Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de Analise na Reta - Parte 2

Rio de Janeiro
2020

"Provas ficam a cargo do leitor"

1 Funções Contínuas

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida no intervalo I, se $c \in I$, dizemos que f é contínua em c quando $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. A função é contínua em I quando for contínua em todos os pontos.

Teorema 1.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então f é limitada.*

Teorema 1.2 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, $A = \inf \{f(t); t \in [a, b]\}$ e $B = \sup \{f(t); t \in [a, b]\}$. Existem então $c, d \in [a, b]$ de modo que $f(c) = A$ e $f(d) = B$.*

Definição 1 *Uma partição $\mathcal{B}$ de $[a, b]$ é uma sequência finita de pontos $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{k-1} < a_k = b$. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos a partição $\mathcal{B}_n$ formada por intervalos de mesmo comprimento $\dfrac{b-a}{n}$.*

Teorema 1.3 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\varepsilon > 0$ qualquer. Então $\exists n \in \mathbb{N}$ de modo que se x, y estão num certo intervalo de $\mathcal{P}_n$ temos que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.*

Dizemos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua é uniformemente contínua quando, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, $\exists\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ então $f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

1.1 T.V.I.

Lema 1.4 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e $c \in I$. Se $f(c) > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que se $|x - c| < \delta$ e $x \in I$ então $f(x) > 0$.*

Teorema 1.5 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Tome $L \in (f(a), f(b)), \exists c \in (a, b)$ de modo que $f(c) = L$.*

Corolário 1.5.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Existe então $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Corolário 1.5.2 *Tome $g(x) = x^n$, com $x \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$. Para qualquer $L > 0, \exists c > 0$ de modo que $g(c) = L$, ou seja, $c^n = L$ (c é raiz n-ésima de L).*

2 Derivadas e Integrais

Definição 2 *Dizemos que* $f : I \to \mathbb{R}$ *é derivável em* $a \in I$ *quando existe* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$*, neste caso* $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

obs.: se f é derivável em a, então f é contínua em a. E a inclinação da função no ponto a é dada por:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Propriedades Operacionais:

1. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, f e g deriváveis em c então $(f + g)$ é derivável em c e $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$ e $f.g$ é derivável em c e $(f.g)'(c) = f'(c)g(c) + g'(c)f(c)$

2. Suponhamos $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$ se $x \in I$ e g é derivável em c então $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ é derivável em c e $f'(x) = \dfrac{-g'(x)}{g(c)^2}$

3. Suponhamos f contínua e injetiva, $f(I) = j$ então $\exists \mathrm{f}^{-1} : j \to I$ e f^{-1} é contínua. Se $f^{-1} \neq 0$ e f^{-1} é derivável em $d = f(c)$ e $f^{-1\prime}(f(c)) = \dfrac{1}{f'(c)}$

4. (A Regra da Cadeia) Sejam $f : I \to j$ e $g : j \to \mathbb{R}$ deriváveis, I e j intervalos abertos e $f(I) \subset j$. Definimos a composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ como $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. Então $(g \circ f)$ é derivável e $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$.

2.1 Relações Com Máximos e Mínimos de Funções

Consideremos uma função $f : I \to \mathbb{R}$ derivável num ponto interior $c \in I$. Suponhamos que exista $\delta > 0$ de modo que $(c - \delta, c + \delta) \subset I$ e $f(x) \leq f(c)$. Sempre que $x \in (c - \delta, c + \delta)$ então diremos que c é um ponto de máximo local de f (análogo para o mínimo).

Teorema 2.1 *Se* $c \in I$ *é ponto de máximo local, então* $f'(c) = 0$ *(análogo para o mínimo).*

Teorema 2.2 (Rolle) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que f seja derivável em (a, b). Caso $f(a) = f(b)$, então $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$*

Teorema 2.3 (Valor Médio) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e derivável em (a, b). $\exists c \in (a, b)$ de modo que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Corolário 2.3.1 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ função localmente constante. Então f é constante.*

Corolário 2.3.2 (Monotonicidade) *Seja $g : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável.*

- *se $g'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, então g é crescente.*

  se $g'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então g é estritamente crescente.

- *se $g'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, então g é decrescente.*

  se $g'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então g é estritamente decrescente.

2.2 Áreas e Derivadas

Vamos usar a noção intuitiva de área para regiões associada ao gráfico de uma função contínua e positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. A região em questão está limitada pelo eixo horizontal, o gráfico de f e as verticais pelos pontos $(a, 0)$ e $(x, 0)$ denotamos por $A(x)$ sua área.

