

## Resumo de Curvas e Superfícies

### Sumário

Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco

Difeomorfismo e Reparametrização

Ângulo e Curvatura

Diedro de Frenet e Teorema Fundamental

Curvas Regulares no  $\mathbb{R}^3$

## Curvas, Reta tangente e Comprimento de arco

**Definição 1** Uma **curva parametrizada** em  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sendo  $I \subset \mathbb{R}$  aberto.

**Definição 2** O conjunto imagem de  $\gamma$ ,  $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$  é dito o **traço** de  $\gamma$ .

**Definição 3 (Vetor tangente)** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  com  $\gamma_i(t)$  diferenciáveis  $\forall i, i = 1 \dots n$ , o vetor

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

é chamado **vetor tangente** de  $\gamma$  em  $t$

**Definição 4 (Curvas regulares)** Seja  $\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva parametrizada diferenciável. Diz-se que  $\gamma$  é **regular**, quando  $\gamma'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$ .

**Definição 5 (Reta tangente)** Seja  $\gamma$  uma curva regular, então a **reta tangente** de  $\gamma$  no ponto  $t_0 \in I$  é aquela que contém o ponto  $\gamma(t_0)$  e é paralela ao vetor  $\gamma'(t_0)$ , ou seja

$$r(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \gamma'(t_0)$$

**Definição 6 (Comprimento de arco)** O **comprimento de arco** de  $\alpha$ , de  $\alpha(a)$  até  $\alpha(b)$  definido por  $L_a^b(\alpha)$  é

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

**Definição 7** Se  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma c.p.<sup>1</sup>, sua **velocidade no ponto**  $\gamma(t)$  é  $\|\gamma'(t)\|$ , e a curva é dita com **velocidade unitária** se  $\|\gamma'(t)\| = 1$ ,  $\forall t \in (a, b)$  e é parametrizada por comprimento de arco.

**Teorema 1** Toda **curva regular** pode ser reparametrizada por **comprimento de arco**.

## Difeomorfismo e Reparametrização

**Definição 8 (Difeomorfismo)** Dado os conjuntos abertos  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$ . Uma bijeção  $f : U \rightarrow V$  é dita **difeomorfismo** quando  $f$  e  $f^{-1}$  são diferenciáveis.

**Definição 9 (Reparametrização)** A curva  $\beta(s)$  é dita uma **reparametrização** de  $\alpha(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular quando dados  $I_0 \subset \mathbb{R}$  e  $\phi : I_0 \rightarrow I$  difeomorfismo. Temos  $\beta(S) = \alpha(\phi(S))$ .

**Definição 10** Seja  $\alpha(t) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\beta(S) : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Então

- $\beta(S)$  é uma reparametrização positiva de  $\alpha$  se  $\phi'(S) > 0$ ,  $\forall S$
- $\beta(S)$  é uma reparametrização negativa de  $\alpha$  se  $\phi'(S) < 0$ ,  $\forall S$

**Definição 11** Qualquer reparametrização de uma c.p. regular é regular (i.e. difeomorfismos preservam regularidade).

**Proposições 1** A função  $L$  (comprimento de arco) é um difeomorfismo.

**Definição 12** Toda curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  admite reparametrização por comprimento de arco.

---

<sup>1</sup>curva parametrizada

## Ângulo e Curvatura

**Definição 13 (Função Ângulo)** Dada uma curva diferenciável  $\gamma : I \rightarrow S^1$ , onde  $S^1$  é o círculo de  $\mathbb{R}^2$  com centro na origem e raio 1, diz-se que  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **função-ângulo** de  $\gamma$ , quando

$$\gamma(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), \forall s \in I$$

**Definição 14 (Curvatura)** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  unit-speed. Designando-se o vetor tangente de  $\alpha$  em  $s \in I$  por  $T(s)$ , podemos afirmar que a curva  $T(s) : I \rightarrow S^1$  admite função ângulo

$$T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))), \forall s \in I$$

Daí a curvatura de  $\alpha$  em  $s \in I$  é definida por

$$K(s) = \theta'(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

## Diedro de Frenet e Teorema Fundamental

**Teorema 2 (Função-ângulo diferenciável)** Seja  $\gamma : I \rightarrow S^1$  uma curva diferenciável. Então,  $\gamma$  admite uma função ângulo  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ , a qual é diferenciável. Além disso, toda função-ângulo de  $\gamma$ , a qual é diferenciável, difere de  $\theta$  por uma constante.

