

**Fundação Getulio Vargas**  
**Escola de Matemática Aplicada**

**Wellington José**

**Resumo de EDO**

Rio de Janeiro  
2021

# 1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem (22/02)

Vamos considerar a equação diferencial linear de Primeira ordem com  $p(x)$  e  $g(x)$  funções contínuas em  $I \subset \mathbb{R}$ :

$$y' + p(x)y = g(x)$$

Se  $g(x) = 0$ , temos uma equação homogênea, de solução:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^c$$

Para o caso geral a ideia é multiplicar a equação por um fator integrante transformando-a numa forma imediatamente integrável. Seja  $u(x)$  este fator integrante, então

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)g(x)$$

Chegamos que:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \int u(x)g(x)dx + c$$

e

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

# 2 Equação de Bernoulli e Equações separáveis (24/02)

Um exemplo de equação de Primeira ordem que não é linear é a **equação de Bernoulli**:

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

## Equações separáveis

São equações diferenciais do tipo

$$M(x) + N(x) \frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (*)$$

Suponhamos  $H_1 = \int M(x)dx$  e  $H_2 = \int N(y)dy$ , então  $(*)$  tem como solução

$$H_1(x) + H_2(y) = c$$

que geralmente está na forma implícita.

### 3 Equações Diferenciais Exatas e Equações Diferenciais Não Exatas (01/03)

#### Equações Diferenciais Exatas

Considere a equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

E suponha que existe uma função  $f(x, y)$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y), \text{ e } f(x, y) = c$$

Então  $f(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ , e a equação diferencial é **exata**.

**Teorema 3.1** *Suponha que as funções  $M, N, M_y$  e  $N_x$  são contínuas na região  $R : a < x < b, c < y < d$ . Então a equação  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  é uma equação diferencial exata em  $R$  se e somente se:*

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \text{ em } R$$

*Isto é, existe uma função  $f(x, y) = c$ , tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

*se e somente se  $M_y = N_x$*

## Equações Diferenciais Não Exatas

Em geral a equação  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  não é exata, mas eventualmente é possível transformá-la numa equação diferencial exata multiplicando por um fator integrante.

Se  $\frac{M_y - N_x}{N}$  for uma função só de  $x$  então podemos encontrar  $u(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$  como fator integrante. Se  $\frac{N_x - M_y}{M}$  for uma função só de  $y$  então podemos encontrar  $u(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$  como fator integrante.

**Exemplo:**  $ydx - xdy = 0$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = -1 \text{ não é exata}$$

Note que,  $\frac{N_x - M_y}{N} = \frac{2}{x}$  depende apenas de  $x$ , e

$$u(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x^2}$$

Logo, a nova equação

$$\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0 \text{ é exata}$$

## 4 Problemas de diluição, Resfriamento de um corpo e Juros compostos (03/03)

### Problemas de diluição

Considere um tanque contendo no estado inicial  $V_0$  litros de salmoura com  $\alpha$  **kg** de sal (pode ser  $\alpha = 0$ ). Uma outra solução de salmoura contendo **c kg** quilos de sal por litro é derramada nesse tanque a uma taxa **a l/min**, enquanto simultaneamente a mistura bem agitada deixa o tanque a uma taxa de **b l/min**. Queremos determinar  $(Q(t))$  a quantidade de sal (em quilos) no tempo  $t$  dentro do tanque. Temos que

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{b}{V_0 + at - bt} Q = ac$$

## Resfriamento de um corpo

Sendo  $T$  a temperatura do corpo,  $T_a$  a temperatura no ambiente, a taxa de variação da temperatura do corpo é de  $\frac{dT}{dt}$  e assim chegamos que a variação da temperatura do corpo é (se a temperatura do ambiente não muda):

$$T = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

Agora e se a  $T_a$  varia com o tempo (perdendo ou ganhando calor):

$$\frac{dT}{dt} + k(1 + A)T = k(T_{a,0} + AT_0)$$

onde

$$A = \frac{m_c}{m_a c_a}$$

com solução:

$$T(t) = \left( \frac{T_0 - T_{a,0}}{1 + A} \right) e^{k(1+A)t} + \frac{T_{a,0} + AT_0}{1 + A}$$

## Juros Compostos

(Análogo aos casos anteriores), com solução

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{k}{r}(e^{rt} - 1)$$

## 5 Equações autônomas (08/03)

Uma classe de EDO importante são as quais não aparece a variável independente explicitamente. São as **equações autônomas**:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Tais equações tem solução análoga as que já vimos.

## 6 Existência e Unicidade (10/03)

Uma EDO sempre possui solução e ela é única (não é necessário provar aqui).

[Video explicativo](#)

## 7 Equações diferenciais lineares de segunda ordem (17/03)

Uma equação diferencial linear de segunda ordem, com condições iniciais é um equação do tipo

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \quad (1)$$

Se  $g(t) = 0$  a equação 1 é dita homogênea.