Definição 3 *$A(x)$ é derivável e $A'(x) = f(x)$.(a formulação rigorosa será apresentada a frente)*

Definição 4 (Função logaritmo) *Consideremos $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, e tomemos a região delimitada pelo gráfico de g, o eixo horizontal e os verticais por $(1, 0)$ e $(x, 0)$, seja $A(x)$ sua área. Se $x \geq 1$, $\log x := A(x)$, se $0 < x \leq 1$, $\log x := -A(x)$*

Definição 5 (Função exponencial) *Seja $a > 0$, então $a^x := e^{x \log a}$*

2.3 Derivadas Sucessivas

Se a função f é derivável k vezes podemos escrever a i-ésima derivada de f em x como $f^{(i)}(x)$.

Teorema 2.4 *As funções apresentadas (polinômios, funções trigonométricas, racionais, logaritmo, exponencial) são infinitamente deriváveis em seu domínio de definição.*

Lema 2.5 *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável e duas vezes derivável em $c \in (a, b)$. Suponhamos $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ ($f''(c) < 0$).Então c é ponto de mínimo local (máximo local).*

2.4 Convexidade de Função

Definição 6 *Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa para cima quando para quaisquer $a < b \in I$ temos que $f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ para todo $x \in (a, b)$. E f é estritamente convexa para baixo quando para quaisquer $a < b \in I$ temos que $f(x) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ para todo $x \in (a, b)$.*

Teorema 2.6 *Suponhamos que $f : I \to \mathbb{R}$ seja duas vezes derivável. Se $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) para todo $x \in I$ então f é estritamente convexa para cima (estritamente convexa para baixo).*

Lema 2.7 *Seja $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Suponhamos $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ e $\varphi''(x) > 0$ $\forall x \in [a, b]$. Então $\varphi(x) < 0$ $\forall x \in (a, b)$.*

3 Integral de Riemann

Consideremos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e uma partição $\mathcal{P} : a = t_0 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < \cdots < t_n = b$ do intervalo $[a, b], 1 \leq i \leq n$.

Definição 7 *A **soma inferior de f relativa à partição** $\mathcal{P}$ é $s(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (\inf\{f(t);\ t_{i-1} \leq t \leq t_i\})(t_i - t_{i-1})$ e a **soma superior de f relativa à partição** $\mathcal{P}$ é $S(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} (\sup\{f(t);\ t_{i-1} \leq t \leq t_i\})(t_i - t_{i-1})$*

Temos $s(f,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P})$

Definição 8 *$\exists \underline{\int_a^b} f := \sup\{s(f,\mathcal{P});\ \mathcal{P} partição\}$ e $\exists \overline{\int_a^b} f := \inf\{S(f,\mathcal{P});\ \mathcal{P} partição\}$ **integral inferior** de f em $[a,b]$ e **integral superior** de f em $[a,b]$, respectivamente.*

Lema 3.1 $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

Definição 9 *f é **integrável** quando $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ o valor comum é denotado por $\int_a^b f$ e convencionamos $\int_a^b f := -\int_b^a f$.*

Teorema 3.2 *Funções contínuas são integráveis.*

3.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Lema 3.3 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. $\forall x \in (a,b), f|_{[a,b]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis. Além disso, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

Teorema 3.4 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável e $F(x) := \int_a^x f$. Se f é contínua em $c \in [a,b]$, então F é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.*

Definição 10 *$G : [a,b] \to \mathbb{R}$ é **primitiva** de g quando $G'(x) = g(x)$ em $[a,b]$.*

Lema 3.5 *Se f é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, então f possui primitiva $F(x) = \int_a^b f$. Tomando $\overline{F}$ qualquer outra primitiva (acrescentando uma constante), temos que $\overline{F}(x) = F(x) + \overline{F}(0)$, e portanto $\overline{F}(b) - \overline{F}(a) = \int_a^b f$.*

3.2 Operações com Integrais

Proposições: Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis.

- $f+g$ e $f \cdot g$ são integráveis e $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- Se $|f(x)| \geq k > 0\ \forall x \in [a,b]$ e algum $k > 0$, então $\dfrac{1}{f(x)}$ é integrável.

- $|f|$ é integrável e $|\int_a^b f(x)dx| \ \leq \ \int_a^b |f(x)| \, dx$

Definição 11 *Quando $\int_0^\infty |f(x)|dx$ (ou $\int_a^b |f(x)|dx$) existe, dizemos que a integral é **absolutamente convergente**. E a integral também é **convergente**.*

3.3 Fórmula de Taylor (versão infinitesimal)

Consideremos $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ função $n-1$ vezes derivável em (a,b) e n vezes derivável em $c \in (a,b)$.

