Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de Teoria da Probabilidade

Rio de Janeiro
2021

1 Conceitos Básicos

1.2 Modelos de Probabilidade

Definição 1 *Dois eventos A e B são chamados de* ***mutuamente excludentes*** *se não podem ocorrer simultaneamente, isto é, se $A \cap B = \emptyset$.*

Definição 2 *Uma* ***probabilidade*** *é uma função que associa a cada evento* $\boldsymbol{A}$ *um número* $\boldsymbol{P(A)}$ *de forma que:*

1. *Para todo evento A, $0 \leqslant Pr(A) \leqslant 1$;*

2. *$P(S) = 1$;*

3. *Se A e B são eventos mutuamente excludentes então*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Corolário 1.0.1 (Lei do Complemento)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Em outras palavras, a probabilidade de um evento ocorrer mais a probabilidade de ele não ocorrer dá 100%

Corolário 1.0.2 *$P(\emptyset) = 0$, isto é se um evento é impossível, sua probabilidade deve ser 0.*

Corolário 1.0.3 (Lei da Adição)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade Condicional

Definição 3 *Sejam A e B dois eventos com $P(A) \neq 0$. A probabilidade condicional de B dado A é*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Corolário 1.0.4 (Lei da Multiplicação)

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(B|A) \cdot P(B)$$

Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Corolário 1.0.5 (Lei da Probabilidade Total) *Suponha que* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *formam uma partição de S. Então*

Corolário 1.0.6 (Teorema de Bayes) *Suponha que* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *formam uma partição de S. Então*

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Independência

Definição 4 *Dois eventos (não impossíveis) A e B são ditos* ***independentes*** *se o conhecimento de um deles não afeta a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se*

$$P(B|A) = P(B)$$

2 Variáveis Aleatórias Discretas

2.1 Função de Probabilidade e Função de Probabilidade Conjunta

Definição 5 *Se X é uma variáveis aleatórias discretas, definimos a* ***função de probabilidade de X*** *por*

$$p_X(x) = P(X = x)$$

Definição 6 *Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, definimos a* ***função de probabilidade conjunta de X e Y*** *por*

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \text{ e } Y = y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias Discretas

Definição 7 *Dizemos que X e Y são variáveis* ***independentes*** *exatamente quando*

$$P(X = i \text{ e } Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$$

Corolário 2.0.1 *X e Y são independentes se, e somente se, a distribuição condicional de X dado $Y = j$ é idêntica à distribuição marginal de X (qualquer que seja y possível). De fato, temos:*

$$P(X = i | Y = j) = \frac{P(X = i \text{ e }}{P(Y = j} = P(X = i)$$

Função de Probabilidade Acumulada

Definição

Definição 8 *A* ***função de distribuição*** *(ou* ***função de probabilidade acumulada****) de X é definida por*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Corolário 2.0.2 *Se F é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta:*

i. F é não-decrescente;

ii. $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$ (ou seja, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$);

iii. F é constante por partes (isto é, uma função-escada).

Corolário 2.0.3 *Se F é uma função de distribuição acumulada de uma variável aleatória, então*

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Quantis

Definição 9 *O q-quantil de uma variável aleatória X é qualquer valor x_q onde a função acumulada "acerta"por q ou "passa"por p. Formalmente:*

$$F(x_q-) \leq q \leq F(x_q)$$

2.3 Valor Esperança

Intuição e Definição

Definição 10 *Se X é uma variável aleatória discreta, definimos o **valor esperado** (ou esperança matemática, ou expectativa, ou média, ou valor médio) de X por*

$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot p(x)$$

isto é, $E(X)$ é uma média ponderada dos valores de X, com pesos iguais às respectivas probabilidades destes valores. Ocasionalmente, escrevemos $\mu_X = E(X)$

A esperança é uma medida de posição ou de tendência central (valores grandes de X acarretam $E(X)$ grande; valores pequenos de X acarretam $E(X)$ pequeno).