**Teorema 7.1** *Quando a equação é homogênea onde  $p(t)$  e  $q(t)$  são funções contínuas em um intervalo  $I$ , possui uma solução única  $y(t)$  em  $I$ .*

**Teorema 7.2** *Se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções, então a combinação linear  $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$  também é solução.*

**Definição 1** *Considere as funções diferenciáveis  $f(t)$  e  $g(t)$  o determinante 
$$\begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = W(f, g)(t)$$
 é chamado de Wronskiano das funções  $f(t)$  e  $g(t)$ .*

**Definição 2** *Duas funções  $f(t), g(t)$  são ditas linearmente dependentes em um intervalo  $I$  se existem constantes  $k_1$  e  $k_2$ , com pelo menos uma delas não nulas tal que*

$$k_1f(t) + k_2g(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

**Definição 3** *As funções  $f(t)$  e  $g(t)$  são L.I. se  $k_1f(t) + k_2g(t) = 0 \quad \forall t \in I$  se e só se  $k_1 = k_2 = 0$ .*

**Teorema 7.3** *Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  funções diferenciáveis em  $I$ , e suponhamos que  $W(f, g)(t_0) \neq 0$  para algum  $t_0 \in I$ . Então  $f(t)$  e  $g(t)$  são L.I.*

**Teorema 7.4** *Suponhamos que  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são duas soluções da equação diferencial de segunda ordem  $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ , e que para  $t_0 \in I$  temos que  $W(y_1, y_2) \neq 0$  e as condições iniciais  $y(t_0) = y_0$  e  $y'(t_0) = y'_0$ . Então podemos encontrar constantes  $c_1$  e  $c_2$  para os quais  $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  satisfazem a equação 1 (Ou seja, data duas soluções particulares L.I. podemos achar a geral).*

**Definição 4** *A equação característica de  $ay'' + by' + cy = 0$  é a equação  $ak^2 + bk + c = 0$ .*

Uma equação do tipo  $ay'' + by' + cy = 0$  possui solução de acordo com as raízes da equação característica  $ak^2 + bk + c = 0$ . Vamos dividir em casos.

1.  $b^2 - 4ac > 0$ , então temos duas raízes reais distintas  $k_1$  e  $k_2$  são L.I. e temos solução geral:  $y(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}$
2.  $b^2 - 4ac = 0$ , nesse caso raízes iguais  $k_1 = k_2 = k$ , e temos as 2 soluções  $y_1(t) = e^{kt}$  e  $y_2(t) = te^{kt}$ , onde  $k = -\frac{b}{2a}$ .
3.  $b^2 - 4ac < 0$ , neste caso as raízes  $k_1$  e  $k_2$  são complexas. Seja  $k_1 = \alpha + i\beta$  e  $k_2 = \alpha - i\beta$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Temos solução:

$$y_1(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

Com solução real:

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$$

## 8 Equações diferenciais de segunda ordem não homogêneas (24/03)

Considerando equações diferenciais de segunda ordem, não homogêneas e com coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{2}$$

, com  $a, b$  e  $c$  constantes e  $g(t)$  continua. Seja  $y_h(t)$  a solução de  $ay'' + by' + cy = 0$ .

**Teorema 8.1** *A solução geral para a equação 2 é*

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

onde  $y_p(t)$  é uma solução particular da equação não homogênea.

Precisamos encontrar uma solução particular temos 2 métodos para isso "método dos coeficientes a determinar" que infelizmente não funciona para todos os casos e o método de "Variação de parâmetros" que pode ser aplicado em todos os casos, mas é mais complexo. Começamos com o "método dos coeficientes a determinar".

Vamos pensar como uma solução particular:  $y_p(t) = \text{polinômio}, e^{kt}$  ou  $A \cos \alpha t + B \sin t$ , daí podemos substituir na equação inicial, encontrando as constantes. Temos a  $y_p(t)$ . E então também temos  $y(t)$ .

## 9 Método de variação de parâmetros (29/03)

Tome  $ay'' + by' + cy = g(x)$ , onde a, b e c são constantes e  $g(x)$  é contínua.

Sejam  $y_1(x), y_2(x)$  soluções linearmente independentes da equação diferencial homogênea. Este sugere encontrar funções  $u_1(x), u_2(x)$  tais que  $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$  seja uma solução da equação diferencial. Adicionando condições a  $u_1(x), u_2(x)$ :

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \quad (3)$$

Com isso temos que

$$y'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)$$

$$a(u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x)) = g(x) \quad (4)$$

E resolvendo o sistema 3 4 temos que

$$u_1 = \int \frac{-\frac{g}{a}y_2}{y_1y_2' - y_2y_1'} dx$$
$$u_2 = \int \frac{\frac{g}{a}y_1}{y_1y_2' - y_2y_1'} dx$$

A solução destas integrais, nos dará uma solução particular da equação diferencial não homogênea de segunda ordem.