

Resumo de Cálculo em uma Variável Complexa

Sumário

Números Complexos e propriedades (Week 1)

Exponencial, Limite e Derivada (Week 2)

Equações de Cauchy-Riemann (Week 3)

Números Complexos e propriedades (Week 1)

Proposition 1 As seguintes propriedades valem para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:

(a) $z + (w + t) = (z + w) + t$

(b) $z + w = w + z$

(c) $0 + z = z$

(d) $z + (-z) = 0$

(e) $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$

(f) $zw = wz$

(g) $1 \cdot z = z$

(h) $z \cdot z^{-1} = 1$ se $z \neq 0$

(i) $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$

Definição 1 Um número complexo z é da forma $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, que podemos escrever como um par de variáveis de \mathbb{R}^2 de forma que $z = (x, y)$.

Definição 2 (Soma e produto nos complexos) Seja $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$, $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, definimos soma e produto, para manter consistência com as propriedades acima, da seguinte forma

$$z + w = (x + a, y + b)$$

$$z \cdot w = (xa - yb, xb + ya)$$

Definição 3 (O Módulo) Seja $z = x + iy$ um complexo, então o **módulo** ("tamanho") de um número complexo é definido por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definição 4 (O Conjugado) Seja $z = x + iy$ um complexo, então o **conjugado** de um número complexo é definido por

$$\bar{z} = x - iy$$

Proposition 2 (Propriedades do conjugado) As seguintes propriedades valem para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:

(a) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ e $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$

(b) $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$ se $w \neq 0$

(c) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ e $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

(d) $z \in \mathbb{R}$ se e somente se $\bar{z} = z$

(e) z é imaginário puro se e somente se $\bar{z} = -z$

Definição 5 (A Forma Polar) Seja $z = x + iy$ com $z \neq 0$, então podemos escrever z como

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Com as seguintes propriedades

1. $r = |z|$
2. $\cos(\theta) = \frac{x}{|r|}$
3. $\sin(\theta) = \frac{y}{|x|}$

Teorema 1 Seja $n \in \mathbb{Z}_{++}$ e $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Então

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Exponencial, Limite e Derivada (Week 2)

Definição 6 (Função exponencial) Seja $z \in \mathbb{C}$ com $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$e^z := e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Definição 7 (Cosseno e seno complexo) Para $z \in \mathbb{C}$, vamos definir

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{-iz} - e^{iz})$$

Proposition 3 (Cos e sen) Seja $z = x + iz$, $x, y \in \mathbb{R}$. Então

$$(a) \cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

$$(b) \sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

$$(c) |\cos z|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$$

$$(d) |\sin z|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$$

Definição 8 (Função logaritmo) Seja $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ ¹

$$Ln(z) = \ln |z| + i\text{Arg}(z)$$

$$\ln(z) = \ln |z| + i\arg(z)$$

Definição 9 (Limite) Seja $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto de acumulação de $D \subset \mathbb{C}$ e seja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Dizemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

Quando para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$z \in D - \{z_0\} \text{ e } |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - l| < \varepsilon$$

Definição 10 (Continuidade) Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$. Dizemos que f é **contínua** em z_0 se para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$z \in D - \{z_0\} \text{ e } |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

¹Aqui: $\text{Arg}(z) = \theta$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ e $\arg(z) = \theta$

Definição 11 (Diferenciabilidade) *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$ ponto de acumulação de D . Se existe o limite*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

dizemos que f é diferenciável em z_0 (ou derivável) e denotamos o limite acima por $f'(z_0)$.

Definição 12 (Funções Analíticas) *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, f é dita **analítica** no domínio D se f é diferenciável em todos os pontos de D . E também é dita **analítica em um ponto** $z_0 \in D$ se f é analítica em uma vizinhança de z_0 .*

Equações de Cauchy-Riemann (Week 3)

Definição 13 (Cauchy-Riemann (ida)) *Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ definida e continua em alguma vizinhança de $z = x + iy$ e suponha f diferenciável em z . Então, as derivadas parciais de u e v existem e satisfazem²*

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

Corolário 1.1 *Se f é analítica em um domínio D , então as derivadas parciais de u e v existem em D e*

$$u_x(z) = v_y(z) \quad e \quad u_y(z) = -v_x(z)$$

$$f' = u_x + iv_x \quad e \quad f' = v_y - iu_y$$

Definição 14 (Volta do CR) *Se as funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de variáveis $x, y \in \mathbb{R}$ tiverem derivadas parciais contínuas satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em algum domínio D , então a função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D , com $z = x + iy$.*

²Chamadas aqui de **Equações de Cauchy-Riemann**