Propriedades (Caso Unidimensional)

Corolário 2.0.4 *Se $Y = f(X)$, temos*

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{x \in S} f(x) \cdot p(x)$$

Corolário 2.0.5 *Sejam a e b constantes quaisquer. Então:*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Propriedades (Caso Bidimensional)

Corolário 2.0.6 *Se $Z = f(X, Y)$ então*

$$E(Z) = E(f(X,Y)) = \sum_{x,y} f(x,y)p_{X,Y}(x,y)$$

Corolário 2.0.7 *Sejam a, b e c constantes quaisquer. Então*

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

Corolário 2.0.8 *Se X e Y são independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

2.4 Variância e Outras Medidas de Dispersão

Definição

Definição 11 *Duas medidas de dispersão comuns são o* ***desvio médio****, definidos por*

$$DM(X) = E(|X - E(X)|)$$

e a ***variância****, definida por*

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Ao invés da variância, podemos medir a dispersão de X pelo seu ***desvio-padrão***

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Corolário 2.0.9 *Sejam a e b constantes quaisquer. então*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$
$$\sigma(aX + b) = |a| \cdot \sigma(X)$$
$$DM(aX + b) = |a| \cdot DM(X)$$

Corolário 2.0.10

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Corolário 2.0.11 *Se X e Y são independentes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$*

Desigualdade de Chebyshev

Teorema 2.1 (Desigualdade de Chebyshev) *Seja X uma variavel aleatória com valor esperado $\mu = E(X)$ e desvio-padrão $\sigma = \sigma(X)$. Seja $P = \{x \in \mathbb{R} | \ |x - \mu| < k\sigma\}$ (isto é, P é o intervalo aberto $(x - k\sigma, x + k\sigma)$, um conjunto de vlores de x que estão "perto da média"pelo menos k desvios-padrão). Então, para qualquer $k > 0$, tem-se*

$$P(X \notin P) \leq \frac{1}{k^2}$$

ou seja

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

2.5 Covariância e Correlação

Definição 12 *A **covariância** entre duas variáveis X e Y é*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

Corolário 2.1.1

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Corolário 2.1.2 *Se X e Y são independentes, então $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$*

Definição 13 *Outra medida de "variação conjunta"de duas variáveis X e Y é a **correlação***

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Um pouco de Álgebra Linear

Corolário 2.1.3 *Para quaisquer variáveis aleatórias X e Y:*

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

E se X e Y são independentes vale que $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$.

Corolário 2.1.4

$$Cov(aX+b,Y) = aCov(X,Y)$$

Corolário 2.1.5

$$\rho(aX+b,Y) = \rho(X,Y) \ se \ a > 0$$

$$\rho(aX+b,Y) = -\rho(X,Y) \ se \ a < 0$$

3 Principais Distribuições Discretas

3.1 Distribuição

Se os valores assumidos por uma certa variável aleatória X são equiprováveis dizemos que X tem um **distribuição uniforme**.

3.2 Brevíssima Revisão de Analise Combinatória

Aqui trata-se de conteúdo do ensino médio em caso de dúvida see.

3.3 Processo de Bernoulli

Definição 14 *Um* ***processo de Bernoulli*** *é uma sequencia de experimentos com as seguintes características:*

1. *Cada experimento tem apenas dois resultados possíveis, denominados* ***sucesso*** *e* ***falha***
2. *Cada experimento tem a mesma probabilidade p de sucesso, e cada experimento é completamente independente de todos os outros.*

