Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de Teoria da Probabilidade

Rio de Janeiro
2021

1 Conceitos Básicos

1.2 Modelos de Probabilidade

Definição 1 *Dois eventos A e B são chamados de **mutuamente excludentes** se não podem ocorrer simultaneamente, isto é, se $A \cap B = \emptyset$.*

Definição 2 *Uma **probabilidade** é uma função que associa a cada evento $\boldsymbol{A}$ um número $\boldsymbol{P(A)}$ de forma que:*

1. *Para todo evento A, $0 \leqslant Pr(A) \leqslant 1$;*
2. *$P(S) = 1$;*
3. *Se A e B são eventos mutuamente excludentes então*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Corolário 1.0.1 (Lei do Complemento)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Em outras palavras, a probabilidade de um evento ocorrer mais a probabilidade de ele não ocorrer dá 100%

Corolário 1.0.2 $P(\emptyset) = 0$, *isto é se um evento é impossível, sua probabilidade deve ser 0.*

Corolário 1.0.3 (Lei da Adição)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade Condicional

Definição 3 *Sejam A e B dois eventos com $P(A) \neq 0$. A probabilidade condicional de B dado A é*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Corolário 1.0.4 (Lei da Multiplicação)

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(B|A) \cdot P(B)$$

Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Corolário 1.0.5 (Lei da Probabilidade Total) *Suponha que* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *formam uma partição de S. Então*

Corolário 1.0.6 (Teorema de Bayes) *Suponha que* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *formam uma partição de S. Então*

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Independência

Definição 4 *Dois eventos (não impossíveis) A e B são ditos* ***independentes*** *se o conhecimento de um deles não afeta a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se*

$$P(B|A) = P(B)$$

2 Variáveis Aleatórias Discretas

2.1 Função de Probabilidade e Função de Probabilidade Conjunta

Definição 5 *Se X é uma variáveis aleatórias discretas, definimos a* ***função de probabilidade de X*** *por*

$$p_X(x) = P(X = x)$$

Definição 6 *Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, definimos a* ***função de probabilidade conjunta de X e Y*** *por*

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \text{ e } Y = y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias Discretas

Definição 7 *Dizemos que X e Y são variáveis **independentes** exatamente quando*

$$P(X = i \text{ e } Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$$

Corolário 2.0.1 *X e Y são independentes se, e somente se, a distribuição condicional de X dado $Y = j$ é idêntica à distribuição marginal de X (qualquer que seja y possível). De fato, temos:*

$$P(X = i|Y = j) = \frac{P(X = i \text{ e}}{P(Y = j} = P(X = i)$$

Função de Probabilidade Acumulada

Definição

Definição 8 *A **função de distribuição** (ou **função de probabilidade acumulada**) de X é definida por*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Corolário 2.0.2 *Se F é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta:*

i. *F é não-decrescente;*

ii. *$F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$ (ou seja, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;*

iii. *F é constante por partes (isto é, uma função-escada).*

Corolário 2.0.3 *Se F é uma função de distribuição acumulada de uma variável aleatória, então*

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Quantis

Definição 9 *O q-quantil de uma variável aleatória X é qualquer valor x_q onde a função acumulada ”acerta”por q ou ”passa”por p. Formalmente:*

$$F(x_q-) \leq q \leq F(x_q)$$

2.3 Valor Esperança

Intuição e Definição

Definição 10 *Se X é uma variável aleatória discreta, definimos o* ***valor esperado*** *(ou esperança matemática, ou expectativa, ou média, ou valor médio) de X por*

$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot p(x)$$

isto é, $E(X)$ é uma média ponderada dos valores de X, com pesos iguais às respectivas probabilidades destes valores. Ocasionalmente, escrevemos $\mu_X = E(X)$

A esperança é uma medida de posição ou de tendência central (valores grandes de X acarretam $E(X)$ grande; valores pequenos de X acarretam $E(X)$ pequeno).

Propriedades (Caso Unidimensional)

Corolário 2.0.4 *Se $Y = f(X)$, temos*

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{x \in S} f(x) \cdot p(x)$$

Corolário 2.0.5 *Sejam a e b constantes quaisquer. Então:*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Propriedades (Caso Bidimensional)

Corolário 2.0.6 *Se $Z = f(X, Y)$ então*

$$E(Z) = E(f(X,Y)) = \sum_{x,y} f(x,y)p_{X,Y}(x,y)$$

Corolário 2.0.7 *Sejam a, b e c constantes quaisquer. Então*

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

Corolário 2.0.8 *Se X e Y são independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

2.4 Variância e Outras Medidas de Dispersão

Definição

Definição 11 *Duas medidas de dispersão comuns são o* ***desvio médio****, definidos por*

$$DM(X) = E(|X - E(X)|)$$

e a ***variância****, definida por*

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Ao invés da variância, podemos medir a dispersão de X pelo seu ***desvio-padrão***

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Corolário 2.0.9 *Sejam a e b constantes quaisquer. então*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$
$$\sigma(aX + b) = |a|\dot{\sigma}(X)$$
$$DM(aX + b) = |a|\dot{D}M(X)$$

Corolário 2.0.10

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Corolário 2.0.11 *Se X e Y são independentes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$*

Desigualdade de Chebyshev

Teorema 2.1 (Desigualdade de Chebyshev) *Seja X uma variavel aleatória com valor esperado $\mu = E(X)$ e desvio-padrão $\sigma = \sigma(X)$. Seja $P = \{x \in \mathbb{R}|\ |x - \mu| < k\sigma\}$ (isto é, P é o intervalo aberto $(x - k\sigma, x + k\sigma)$, um conjunto de vlores de x que estão "perto da média"pelo menos k desvios-padrão). Então, para qualquer $k > 0$, tem-se*

$$P(X \notin P) \leq \frac{1}{k^2}$$

ou seja

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - | < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

2.5 Covariância e Correlação

Definição 12 *A **covariância** entre duas variáveis X e Y é*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))\dot{(}Y - E(Y))]$$

Corolário 2.1.1

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Corolário 2.1.2 *Se X e Y são independentes, então $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$*

Definição 13 *Outra medida de "variação conjunta"de duas variáveis X e Y é a **correlação***

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Um pouco de Álgebra Linear

Corolário 2.1.3 *Para quaisquer variaveis aleatorias X e Y:*

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

E se X e Y são independentes vale que $Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$.