Definição 12 *Definimos o **polinômio de Taylor de f de ordem n** centrado em c como*

$$T^n_{f,c}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(c)}{j!}(x-c)^j$$

Teorema 3.6 *Seja $r(x) := f(x) - T^n_{f,c}(x)$. Então $\lim_{x\to c} \dfrac{r(x)}{(x-c)^n} = 0$*

3.4 Fórmula de Taylor, versão integral

Teorema 3.7 *Seja $f : [a,b]\mathbb{R}n{+}1$ vezes derivável, e $c \in [a,b]$. Então $f(x) = T^n_{f,c}(x) + r_n(x)$, onde $r_n(x) = \dfrac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$.*

Corolário 3.7.1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}n$ vezes derivável no ponto $c \in [a,b]$. Se $p(x)$ é polinômio de grau n t.q. $f(x) = p(x) + S(x)$ com $\lim_{x\to c} \dfrac{S(x)}{(x-c)^n} = 0$, então $T^n_{f,c}(x) = p(x)$.*

4 Séries

Definição 13 *Consideremos a sequência (a_j) e formemos a nova sequência $s_n := \sum_{j=1}^n a_j$ ela se denomina **série**, e caso seja convergente, escrevemos $\sum_{j=1}^\infty a_j := \lim_{n\to\infty} s_n$.*

Teorema 4.1 *Se $\sum |a_j|$ é convergente então $\sum a_j$ é também convergente.*

Definição 14 $\sum a_n$ ***converge absolutamente*** *quando* $\sum |a_n|$ *for convergente.*

Teorema 4.2 (Critério de d'Alewbert) *Se existe* $o \leq c \leq 1$ *t.q.* $|a_{n+1} \geq c|a_n|$ *a partir de algum* n_0*, então* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*

4.1 Séries de Potências

Vamos tratar o caso particular de séries do tipo $\sum a_n(x-c)^n$, diremos que está é uma **série de potências** centrada em c. Queremos encontrar valores de x para os quais a série converge, no caso $c = 0$ observe que $\sum a_n x^n$ é sempre convergente em 0.

Teorema 4.3 *Suponhamos que* $\exists x_0 \neq 0$ *t.q.* $\sum a_n x_0^n$ *seja convergente.* $\exists R > 0$ *de modo que* $\sum a_n x^n$ *converge em* $(-R, R)$ *e diverge em* $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ *(podendo sem* $R = \infty$*).*

Teorema 4.4 *Seja* $[-b, b] \subset (-R, R)$*. Dado* $\varepsilon > 0$*,* $\exists n \in \mathbb{N}$ *t. q.* $n_0 > n \Rightarrow |\sum_{j=n_0+1}^{\infty} a_j x^j| < \varepsilon$ *para* $x \in [-b.b]$*.*

Definição 15 *Tomando* $s(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, s_m(x) := \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ *para* $x \in (-R, R)$*, temos que* $\forall x \in (-R, R) : \lim_{m\to\infty} s_m(x) = s(x)$*, então a série* s_m ***converge uniformemente para s*** *em um intervalo* $[-b, b] \subset (-R, R)$*, ou seja, dado* $\varepsilon > 0$ *qualquer,* $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $|s(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ *se* $m > N$ *e* $x \in [-b, b]$ *(intervalo limitado fechado de* $(-R, R)$*.*

Teorema 4.5 *Da definição 15, temos que,* $s(x)$ *é contínua em* $(-R, R)$*.*

Teorema 4.6 (Integração termo a termo) $\int_0^x s(t)dt = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^x a_j t^j dt$ *para* $x \in (-R, R)$*.*

Teorema 4.7 (Derivação termo a termo) $s'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j x^{j-1}$ *para* $x \in (-R, R)$*.*

Definição 16 (geral) *Sejam* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *sequência de função e* $f : I \to \mathbb{R}$*, dizemos que* f_n ***converge uniformemente*** *para* f *quando dado* $\varepsilon > 0$ *qualquer,* $\exists N \in \mathbb{N}$ *de modo que* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *se* $n > N$ *e para todo* $x \in I$*.*

Temos os seguintes teoremas correspondentes ao caso das séries. Suponhamos então $f_n \to f$ em I.

Teorema 4.8 *Se f_n é contínua $\forall n \in \mathbb{N}$, então f é contínua.*

Teorema 4.9 *Fixemos $a \in I, f_n$ contínua $\forall n \in \mathbb{N}$. Então $\int_a^x f_n(t)dt \to \int_a^x f(t)dt$ $\forall x \in I$.*

Teorema 4.10 *Suponhamos f_n deriváveis, e que f_n' sejam contínuas. Se $f_n' \to g$ converge uniformemente, então $g = f'$, isto é, $\frac{d}{dx}f_n(x) \to \frac{d}{dx}f(X)$.*