Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada

Wellington José

Resumo de Teoria da Probabilidade

Rio de Janeiro
2021

1 Conceitos Básicos

1.2 Modelos de Probabilidade

Definição 1 *Dois eventos A e B são chamados de **mutuamente excludentes** se não podem ocorrer simultaneamente, isto é, se $A \cap B = \emptyset$.*

Definição 2 *Uma **probabilidade** é uma função que associa a cada evento **A** um número **P(A)** de forma que:*

1. *Para todo evento A, $0 \leqslant Pr(A) \leqslant 1$;*
2. *$P(S) = 1$;*
3. *Se A e B são eventos mutuamente excludentes então*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Corolário 1.0.1 (Lei do Complemento)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Em outras palavras, a probabilidade de um evento ocorrer mais a probabilidade de ele não ocorrer dá 100%

Corolário 1.0.2 $P(\emptyset) = 0$, *isto é se um evento é impossível, sua probabilidade deve ser 0.*

Corolário 1.0.3 (Lei da Adição)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade Condicional

Definição 3 *Sejam A e B dois eventos com $P(A) \neq 0$. A probabilidade condicional de B dado A é*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Corolário 1.0.4 (Lei da Multiplicação)

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(B|A) \cdot P(B)$$

Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Corolário 1.0.5 (Lei da Probabilidade Total) *Suponha que $B_1, B_2, \ldots, B_n$ formam uma partição de S. Então*

Corolário 1.0.6 (Teorema de Bayes) *Suponha que $B_1, B_2, \cdots, B_n$ formam uma partição de S. Então*

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Independência

Definição 4 *Dois eventos (não impossíveis) A e B são ditos **independentes** se o conhecimento de um deles não afeta a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se*

$$P(B|A) = P(B)$$

2 Variáveis Aleatórias Discretas

2.1 Função de Probabilidade e Função de Probabilidade Conjunta

Definição 5 *Se X é uma variáveis aleatórias discretas, definimos a **função de probabilidade de X** por*

$$p_X(x) = P(X = x)$$

Definição 6 *Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, definimos a **função de probabilidade conjunta de X e Y** por*

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \text{ e } Y = y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias Discretas

Definição 7 *Dizemos que X e Y são variáveis* ***independentes*** *exatamente quando*

$$P(X = i \text{ e } Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$$

Corolário 2.0.1 *X e Y são independentes se, e somente se, a distribuição condicional de X dado $Y = j$ é idêntica à distribuição marginal de X (qualquer que seja y possível). De fato, temos:*

$$P(X = i|Y = j) = \frac{P(X = i \text{ e}}{P(Y = j} = P(X = i)$$

Função de Probabilidade Acumulada

Definição

Definição 8 *A* ***função de distribuição*** *(ou* ***função de probabilidade acumulada****) de X é definida por*

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Corolário 2.0.2 *Se F é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta:*

i. F é não-decrescente;

ii. $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$ (ou seja, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

iii. F é constante por partes (isto é, uma função-escada).

Corolário 2.0.3 *Se F é uma função de distribuição acumulada de uma variável aleatória, então*

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Quantis

Definição 9 *O q-quantil de uma variável aleatória X é qualquer valor x_q onde a função acumulada "acerta"por q ou "passa"por p. Formalmente:*

$$F(x_q-) \leq q \leq F(x_q)$$

2.3 Valor Esperança

Intuição e Definição

Definição 10 *Se X é uma variável aleatória discreta, definimos o* ***valor esperado*** *(ou esperança matemática, ou expectativa, ou média, ou valor médio) de X por*

$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot p(x)$$

isto é, $E(X)$ é uma média ponderada dos valores de X, com pesos iguais às respectivas probabilidades destes valores. Ocasionalmente, escrevemos $\mu_X = E(X)$

A esperança é uma medida de posição ou de tendência central (valores grandes de X acarretam $E(X)$ grande; valores pequenos de X acarretam $E(X)$ pequeno).

Propriedades (Caso Unidimensional)

Corolário 2.0.4 *Se $Y = f(X)$, temos*

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{x \in S} f(x) \cdot p(x)$$

Corolário 2.0.5 *Sejam a e b constantes quaisquer. Então:*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Propriedades (Caso Bidimensional)

Corolário 2.0.6 *Se $Z = f(X, Y)$ então*

$$E(Z) = E(f(X,Y)) = \sum_{x,y} f(x,y) p_{X,Y}(x,y)$$

Corolário 2.0.7 *Sejam a, b e c constantes quaisquer. Então*

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

Corolário 2.0.8 *Se X e Y são independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$.*