Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de EDO

Rio de Janeiro
2021

22/02 - Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Vamos considerar a equação diferencial linear de Primeira ordem com $p(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em $I \subset \mathbb{R}$:

$$y' + p(x)y = g(x)$$

Se $g(x) = 0$, temos uma equação homogênea, de solução:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^c$$

Para o caso geral a ideia é multiplicar a equação por um fator integrante transformando-a numa forma imediatamente integrável. Seja $u(x)$ este fator integrante, então

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)g(x)$$

Chegamos que:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \int u(x)g(x)dx + c$$

e

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

24/02 - Equação de Bernoulli e Equações separáveis

Um exemplo de equação de Primeira ordem que não é linear é a **equação de Bernoulli**:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Equações separáveis

São equações diferenciais do tipo

$$M(x) + N(x)\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \ (*)$$

Suponhamos $H_1 = \int M(x)dx$ e $H_2 = \int N(y)dy$, então $(*)$ tem como solução

$$H_1(x) + H_2(y) = c$$

que geralmente está na forma implícita.

01/03 - Equações Diferenciais Exatas e Equações Diferenciais Não Exatas

Equações Diferenciais Exatas

Considere a equação diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

E suponha que existe uma função f(x, y) tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y), \ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y), e \ f(x,y) = c$$

Então $f(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, e a equação diferencial é **exata**.

Teorema 0.1 *Suponha que as funções M, N, M_y e N_x são contínuas na região $R : a < x < b, c < y < d$. Então a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma equação diferencial exata em R se e somente se:*

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) \ \textit{em} \ R$$

Isto é, existe uma função $f(x,y) = c$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \ \textit{e} \ \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

se e somente se $M_y = N_x$

Equações Diferenciais Não Exatas

Em geral a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ não é exata, mas eventualmente é possível transformá-la numa equação diferencial exata multiplicando por um fator integrante.

Se $\dfrac{N_x - M_y}{N}$ for uma função só de x então podemos encontrar $u(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{N} dx}$ como fator integrante. Se $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ for uma função só de y então podemos encontrar $u(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$ como fator integrante.

Exemplo: $ydx - xdy = 0$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \text{ não é exata}$$

Note que, $\dfrac{N_x - M_y}{N} = \dfrac{2}{x}$ depende apenas de x, e

$$u(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

Logo, a nova equação

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0 \text{ é exata}$$