Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de EDO

Rio de Janeiro
2021

1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem (22/02)

Vamos considerar a equação diferencial linear de Primeira ordem com $p(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em $I \subset \mathbb{R}$:

$$y' + p(x)y = g(x)$$

Se $g(x) = 0$, temos uma equação homogênea, de solução:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^c$$

Para o caso geral a ideia é multiplicar a equação por um fator integrante transformando-a numa forma imediatamente integrável. Seja $u(x)$ este fator integrante, então

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)g(x)$$

Chegamos que:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \int u(x)g(x)dx + c$$

e

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

2 Equação de Bernoulli e Equações separáveis (24/02)

Um exemplo de equação de Primeira ordem que não é linear é a **equação de Bernoulli**:

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Equações separáveis

São equações diferenciais do tipo

$$M(x) + N(x)\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \ (*)$$

Suponhamos $H_1 = \int M(x)dx$ e $H_2 = \int N(y)dy$, então $(*)$ tem como solução

$$H_1(x) + H_2(y) = c$$

que geralmente está na forma implícita.

3 Equações Diferenciais Exatas e Equações Diferenciais Não Exatas (01/03)

Equações Diferenciais Exatas

Considere a equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

E suponha que existe uma função f(x, y) tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y), \ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y), e \ f(x, y) = c$$

Então $f(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$, e a equação diferencial é **exata**.

Teorema 3.1 *Suponha que as funções M, N, M_y e N_x são contínuas na região $R : a < x < b, c < y < d$. Então a equação $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata em R se e somente se:*

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \ \text{em } R$$

Isto é, existe uma função $f(x, y) = c$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \ e \ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

se e somente se $M_y = N_x$

Equações Diferenciais Não Exatas

Em geral a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ não é exata, mas eventualmente é possível transformá-la numa equação diferencial exata multiplicando por um fator integrante.

Se $\frac{M_y - N_x}{N}$ for uma função só de x então podemos encontrar $u(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$ como fator integrante. Se $\frac{N_x - M_y}{M}$ for uma função só de y então podemos encontrar $u(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$ como fator integrante.

Exemplo: $ydx - xdy = 0$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \text{ não é exata}$$

Note que, $\frac{N_x - M_y}{N} = \frac{2}{x}$ depende apenas de x, e

$$u(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

Logo, a nova equação

$$\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0 \text{ é exata}$$

4 Problemas de diluição, Resfriamento de um corpo e Juros compostos (03/03)

Problemas de diluição

Considere um tanque contendo no estado inicial V_0 litros de salmoura com α **kg** de sal (pode ser $\alpha = 0$). Uma outra solução de salmoura contendo **c kg** quilos de sal por litro é derramada nesse tanque a uma taxa **a l/min**, enquanto simultaneamente a mistura bem agitada deixa o tanque a uma taxa de **b l/min**. Queremos determinar (Q(t)) a quantidade de sal (em quilos) no tempo t dentro do tanque. Temos que

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{b}{V_0 + at - bt} Q = ac$$

Resfriamento de um corpo

Sendo T a temperatura do corpo, T_a a temperatura no ambiente, a taxa de variação da temperatura do corpo é de $\frac{dT}{dt}$ e assim chegamos que a variação da temperatura do corpo é (se a temperatura do ambiente não muda):

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

Agora e se a T_a varia com o tempo (perdendo ou ganhando calor):

$$\frac{dT}{dt} + k(1 + A)T = k(T_{a,0} + AT_0)$$

onde

$$A = \frac{m_c}{m_a c_a}$$

com solução:

$$T(t) = \left(\frac{T_0 - T_{a,0}}{1 + A}\right) e^{k(1+A)t} + \frac{T_{a,0} + AT_0}{1 + A}$$

Juros Compostos

(Análogo aos casos anteriores), com solução

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{k}{r}(e^{rt} - 1)$$

5 Equações autônomas (08/03)

Uma classe de EDO importante são as quais não aparece a variável independente explicitamente. São as **equações autônomas**:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Tais equações tem solução análoga as que já vimos.