Distribuição Binomial

Definição 15 *Suponha que o número de experimentos a serem feitos é determinado digamos, n experimentos. Seja X a variável aleatória que representa o numero de sucessos obtidos nestes n experimentos. Dizemos que X tem uma* ***distribuição binomial de parâmetros n e p*** *(e escrevemos $X \backsim$ Bin(n, p)). Nesse caso a função de probabilidade de X passa a se chamar: BinomialDen.*

$$P(X = k) = BinomialDen(k; n, p)$$

e chamaremos a função acumulada de BinomialDist:

$$P(X \leq k) = BinomialDist(k; n, p)$$

Corolário 3.0.1

$$BinomialDen(k; n, p) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$BinomialDist(k; n, p) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Corolário 3.0.2 *Seja $X \backsim Bin(n, p)$. Então*

$$E(X) = np$$
$$Var(X) = npq$$

Distribuição Geométrica

Definição 16 *Suponha que realizamos um processo de Bernoulli com probabilidade de sucesso de cada prova $p > 0$. Seja X o número de tentativas feitas até o primeiro sucesso (inclusive). Dizemos que X tem uma* ***distribuição geométrica de parâmetro*** *p, isto é, $X \backsim Geom(p)$*

Corolário 3.0.3 *Se $X \backsim Geom(p)$, então*

$$P(X = k) = Geom(k; p) = q^{k-1} p$$
$$P(X \leq k) = 1 - q^k$$

Corolário 3.0.4 *Se $X \backsim Geom(p)$, então*

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

Distribuição Binomial Negativa

Definição 17 *Suponha que o processo de Bernoulli é repetido até obter r sucessos. Seja X o número de tentativas feitas (incluindo o último sucesso). Dizemos que X tem uma* ***distribuição binomial negativa de parâmetros r e p****, isto é, $X \backsim NegBin(r,p)$. Note que, a distribuição geométrica é um caso particular dessa.*

Corolário 3.0.5 *Se $X \backsim NegBin(r,p)$, então para $k \geq r$ (k inteiro).*

$$P(X = k) = p.\ BinomialDen(r-1; k-1, p) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$
$$Var(X) = \frac{rq}{p^2}$$

3.4 Processo de Poisson

Definição 18 *A* ***distribuição de Poisson*** *dizemos $X \backsim Poi(\mu)$ que no geral é $\lim_{n\to\infty} Bin(k; n, \frac{\mu}{n}) = Poi(k; \mu)$*

Corolário 3.0.6 *Se $X \backsim Poi(\mu)$, tem-se*

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$E(X) = Var(X) = \mu$$

3.5 Distribuição Hipergeométrica

Definição 19 *De uma caixa com r bolas "sucesso"e $N - r$ bolas "falha", extraímos sem reposição n bolas. Seja X o número de bolas sucesso. Dizemos que X tem **distribuição hipergeométrica com parâmetros n, r e N**, isto é, $X \backsim Hip(n, r, N)$.*

Corolário 3.0.7 *Se $X \backsim Hip(n, r, N)$, então*

$$P(X = k) = Hip(k; n, r, N) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = npq\frac{N - m}{N - 1}$$

onde $p = \dfrac{r}{N}$

4 Variáveis Aleatórias Continuas

4.1 Distribuições Contínuas

Função de Distribuição Acumulada

Definição 20 *A **função de distribuição acumulada (função de distribuição; fda)** de uma variável aleatória X é*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Corolário 4.0.1 *Se $F(x)$ é a f.d.a. de uma variável real X, então*

$$F \text{ é não-decrescente}$$

$$F(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0 \quad e \quad F(+\infty) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Note que, no caso continuo $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$, pois $P(X = a) = 0$.

Quantis

Definição 21 *O q-quantil de uma variável aleatória X é qualquer valor* x_q *onde a função acumulada "acerta"q. Formalmente* $F(x_q) = q$

Função Densidade de Probabilidade

Definição 22 *A* ***função densidade de probabilidade (f.d.p.)*** *de X é a derivada da função acumulada:*

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'_X(x)$$

Corolário 4.0.2 *Dada a f.d.p. de uma variável aleatória contínua X, encontramos probabilidades pela fórmula*

$$P(a \leq X \leq) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Em particular, como $F(-\infty) = 0$*, note que*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Corolário 4.0.3 *Se f(x) é a f.d.p. de uma variável aleatória real X, então para todo x real:*

$$0 \leq f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

Definição 23 *A* ***moda*** *de uma variável aleatória é o valor x onde a densidade f(x) é máxima.*

