

**Fundação Getulio Vargas
Escola de Matemática Aplicada**

Wellington José

Resumo de Teoria da Probabilidade

Rio de Janeiro
2021

1 Conceitos Básicos

1.2 Modelos de Probabilidade

Definição 1 *Dois eventos A e B são chamados de **mutuamente exclusivos** se não podem ocorrer simultaneamente, isto é, se $A \cap B = \emptyset$.*

Definição 2 *Uma **probabilidade** é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de forma que:*

1. Para todo evento A , $0 \leq Pr(A) \leq 1$;
2. $P(S) = 1$;
3. Se A e B são eventos mutuamente excludentes então

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Corolário 1.0.1 (Lei do Complemento)

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Em outras palavras, a probabilidade de um evento ocorrer mais a probabilidade de ele não ocorrer dá 100%

Corolário 1.0.2 $P(\emptyset) = 0$, isto é se um evento é impossível, sua probabilidade deve ser 0.

Corolário 1.0.3 (Lei da Adição)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade Condicional

Definição 3 *Sejam A e B dois eventos com $P(A) \neq 0$. A probabilidade condicional de B dado A é*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Corolário 1.0.4 (Lei da Multiplicação)

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(B|A) \cdot P(B)$$

Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Corolário 1.0.5 (Lei da Probabilidade Total) *Suponha que B_1, B_2, \dots, B_n formam uma partição de S . Então*

Corolário 1.0.6 (Teorema de Bayes) *Suponha que B_1, B_2, \dots, B_n formam uma partição de S . Então*

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Independência

Definição 4 *Dois eventos (não impossíveis) A e B são ditos **independentes** se o conhecimento de um deles não afeta a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se*

$$P(B|A) = P(B)$$

2 Variáveis Aleatórias Discretas

2.1 Função de Probabilidade e Função de Probabilidade Conjunta

Definição 5 *Se X é uma variáveis aleatórias discretas, definimos a **função de probabilidade de X** por*

$$p_X(x) = P(X = x)$$

Definição 6 *Se X e Y são variáveis aleatórias discretas, definimos a **função de probabilidade conjunta de X e Y** por*

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \text{ e } Y = y)$$

Independência de Variáveis Aleatórias Discretas

Definição 7 Dizemos que X e Y são variáveis **independentes** exatamente quando

$$P(X = i \text{ e } Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$$

Corolário 2.0.1 X e Y são independentes se, e somente se, a distribuição condicional de X dado $Y = j$ é idêntica à distribuição marginal de X (qualquer que seja j possível). De fato, temos:

$$P(X = i | Y = j) = \frac{P(X = i \text{ e } Y = j)}{P(Y = j)} = P(X = i)$$

Função de Probabilidade Acumulada

Definição

Definição 8 A **função de distribuição** (ou **função de probabilidade acumulada**) de X é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Corolário 2.0.2 Se F é a função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta:

- i. F é não-decrescente;
- ii. $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$ (ou seja, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$);
- iii. F é constante por partes (isto é, uma função-escada).

Corolário 2.0.3 Se F é uma função de distribuição acumulada de uma variável aleatória, então

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Quantis

Definição 9 *O q -quantil de uma variável aleatória X é qualquer valor x_q onde a função acumulada "acerta" por q ou "passa" por p . Formalmente:*

$$F(x_q-) \leq q \leq F(x_q)$$

2.3 Valor Esperança

Intuição e Definição

Definição 10 *Se X é uma variável aleatória discreta, definimos o **valor esperado** (ou esperança matemática, ou expectativa, ou média, ou valor médio) de X por*

$$E(X) = \sum_{x \in S} x \cdot p(x)$$

isto é, $E(X)$ é uma média ponderada dos valores de X , com pesos iguais às respectivas probabilidades destes valores. Ocasionalmente, escrevemos $\mu_X = E(X)$

A esperança é uma medida de posição ou de tendência central (valores grandes de X acarretam $E(X)$ grande; valores pequenos de X acarretam $E(X)$ pequeno).