**Corolário 2.1** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  e seja  $\beta(s) = \alpha(\theta(s))$  a parametrização por comprimento de arco de  $\alpha$ , a curvatura de  $\alpha$  em  $t \in I$  é  $K_\alpha(t)$ , e, por definição é a curvatura de  $\beta$  em  $\theta^{-1}(t)$ , isto é

$$K_\alpha := K_\beta(\theta^{-1}(t))$$

**Definição 15 (Diedro de Frenet)** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Dado  $s \in I$ , o vetor  $N(s) = JT(s)$  é dito o vetor normal de  $\alpha$  em  $s \in I$ . A base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$  formado por  $T(s)$  e  $N(s)$  é chamada **Diedro de Frenet** em  $s$ .

**Definição 16 (Movimento Rígido)**  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita **movimento rígido**, quando preserva distancia, isto é, para quaisquer  $p, q \in \mathbb{R}^2$

$$\|\Phi(p) - \Phi(q)\| = \|p - q\|$$

**Teorema 3** Seja  $\Phi : A + p_0$  um movimento rígido direto de  $\mathbb{R}^2$  e  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Então,  $\beta = \Phi \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva regular de  $\mathbb{R}^2$ , parametrizada por comprimento de arco, tal que

$$K_\alpha(s) = K_\beta(s) \forall s \in I$$

**Teorema 4 (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas Planas)** Sejam  $I$  um intervalo aberto da reta e  $K : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável.

1. Então existe uma curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , unit-speed, cuja função curvatura coincide com  $K$ .
2. Além disso, para toda  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , unit-speed, que cumpre  $K_\beta = K$ , existe um movimento rígido  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha = \Phi \circ \beta$

## Curvas Regulares no $\mathbb{R}^3$

**Definição 17 (Curvas no  $\mathbb{R}^3$ )** As curvas diferenciáveis no  $\mathbb{R}^3$ , são definidas de forma análoga ao  $\mathbb{R}^2$ , isto é, uma **curva no  $\mathbb{R}^3$**  é uma aplicação diferenciável de um intervalo  $I$  (aberto) em  $\mathbb{R}^3$ , da forma

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I$$

Onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são diferenciáveis, e a curva é dita **regular** quando

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0), \quad t \in I$$

**Proposições 2** De forma análoga vale para  $\mathbb{R}^3$  que

- Comprimento de arco é invariável por reparametrização.
- Toda curva regular admite reparametrização unit-speed ( $\|\alpha'(t)\| = 1$ ).

**Definição 18 (Curvatura no  $\mathbb{R}^3$ )** Dada uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regular parametrizada por comprimento de arco, a **curvatura** de  $\alpha$  em  $s \in I$  é definida como

$$K_\alpha(s) = \|\alpha''(s)\|$$

**Definição 19 (2-regular)** Seja uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  unit-speed, e  $K_\alpha(s) > 0, \forall s$ , ou seja,  $\alpha''(s) \neq 0, \forall s$ . Então dizemos que  $\alpha$  é **2-regular**.

**Definição 20 (Triedro de Frenet)** Para  $\alpha$  2-regular, seja  $T(s) = \alpha'(s)$  (vetor tangente),  $N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$  (vetor normal) e  $B(s) = T(s) \times N(s)$  (vetor binormal). Desse modo estabelecemos um referencial chamado **Triedro de Frenet** formado pelos vetores  $\{T(s), N(s), B(s)\}$ , onde,

$$\begin{cases} B(s) = T(s) \times N(s) \\ N(s) = B(s) \times T(s) \\ T(s) = N(s) \times B(s) \end{cases}$$