1.2

- espaço amostral
- experimento aleatório
- Lei da adição
- Lei do Complemento

1.3

- Sejam A e B dois eventos com $P(A) \neq 0$. A probabilidade de B dado A é
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
- $P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$
- Teorema de Bayes: Suponha $B_1, \dots, B_n$ uma partição de S. Então:
$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i).P(B_i)}{P(A|B_1).P(B_1) + \dots + P(A|B_n).P(B_n)}$$
- 2 eventos possíveis A e B são ditos independentes quando
$$P(B|A) = P(B)$$

2.1

- Se X é uma variável aleatória discreta a função de probabilidade de X é
$$p_X(x) = P(X = x)$$
- No geral se $A_1, \dots, A_n$ variáveis aleatória discretas
$$p_{A_1,\dots,A_m}(a_1, \dots, a_m) = P(A_1 = a_1, \dots, A_m = a_m)$$
- X e Y são independentes quando
$$P(X = i \text{ e } Y = j) = P(X = i).P(Y = j)$$

2.2

- A função de distribuição (ou função de probabilidade acumulada) de X é definida por
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$
- F é constante por partes.
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

2.3

- O valor esperado de X é:
$$E(X) = \sum_{x \in S} x.p(x)$$
- Se $Y = f(X)$
$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{x \in S} f(x).p(x)$$
- $E(aX + b) = a\,E(X) + b$
- $Z = f(X, Y)$
$$E(Z) = E(f(X,Y)) = \sum_{x,y} f(x,y)\,p_{X,Y}(x,y)$$
- Se X e Y são independentes
$$E(XY) = E(X).E(Y)$$

2.4

- desvio médio
$$DM(X) = E(|X - E(X)|)$$
- variância
$$Var(X) = E((X - E(X))^2)$$
- desvio-padrão
$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$
- $Var(aX + b) = a^2\,Var(X)$
- $\sigma(aX + b) = |a|.\sigma(X)$
- $DM(aX + b) = |a|.DM(X)$
- $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- Se X e Y são independentes
$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$
- Seja X uma variável aleatória com $\mu = E(X)$ e $\sigma = \sigma(X)$. Seja $P = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \mu| < k\sigma\}$. Então $\forall k > 0$
$$P(X \in P) \leq 1/k^2$$

2.5

- $Cov(X,Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))]$
- $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$
- Se X e Y são independentes
$$Cov(X,Y) = 0$$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$
- $Cov(aX + b, Y) = a.Cov(X,Y)$

3.3

- Processo de Bernoulli: é uma sequencia de experimentos onde
  - i) Cada um ou tem sucesso ou falha
  - ii) Mesmas probabilidades de sucesso e independentes
- Se X é o numero de sucessos em n experimentos com probabilidade p escrevemos $X \sim Bin(n,p)$
$$P(X = k) = \text{BinomialDen}(k; n, p)$$
e a função acumulada
$$P(X \leq k) = \text{BinomialDist}(k; n, p)$$
- $\text{BinomialDen}(k; n, p) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- $\text{BinomialDist}(k; n, p) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- Seja $X \sim Bin(n,p)$
$$E(X) = np$$
$$Var(X) = npq$$
- Seja X o número de tentativas feitas até o primeiro sucesso (inclusive) então $X \sim Geom(p)$
$$P(X = k) = Geom(k; p) = q^{k-1}p$$
$$P(X \leq k) = 1 - q^k$$

- Se $X \sim Geom(p)$
$$E(X) = 1/p \quad e \quad Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

- Suponha que o processo de Bernoulli é repetido até o r-ésimo sucesso. Seja X o número de tentativas, então $X \sim NegBin(r,p)$

- Se $X \sim NegBin(r,p)$, então para $K \geq r$
$$P(X=K) = p \ BinomialDen(r-1; K-1, p) = \binom{K-1}{r-1} p^r q^{K-r}$$
$$E(X) = r/p$$
$$Var(X) = rq/p^2$$

3.4

- $\lim_{n\to\infty} Bin(K; n, \frac{\mu}{n}) = Poi(K; \mu)$

- Se $X \sim Poi(\mu)$
$$P(X=K) = \frac{\mu^K}{K!} e^{-\mu}$$
$$E(X) = Var(X) = \mu$$

3.5

- Seja r bolas "sucesso" e $N-r$ bolas "falha", extraímos sem reposição n bolas. Seja X o número de bolas sucesso. $X \sim Hip(n, r, N)$

- Se $X \sim Hip(n,r,N)$ (onde $p = \frac{r}{N}$)
$$P(X=k) = Hip(k; n, r, N) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$
$$E(X) = np$$
$$Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$$

4.1

- A função de distribuição acumulada de X é
$$F_X(x) = P(X < x)$$

- F é não-decrescente
- $F(-\infty) = 0$ e $F(+\infty) = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = F(a) - F(b)$

- O q-quantil de uma variável aleatória contínua X é qualquer valor x_q onde a função "aceita" q.
$$F(x_q) = q$$

- A função densidade de probabilidade (fdp) de X é a derivada da função acumulada
$$f_X(x) = F_X'(x)$$

- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt$

- Se a $f(x)$ é a f.d.p. de um X real
$$0 \leq f(x)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = 1$$

- A moda de uma variável aleatória é o valor x onde $f(x)$ é máximo.

- Seja X uma variável aleatória de densidade $f(x)$ e seja $Y = h(x)$ onde h é crescente, então $g(Y)$ de Y satisfaz
$$g(Y) = \frac{f(x)}{h'(x)} = \frac{f(x)}{\frac{dY}{dx}}$$
$$g(Y)\, dY = f(x)\, dx \quad (\text{pois } x = h^{-1}(Y))$$

4.2

- Se X é uma variável aleatória com densidade $f(x)$
$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

- Se $Y = h(x)$
$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$$

- A variância de uma variável aleatória X com densidade $f(x)$
$$Var(X) = E((X-E(X))^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-E(X))^2 f(x)\, dx$$

- (Desigualdade de Chebyshev) Seja X uma variável aleatória com $\mu = E(X)$ e $\sigma = \sigma(X)$
$$P(\mu - K\sigma < X < \mu + K\sigma) \geq 1 - 1/K^2$$
ou seja
$$P(|X-\mu| > K\sigma) \leq 1/K^2$$