Propriedades (Caso Unidimensional)

Corolário 2.0.4 *Se $Y = f(X)$, temos*

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{x \in S} f(x) \cdot p(x)$$

Corolário 2.0.5 *Sejam a e b constantes quaisquer. Então:*

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Propriedades (Caso Bidimensional)

Corolário 2.0.6 *Se $Z = f(X, Y)$ então*

$$E(Z) = E(f(X, Y)) = \sum_{x,y} f(x, y)p_{X,Y}(x, y)$$

Corolário 2.0.7 *Sejam a , b e c constantes quaisquer. Então*

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$

Corolário 2.0.8 *Se X e Y são independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$.*

2.4 Variância e Outras Medidas de Dispersão

Definição

Definição 11 *Duas medidas de dispersão comuns são o **desvio médio**, definidos por*

$$DM(X) = E(|X - E(X)|)$$

*e a **variância**, definida por*

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

*Ao invés da variância, podemos medir a dispersão de X pelo seu **desvio-padrão***

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Corolário 2.0.9 *Sejam a e b constantes quaisquer. então*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

$$DM(aX + b) = |a|DM(X)$$

Corolário 2.0.10

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Corolário 2.0.11 *Se X e Y são independentes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$*

Desigualdade de Chebyshev

Teorema 2.1 (Desigualdade de Chebyshev) *Seja X uma variável aleatória com valor esperado $\mu = E(X)$ e desvio-padrão $\sigma = \sigma(X)$. Seja $P = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \mu| < k\sigma\}$ (isto é, P é o intervalo aberto $(x - k\sigma, x + k\sigma)$, um conjunto de valores de x que estão "perto da média" pelo menos k desvios-padrão). Então, para qualquer $k > 0$, tem-se*

$$P(X \notin P) \leq \frac{1}{k^2}$$

ou seja

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

2.5 Covariância e Correlação

Definição 12 A **covariância** entre duas variáveis X e Y é

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Corolário 2.1.1

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Corolário 2.1.2 Se X e Y são independentes, então $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

Definição 13 Outra medida de "variação conjunta" de duas variáveis X e Y é a **correlação**

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Um pouco de Álgebra Linear

Corolário 2.1.3 Para quaisquer variáveis aleatórias X e Y :

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

E se X e Y são independentes vale que $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Corolário 2.1.4

$$\text{Cov}(aX + b, Y) = \text{Cov}(X, Y)$$

Corolário 2.1.5

$$\rho(aX + b, Y) = \rho(X, Y) \text{ se } a > 0$$

$$\rho(aX + b, Y) = -\rho(X, Y) \text{ se } a < 0$$

3 Principais Distribuições Discretas

3.1 Distribuição

Se os valores assumidos por uma certa variável aleatória X são equiprováveis dizemos que X tem um **distribuição uniforme**.

3.2 Brevíssima Revisão de Análise Combinatória

Aqui trata-se de conteúdo do ensino médio em caso de dúvida [see](#)

3.3 Processo de Bernoulli

Definição 14 Um **processo de Bernoulli** é uma sequência de experimentos com as seguintes características:

1. Cada experimento tem apenas dois resultados possíveis, denominados **sucesso** e **falha**
2. Cada experimento tem a mesma probabilidade p de sucesso, e cada experimento é completamente independente de todos os outros.

Distribuição Binomial

Definição 15 Suponha que o número de experimentos a serem feitos é determinado digamos, n experimentos. Seja X a variável aleatória que representa o número de sucessos obtidos nestes n experimentos. Dizemos que X tem uma **distribuição binomial de parâmetros n e p** (e escrevemos $X \sim \text{Bin}(n, p)$). Nesse caso a função de probabilidade de X passa a se chamar : *BinomialDen*

$$P(X = k) = \text{BinomialDen}(k; n, p)$$

e chamaremos a função acumulada de *BinomialDist*:

$$P(X \leq k) = \text{BinomialDist}(k; n, p)$$

Corolário 3.0.1

$$\text{BinomialDen}(k; n, p) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\text{BinomialDist}(k; n, p) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Corolário 3.0.2 Seja $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Então

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq$$

Distribuição Geométrica

Definição 16 Suponha que realizamos um processo de Bernoulli com probabilidade de sucesso de cada prova $p > 0$. Seja X o número de tentativas feitas até o primeiro sucesso (inclusive). Dizemos que X tem uma **distribuição geométrica de parâmetro p** , isto é, $X \sim \text{Geom}(p)$

Corolário 3.0.3 Se $X \sim \text{Geom}(p)$, então

$$P(X = k) = \text{Geom}(k; p) = q^{k-1}p$$

$$P(X \leq k) = 1 - q^k$$

Corolário 3.0.4 Se $X \sim \text{Geom}(p)$, então

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$\text{Var}(X) = \frac{q}{p^2}$$

Distribuição Binomial Negativa

Definição 17 Suponha que o processo de Bernoulli é repetido até obter r sucessos. Seja X o número de tentativas feitas (incluindo o último sucesso). Dizemos que X tem uma **distribuição binomial negativa de parâmetros r e p** , isto é, $X \sim \text{NegBin}(r, p)$. Note que, a distribuição geométrica é um caso particular dessa.