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Seja X uma variável aleatória de densidade f(x) e seja $Y = h(X)$ onde h é uma função crescente. Então a densidade g(y) da variável Y satisfaz

$$g(y) = \frac{f(x)}{h'(x)} = \frac{f(x)}{\frac{dy}{dx}}$$

onde $x = h^{-1}(y)$, ou seja,

$$g(y)dy = f(x)dx$$

4.2 Valor Esperado e Variância

Valor Esperado

Definição 24 *Se X é uma variável aleatória com densidade f(x), definimos seu* ***valor esperado (valor médio, esperança)****, por*

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Corolário 4.0.4 *Se* $Y = h(X)$*, então*

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$$

Corolário 4.0.5 *Sejam a e b constantes quaisquer. Então*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Variância

Definição 25 *A* ***variância*** *e o* ***desvio-padrão*** *de uma variável aleatória X com densidade f(x) e média* $E(X) = \mu$ *são*

$$Var(X) = E\left((X - \mu)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Corolário 4.0.6

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Teorema 4.1 (Desigualdade de Chebyshev) *Esse teorema está definido em 2.4, de forma igual.*

5 Principais Distribuições Contínuas

5.1 Distribuição Uniforme

Definição 26 *Dizemos que a variável aleatória X tem* ***distribuição uniforme no intervalo [a, b]*** *(denotada por $X \backsim U[a,b]$) quando sua densidade é dada por*

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \; se \; a \leq x \leq b \; e \; f(x) = 0, \; caso \; contrário$$

Corolário 5.0.1

$$E(X) = Med(X) = \frac{b+a}{2} \quad e \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5.2 Distribuição Exponencial

Suponha que eventos ocorram de acordo com um processo de Poisson à taxa média de λ eventos por unidade de tempo. Dado um certo intervalo [0, t], seja X o número de eventos ocorridos neste intervalo.

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Definição 27 *Dizemos que a variável aleatória T tem* ***distribuição exponencial de parâmetro*** *λ (denotada por $T \backsim Exp(\lambda)$) se sua densidade é dada por*

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad se \quad t \geq 0 \; e \; f(t) = 0 \; caso \; contrário$$

e sua função de distribuição acumulada é

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad se \quad t \geq 0 \; e \; F(t) = 0 \; se \; t < 0$$

Corolário 5.0.2 *Se $T \backsim Exp(\lambda)$, então*

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$Med(T) = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Corolário 5.0.3 *Se $T \backsim Exp(\lambda)$ e $Y = aT$, então $Y \backsim Exp(\frac{\lambda}{a})$*

Corolário 5.0.4 *Se $T \backsim Exp(\lambda)$, então $\lambda T \backsim Exp(1)$*

5.3 Distribuição Gama

Definição 28 *Para $\alpha > 0$, definimos a função $\Gamma(\alpha)$ como*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Corolário 5.0.5 *Sempre que $\Gamma(\alpha)$ convergir vale que*

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

Corolário 5.0.6 *Se n é natural*

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Corolário 5.0.7

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Distribuição Gama

Mantendo o processo de Poisson da Distribuição exponencial, seja Z o **tempo de ocorrência do n-ésimo evento** e X o número de ocorrências no intervalo $[0, t]$, temos

$$P(Z \leq t) = 1 - P(X < n) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Definição 29 *Seja $\alpha, \lambda > 0$. Dizemos que a variável Z tem* ***distribuição Gama de parâmetros*** *α e λ (denotamos $Z \backsim \Gamma(\alpha, \lambda)$ se sua densidade é dada por*

$$GammaDen(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \; se \; t \geq 0$$

$$GammaDen(t) = 0, \; caso \; contrário$$

Corolário 5.0.8 *Se $Z \backsim Gamma(\alpha, \lambda)$, então $E(Z) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $Var(Z) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ e $Moda(Z) = \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$*

