Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de EDO

Rio de Janeiro
2021

1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem (22/02)

Vamos considerar a equação diferencial linear de Primeira ordem com $p(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em $I \subset \mathbb{R}$:

$$y' + p(x)y = g(x)$$

Se $g(x) = 0$, temos uma equação homogênea, de solução:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^{c}$$

Para o caso geral a ideia é multiplicar a equação por um fator integrante transformando-a numa forma imediatamente integrável. Seja $u(x)$ este fator integrante, então

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)g(x)$$

Chegamos que:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \int u(x)g(x)dx + c$$

e

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

2 Equação de Bernoulli e Equações separáveis (24/02)

Um exemplo de equação de Primeira ordem que não é linear é a **equação de Bernoulli**:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Equações separáveis

São equações diferenciais do tipo

$$M(x) + N(x)\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \ (*)$$

Suponhamos $H_1 = \int M(x)dx$ e $H_2 = \int N(y)dy$, então $(*)$ tem como solução

$$H_1(x) + H_2(y) = c$$

que geralmente está na forma implícita.

3 Equações Diferenciais Exatas e Equações Diferenciais Não Exatas (01/03)

Equações Diferenciais Exatas

Considere a equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

E suponha que existe uma função f(x, y) tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y), \ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y), e \ f(x, y) = c$$

Então $f(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$, e a equação diferencial é **exata**.

Teorema 3.1 *Suponha que as funções M, N, M_y e N_x são contínuas na região $R : a < x < b, c < y < d$. Então a equação $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata em R se e somente se:*

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \ \text{em} \ R$$

Isto é, existe uma função $f(x, y) = c$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \ \text{e} \ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

se e somente se $M_y = N_x$

Equações Diferenciais Não Exatas

Em geral a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ não é exata, mas eventualmente é possível transformá-la numa equação diferencial exata multiplicando por um fator integrante.

Se $\frac{M_y - N_x}{N}$ for uma função só de x então podemos encontrar $u(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ como fator integrante. Se $\frac{N_x - M_y}{M}$ for uma função só de y então podemos encontrar $u(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$ como fator integrante.

Exemplo: $ydx - xdy = 0$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \text{ não é exata}$$

Note que, $\frac{N_x - M_y}{N} = \frac{2}{x}$ depende apenas de x, e

$$u(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

Logo, a nova equação

$$\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0 \text{ é exata}$$

4 Problemas de diluição, Resfriamento de um corpo e Juros compostos (03/03)

Problemas de diluição

Considere um tanque contendo no estado inicial V_0 litros de salmoura com α **kg** de sal (pode ser $\alpha = 0$). Uma outra solução de salmoura contendo **c kg** quilos de sal por litro é derramada nesse tanque a uma taxa **a l/min**, enquanto simultaneamente a mistura bem agitada deixa o tanque a uma taxa de **b l/min**. Queremos determinar (Q(t)) a quantidade de sal (em quilos) no tempo t dentro do tanque. Temos que

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{b}{V_0 + at - bt} Q = ac$$

Resfriamento de um corpo

Sendo T a temperatura do corpo, T_a a temperatura no ambiente, a taxa de variação da temperatura do corpo é de $\frac{dT}{dt}$ e assim chegamos que a variação da temperatura do corpo é (se a temperatura do ambiente não muda):

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

Agora e se a T_a varia com o tempo (perdendo ou ganhando calor):

$$\frac{dT}{dt} + k(1+A)T = k(T_{a,0} + AT_0)$$

onde

$$A = \frac{m_c}{m_a c_a}$$

com solução:

$$T(t) = \left(\frac{T_0 - T_{a,0}}{1+A}\right)e^{k(1+A)t} + \frac{T_{a,0} + AT_0}{1+A}$$

Juros Compostos

(Análogo aos casos anteriores), com solução

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{k}{r}(e^{rt} - 1)$$

5 Equações autônomas (08/03)

Uma classe de EDO importante são as quais não aparece a variável independente explicitamente. São as **equações autônomas**:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Tais equações tem solução análoga as que já vimos.

6 Existência e Unicidade (10/03)

Uma EDO sempre possui solução e ela é única (não é necessário provar aqui).

Video explicativo

7 Equações diferenciais lineares de segunda ordem (17/03)

Uma equação diferencial linear de segunda ordem, com condições iniciais é um equação do tipo

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0' \tag{1}$$

Se $g(t) = 0$ a equação 1 é dita homogênea.

