Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

# Resumo de Analise na Reta - Parte 2

Rio de Janeiro
2020

"Provas ficam a cargo do leitor"

# 1 Funções Contínuas

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida no intervalo I, se $c \in I$, dizemos que $f$ é contínua em c quando $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. A função é contínua em I quando for contínua em todos os pontos.

**Teorema 1.1** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então $f$ é limitada.*

**Teorema 1.2** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, $A = \inf\{f(t); t \in [a, b]\}$ e $B = \sup\{f(t); t \in [a, b]\}$. Existem então $c, d \in [a, b]$ de modo que $f(c) = A$ e $f(d) = B$.*

**Definição 1** *Uma partição $\mathcal{B}$ de $[a, b]$ é uma sequência finita de pontos $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{k-1} < a_k = b$. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos a partição $\mathcal{B}_n$ formada por intervalos de mesmo comprimento $\dfrac{b-a}{n}$.*

**Teorema 1.3** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\varepsilon > 0$ qualquer. Então $\exists n \in \mathbb{N}$ de modo que se $x$, $y$ estão num certo intervalo de $\mathcal{P}_n$ temos que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.*

Dizemos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua é uniformemente contínua quando, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, $\exists\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ então $f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

## 1.1 T.V.I.

**Lema 1.4** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e $c \in I$. Se $f(c) > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que se $|x - c| < \delta$ e $x \in I$ então $f(x) > 0$.*

**Teorema 1.5** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Tome $L \in (f(a), f(b)), \exists c \in (a, b)$ de modo que $f(c) = L$.*

**Corolário 1.5.1** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Existe então $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

**Corolário 1.5.2** *Tome $g(x) = x^n$, com $x \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$. Para qualquer $L > 0, \exists c > 0$ de modo que $g(c) = L$, ou seja, $c^n = L$ (c é raiz n-ésima de L).*

## 2 Derivadas e Integrais

**Definição 2** *Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em $a \in I$ quando existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, neste caso $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$*

obs.: se $f$ é derivável em $a$, então $f$ é contínua em $a$. E a inclinação da função no ponto $a$ é dada por:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Propriedades Operacionais:

1. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, $f$ e $g$ deriváveis em $c$ então $(f+g)$ é derivável em $c$ e $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ e $f.g$ é derivável em $c$ e $(f.g)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$.

2. Suponhamos $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$ se $x \in I$ e $g$ é derivável em $c$ então $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ é derivável em $c$ e $f'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g(c)^2}$.

3. Seja $f : (a,b) \to (A,B)$ função injetiva e sobrejetiva, e denotaremos por $g : (A,B) \to (a,b)$ sua inversa. Se f é derivável e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, então g é derivável em $(A,B)$ e $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$.

4. (A Regra da Cadeia) Sejam $f : I \to j$ e $g : j \to \mathbb{R}$ deriváveis, I e j intervalos abertos e $f(I) \subset j$. Definimos a composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ como $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. Então $(g \circ f)$ é derivável e $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$.

### 2.1 Relações Com Máximos e Mínimos de Funções

Consideremos uma função $f : I \to \mathbb{R}$ derivável num ponto interior $c \in I$. Suponhamos que exista $\delta > 0$ de modo que $(c-\delta, c+\delta) \subset I$ e $f(x) \leq f(c)$. Sempre que $x \in (c-\delta, c+\delta)$ então diremos que c é um ponto de máximo local de $f$ (análogo para o mínimo).

**Teorema 2.1** *Se $c \in I$ é ponto de máximo local, então $f'(c) = 0$ (análogo para o mínimo).*

**Teorema 2.2 (Rolle)** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua tal que* $f$ *seja derivável em* $(a, b)$*. Caso* $f(a) = f(b)$*, então* $\exists c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$

**Teorema 2.3 (Valor Médio)** *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* $(a, b)$*.* $\exists c \in (a, b)$ *de modo que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$*.*

**Corolário 2.3.1** *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *função localmente constante. Então* $f$ *é constante.*

**Corolário 2.3.2 (Monotonicidade)** *Seja* $g : I \to \mathbb{R}$ *uma função derivável.*

- *se* $g'(x) \geq 0$ *para todo* $x \in I$*, então* $g$ *é crescente.*

  *se* $g'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$*, então* $g$ *é estritamente crescente.*

- *se* $g'(x) \leq 0$ *para todo* $x \in I$*, então* $g$ *é decrescente.*

  *se* $g'(x) < 0$ *para todo* $x \in I$*, então* $g$ *é estritamente decrescente.*

## 2.2 Áreas e Derivadas

Vamos usar a noção intuitiva de área para regiões associada ao gráfico de uma função contínua e positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. A região em questão está limitada pelo eixo horizontal, o gráfico de $f$ e as verticais pelos pontos $(a, 0)$ e $(x, 0)$ denotamos por $A(x)$ sua área.