Corolário 3.0.5 Se $X \sim \text{NegBin}(r, p)$, então para $k \geq r$ (k inteiro).

$$P(X = k) = p \cdot \text{BinomialDen}(r - 1; k - 1, p) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{rq}{p^2}$$

3.4 Processo de Poisson

Definição 18 A **distribuição de Poisson** dizemos $X \sim \text{Poi}(\mu)$ que no geral é $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Bin}(k; n, \frac{\mu}{n}) = \text{Poi}(k; \mu)$

Corolário 3.0.6 Se $X \sim \text{Poi}(\mu)$, tem-se

$$P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$E(X) = \text{Var}(X) = \mu$$

3.5 Distribuição Hipergeométrica

Definição 19 De uma caixa com r bolas "sucesso" e $N - r$ bolas "falha", extraímos sem reposição n bolas. Seja X o número de bolas sucesso. Dizemos que X tem **distribuição hipergeométrica com parâmetros n , r e N** , isto é, $X \sim \text{Hip}(n, r, N)$.

Corolário 3.0.7 Se $X \sim \text{Hip}(n, r, N)$, então

$$P(X = k) = \text{Hip}(k; n, r, N) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq \frac{N-m}{N-1}$$

$$\text{onde } p = \frac{r}{N}$$

4 Variáveis Aleatórias Contínuas

4.1 Distribuições Contínuas

Função de Distribuição Acumulada

Definição 20 A **função de distribuição acumulada (função de distribuição; fda)** de uma variável aleatória X é

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Corolário 4.0.1 Se $F(x)$ é a f.d.a. de uma variável real X , então

F é não-decrescente

$$F(-\infty) = P(X \leq -\infty) = 0 \quad \text{e} \quad F(+\infty) = P(X \in \mathbb{R}) = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Note que, no caso contínuo $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$, pois $P(X = a) = 0$.

Quantis

Definição 21 *O q -quantil de uma variável aleatória X é qualquer valor x_q onde a função acumulada "acerta" q . Formalmente $F(x_q) = q$*

Função Densidade de Probabilidade

Definição 22 *A **função densidade de probabilidade (fdp)** de X é a derivada da função acumulada:*

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'_X(x)$$

Corolário 4.0.2 *Dada a f.d.p. de uma variável aleatória contínua X , encontramos probabilidades pela fórmula*

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Em particular, como $F(-\infty) = 0$, note que

$$F(x) = P(X \leq x) = \lim_{-\infty}^x f(t)dt$$

Corolário 4.0.3 *Se $f(x)$ é a f.d.p. de uma variável aleatória real X , então para todo x real:*

$$0 \leq f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

Definição 23 *A **moda** de uma variável aleatória é o valor x onde a densidade $f(x)$ é máxima.*

Funções de Variáveis Aleatórias Contínuas

Seja X uma variável aleatória de densidade $f(x)$ e seja $Y = h(X)$ onde h é uma função crescente. Então a densidade $g(y)$ da variável Y satisfaz

$$g(y) = \frac{f(x)}{h'(x)} = \frac{f(x)}{\frac{dy}{dx}}$$

onde $x = h^{-1}(y)$, ou seja,

$$g(y)dy = f(x)dx$$

Valor Esperado e Variância

Valor Esperado

Definição 24 Se X é uma variável com densidade $f(x)$, definimos seu **valor esperado** (**valor médio**, **esperança**), por

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Corolário 4.0.4 Se $Y = h(X)$, então

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

Corolário 4.0.5 Sejam a e b constantes quaisquer. Então

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Variância

Definição 25 A **variância** e o **desvio-padrão** de uma variável aleatória X com densidade $f(x)$ e média $E(X) = \mu$ são

$$Var(X) = E((X - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Corolário 4.0.6

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Teorema 4.1 (Desigualdade de Chebyshev) Esse teorema está definido em 2.4, de forma igual.