Teorema 7.1 *Quando a equação é homogênea onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas em um intervalo I, possui uma solução única $y(t)$ em I.*

Teorema 7.2 *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções, então a combinação linear $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ também é solução.*

Definição 1 *Considere as funções diferenciáveis $f(t)$ e $g(t)$ o determinante $\left\| \begin{matrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{matrix} \right\| = W(f,g)(t)$ é chamado de Wronskiano das funções $f(t)$ e $g(t)$.*

Definição 2 *Duas funções $f(t), g(t)$ são ditas linearmente dependentes em um intervalo I se existem constantes k_1 e k_2, com pelo menos uma delas não nulas tal que*

$$k_1f(t) + k_2g(t) = 0\ \forall t \in I$$

Definição 3 *As funções $f(t)$ e $g(t)$ são L.I. se $k_1f(t) + k_2g(t) = 0\ \forall t \in I$ se e só se $k_1 = k_2 = 0$.*

Teorema 7.3 *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções diferenciáveis em I, e suponhamos que $W(f,g)(t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in I$. Então $f(t)$ e $g(t)$ são L.I.*

Teorema 7.4 *Suponhamos que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções da equação diferencial de segunda ordem $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, e que para $t_0 \in I$ temos que $W(y_1, y_2) \neq 0$ e as condições iniciais $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y_0'$. Então podemos encontrar constantes c_1 e c_2 para os quais $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ satisfazem a equação 1 (Ou seja, data duas soluções particulares L.I. podemos achar a geral).*

Definição 4 *A equação característica de $ay'' + by' + cy = 0$ é a equação $ak^2 + bk + c = 0$.*

Uma equação do tipo $ay'' + by' + cy = 0$ possui solução de acordo com as raízes da equação característica $ak^2 + bk + c = 0$. Vamos dividir em casos.

1. $b^2 - 4ac > 0$, então temos duas raízes reais distintas k_1 e k_2 são L.I. e temos solução geral: $y(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 T}$

2. $b^2 - 4ac = 0$, nesse caso raízes iguais $k_1 = k_2 = k$, e temos as 2 soluções $y_1(t) = e^{kt}$ e $y_2(y) = te^{kt}$, onde $k = -\frac{b}{2a}$.

3. $b^2 - 4ac < 0$, neste caso as raízes k_1 e k_2 são complexas. Seja $k_1 = \alpha + i\beta$ e $k_2 = \alpha - i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos solução:

$$y_1(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

   Com solução real:

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

8 Equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas (24/03)

Considerando equações diferenciais de segunda ordem, não homogêneas e com coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{2}$$

, com a, b e c constantes e $g(t)$ continua. Seja $y_h(t)$ a solução de $ay'' + by' + cy = 0$.

Teorema 8.1 *A solução geral para a equação 2 é*

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

onde $y_p(t)$ é uma solução particular da equação não homogênea.

Precisamos encontrar uma solução particular temos 2 métodos para isso "método dos coeficientes a determinar"que infelizmente não funciona para todos os casos e o método de "Variação de parâmetros"que pode ser aplicado em todos os casos, mas é mais complexo. Começamos com o "método dos coeficientes a determinar".

Vamos pensar como uma solução particular: $y_p(t) =$ polinômio, e^{kt} ou $A\cos\alpha t + B\sin t$, dai podemos substituir na equação inicial, encontrando as constantes. Temos a $y_p(t)$. E então também temos $y(t)$.

9 Método de variação de parâmetros (29/03)

Tome $ay'' + by' + cy = g(x)$, onde a, b e c são constantes e g(x) é continua.

Sejam $y_1(x), y_2(x)$ soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea. Este sugere encontrar funções $u_1(x), u_2(x)$ tais que $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ seja uma solução da equação diferencial. Adicionando condições a $u_1(x), u_2(x)$:

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{3}$$

Com isso temos que

$$y'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

$$a(u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)) = g(x) \tag{4}$$

E resolvendo o sistema 3 4 temos que

$$u_1 = \int \frac{-\frac{g}{a}y_2}{y_1y_2' - y_2y_1}dx$$

$$u_2 = \int \frac{\frac{g}{a}y_1}{y_1y_2' - y_2y_1}dx$$

A solução destas integrais, nos dará uma solução particular da equação diferencial não homogênea de segunda ordem.