6 Existência e Unicidade (10/03)

Uma EDO sempre possui solução e ela é única (não é necessário provar aqui).

Video explicativo

7 Equações diferenciais lineares de segunda ordem (17/03)

Uma equação diferencial linear de segunda ordem, com condições iniciais é um equação do tipo

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y'_0 \tag{1}$$

Se $g(t) = 0$ a equação 1 é dita homogênea.

Teorema 7.1 *Quando a equação é homogênea onde $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas em um intervalo I, possui uma solução única $y(t)$ em I.*

Teorema 7.2 *Se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções, então a combinação linear $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ também é solução.*

Definição 1 *Considere as funções diferenciáveis $f(t)$ e $g(t)$ o determinante $\left\|\begin{matrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{matrix}\right\| = W(f,g)(t)$ é chamado de Wronskiano das funções $f(t)$ e $g(t)$.*

Definição 2 *Duas funções $f(t), g(t)$ são ditas linearmente dependentes em um intervalo I se existem constantes k_1 e k_2, com pelo menos uma delas não nulas tal que*

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0\ \forall t \in I$$

Definição 3 *As funções $f(t)$ e $g(t)$ são L.I. se $k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0\ \forall t \in I$ se e só se $k_1 = k_2 = 0$.*

Teorema 7.3 *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções diferenciáveis em I, e suponhamos que $W(f,g)(t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in I$. Então $f(t)$ e $g(t)$ são L.I.*

Teorema 7.4 *Suponhamos que* $y_1(t)$ *e* $y_2(t)$ *são duas soluções da equação diferencial de segunda ordem* $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$*, e que para* $t_0 \in I$ *temos que* $W(y_1, y_2) \neq 0$ *e as condições iniciais* $y(t_0) = y_0$ *e* $y'(t_0) = y'_0$*. Então podemos encontrar constantes* c_1 *e* c_2 *para os quais* $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ *satisfazem a equação 1 (Ou seja, data duas soluções particulares L.I. podemos achar a geral).*

Definição 4 *A equação característica de* $ay'' + by' + cy = 0$ *é a equação* $ak^2 + bk + c = 0$.

Uma equação do tipo $ay'' + by' + cy = 0$ possui solução de acordo com as raízes da equação característica $ak^2 + bk + c = 0$. Vamos dividir em casos.

1. $b^2 - 4ac > 0$, então temos duas raízes reais distintas k_1 e k_2 são L.I. e temos solução geral: $y(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 T}$

2. $b^2 - 4ac = 0$, nesse caso raízes iguais $k_1 = k_2 = k$, e temos as 2 soluções $y_1(t) = e^{kt}$ e $y_2(y) = te^{kt}$, onde $k = -\frac{b}{2a}$.

3. $b^2 - 4ac < 0$, neste caso as raízes k_1 e k_2 são complexas. Seja $k_1 = \alpha + i\beta$ e $k_2 = \alpha - i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos solução:

$$y_1(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

   Com solução real:

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

8 Equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas (24/03)

Considerando equações diferenciais de segunda ordem, não homogêneas e com coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{2}$$

, com a, b e c constantes e $g(t)$ continua. Seja $y_h(t)$ a solução de $ay'' + by' + cy = 0$.

Teorema 8.1 *A solução geral para a equação 2 é*

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

onde $y_p(t)$ é uma solução particular da equação não homogênea.

Precisamos encontrar uma solução particular temos 2 métodos para isso "método dos coeficientes a determinar" que infelizmente não funciona para todos os casos e o método de "Variação de parâmetros" que pode ser aplicado em todos os casos, mas é mais complexo. Começamos com o "método dos coeficientes a determinar".

Vamos pensar como uma solução particular: $y_p(t)$ = polinômio, e^{kt} ou $A\cos\alpha t + B\sin t$, dai podemos substituir na equação inicial, encontrando as constantes. Temos a $y_p(t)$. E então também temos $y(t)$.

