Fundação Getúlio Vargas
Cálculo em uma Variável Complexa
Wellington Silva

**Abstract of calculus in a complex variable**
**Due:** March 2, 2022

# Resumo de Cálculo em uma Variável Complexa

## Sumário

# Números Complexos e propriedades (Week 1)

**Proposition 1** *As seguintes propriedades valem para quaisquer $z, w, t \in \mathbb{C}$:*

*(a)* $z + (w + t) = (z + w) + t$

*(b)* $z + w = w + z$

*(c)* $0 + z = z$

*(d)* $z + (-z) = 0$

*(e)* $z \cdot (w \cdot t) = (z \cdot w) \cdot t$

*(f)* $zw = wz$

*(g)* $1 \cdot z = z$

*(h)* $z \cdot z^{-1} = 1$ *se* $z \neq 0$

*(i)* $z \cdot (w + t) = z \cdot w + z \cdot t$

**Definição 1** *Um número complexo $z$ é da forma $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, que podemos escrever como um par de variáveis de $\mathbb{R}^2$ de forma que $z = (x, y)$.*

**Definição 2 (Soma e produto nos complexos)** *Seja $z = (x, y)$ e $w = (a, b)$, $x, y, a, b, \in \mathbb{R}$, definimos soma e produto, para manter consistência com as propriedades acima, da seguinte forma*

$$z + w = (x + a, y + b)$$
$$z \cdot w = (xa - yb, xb + ya)$$

**Definição 3 (O Módulo)** *Seja $z = x + iy$ um complexo, então o* ***módulo*** *("tamanho") de um número complexo é definido por*

$$\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Definição 4 (O Conjugado)** *Seja $z = x + iy$ um complexo, então o* ***conjurado*** *de um número complexo é definido por*

$$\overline{z} = x - iy$$

**Proposition 2 (Propriedades do conjugado)** *As seguintes propriedades valem para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:*

*(a)* $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ *e* $\overline{zw} = \overline{zw}$

*(b)* $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$ *se* $w \neq 0$

*(c)* $z + \overline{z} = 2Re(z)$ *e* $z - \overline{z} = 2iImg(z)$

*(d)* $z \in \mathbb{R}$ *se e somente se* $\overline{z} = z$

*(e)* *$z$ é imaginário puro se e somente se* $\overline{z} = z$

**Definição 5 (A Forma Polar)** *Seja $z = x + iy$ com $z \neq 0$, então podemos escrever $z$ como*

$$z = r(cos(\theta) + sen(\theta))$$

*Com as seguintes propriedades*

1. $r = \mid z \mid$
2. $cos(\theta) = \frac{x}{|r|}$
3. $sen(\theta) = \frac{y}{|x|}$

**Teorema 1** *Seja* $n \in \mathbb{Z}_{++}$ *e* $z = r(cos(\theta) + isen(\theta))$. *Então*

$$z^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

# Exponencial, Limite e Derivada (Week 2)

**Definição 6 (Função exponencial)** *Seja* $z \in \mathbb{C}$ *com* $z = x + iy, \ x, y \in \mathbb{R}$, *então*

$$e^z := e^x(cos(y) + isen(y))$$

**Definição 7 (Cosseno e seno complexo)** *Para* $z \in \mathbb{C}$, *vamos definir*

$$cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}$$

$$sen(z) = \frac{1}{2i}(e^{-iz} - e^{-iz}$$

**Proposition 3 (Cos e sen)** *Seja* $z = x + iz, \ x, y \in \mathbb{R}$. *Então*

(a) $cos(z) = cos(x)cosh(y) - isen(x)senh(y)$

(b) $sen(z) = sen(x)cosh(y) + icos(x)senh(y)$

(c) $\mid cosz \mid^2 = cos^2(x) + senh^2(y)$

(d) $\mid senz \mid^2 = sen^2(x) + senh^2(y)$

**Definição 8 (Função logaritmo)** *Seja* $z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0$

$$Ln(z) = ln \mid z \mid + iArg(z)$$ [1]

$$ln(z) = ln \mid z \mid + iarg(z)$$ [2]

**Definição 9 (Limite)** *Seja* $z_0 \in \mathbb{C}$ *um ponto de acumulação de* $D \subset \mathbb{C}$ *e seja* $f : D \to \mathbb{C}$. *Dizemos que*

$$lim_{z \to z_0} f(z) = l$$

*Quando para todo* $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que*

$$z \in D - \{z_0\} \ e \ \mid z - z_0 \mid < \delta \implies \mid f(z) - l \mid < \varepsilon$$

**Definição 10 (Continuidade)** *Seja* $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $z_0 \in D$. *Dizemos que* $f$ *é* ***contínua*** *em* $z_0$ *se para todo* $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *tal que*

$$z \in D - \{z_0\} \ e \ \mid z - z_0 \mid < \delta \implies \mid f(z) - f(z_0) \mid < \varepsilon$$

**Definição 11 (Diferencíabilidade)** *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$ ponto de acumulação de $D$. Se existe o limite*

$$lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*dizemos que $f$ é diferenciável em $z_0$ (ou derivável) e denotamos o limite acima por $f'(z_0)$.*

**Definição 12 (Funções Analiticas)** *Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f$ é dita* ***analítica*** *no domínio $D$ se $f$ é diferenciável em todos os pontos de $D$. E também é dita* ***analítica em um ponto*** *$z_0 \in D$ se $f$ é analítica em uma vizinhança de $z_0$.*