

Fundação Getúlio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de Teoria da Probabilidade

Rio de Janeiro
2021

Sumário

1 Conceitos Básicos

1.1 Modelos de Probabilidade

1.2 Probabilidade Condicional

2 Variáveis Aleatórias Discretas

2.1 Função de Probabilidade e Função de Probabilidade Conjunta

2.2 Função de Probabilidade Acumulada

2.3 Valor Esperança

2.4 Variância e Outras Medidas de Dispersão

2.5 Covariância e Correlação

3 Principais Distribuições Discretas

3.1 Processo de Bernoulli

3.2 Distribuição Binomial

3.3 Distribuição Geométrica

3.4 Distribuição Binomial Negativa

3.5 Processo de Poisson

3.6 Distribuição Hipergeométrica

4 Variáveis Aleatórias Contínuas

4.1 Distribuições Contínuas

4.2 Valor Esperado e Variância

5 Principais Distribuições Contínuas

5.1 Distribuição Uniforme

5.2 Distribuição Exponencial

- 5.3 Distribuição Gama
- 5.4 Distribuição Normal
- 5.5 Taxa de Falhas
- 6 Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais
 - 6.1 Função de Densidade Conjunta
 - 6.2 Distribuições Marginais e Condicionais; Covariância e Correlação
 - 6.3 Funções de Variáveis Contínuas
- 7 Somas e Médias de Variáveis Aleatórias
 - 7.1 Somas das Principais Distribuições Aleatórias
 - 7.2 Lei dos Grandes Números
 - 7.3 Teorema Central do Limite (TCL)
 - 7.4 Aplicação à Estatística: Distribuição Amostral de uma Proporção
- 8 Outras Distribuições Amostrais
 - 8.1 Estimação de Parâmetros
 - 8.2 Estimadores pontuais da variância
 - 8.3 Erro Quadrático Médio
 - 8.4 Distribuição Qui-quadrado
 - 8.5 Distribuição t de Student

1 Conceitos Básicos

1.1 Modelos de Probabilidade

Definição 1 *Dois eventos A e B são chamados de **mutuamente exclusivos** se não podem ocorrer simultaneamente, isto é, se $A \cap B = \emptyset$.*

Definição 2 *Uma **probabilidade** é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de forma que:*

1. Para todo evento A , $0 \leq Pr(A) \leq 1$;
2. $P(S) = 1$;
3. Se A e B são eventos mutuamente excludentes então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Corolário 0.0.1 (Lei do Complemento)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Em outras palavras, a probabilidade de um evento ocorrer mais a probabilidade de ele não ocorrer dá 100%

Corolário 0.0.2 $P(\emptyset) = 0$, isto é se um evento é impossível, sua probabilidade deve ser 0.

Corolário 0.0.3 (Lei da Adição)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.2 Probabilidade Condicional

Definição 3 *Sejam A e B dois eventos com $P(A) \neq 0$. A probabilidade condicional de B dado A é*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Corolário 0.0.4 (Lei da Multiplicação)

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(B|A) \cdot P(B)$$

Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Corolário 0.0.5 (Lei da Probabilidade Total) *Suponha que B_1, B_2, \dots, B_n formam uma partição de S . Então*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_n) \\ &= P(A \mid B_1)P(B_1) + \dots + P(A \mid B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

Corolário 0.0.6 (Teorema de Bayes) *Suponha que B_1, B_2, \dots, B_n formam uma partição de S . Então*

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Independência

Definição 4 *Dois eventos (não impossíveis) A e B são ditos **independentes** se o conhecimento de um deles não afeta a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se*

$$P(B|A) = P(B)$$

2 Variáveis Aleatórias Discretas

2.1 Função de Probabilidade e Função de Probabilidade Conjunta

Definição 5 *Se X é uma variáveis aleatórias discretas, definimos a **função de probabilidade de X** por*

$$p_X(x) = P(X = x)$$

Definição 6 *Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, definimos a **função de probabilidade conjunta de X e Y** por*

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \text{ e } Y = y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias Discretas