**Definição 3** $A(x)$ *é derivável e* $A'(x) = f(x)$*.(a formulação rigorosa será apresentada a frente)*

**Definição 4 (Função logaritmo)** *Consideremos* $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *,* $g(x) = \dfrac{1}{x}$*, e tomemos a região delimitada pelo gráfico de* $g$*, o eixo horizontal e os verticais por* $(1, 0)$ *e* $(x, 0)$*, seja* $A(x)$ *sua área. Se* $x \geq 1$*,* $\log x := A(x)$*, se* $0 < x \leq 1$*,* $\log x := -A(x)$

**Definição 5 (Função exponencial)** *Seja* $a > 0$*, então* $a^x := e^{x \log a}$

## 2.3 Derivadas Sucessivas

Se a função $f$ é derivável k vezes podemos escrever a i-ésima derivada de $f$ em x como $f^{(i)}(x)$.

**Teorema 2.4** *As funções apresentadas (polinômios, funções trigonométricas, racionais, logaritmo, exponencial) são infinitamente deriváveis em seu domínio de definição.*

**Lema 2.5** *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável e duas vezes derivável em $c \in (a, b)$. Suponhamos $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ ($f''(c) < 0$).Então c é ponto de mínimo local (máximo local).*

## 2.4 Convexidade de Função

**Definição 6** *Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa para cima quando para quaisquer $a < b \in I$ temos que $f(x) < f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ para todo $x \in (a, b)$. E $f$ é estritamente convexa para baixo quando para quaisquer $a < b \in I$ temos que $f(x) > f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ para todo $x \in (a, b)$.*

**Teorema 2.6** *Suponhamos que $f : I \to \mathbb{R}$ seja duas vezes derivável. Se $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) para todo $x \in I$ então $f$ é estritamente convexa para cima (estritamente convexa para baixo).*

**Lema 2.7** *Seja $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Suponhamos $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ e $\varphi''(x) > 0$ $\forall x \in [a, b]$. Então $\varphi(x) < 0$ $\forall x \in (a, b)$.*

# 3 Integral de Riemann

Consideremos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e uma partição $\mathcal{P} : a = t_0 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$ do intervalo $[a, b], 1 \leq i \leq n$.

**Definição 7** *A **soma inferior de f relativa à partição** $\mathcal{P}$ é $s(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (\inf\{f(t);\ t_{i-1} \leq t \leq t_i\})(t_i - t_{i-1})$ e a **soma superior de f relativa à partição** $\mathcal{P}$ é $S(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (\sup\{f(t);\ t_{i-1} \leq t \leq t_i\})(t_i - t_{i-1})$*

Temos $s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})$

**Definição 8** *$\exists \underline{\int_a^b} f := \sup\{s(f,\mathcal{P});\ \mathcal{P} partição\}$ e $\exists \overline{\int_a^b} f := \inf\{S(f,\mathcal{P});\ \mathcal{P} partição\}$ **integral inferior** de $f$ em $[a,b]$ e **integral superior** de $f$ em $[a,b]$, respectivamente.*

**Lema 3.1** $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

**Definição 9** *$f$ é **integrável** quando $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ o valor comum é denotado por $\int_a^b f$ e convencionamos $\int_a^b f := -\int_b^a f$.*

**Teorema 3.2** *Funções contínuas são integráveis.*

## 3.1 Teorema Fundamental do Cálculo

**Lema 3.3** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. $\forall x \in (a,b), f|_{[a,b]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis. Além disso, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

**Teorema 3.4 (Teorema Fundamental do Cálculo)** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e $F(x) := \int_a^x f$. Se $f$ é contínua em $c \in [a,b]$, então $F$ é derivável em $c$ e $F'(c) = f(c)$.*

**Definição 10** *$G : [a,b] \to \mathbb{R}$ é **primitiva** de $g$ quando $G'(x) = g(x)$ em $[a,b]$.*

**Lema 3.5** *Se $f$ é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, então $f$ possui primitiva $F(x) = \int_a^b f$. Tomando $\overline{F}$ qualquer outra primitiva (acrescentando uma constante), temos que $\overline{F}(x) = F(x) + \overline{F}(0)$, e portanto $\overline{F}(b) - \overline{F}(a) = \int_a^b f$.*

## 3.2 Operações com Integrais

Proposições: Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis.

- $f+g$ e $f \cdot g$ são integráveis e $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Se $|f(x)| \geq k > 0\ \forall x \in [a,b]$ e algum $k > 0$, então $\dfrac{1}{f(x)}$ é integrável.

- $|f|$ é integrável e $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$

**Definição 11** *Quando* $\int_0^\infty |f(x)|dx$ *(ou* $\int_a^b |f(x)|dx$*) existe, dizemos que a integral é* ***absolutamente convergente****. E a integral também é* ***convergente****.*

### 3.3 Fórmula de Taylor (versão infinitesimal)

Consideremos $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ função $n-1$ vezes derivável em $(a,b)$ e n vezes derivável em $c \in (a,b)$.