Corolário 5.0.9 *Se $X \backsim Gamma(a, \lambda)$ e $Z = \lambda X$, então $Z \backsim Gamma(\alpha, 1)$.*

5.4 Distribuição Normal

Definição 30 *Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 (denotado por $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$), quando sua f.d.p. é dada por*

$$f(x) = NormalDen(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Corolário 5.0.10 *Se $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$, então $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \backsim N(0, 1)$.*

Corolário 5.0.11 *Se $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$, então $E(X) = Moda(X) = Med(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$.*

5.5 Taxa de Falhas

Definição 31 *Seja T o tempo de vida de um equipamento, isto é, o instante da sua primeira falha, cuja f.d.a é F(t). A* ***confiabilidade*** *deste equipamento é*

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$$

Definição 32 *A* ***taxa média de falhas*** *de um equipamento em um intervalo $[t, t + \Delta t]$ é a chance de ele falhar nos próximos Δt dado que ainda não falhou, dividido por Δt, isto é*

$$TMF = \frac{P(T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{(1 - F(t))\Delta t} = -\frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{R(t).\Delta t}$$

Tome o limite quando $\Delta t \to 0$ e temos então a ***taxa instantânea de falhas***

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} TMF = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = -\frac{R'(t)}{R(t)}$$

6 Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

6.1 Função de Densidade Conjunta

Definição 33 *Uma* ***Função de Densidade Conjunta*** *f(x, y) das variáveis X e Y é uma função com a seguinte propriedade:*

$$P((X, Y) \in R) = \int \int_R f(x, y) dA$$

onde R é um subconjunto qualquer do plano XY (isto é, uma região dentro do plano $\mathbb{R}^2$). Consequentemente, uma função de densidade conjunta tem de satisfazer as seguintes propriedades básicas:

$$f(x, y) \geq 0 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dA = 1$$

Definição 34 *Dada uma função de densidade conjunta f(x, y), definimos o* ***Valor Esperado, Variância*** *e* ***Desvio-Padrão*** *da variável X como*

$$E(X) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xf(x,y)dA$$

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Definição 35 *Quando a função de densidade conjunta é constante dentro de um certo conjunto R (e 0 fora dele), dizemos que a variável (x, y) é* ***distribuída uniformemente*** *em R. Neste caso, temos*

$$f(x,y) = \frac{1}{\acute{A}rea(R)} \;\; se\; (x,y) \in R \;\; e \;\; f(x,y) = 0, \;\; caso\; contr\acute{a}rio$$

6.2 Distribuições Marginais e Condicionais; Covariância e Correlação

Definição 36 *A* ***Distribuição Marginal*** *de X será*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

e a ***Distribuição Condicional*** *de X dado Y será*

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Definição 37 *A* ***Covariância*** *e a* ***Correlação*** *entre duas variáveis X e Y são respectivamente*

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Definição 38 *A **Esperança Condicional** de X na certeza de que $Y = y$ é*

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx$$

Definição 39 *As variáveis X e Y são **independentes** quando a densidade conjunta é o produto das marginais, isto é,*

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Corolário 6.0.1 *X e Y são **independentes** se, e somente se, f(x, y) é da forma $g(x)h(y)$ num retângulo da forma $[a, b] \times [c, d]$ (e 0 caso contrario; note que este retângulo pode ser "infinito").*

Corolário 6.0.2 *Se X e Y são **independentes**, $Cov(X, Y) = 0$ e $E(X|y) = E(X)$ para valores validos de y (isto é, sempre que $f_Y(y) \neq 0$).*

Definição 40 *Os gráficos de $E[X|y]$ (uma função de y) e $E[Y|x]$ (uma função de x) são chamados de **curvas de regressão** (de X sobre y e vice-versa, respectivamente).*

6.3 Funções de Variáveis Contínuas

Teorema 6.1 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade $f_{X,Y}(x, y)$. Sejam $W = g(X, Y)$ e $Z = h(X, Y)$ duas novas variáveis. Então a densidade conjunta de W e Z é dada por*

$$f_{W,Z}(w, z) = f_{X,Y}(x, y) \cdot |J|$$

onde J é o Jacobiano da inversa da Transformada $T : (x, y) \to (g(x, y), h(x, y))$:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix}$$

7 Somas e Médias de Variáveis Aleatórias

7.1 Motivação

Se motive... e continue.

