HW 2

1) Seja $\pi(x) = \tilde{\pi}(x)/Z_\pi$ alguma função de densidade em $\mathbb{R}$. Prove que se (U, V) é uniformemente distribuído em $G = \{(u,v); 0 \le u \le \sqrt{\tilde{\pi}(v/u)}\}$ então V/U é distribuído de acordo com π. ~~$\tilde{\pi}$ é uma função de densidade~~.

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{Area(G)}$$

Podemos nos concentrar em $X = V/U$ e $U = u$. Daí $V = Xu$.
O Jacobiano para a transformação

$$J = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ x & u \end{matrix} \right\| = u.$$

Daí, a densidade conjunta de x e u é

$$f_{U,X}(u,x) = f_{U,V}(u, ux) \cdot |u|$$

Então
$$f_X(x) = \int_0^{\sqrt{\tilde{\pi}(x)}} f_{U,V}(u, xu)\, u\, du$$

$$= \frac{1}{Area(G)} \int_0^{\sqrt{\tilde{\pi}(x)}} u\, du = \frac{1}{Area(G)} \frac{\tilde{\pi}(x)}{2}.$$

Evaluating the Area(G):

$$Area(G) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\sqrt{\tilde{\pi}(v/u)}} 1\, du\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\sqrt{\tilde{\pi}(x)}} u\, du\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\pi}(x)}{2} dx = \frac{Z_\pi}{2}$$

Então,

$$f_X(x) = \frac{1}{Area(G)} \cdot \frac{\tilde{\pi}(x)}{2} = \frac{2}{Z_\pi} \frac{\tilde{\pi}(x)}{2} = \frac{\tilde{\pi}(x)}{Z_\pi} = \pi(x).$$

tilibra

2

(2) A partir do problema anterior. Mostre que se $\sup_x \sqrt{\tilde{\pi}(x)} < \infty$ e $\sup_x \sqrt{\tilde{\pi}(x)} . |x| < \infty$, então $\mathcal{C} \subseteq R$ onde

$$R = \left[0, \sup_x \sqrt{\tilde{\pi}(x)}\right] \times \left[\inf_x x\sqrt{\tilde{\pi}(x)}, \sup_x x\sqrt{\tilde{\pi}(x)}\right]$$

Sugira uma maneira de amostrar uniformemente de $\mathcal{C}$.

Provar que $\mathcal{C} \subseteq R$ é equivalente a provar que

$$U \subset \left[0, \sup_x \sqrt{\tilde{\pi}(x)}\right] \text{ e } V \subset \left[\inf_x x\sqrt{\tilde{\pi}(x)}, \sup_x x\sqrt{\tilde{\pi}(x)}\right]$$

- Por definição $\forall u \in U$ é t.q. $u \geq 0$.
- Também por definição $\forall u \in U$, $u \leq \sqrt{\tilde{\pi}(\frac{v}{u})}$, $\forall v \in R$

$$\Updownarrow$$

$$\forall u \in U,\ u \leq \sup_v \sqrt{\tilde{\pi}(\tfrac{v}{u})} = \sup_x \sqrt{\tilde{\pi}(x)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sup_{u \in U} u \leq \sup_x \sqrt{\tilde{\pi}(x)}$$

- Desde que $v = ux$, temos que

$$|v| = |ux| \leq |u||x| \leq \sqrt{\tilde{\pi}(x)} . |x|$$

Daí,

$$\sup_x |v| \leq \sup_x |x| \sqrt{\tilde{\pi}(x)}$$

- Analogamente,

$$\inf_x |v| \geq \inf_x |x| \sqrt{\tilde{\pi}(x)}.$$

Para amostrar uniformemente:

1. Amostra (u, v) uniformemente no ~~triag~~ retângulo R:

- $u \sim \text{Unif}[0, \sup \sqrt{\tilde{\pi}(x)}]$
- $v \sim \text{Unif}[\inf_x x\sqrt{\tilde{\pi}(x)}, \sup_x x\sqrt{\tilde{\pi}(x)}]$.