**Definição 12** *Definimos o* ***polinômio de Taylor de f de ordem n*** *centrado em c como*

$$T^n_{f,c}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j$$

**Teorema 3.6** *Seja* $r(x) := f(x) - T^n_{f,c}(x)$*. Então* $\lim_{x\to c} \dfrac{r(x)}{(x-c)^n} = 0$

### 3.4 Fórmula de Taylor, versão integral

**Teorema 3.7** *Seja* $f : [a,b]\mathbb{R}n+1$ *vezes derivável, e* $c \in [a,b]$*. Então* $f(x) = T^n_{f,c}(x) + r_n(x)$*, onde* $r_n(x) = \dfrac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$*.*

**Corolário 3.7.1** *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}n$ *vezes derivável no ponto* $c \in [a,b]$*. Se* $p(x)$ *é polinômio de grau n t.q.* $f(x) = p(x) + S(x)$ *com* $\lim_{x\to c} \dfrac{S(x)}{(x-c)^n} = 0$*, então* $T^n_{f,c}(x) = p(x)$*.*

## 4 Séries

**Definição 13** *Consideremos a sequência* $(a_j)$ *e formemos a nova sequência* $s_n := \sum_{j=1}^n a_j$ *ela se denomina* ***série****, e caso seja convergente, escrevemos* $\sum_{j=1}^\infty a_j := \lim_{n\to\infty} s_n$*.*

**Teorema 4.1** *Se* $\sum |a_j|$ *é convergente então* $\sum a_j$ *é também convergente.*

**Definição 14** $\sum a_n$ ***converge absolutamente*** *quando* $\sum |a_n|$ *for convergente.*

**Teorema 4.2 (Critério de d'Alewbert)** *Se existe* $0 \leq c \leq 1$ *t.q.* $|a_{n+1}| \leq c|a_n|$ *a partir de algum* $n_0$*, então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*

## 4.1 Séries de Potências

Vamos tratar o caso particular de séries do tipo $\sum a_n(x-c)^n$, diremos que está é uma **série de potências** centrada em c. Queremos encontrar valores de x para os quais a série converge, no caso $c = 0$ observe que $\sum a_n x^n$ é sempre convergente em 0.

**Teorema 4.3** *Suponhamos que* $\exists x_0 \neq 0$ *t.q.* $\sum a_n x_0^n$ *seja convergente.* $\exists R > 0$ *de modo que* $\sum a_n x^n$ *converge em* $(-R, R)$ *e diverge em* $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ *(podendo sem* $R = \infty$*).*

**Teorema 4.4** *Seja* $[-b, b] \subset (-R, R)$*. Dado* $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ *t. q.* $n_0 > n \Rightarrow |\sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j x^j| < \varepsilon$ *para* $x \in [-b.b]$*.*

**Definição 15** *Tomando* $s(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, s_m(x) := \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ *para* $x \in (-R, R)$*, temos que* $\forall x \in (-R, R) : \lim_{m\to\infty} s_m(x) = s(x)$*, então a série* $s_m$ ***converge uniformemente para s*** *em um intervalo* $[-b, b] \subset (-R, R)$*, ou seja, dado* $\varepsilon > 0$ *qualquer,* $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $|s(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ *se* $m > N$ *e* $x \in [-b, b]$ *(intervalo limitado fechado de* $(-R, R)$*.*

**Teorema 4.5** *Da definição 15, temos que,* $s(x)$ *é contínua em* $(-R, R)$*.*

**Teorema 4.6 (Integração termo a termo)** $\int_0^x s(t)dt = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^x a_j t^j dt$ *para* $x \in (-R, R)$*.*

**Teorema 4.7 (Derivação termo a termo)** $s'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$ *para* $x \in (-R, R)$*.*

**Definição 16 (geral)** *Sejam* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *sequência de função e* $f : I \to \mathbb{R}$*, dizemos que* $f_n$ ***converge uniformemente*** *para* $f$ *quando dado* $\varepsilon > 0$ *qualquer,* $\exists N \in \mathbb{N}$ *de modo que* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *se* $n > N$ *e para todo* $x \in I$*.*

Temos os seguintes teoremas correspondentes ao caso das séries. Suponhamos então $f_n \to f$ em $I$.

**Teorema 4.8** *Se $f_n$ é contínua $\forall n \in \mathbb{N}$, então $f$ é contínua.*

**Teorema 4.9** *Fixemos $a \in I, f_n$ contínua $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $\int_a^x f_n(t)dt \to \int_a^x f(t)dt$ $\forall x \in I$.*

**Teorema 4.10** *Suponhamos $f_n$ deriváveis, e que $f_n'$ sejam contínuas. Se $f_n' \to g$ converge uniformemente, então $g = f'$, isto é, $\dfrac{d}{dx}f_n(x) \to \dfrac{d}{dx}f(X)$.*