.

Definição 31 (Conjunto aberto) Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito **aberto** quando $\forall a \in A \exists r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$ (e a é dito ponto interior de A).

Definição 32 (Aplicação aberta) Diz-se que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **aberta** quando $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto.

Propriedade 5 (Propriedades dos abertos) Propriedades fundamentais dos conjuntos abertos

1. O conjunto vazio e o espaço \mathbb{R}^n são abertos.
2. A **intersecção** de uma família finita de abertos é aberta.
3. A **união** de uma família qualquer de abertos é aberta.

Definição 33 (Espaço topológico) Um espaço topológico é um par (X, T) em que X é um conjunto e T é uma família de subconjuntos de X , chamados abertos, que satisfazem as propriedades acima. Diz-se, então, que a família T define uma topologia

Teorema 8 Uma sequência (X_k) em \mathbb{R}^n converge para $a \in \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $\forall r > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq k_0$ então $x_k \in B(a, r)$.

Definição 34 (Conjunto fechado) Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito **fechado** quando seu complementar é aberto.

Propriedade 6 (Propriedades dos fechados) Propriedades fundamentais dos conjuntos fechados

1. O conjunto vazio e o espaço \mathbb{R}^n são fechados.
2. A **intersecção** de uma família qualquer de fechados é um conjunto fechado.
3. A **união** de uma família finita de fechados é fechado.

Definição 35 (Aplicação fechada) Diz-se que uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é **fechada** quando leva fechados de \mathbb{R}^n em fechados de \mathbb{R}^m .

Definição 36 (Aderência) Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é dito **aderente** a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se existe uma sequência de pontos de X que convergem para a .

Definição 37 (Fecho) O **fecho** de X , denotado por \overline{X} , é o conjunto formado por todos os pontos de \mathbb{R}^n que são aderentes a X .

Teorema 9 $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\iff \overline{F} = F$.

Definição 38 (Bordo) A **fronteira** (ou **bordo**) de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\partial X = \overline{X} \cap \overline{\mathbb{R}^n - X}$.

Espaços topológicos \mathbb{R}^n Parte II

Definição 39 (Aberto relativo) *Sejam X subconjunto de \mathbb{R}^n e $A \subset X$. Diz-se que A é **aberto relativo** a X ou **aberto relativamente** à X quando existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap X$.*

Definição 40 (Cisão) *Uma **cisão** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição do mesmo em dois conjuntos disjuntos que são ambos, abertos em X , isto é, $A, B \subset X$ tais que*

- $X = A \cup B$
- $A \cap B = \emptyset$
- A e B abertos em X

Definição 41 (Conexidade) *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito **conexo** se a única cisão que admite é a trivial ($X = X \cup \emptyset$) caso contrario é dito desconexo.*

Definição 42 (Homeomorfismo) *Diz-se que dois espaços (X_1, T_1) e (X_2, T_2) . São **homeomorfos** quando existe bijeção $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ tal que para quaisquer abertos $A_1 \in T_1$ e $A_2 \in T_2$ tem-se que $\varphi(A_1) \in T_2$ e $\varphi^{-1}(A_2) \in T_1$. Logo φ é dito **homeomorfismo**.*

Definição 43 (Continuidade) *Dados $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow Y$ é **contínua** em $a \in X$ se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $x \in X$ e $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.*

Teorema 10 *Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ é um homeomorfismo se e só se f e f^{-1} são contínuas.*

Definição 44 (Isomorfismo) *É uma aplicação que preserva uma estrutura e pode ser revertida com uma aplicação inversa.*

Primeira forma fundamental

Teorema 11 (Teorema da função inversa) *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável e $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ isomorfismo. Então, existem abertos $V \subset U$ e $W \subset F(U)$, tais que se $p \in V$, então $F(p) \in W$ e $F|_V : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo.*

Definição 45 (Vetor tangente) *Dado um ponto p de uma superfície regular S , diz-se que $w \in \mathbb{R}^n$ é um **vetor tangente** a S em p , se existe uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, $\varepsilon > 0$, tal que, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = w$.*

Teorema 12 (Primeira forma fundamental) *Seja S uma superfície regular e $p \in S$. A **primeira forma fundamental** de S em p*

$$I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

é a forma quadrática associada à restrição do produto interno canônico de \mathbb{R}^3 ao plano tangente de S em p , $T_p S$, isto é

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle^2 = \|w\|^2, \quad w \in T_p S$$

Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$ de S , as funções

$$E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle$$

$$F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle$$

$$G(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle$$

São os coeficientes da primeira forma fundamental de S relativos a X , isto é, a matriz de $I_{X(u,v)}$ com respeito a base $\{X_u, X_v\}$, de $T_{X(u,v)}S$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

E $\forall w = aX_u(u, v) + bX_v(u, v) \in T_{X(u,v)}S$ tem-se

$$I_{X(u,v)}(w) = a^2E(u, v) + 2abF(u, v) + b^2G(u, v)$$