9 Método de variação de parâmetros (29/03)

Tome $ay'' + by' + cy = g(x)$, onde a, b e c são constantes e g(x) é continua.

Sejam $y_1(x), y_2(x)$ soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea. Este sugere encontrar funções $u_1(x), u_2(x)$ tais que $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ seja uma solução da equação diferencial. Adicionando condições a $u_1(x), u_2(x)$:

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \tag{3}$$

Com isso temos que

$$y'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

$$a(u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)) = g(x) \tag{4}$$

E resolvendo o sistema 3 4 temos que

$$u_1 = \int \frac{-\frac{g}{a}y_2}{y_1y_2' - y_2y_1}dx$$

$$u_2 = \int \frac{\frac{g}{a}y_1}{y_1y_2' - y_2y_1}dx$$

A solução destas integrais, nos dará uma solução particular da equação diferencial não homogênea de segunda ordem.

10 A Transformada de Laplace (14/04)

Uma Transformada de Laplace é da forma

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)dt$$

onde $K(s,t)$ é uma função dada.
Aqui vamos usar a Transformada de Laplace definida como

$$\mathscr{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

com $t \geq 0$ e $K(s,t) = e^{-st}$
Em particular se

$$\mathscr{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{ct}dt$$

onde se $c \geq 0$ a integral diverge e caso contrario a integral converge.

Definição 5 *Uma função $f(t)$ é dita* ***seccionalmente contínua*** *em um intervalo $I \in \mathbb{R}$ se for contínua exceto em um número finito de pontos: $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$ além disso $\lim_{t \longrightarrow t_i} f(t) < M$.*

Teorema 10.1

1. *Se f(t) é seccionalmente contínua para $t \geq a$, se $\|f(t)\| \leq g(t)$ quando $t \geq M$ para alguma constante positiva M e se $\int_M^{\infty} g(t)dt$ converge então $\int_a^{\infty} f(t)dt$ também converge.*
2. *Por outro lado se $f(t) \geq g(t) \geq 0,\ t \geq M$ e se $\int_M^{\infty} g(t)dt$ divergente então $\int_a^{\infty} f(t)dt$ também diverge.*

Teorema 10.2

1. *Suponha que f seja seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$, para qualquer valor de $A > 0$.*
2. *Se $\|f(t)\| \leq Ke^{at}$, para $t \geq M$, $a \in \mathbb{R}$, com K e M necessariamente positivos e constantes reais, neste caso dizemos que f(t) é de ordem exponencial. Então a Transformada de Laplace $\mathscr{L}(f(t)) = F(s)$ para $s > a$.*

11 A Transformada de Laplace como uma aplicação linear (19/04)

Seja U = conjunto das funções seccionalmente contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, U é um espaço vetorial real com as operações de adição e produto por um escalar. V = conjunto das funções definidas em intervalos da forma $(s_0,\ \infty)$ ou $[s_0,\ \infty)$, $s_0 \geq -\infty$, V também é um espaço vetorial real cujas operações são adição e produto por um escalar.

Seja $\mathscr{L} :\ U\ \rightarrow V$, $\mathscr{L}$ é linear pela definição de Transformada de Laplace. Vale que:

1. $\mathscr{L}(f+g) = \mathscr{L}(f) + \mathscr{L}(g)$
2. $\mathscr{L}(\lambda f) = \lambda \mathscr{L}(f)$

Teorema 11.1 (Teorema de Lerch) *Sejam f e g seccionalmente contínuas e de ordem exponencial e suponhamos que exista um número real s_0 tal que $\mathscr{L}(f)(s) = \mathscr{L}(g)(s)$ $\forall s > s_0$. Então exceto em pontos de descontinuidade temos que $f(t) = g(t),\ \forall t > 0$*

Corolário 11.1.1 *Se $\mathscr{L}(y) = \varphi(s)$ a solução é essencialmente única, com isto $\mathscr{L}^{-1}(\varphi) = y$ se e só se $\mathscr{L}(y) = \varphi$*