2. Aceitamos se

$$u \leq \sqrt{\tilde{\pi}(v/u)}.$$

Se não, rejeitamos a amostra e voltamos ao passo 1.

Assim $\frac{v}{u} \sim \pi(x)$.

③ Seja $\tilde{\pi}(x) = \exp(-x^2/2)$. Usando os resultados das questões anteriores (① e ②), proponha um método para amostrar $\tilde{\pi}(x)$.

Pelo o resultado da questão ②, temos que

- $\sup_x \sqrt{\tilde{\pi}(x)} = \sqrt{\tilde{\pi}(0)} = 1$

- $\inf_x x\sqrt{\tilde{\pi}(x)} = 0$

- $\sup_x x\sqrt{\tilde{\pi}(x)} = (\sqrt{2})\sqrt{\exp(-(\sqrt{2})^2/2)} = (\sqrt{2})\sqrt{\exp(-1)} = \sqrt{2}\exp(-\frac{1}{2})$

Daí, $R = [0, 1] \times [0, \sqrt{2}\exp(-\frac{1}{2})]$.

Basta,

① Amostrar (U, V) uniformemente em R:
- $u \sim Unif[0, 1]$
- $v \sim Unif[0, \sqrt{2}\exp(-\frac{1}{2})]$

② Aceitar se
$$u \leq \sqrt{\tilde{\pi}(v/u)}.$$
Se não, repetir ①.

Assim $\frac{v}{u} \sim \tilde{\pi}$

④ Considere 2 densidades de probabilidade π, q em $\mathcal{X}$ tais que $\pi(x) > 0 \Rightarrow q(x) > 0$ e assuma que podemos amostrar q facilmente. Sempre que $\pi(x)/q(x) \leq M < \infty$ para qualquer $x \in \mathcal{X}$, é possível usar rejection sampling para amostrar π. Quando M é desconhecido ou quando esta condição não é satisfeita, podemos usar importance sampling para aproximar as expectativas com respeito a π. No entanto, pode ser que a maioria das amostras de q tenham pesos de importância pequenos.

O rejection control é um método que combina rejection e importance. Ele se baseia em um valor limite arbitrário $c > 0$. Introduzimos a notação $w(x) = \pi(x)/q(x)$ e

$$Z_c = \int_{\mathcal{X}} \min\{1, w(x)/c\}\, q(x)\, dx.$$

O método de rejection control procede de forma que

- (a) Gerar independentemente $X \sim q$, $U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ até $U < \min\{1, \frac{w(X)}{c}\}$.
- (b) Retorna X.

Dê a expressão para densidade de probabilidade de $q^*(x)$, as amostras aceitas.

Temos $$P(X \in A, X \text{ ser aceito}) = \int_A \int_0^1 \mathbb{I}_{(0, \min\{1, \frac{w(x)}{c}\})}(u)\, q(x)\, du\, dx$$
$$= \int_A \min\{1, \frac{w(x)}{c}\}\, q(x)\, dx$$

então

$$q^*(x) = \frac{\min\{1, \frac{w(x)}{c}\}\, q(x)}{Z_c}.$$

⑤ Do problema anterior, prove que

$$\mathbb{E}_{q^*}\left([w^*(X)]^2\right) = Z_c\, \mathbb{E}_q\left(\max\{w(X), c\} w(X)\right)$$

onde $w^*(x) = \pi(x)/q^*(x)$.