Definição 7 Dizemos que X e Y são variáveis **independentes** exatamente quando

$$P(X = i \text{ e } Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$$

Corolário 0.0.7 X e Y são independentes se, e somente se, a distribuição condicional de X dado $Y = j$ é idêntica à distribuição marginal de X (qualquer que seja j possível). De fato, temos:

$$P(X = i | Y = j) = \frac{P(X = i \text{ e } Y = j)}{P(Y = j)} = P(X = i)$$

2.2 Função de Probabilidade Acumulada

Definição

Definição 8 A **função de distribuição** (ou **função de probabilidade acumulada**) de X é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Corolário 0.0.8 Se F é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta:

- i. F é não-decrescente;
- ii. $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$ (ou seja, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$);
- iii. F é constante por partes (isto é, uma função-escada).

Corolário 0.0.9 Se F é uma função de distribuição acumulada de uma variável aleatória, então

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Quantis

Definição 9 *O q -quantil de uma variável aleatória X é qualquer valor x_q onde a função acumulada "acerta" por q ou "passa" por p . Formalmente:*

$$F(x_q-) \leq q \leq F(x_q)$$

2.3 Valor Esperança

Intuição e Definição

Definição 10 *Se X é uma variável aleatória discreta, definimos o **valor esperado** (ou esperança matemática, ou expectativa, ou média, ou valor médio) de X por*

$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot p(x)$$

isto é, $E(X)$ é uma média ponderada dos valores de X , com pesos iguais às respectivas probabilidades destes valores. Ocasionalmente, escrevemos $\mu_X = E(X)$

A esperança é uma medida de posição ou de tendência central (valores grandes de X acarretam $E(X)$ grande; valores pequenos de X acarretam $E(X)$ pequeno).

Propriedades (Caso Unidimensional)

Corolário 0.0.10 *Se $Y = f(X)$, temos*

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{x \in S} f(x) \cdot p(x)$$

Corolário 0.0.11 *Sejam a e b constantes quaisquer. Então:*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Propriedades (Caso Bidimensional)

Corolário 0.0.12 *Se $Z = f(X, Y)$ então*

$$E(Z) = E(f(X, Y)) = \sum_{x,y} f(x, y)p_{X,Y}(x, y)$$

Corolário 0.0.13 *Sejam a , b e c constantes quaisquer. Então*

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

Corolário 0.0.14 *Se X e Y são independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

2.4 Variância e Outras Medidas de Dispersão

Definição

Definição 11 *Duas medidas de dispersão comuns são o **desvio médio**, definidos por*

$$DM(X) = E(|X - E(X)|)$$

*e a **variância**, definida por*

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

*Ao invés da variância, podemos medir a dispersão de X pelo seu **desvio-padrão***

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Corolário 0.0.15 *Sejam a e b constantes quaisquer. então*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X)$$

$$DM(aX + b) = |a| \cdot DM(X)$$

Corolário 0.0.16

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Corolário 0.0.17 *Se X e Y são independentes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$*

Desigualdade de Chebyshev

Teorema 0.1 (Desigualdade de Chebyshev) *Seja X uma variável aleatória com valor esperado $\mu = E(X)$ e desvio-padrão $\sigma = \sigma(X)$. Seja $P = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \mu| < k\sigma\}$ (isto é, P é o intervalo aberto $(x - k\sigma, x + k\sigma)$, um conjunto de valores de x que estão "perto da média" pelo menos k desvios-padrão). Então, para qualquer $k > 0$, tem-se*

$$P(X \notin P) \leq \frac{1}{k^2}$$

ou seja

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

2.5 Covariância e Correlação

Definição 12 *A **covariância** entre duas variáveis X e Y é*

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

Corolário 0.1.1

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Corolário 0.1.2 *Se X e Y são independentes, então $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$*

Definição 13 *Outra medida de "variação conjunta" de duas variáveis X e Y é a **correlação***

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Um pouco de Álgebra Linear

Corolário 0.1.3 Para quaisquer variáveis aleatórias X e Y :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

E se X e Y são independentes vale que $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Corolário 0.1.4

$$\text{Cov}(aX + b, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$$

Corolário 0.1.5

$$\rho(aX + b, Y) = \rho(X, Y) \text{ se } a > 0$$

$$\rho(aX + b, Y) = -\rho(X, Y) \text{ se } a < 0$$

3 Principais Distribuições Discretas

Distribuição

Se os valores assumidos por uma certa variável aleatória X são equiprováveis dizemos que X tem um **distribuição uniforme**.