Solução de Problemas de Valores Iniciais

Teorema 11.2 *Seja f contínua em $(0, \infty)$ e suponhamos que f' seja seccionalmente contínua e de ordem exponencial em $[0, \infty)$, então*

$$\mathscr{L}(f') = s(\mathscr{L}(f) - f(0^+),\ \textit{onde}\ f(0^+) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} f(t)$$

Caso Geral: $ay''+by'+cy = f(t)$, temos $y(s) - \dfrac{(as+b)y(0) + ay'(0) + F(s)}{as^2+bs+c}$, e simplificando $y(t) = \mathscr{L}^{-1}(y(s))$

Corolário 11.2.1 *Se f é uma função contínua cuja transformada de laplace é F(s), não existe outra função contínua tendo a mesma transformada.*

12 Funções Degrau (26/04)

Uma função degrau é do tipo $u_c(t) = 0$ se $t < c$ e $u_c(t) = 1$ se $t \geq c$. A transformada de Laplace de $u_c(t)$ é

$$\mathscr{L}(u_c(t)) = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t) dt = \frac{e^{-cs}}{s}, \ s > 0$$

A função g(t) é definida como uma translação de f por uma distancia c no sentido de t positivo isto é

$$g(t) = u_c(t) f(t - c)$$

Teorema 12.1 *Se $\mathscr{L}(f(t))$ existe para $s > a \geq 0$ e se c é uma constante positiva então*

$$\mathscr{L}(u_c(t) f(t - c)) = e^{-cs} \mathscr{L}(f(t)) = e^{-cs} F(s), \ s > a$$

Analogamente, se $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$, então $u_c(t) f(t-c) = \mathscr{L}^{-1}(e^{-cs} F(s))$.

Teorema 12.2 *Se $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ existe para $s > a$, $a \geq 0$ e se c é uma constante, então*

$$\mathscr{L}(e^{ct} f(t)) = F(s - c), \ s > a + c$$

Analogamente, se $f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s))$, então

$$e^{ct} f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F(s - c))$$

13 Equações Diferenciais sob a ação de funções descontínuas (28/04)

Aula de exercícios.

14 Funções impulso (03/05)

Queremos representar forças que agem por um período de tempo muito curto. Por exemplo $ay'' + by' + cy = g(t)$ onde g(t) é grande em um intervalo pequeno $t_0 - t < t < t_0 + t$, e é zero fora deste.

Definição 6 *Vamos usar a função $d_\tau(t)$ para definir uma "função"impulso unitário δ, que funciona como um impulso de tamanho 1 em $t = 0$, mas é zero para todos os valores de t diferentes de zero.*

$$\delta(t) = 0, \ t \neq 0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

obs.: A "função"δ definida acima é chamada de função δ de Dirac.

Um impulso unitário em um ponto arbitrário $t = t_0$ é dado por $\delta(t - t_0)$, então

$$\delta(t - t_0) = 0, \ t \neq t_0$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$$

Sua transformada de Laplace:

$$\mathscr{L}(\delta(t - t_0)) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \mathscr{L}(d_\tau(t - t)) = e^{-st_0}$$

E o produto de δ por uma função f contínua é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = \lim_{t \longrightarrow t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d_\tau(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$$

15 Convolução (05/05)

Pôde-se pensar em certas circunstancias a transformada de Laplace como produto de 2 outras transformadas.