Corolário 2.1.4

$$Cov(aX+b,Y) = Cov(X,Y)$$

Corolário 2.1.5

$$\rho(aX+b,Y) = \rho(X,Y) \text{ se } a > 0$$

$$\rho(aX+b,Y) = -\rho(X,Y) \text{ se } a < 0$$

3 Principais Distribuições Discretas

3.1 Distribuição

Se os valores assumidos por uma certa variável aleatória X são equiprováveis dizemos que X tem um **distribuição uniforme**.

3.2 Brevíssima Revisão de Analise Combinatória

Aqui trata-se de conteúdo do ensino médio em caso de duvida see

3.3 Processo de Bernoulli

Definição 14 *Um* ***processo de Bernoulli*** *é uma sequencia de experimentos com as seguintes características:*

1. *Cada experimento tem apenas dois resultados possíveis, denominados* ***sucesso*** e ***falha***

2. *Cada experimento tem a mesma probabilidade p de sucesso, e cada experimento é completamente independente de todos os outros.*

Distribuição Binomial

Definição 15 *Suponha que o número de experimentos a serem feitos é determinado digamos, n experimentos. Seja X a variável aleatória que representa o numero de sucessos obtidos nestes n experimentos. Dizemos que X tem uma* ***distribuição binomial de parâmetros n e p*** *(e escrevemos X* $\backsim$*Bin(n, p)).*$Nessecasoafun\c{c}\tilde{a}odeprobabilidadedeXpassaasechamar : BinomialDen$

$$P(X = k) = BinomialDen(k; n, p)$$

e chamaremos a função acumulada de BinomialDist:

$$P(X \leq k) = BinomialDist(k; n, p)$$

Corolário 3.0.1

$$BinomialDen(k; n, p) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$BinomialDist(k; n, p) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Corolário 3.0.2 *Seja* $X \backsim Bin(n, p)$*. Então*

$$E(X) = np$$
$$Var(X) = npq$$

Distribuição Geométrica

Definição 16 *Suponha que realizamos um processo de Bernoulli com probabilidade de sucesso de cada prova* $p > 0$*. Seja X o número de tentativas feitas até o primeiro sucesso (inclusive). Dizemos que X tem uma* ***distribuição geométrica de parâmetro*** p*, isto é,* $X \backsim Geom(p)$

Corolário 3.0.3 *Se* $X \backsim Geom(p)$*, então*

$$P(X = k) = Geom(k; p) = q^{k-1}p$$
$$P(X \leq k) = 1 - q^k$$

Corolário 3.0.4 *Se $X \backsim Geom(p)$, então*

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

Distribuição Binomial Negativa

Definição 17 *Suponha que o processo de Bernoulli é repetido até obter r sucessos. Seja X o número de tentativas feitas (incluindo o último sucesso). Dizemos que X tem uma **distribuição binomial negativa de parâmetros r e p**, isto é, $X \backsim NegBin(r, p)$. Note que, a distribuição geométrica é um caso particular dessa.*

Corolário 3.0.5 *Se $X \backsim NegBin(r, p)$, então para $k \geq r$ (k inteiro).*

$$P(X = k) = p.BinomialDen(r-1; k-1, p) = \binom{k-1}{r-1} p^k q^{k-r}$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$
$$Var(X) = \frac{rq}{p^2}$$

3.4 Processo de Poisson

Definição 18 *A **distribuição de Poisson** dizemos $X \backsim Poi(\mu)$ que no geral é $\lim_{n\to\infty} Bin(k; n, \frac{\mu}{n} = Poi(k; \mu)$*

Corolário 3.0.6 *Se $X \backsim Poi(\mu)$, tem-se*

$$P(X = k) = \frac{\mu}{k!} e^{-\mu}$$

$$E(X) = Var(X) = \mu$$

3.5 Distribuição Hipergeométrica

Definição 19 *De uma caixa com r bolas "sucesso"e $N - r$ bolas "falha", extraímos sem reposição n bolas. Seja X o número de bolas sucesso. Dizemos que X tem* ***distribuição hipergeométrica com parâmetros n, r e N****, isto é, $X \backsim Hip(n, r, N)$.*

Corolário 3.0.7 *Se $X \backsim Hip(n, r, N)$, então*

$$P(X = k) = Hip(k; n, r, N) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = npq\frac{N - m}{N - 1}$$

onde $p = \dfrac{r}{N}$

4 Variáveis Aleatórias Continuas

4.1 Distribuições Contínuas

Função de Distribuição Acumulada

Definição 20 *A* ***função de distribuição acumulada (função de distribuição; fda)*** *de uma variável aleatória X é*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Corolário 4.0.1 *Se $F(x)$ é a f.d.a. de uma variavel read X, então*

$$F \text{ énão-decrescente}$$

$$F(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0 \quad e \quad F(+\infty) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Note que, no caso continuo $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$, pois $P(X = a) = 0$.