Brevíssima Revisão de Análise Combinatória

Aqui trata-se de conteúdo do ensino médio em caso de dúvida [see](#).

3.1 Processo de Bernoulli

Definição 14 Um **processo de Bernoulli** é uma sequência de experimentos com as seguintes características:

1. Cada experimento tem apenas dois resultados possíveis, denominados **sucesso** e **falha**
2. Cada experimento tem a mesma probabilidade p de sucesso, e cada experimento é completamente independente de todos os outros.

3.2 Distribuição Binomial

Definição 15 *Suponha que o número de experimentos a serem feitos é determinado digamos, n experimentos. Seja X a variável aleatória que representa o número de sucessos obtidos nestes n experimentos. Dizemos que X tem uma **distribuição binomial de parâmetros n e p** (e escrevemos $X \sim \text{Bin}(n, p)$). Nesse caso a função de probabilidade de X passa a se chamar: *BinomialDen*.*

$$P(X = k) = \text{BinomialDen}(k; n, p)$$

e chamaremos a função acumulada de *BinomialDist*:

$$P(X \leq k) = \text{BinomialDist}(k; n, p)$$

Corolário 0.1.6

$$\text{BinomialDen}(k; n, p) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\text{BinomialDist}(k; n, p) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Corolário 0.1.7 *Seja $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Então*

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

3.3 Distribuição Geométrica

Definição 16 *Suponha que realizamos um processo de Bernoulli com probabilidade de sucesso de cada prova $p > 0$. Seja X o número de tentativas feitas até o primeiro sucesso (inclusive). Dizemos que X tem uma **distribuição geométrica de parâmetro p** , isto é, $X \sim \text{Geom}(p)$*

Corolário 0.1.8 *Se $X \sim \text{Geom}(p)$, então*

$$P(X = k) = \text{Geom}(k; p) = q^{k-1}p$$

$$P(X \leq k) = 1 - q^k$$

Corolário 0.1.9 Se $X \sim \text{Geom}(p)$, então

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

3.4 Distribuição Binomial Negativa

Definição 17 Suponha que o processo de Bernoulli é repetido até obter r sucessos. Seja X o número de tentativas feitas (incluindo o último sucesso). Dizemos que X tem uma **distribuição binomial negativa de parâmetros r e p** , isto é, $X \sim \text{NegBin}(r, p)$. Note que, a distribuição geométrica é um caso particular dessa.

Corolário 0.1.10 Se $X \sim \text{NegBin}(r, p)$, então para $k \geq r$ (k inteiro).

$$P(X = k) = p \cdot \text{BinomialDen}(r - 1; k - 1, p) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$$

3.5 Processo de Poisson

Definição 18 A **distribuição de Poisson** dizemos $X \sim \text{Poi}(\mu)$ que no geral é $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Bin}(k; n, \frac{\mu}{n}) = \text{Poi}(k; \mu)$

Corolário 0.1.11 Se $X \sim \text{Poi}(\mu)$, tem-se

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$E(X) = \text{Var}(X) = \mu$$

3.6 Distribuição Hipergeométrica

Definição 19 De uma caixa com r bolas "sucesso" e $N - r$ bolas "falha", extraímos sem reposição n bolas. Seja X o número de bolas sucesso. Dizemos que X tem **distribuição hipergeométrica com parâmetros n , r e N** , isto é, $X \sim \text{Hip}(n, r, N)$.

