Notas de aulas pelos slides (para A2)

- Distribuição de média e variância amostrais

• Se $X_1,\dots,X_n \sim \text{Normal}(\mu,\sigma^2)$, então

$$\bar{X}_n \sim \text{Normal}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$S_n^2 \sim \text{Gama}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2\sigma^2}\right)$$

• Seja $Y \sim$ Qui-quadrado(m) e $Z \sim$ Normal$(0,1)$ e

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{m}}}$$

então X é uma t de Student com n graus de liberdade, e

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}, \ x\in(-\infty,\infty)$$

• Se $\hat{\sigma}' = \sqrt{\frac{\left(\sum(X_i-\bar{X}_n)^2\right)^2}{n-1}}$ (estimador), então

$$\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n-\mu)}{\hat{\sigma}'} \sim \text{Student}(n-1)$$

- Intervalos de confiança

• Seja $\mathbf{X} = \{X_1,\dots,X_n\}$, cada uma com p.d.f. $f(x|\theta)$, e considere $g(\theta)$. Sejam $A(\mathbf{X})$ e $B(\mathbf{X})$ estatísticas tais que

$$P\{A(\mathbf{X}) < g(\theta) < B(\mathbf{X})\} \geq \gamma$$

Então $I(\mathbf{X}) = (A(\mathbf{X}), B(\mathbf{X}))$ é um intervalo de confiança de $100.\gamma\,\%$

• Definimos intervalos de confiança unilateral, pondo $A(\mathbf{X}) = -\infty$ ou $B(\mathbf{X}) = \infty$ na definição acima.

• Seja $\mathbf{X} = \{X_1,\dots,X_n\}$, cada uma com p.d.f $f(x|\theta)$ e $V(\mathbf{X},\theta)$ uma v.a. com mesma distribuição para todo $\theta\in\Omega$.
Diz-se que $V(X,\theta)$ é uma quantidade pivotal.

• Seja $\mathbf{X} = \{X_1,\dots,X_n\}$, tome $0<\gamma<1$ e $\gamma_1<\gamma_2$ de modo que $\gamma_2-\gamma_1=\gamma$, e seguindo certas condições

$$A(\mathbf{X}) = r(G^{-1}(\gamma_1),\mathbf{X})$$
$$B(\mathbf{X}) = r(G^{-1}(\gamma_2),\mathbf{X})$$

são os limites de um intervalo de confiança $100.\gamma\,\%$ para $g(\theta)$.

- Testes de hipóteses

• Seja Ω um espaço de parâmetros e defina $\Omega_0, \Omega_1 \subset \Omega$ de modo que $\Omega_0\cup\Omega_1=\Omega$ e $\Omega_0\cap\Omega_1=\emptyset$ definimos

$$H_0 := \theta\in\Omega_0$$
$$H_1 := \theta\in\Omega_1$$

H_0 é a hipótese nula e H_1 é a hipótese alternativa. Se H_0, dizemos que rejeitamos a hipótese nula. Por outro lado, se $\theta\in\Omega_0$ dizemos que não rejeitamos ou falhamos em rejeitar H_0.

• Hipótese simples e hipótese compostas.

• Uma hipótese da forma $H_0: \theta\leq\theta_0$ (ou $\theta\geq\theta_0$) é dita unilateral, enquanto hipóteses da forma $H_0: \theta\neq\theta_0$ são ditas bilaterais.

• O conjunto

$$S_1 := \{x : |\bar{X}_n-\mu_0| \geq c\},$$

é chamado de região crítica do teste.

• Seja δ um procedimento de aceitação / rejeição. A função poder é definida

$$\pi(\theta|\delta) := P(\mathbf{X}\in S_1|\theta) = P(T\in R|\theta), \ \theta\in\Omega$$

• Tipos de erros

Nome	Erro cometido
Erro tipo I	Rejeitar H_0 quando ela é **verdadeira**.
Erro tipo II	Falhar em rejeitar H_0 quando ela é **falsa**.

• Dizemos que um teste, δ, tem tamanho ou nível de significância $\alpha(\delta)$, com

$$\alpha(\delta) := \sup_{\theta\in\Omega_0}\pi(\theta|\delta)$$

• Para cada t, seja δ_t o teste que rejeita H_0 se $T\geq t$. Então, quando $T=t$, o p-valor vale

$$p(t) := \sup_{\theta\in\Omega_0}\pi(\theta|\delta_t) = \sup_{\theta\in\Omega_0}P(T\geq t|\theta),$$

ou seja, o p-valor é o tamanho do teste δ_t.