7.2 Somas das Principais Distribuições Aleatórias

Definição 41 *Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma AAS (Amostragem Aleatória Simples) tomada a partir de uma distribuição de uma v.a. X. Definimos a **soma da amostra** e a **média amostral** respectivamente por*

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\overline{X} = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Corolário 7.0.1 *Se $X_1 \backsim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $X_2 \backsim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ são independentes, então qualquer combinação linear não-nula $X = aX_1 + bX_2$, também terá distribuição normal, a saber, $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$ onde $\mu = a\mu_1 + b\mu_2$ e $\sigma^2 = a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2$. Em suma:*

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \backsim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \backsim N(\mu_2, \sigma_2^2) \\ X_1 \ e \ X_2 \ independentes \end{array}\right\} \Rightarrow aX_1 + bX_2 \backsim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1 + b^2\sigma_2)$$

Teorema 7.1 *Se $X_1, \cdots, X_n$ são amostras independentes da distribuição $N(\mu, \sigma^2)$ então*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \backsim N(0, 1)$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \backsim N(0, 1)$$

7.3 Lei dos Grandes Números

Lema 7.2 *Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são amostragens aleatórias simples de uma variável X com $E(X) = \mu$ e $\sigma(X) = \sigma$, então*

$$E(S_n) = n\mu; \ \ Var(S_n) = n\sigma^2; \ \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma$$

$$E(\overline{X}) = \mu; \ \ Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}; \ \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Teorema 7.3 (Lei dos Grandes Números, Bernoulli, 1713) *Suponha que X tem uma distribuição tal que $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = Var(X)$ são finitos. Seja $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ onde $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são provas independentes com a distribuição X. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ fixo, temos:*

$$P(|\overline{X} - \mu| \geq \varepsilon) \to 0$$

quando $n \to \infty$. E também quando $n \to \infty$:

$$P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) \to 1$$

7.4 Teorema Central do Limite (TCL)

TCL para Distribuição Binomial

Teorema 7.4 (Aproximação Normal à Distribuição Binomial) *Seja $X \backsim Bin(n,p)$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{npq}BinomialDen([np + a\sqrt{npq}]; n, p) = \phi(a)$$

onde $\phi(\alpha) = NormalDen(\alpha)$ é a densidade da normal padronizada, isto é,

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha^2/2}$$

Teorema 7.5 (Aproximação Normal à Binomial) *Seja $X \backsim Bin(n,p)$, e sejam a e b números inteiros fixos. Defina*

$$a^* = \frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}} \text{ e } b^* = \frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} P(a \leq X \leq b) = \int_{a^*}^{b^*} \phi(t)dt$$

TCL (Caso Geral)

Teorema 7.6 (Teorema Central do Limite) *Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ amostras independentes de uma densidade com valor esperado μ e variância σ^2. Seja*

$$X^* = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} P(a \leq X^* \leq b) = \int_a^b \phi(x)dx$$

isto é, a distribuição X^* se aproxima (em áreas) da distribuição normal padrão.

7.5 Aplicação á Estatística: Distribuição Amostral de uma Proporção

Não tem nada aqui (só aplicações) pode seguir...