Teorema 15.1 *Seja $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ e $G(s) = \mathscr{L}(g(t))$, para $s > a \geq 0$, então*

$$H(s) = F(s)\dot{G}(s) = \mathscr{L}(h(t))$$

onde

$$h(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

obs.: a função $h(s)$ é conhecida como a convolução de f e g; também denotamos $h(t) = f * g$

Corolário 15.1.1 *Propriedades de $f * g$:*

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$
4. $f * 0 = 0,\ 0 * f = 0$

Pelo teorema, vale que

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}h(t)dt = \mathscr{L}(h(t))$$

16 Sistemas Lineares (10/05)

Definição 7 *Definimos como a exponencial da matriz A*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Definição 8 *Definimos como norma do operador A*

$||A|| = max\{|Ax|, |x| \leq 1\} \subset I,$ *onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo compacto.*

e $||A^k|| \leq ||A||^k,\ k \in \mathbb{N}$

Corolário 16.0.1 *Sejam P, S, A operadores em $\mathbb{R}^n$*

1. *Se $Q = PAP^{-1}$, então $e^Q = Pe^AP^{-1}$*
2. *Se $SA = AS$, então $e^{S+A} = e^S \cdot e^A$*
3. $e^{-S} = (e^S)^{-1}$
4. *Para $n = 2$ temos que $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, então*

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$$

17 Teorema importante (12/05)

Lema 17.1

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}.A$$

Teorema 17.2 *Seja A um operador em $\mathbb{R}^n$. A única solução do problema do problema $X' = AX$, $X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n$ é $X(t) = e^{tA}X_0$, ou $X(t) = e^{t(PBP^{-1})}X(0)$, onde $A = PBP^{-1}$ (B é a matriz com os autovalores e P dos autovetores).*

18 Autovalores repetidos (17/05)

Quando os autovalores são repetidos devemos escrever B, como (no caso $n = 2$):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

podendo trocar o 1 por outro número diferente de 0.

E para encontrar o outro autovetor respectivo podemos tomas um genérico $v_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, e usamos que $v_1 + v_2$ é um autovetor. Para encontrar valores para a e b.

19 Autovalores complexos e Plano Traço-Determinante (19/05)

Se A tem autovalores complexos, segue um exemplo:

Exemplo:

Seja $\begin{aligned} x' &= -\tfrac{1}{2}x + y \\ y' &= -x - \tfrac{1}{2}y \end{aligned}$

Então,

$$X' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} X$$

Possui autovalores: $u = -\frac{1}{2} + i$, $\overline{u} = -\frac{1}{2} - i$
Resolvendo

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2} + i\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Chegamos em $y = ix$
Uma opção de autovetor é (com $x = 1$):

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então temos

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem solução

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{-\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Plano Traço-Determinante

Dado $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, podemos determinar como vai ser a solução do sistema olhando para o plano formado pelo traço de A e o determinante de A (imagem feita em aula):

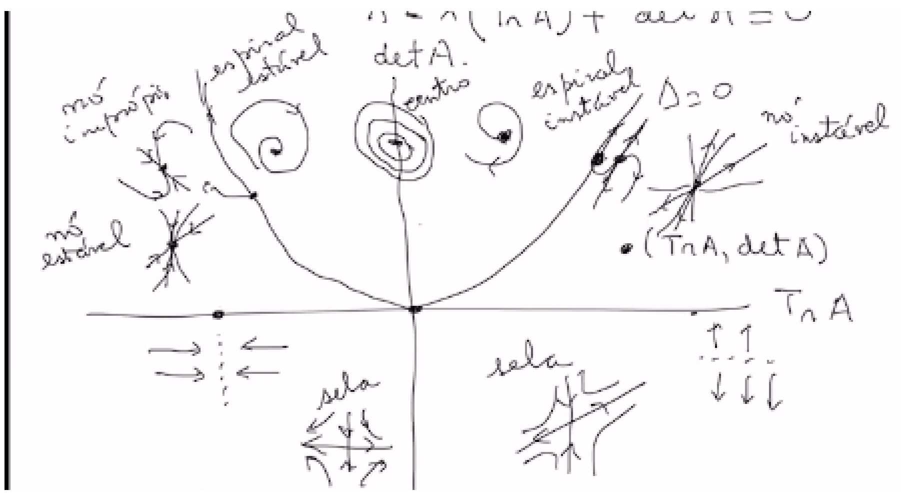

Figura 1: edo1