Corolário 0.1.12 Se $X \sim \text{Hip}(n, r, N)$, então

$$P(X = k) = \text{Hip}(k; n, r, N) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq \frac{N-m}{N-1}$$

$$\text{onde } p = \frac{r}{N}$$

4 Variáveis Aleatórias Contínuas

4.1 Distribuições Contínuas

Função de Distribuição Acumulada

Definição 20 A **função de distribuição acumulada (função de distribuição; fda)** de uma variável aleatória X é

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Corolário 0.1.13 Se $F(x)$ é a f.d.a. de uma variável real X , então

F é não-decrescente

$$F(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0 \quad \text{e} \quad F(+\infty) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Note que, no caso contínuo $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$, pois $P(X = a) = 0$.

Quantis

Definição 21 *O q -quantil de uma variável aleatória X é qualquer valor x_q onde a função acumulada "acerta" q . Formalmente $F(x_q) = q$*

Função Densidade de Probabilidade

Definição 22 *A **função densidade de probabilidade (f.d.p.)** de X é a derivada da função acumulada:*

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'_X(x)$$

Corolário 0.1.14 *Dada a f.d.p. de uma variável aleatória contínua X , encontramos probabilidades pela fórmula*

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Em particular, como $F(-\infty) = 0$, note que

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Corolário 0.1.15 *Se $f(x)$ é a f.d.p. de uma variável aleatória real X , então para todo x real:*

$$0 \leq f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

Definição 23 *A **moda** de uma variável aleatória é o valor x onde a densidade $f(x)$ é máxima.*

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Seja X uma variável aleatória de densidade $f(x)$ e seja $Y = h(X)$ onde h é uma função crescente. Então a densidade $g(y)$ da variável Y satisfaz

$$g(y) = \frac{f(x)}{h'(x)} = \frac{f(x)}{\frac{dy}{dx}}$$

onde $x = h^{-1}(y)$, ou seja,

$$g(y)dy = f(x)dx$$

4.2 Valor Esperado e Variância

Valor Esperado

Definição 24 Se X é uma variável aleatória com densidade $f(x)$, definimos seu **valor esperado** (**valor médio**, **esperança**), por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Corolário 0.1.16 Se $Y = h(X)$, então

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

Corolário 0.1.17 Sejam a e b constantes quaisquer. Então

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Variância

Definição 25 A **variância** e o **desvio-padrão** de uma variável aleatória X com densidade $f(x)$ e média $E(X) = \mu$ são

$$Var(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Corolário 0.1.18

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Teorema 0.2 (Desigualdade de Chebyshev) *Esse teorema está definido em 2.4, de forma igual.*

5 Principais Distribuições Contínuas

5.1 Distribuição Uniforme

Definição 26 *Dizemos que a variável aleatória X tem **distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$** (denotada por $X \sim U[a, b]$) quando sua densidade é dada por*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \text{ se } a \leq x \leq b \text{ e } f(x) = 0, \text{ caso contrário}$$

Corolário 0.2.1

$$E(X) = Med(X) = \frac{b+a}{2} \text{ e } Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5.2 Distribuição Exponencial

Suponha que eventos ocorram de acordo com um processo de Poisson à taxa média de λ eventos por unidade de tempo. Dado um certo intervalo $[0, t]$, seja X o número de eventos ocorridos neste intervalo.

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Definição 27 *Dizemos que a variável aleatória T tem **distribuição exponencial de parâmetro λ** (denotada por $T \sim Exp(\lambda)$) se sua densidade é dada por*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \text{ se } t \geq 0 \text{ e } f(t) = 0 \text{ caso contrário}$$

e sua função de distribuição acumulada é

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ se } t \geq 0 \text{ e } F(t) = 0 \text{ se } t < 0$$

Corolário 0.2.2 *Se $T \sim Exp(\lambda)$, então*

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$Med(T) = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Corolário 0.2.3 *Se $T \sim Exp(\lambda)$ e $Y = aT$, então $Y \sim Exp(\frac{\lambda}{a})$*