8 Outras Distribuições Amostrais

8.1 Estimação de Parâmetros

Definição 42 *Um **estimador** $\hat{\theta}$ de um parâmetro θ (da distribuição X, isto é, da população) é uma função das observações da amostra, isto é*

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

Definição 43 *Um estimador $\hat{\theta}$ é **não-viesado** quando*

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

E o viés de um estimador é dado por

$$Viés(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Definição 44 *Um estimador $\hat{\theta}_1$ é dito **mais eficiente** do que $\hat{\theta}_2$ quando*

$$Var(\hat{\theta}_1) < Var(\hat{\theta}_2)$$

Definição 45 *Um(a sequencia de) estimador(es) $\hat{\theta}$ é dito **consistente** quando, $\forall \varepsilon > 0$ fixo,*

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| > \varepsilon) = 0$$

Definição 46 *Se*

$$\lim_{n \to \infty} Viés(\hat{\theta}) = 0 \ \ e \ \ \lim_{n \to \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$$

então $\hat{\theta}$ é consistente.

8.2 Estimadores pontuais da variância

Média Conhecida

Suponha que a média $\mu = E(X)$ é conhecida, e queremos saber o valor de $\sigma^2 = Var(X)$, um possível estimador para $E((X-\mu)^2)$ é

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{n}$$

Este é um estimador não-viesado.

Média Desconhecida

Definição 47 *A **variância da amostra** é um estimador*

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

Corolário 8.0.1 *S^2 é um **estimador** não viesado de σ^2, isto é*

$$E(S^2) = \sigma^2$$

Corolário 8.0.2

$$Var(S^2) = \frac{(n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^2}{n(n-1)}$$

onde

$$\mu_4 = E((X-\mu)^4)$$

Corolário 8.0.3 *Se $\mu_4 < \infty$, então S^2 e a variância verdadeira $\hat{\sigma}^2$ são ambos estimadores consistentes de σ^2*

8.3 Erro Quadrático Médio

Definição 48 *O **erro quadrático médio** de um estimador T de um parâmetro θ é*

$$EQM(T;\theta) = E((T-\theta)^2)$$

Corolário 8.0.4

$$EQM(T;\theta) = Var(T) + (Viés(T))^2$$

Distribuição Qui-quadrado

Lema 8.1 *Se $Z \backsim N(0,1)$, então $\mu_4(Z) = 3$.*

Lema 8.2 *Se X é normal, então*

$$Var(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} \quad e \quad Var(\sigma^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$$

Definição 49 *A distribuição $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ é também chamada de **qui-quadrado com n graus de liberdade**, cuja notação é*

$$Y \backsim X^2(n)$$

Corolário 8.2.1 *A distribuição de S^2 é determinada por*

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \backsim X^2(n-1)$$

Corolário 8.2.2 *Se $Y \backsim X^2(n)$, então $Z = \sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1}$ é aproximadamente $N(0,1)$ (especialmente para n grande).*

8.5 Distribuição t de Student

Definição 50 *Sejam $Z \backsim N(0,1)$ e $X \backsim X^2(n)$ variáveis independentes. A distribuição da variável*

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$$

*É chamado de **t de Student com n graus de liberdade** (notação: $T \backsim t(n)$)*

Corolário 8.2.3 *A densidade de $T \backsim t(n)$ é*

$$f(t) = TDen(t;n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

Corolário 8.2.4 *Se $T \backsim t(n)$, então*

$$E(T) = 0 \ \forall n \geq 2$$

$$Var(T) = \frac{n}{n-2} \ \forall n \geq 3$$

$$Med(T) = 0 \ \forall n \geq 1$$

Nos demais casos não existe.

Teorema 8.3 *Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma AAS da variável aleatória normal X. Então $\overline{X}$ e S^2 são independentes, e*

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \backsim t(n-1)$$

9 Dado em aula

Gerar variável aleatória

Teorema 9.1 *Seja F uma função de distribuição cumulativa continua e estritamente crescente.*

1. *Se* $U \backsim Unif(0,1)$ *e* $X = F^{-1}(U)$. *Então* X *é uma variável aleatória com função de distribuição cumulada* F.

2. *Se* X *é uma variável aleatória com função de distribuição cumulativa* F. *Então* $F(X) \backsim Unif(0,1)$.