Corolário 0.2.4 *Se $T \sim Exp(\lambda)$, então $\lambda T \sim Exp(1)$*

5.3 Distribuição Gama

Definição 28 *Para $\alpha > 0$, definimos a função $\Gamma(\alpha)$ como*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Corolário 0.2.5 *Sempre que $\Gamma(\alpha)$ convergir vale que*

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

Corolário 0.2.6 *Se n é natural*

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Corolário 0.2.7

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Distribuição Gama

Mantendo o processo de Poisson da Distribuição exponencial, seja Z o **tempo de ocorrência do n -ésimo evento** e X o número de ocorrências no intervalo $[0, t]$, temos

$$P(Z \leq t) = 1 - P(X < n) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Definição 29 *Seja $\alpha, \lambda > 0$. Dizemos que a variável Z tem **distribuição Gama de parâmetros α e λ** (denotamos $Z \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ se sua densidade é dada por*

$$\text{GammaDen}(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \text{ se } t \geq 0$$

$$\text{GammaDen}(t) = 0, \text{ caso contrário}$$

Corolário 0.2.8 *Se $Z \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, então $E(Z) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $\text{Var}(Z) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ e $\text{Moda}(Z) = \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$*

Corolário 0.2.9 *Se $X \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$ e $Z = \lambda X$, então $Z \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$.*

5.4 Distribuição Normal

Definição 30 *Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 (denotado por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$), quando sua f.d.p. é dada por*

$$f(x) = \text{NormalDen}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Corolário 0.2.10 *Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.*

Corolário 0.2.11 *Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $E(X) = \text{Moda}(X) = \text{Med}(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$.*

5.5 Taxa de Falhas

Definição 31 *Seja T o tempo de vida de um equipamento, isto é, o instante da sua primeira falha, cuja f.d.a é $F(t)$. A **confiabilidade** deste equipamento é*

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

Definição 32 *A **taxa média de falhas** de um equipamento em um intervalo $[t, t + \Delta t]$ é a chance de ele falhar nos próximos Δt dado que ainda não falhou, dividido por Δt , isto é*

$$TMF = \frac{P(T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{(1 - F(t))\Delta t} = -\frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{R(t) \cdot \Delta t}$$

*Tome o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$ e temos então a **taxa instantânea de falhas***

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} TMF = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

6 Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

6.1 Função de Densidade Conjunta

Definição 33 *Uma **Função de Densidade Conjunta** $f(x, y)$ das variáveis X e Y é uma função com a seguinte propriedade:*

$$P((X, Y) \in R) = \int \int_R f(x, y) dA$$

onde R é um subconjunto qualquer do plano XY (isto é, uma região dentro do plano \mathbb{R}^2). Consequentemente, uma função de densidade conjunta tem de satisfazer as seguintes propriedades básicas:

$$f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dA = 1$$

Definição 34 Dada uma função de densidade conjunta $f(x, y)$, definimos o **Valor Esperado, Variância e Desvio-Padrão** da variável X como

$$E(X) = \iint_{\mathbb{R}^2} xf(x, y)dA$$

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Definição 35 Quando a função de densidade conjunta é constante dentro de um certo conjunto R (e 0 fora dele), dizemos que a variável (x, y) é **distribuída uniformemente** em R . Neste caso, temos

$$f(x, y) = \frac{1}{Área(R)} \text{ se } (x, y) \in R \text{ e } f(x, y) = 0, \text{ caso contrário}$$

6.2 Distribuições Marginais e Condicionais; Covariância e Correlação

Definição 36 A **Distribuição Marginal** de X será

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

e a **Distribuição Condicional** de X dado Y será

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

Definição 37 A **Covariância** e a **Correlação** entre duas variáveis X e Y são respectivamente

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Definição 38 A *Esperança Condicional* de X na certeza de que $Y = y$ é

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$$

Definição 39 As variáveis X e Y são **independentes** quando a densidade conjunta é o produto das marginais, isto é,

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Corolário 0.2.12 X e Y são **independentes** se, e somente se, $f(x, y)$ é da forma $g(x)h(y)$ num retângulo da forma $[a, b] \times [c, d]$ (e 0 caso contrário; note que este retângulo pode ser "infinito").

Corolário 0.2.13 Se X e Y são **independentes**, $Cov(X, Y) = 0$ e $E(X|y) = E(X)$ para valores válidos de y (isto é, sempre que $f_Y(y) \neq 0$).

Definição 40 Os gráficos de $E[X|y]$ (uma função de y) e $E[Y|x]$ (uma função de x) são chamados de **curvas de regressão** (de X sobre y e vice-versa, respectivamente).

6.3 Funções de Variáveis Contínuas

Teorema 0.3 Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade $f_{X,Y}(x, y)$. Sejam $W = g(X, Y)$ e $Z = h(X, Y)$ duas novas variáveis. Então a densidade conjunta de W e Z é dada por

$$f_{W,Z}(w, z) = f_{X,Y}(x, y) \cdot |J|$$

onde J é o Jacobiano da inversa da Transformada $T : (x, y) \rightarrow (g(x, y), h(x, y))$:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix}$$

7 Somas e Médias de Variáveis Aleatórias

7.0 Motivação

Se motive... e continue.

7.1 Somas das Principais Distribuições Aleatórias

Definição 41 *Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma AAS (Amostragem Aleatória Simples) tomada a partir de uma distribuição de uma v.a. X . Definimos a **soma da amostra** e a **média amostral** respectivamente por*

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\bar{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Corolário 0.3.1 *Se $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ são independentes, então qualquer combinação linear não-nula $X = aX_1 + bX_2$, também terá distribuição normal, a saber, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu = a\mu_1 + b\mu_2$ e $\sigma^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$. Em suma:*

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \\ X_1 \text{ e } X_2 \text{ independentes} \end{array} \right\} \Rightarrow aX_1 + bX_2 \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$$

Teorema 0.4 *Se X_1, \dots, X_n são amostras independentes da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ então*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

7.2 Lei dos Grandes Números

Lema 0.5 *Se X_1, X_2, \dots, X_n são amostragens aleatórias simples de uma variável X com $E(X) = \mu$ e $\sigma(X) = \sigma$, então*

$$E(S_n) = n\mu; \quad \text{Var}(S_n) = n\sigma^2; \quad \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma$$

$$E(\bar{X}) = \mu; \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}; \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Teorema 0.6 (Lei dos Grandes Números, Bernoulli, 1713) *Suponha que X tem uma distribuição tal que $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ são finitos. Seja $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ onde X_1, X_2, \dots, X_n são provas independentes com a distribuição X . Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ fixo, temos:*

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. E também quando $n \rightarrow \infty$:

$$P(|\bar{X} - \mu| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

7.3 Teorema Central do Limite (TCL)

TCL para Distribuição Binomial

Teorema 0.7 (Aproximação Normal à Distribuição Binomial) *Seja $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{npq} \text{BinomialDen}([np + a\sqrt{npq}]; n, p) = \phi(a)$$

onde $\phi(\alpha) = \text{NormalDen}(\alpha)$ é a densidade da normal padronizada, isto é,

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2}$$

Teorema 0.8 (Aproximação Normal à Binomial) *Seja $X \sim \text{Bin}(n, p)$, e sejam a e b números inteiros fixos. Defina*

$$a^* = \frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}} \quad e \quad b^* = \frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq X \leq b) = \int_{a^*}^{b^*} \phi(t) dt$$

TCL (Caso Geral)

Teorema 0.9 (Teorema Central do Limite) *Sejam X_1, X_2, \dots, X_n amostras independentes de uma densidade com valor esperado μ e variância σ^2 . Seja*

$$X^* = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq X^* \leq b) = \int_a^b \phi(x) dx$$

isto é, a distribuição X^ se aproxima (em áreas) da distribuição normal padrão.*

7.4 Aplicação à Estatística: Distribuição Amostral de uma Proporção

Não tem nada aqui (só aplicações) pode seguir...

8 Outras Distribuições Amostrais

8.1 Estimação de Parâmetros

Definição 42 *Um **estimador** $\hat{\theta}$ de um parâmetro θ (da distribuição X , isto é, da população) é uma função das observações da amostra, isto é*

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Definição 43 *Um estimador $\hat{\theta}$ é **não-viesado** quando*

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

E o viés de um estimador é dado por

$$\text{Viés}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Definição 44 Um estimador $\hat{\theta}_1$ é dito **mais eficiente** do que $\hat{\theta}_2$ quando

$$Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$$

Definição 45 Um(a sequência de) estimador(es) $\hat{\theta}$ é dito **consistente** quando,
 $\forall \varepsilon > 0$ fixo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) = 0$$

Definição 46 Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Viés(\hat{\theta}) = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$$

então $\hat{\theta}$ é consistente.

8.2 Estimadores pontuais da variância

Média Conhecida

Suponha que a média $\mu = E(X)$ é conhecida, e queremos saber o valor de $\sigma^2 = Var(X)$, um possível estimador para $E((X - \mu)^2)$ é

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}$$

Este é um estimador não-viesado.

Média Desconhecida

Definição 47 A **variância da amostra** é um estimador

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}$$

Corolário 0.9.1 S^2 é um **estimador** não viesado de σ^2 , isto é

$$E(S^2) = \sigma^2$$

Corolário 0.9.2

$$\text{Var}(S^2) = \frac{(n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^2}{n(n-1)}$$

onde

$$\mu_4 = E((X - \mu)^4)$$

Corolário 0.9.3 Se $\mu_4 < \infty$, então S^2 e a variância verdadeira σ^2 são ambos estimadores consistentes de σ^2

8.3 Erro Quadrático Médio

Definição 48 O erro quadrático médio de um estimador T de um parâmetro θ é

$$EQM(T; \theta) = E((T - \theta)^2)$$

Corolário 0.9.4

$$EQM(T; \theta) = \text{Var}(T) + (\text{Viés}(T))^2$$

8.4 Distribuição Qui-quadrado

Lema 0.10 Se $Z \sim N(0, 1)$, então $\mu_4(Z) = 3$.

Lema 0.11 Se X é normal, então

$$\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \quad e \quad \text{Var}(\sigma^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

Definição 49 A distribuição $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ é também chamada de **qui-quadrado** com n graus de liberdade, cuja notação é

$$Y \sim X^2(n)$$

Corolário 0.11.1 A distribuição de S^2 é determinada por

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2(n-1)$$

Corolário 0.11.2 Se $Y \sim X^2(n)$, então $Z = \sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1}$ é aproximadamente $N(0, 1)$ (especialmente para n grande).

8.5 Distribuição t de Student

Definição 50 *Sejam $Z \sim N(0, 1)$ e $X \sim X^2(n)$ variáveis independentes. A distribuição da variável*

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$$

*É chamado de **t de Student com n graus de liberdade** (notação: $T \sim t(n)$)*

Corolário 0.11.3 *A densidade de $T \sim t(n)$ é*

$$f(t) = TDen(t; n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

Corolário 0.11.4 *Se $T \sim t(n)$, então*

$$E(T) = 0 \quad \forall n \geq 2$$

$$Var(T) = \frac{n}{n-2} \quad \forall n \geq 3$$

$$Med(T) = 0 \quad \forall n \geq 1$$

Nos demais casos não existe.

Teorema 0.12 *Seja X_1, X_2, \dots, X_n uma AAS da variável aleatória normal X . Então \bar{X} e S^2 são independentes, e*

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Dado em aula

Gerar variável aleatória

Teorema 0.13 *Seja F uma função de distribuição cumulativa continua e estritamente crescente.*

1. Se $U \sim \text{Unif}(0, 1)$ e $X = F^{-1}(U)$. Então X é uma variável aleatória com função de distribuição cumulada F .
2. Se X é uma variável aleatória com função de distribuição cumulativa F . Então $F(X) \sim \text{Unif}(0, 1)$.