Temos que

$$\frac{\pi(x)}{q^*(x)} = Z_c \frac{\pi(x)}{\min\{1, w(x)/c\} q(x)}$$
$$= Z_c w(x) \cdot \frac{1}{\min\{1, \frac{w(x)}{c}\}}$$
$$= Z_c \cdot \max\{w(x), c\}$$

Daí,

$$\mathbb{E}_{q^*}\left([w^*(x)]^2\right) = \int_X \frac{\pi^2(x)}{q^{*2}(x)} \cdot q^*(x)\, dx$$
$$= \int_X \frac{\pi^2(x)}{q^*(x)}\, dx$$
$$= Z_c \int_X \max\{w(x), c\}\, \pi(x)\, dx$$
$$= Z_c \int_X \max\{w(x), c\}\, w(x) \cdot q(x)\, dx$$
$$= Z_c\, \mathbb{E}_q\left(\max\{w(x), c\}\, w(X)\right).$$

⑥ Considerando as questões ④ e ⑤. Estabeleça que

$$\mathbb{E}_q(\min\{w(X),c\})\mathbb{E}_q(\max\{w(X),c\}w(X)) \leq$$

$$\leq \mathbb{E}_q(\min\{w(X),c\}\max\{w(X),c\}w(X))$$

Sendo $h(w_1,w_2) = [\min(w_1,c) - \min(w_2,c)][w_1\max(w_1,c) - w_2\max(w_2,c)] \geq 0$

Podemos distinguir 3 casos

(i) $\min(w_1,w_2) > c$, então $h(w_1,w_2) = 0$.

(ii) $c > \max(w_1,w_2)$, então $h(w_1,w_2) = c(w_1-w_2)^2 \geq 0$

(iii) c está entre w_1 e w_2, sem perda de generalidade, vamos assumir $w_1 \leq w_2$, daí

$$h(w_1,w_2) = (c-w_1)(w_2^2 - cw_1) \geq 0.$$

Portanto, temos

$$\iint h(w(x),w(y))\, q(x)q(y)\,dx\,dy$$

$$= 2\int \min(w(x),c)\,w(x)\max(w(x),c)\,q(x)\,dx$$

$$- 2\left(\int \min(w(x),c)q(x)\,dx\right)\left(\int w(x)\max(w(x),c)q(x)\,dx\right)$$

$$\geq 0$$

Daí,

$$\mathbb{E}_q(\min(w(x),c))\mathbb{E}_q(\max(w(x),c)w(x))$$

$$\leq \mathbb{E}_q(\min(w(x),c)\max(w(x),c)\,w(x)).$$

(7) Deduza das questões (4), (5) e (6) que

$$\mathrm{Var}_{g^*}(w^*(X)) \leq \mathrm{Var}_g(w(X))$$

Uma vez que $\mathbb{E}_{g^*}(w^*(x)) = \mathbb{E}_g(w(X)) = 1$, é equivalente a provar que

$$\mathbb{E}_{g^*}([w^*(X)]^2) \leq \mathbb{E}_g([w(X)]^2).$$

Para isso,

$$\mathbb{E}_{g^*}([w^*(x)]^2) \overset{(5)}{=} Z_c \mathbb{E}_g(\max(w(X), c)\, w(X))$$

$$= c^{-1} \mathbb{E}_g(\cancel{\max}\ \min(w(X), c))\, \mathbb{E}_g(\max(w(X), c)\, w(X))$$

$$\leq c^{-1} \mathbb{E}_g(\min(w(X), c) \max(w(X), c)\, w(X))$$

$$= \mathbb{E}_g([w(X)]^2).$$

(8) Queremos usar Monte Carlo métodos para aproximar a integral

$$I = \int_X \phi(x)\,\pi(x)\,dx$$

onde $\phi: X \to \mathbb{R}$ e π é uma densidade de probabilidade em X.
Assuma que temos acesso a uma densidade de probabilidade proposta q tal que $w(x) = \pi(x)/q(x) \leq M < \infty$ $\forall x \in X$.

Considere a densidade de probabilidade extendida $\overline{\pi}_{X,U}$ em $X \times [0,1]$ definida como

$$\overline{\pi}_{X,U}(x,u) = \begin{cases} Mq(x) & \text{para } x \in X,\ u \in \left[0, \frac{w(x)}{M}\right] \\ 0 & \end{cases}$$

Verifique que $\overline{\pi}_X(x) = \pi(x)$.

$$\overline{\pi}_X(x) = \int_0^1 \overline{\pi}_{X,U}(x,u)\,du$$

$$= \int_0^{\frac{w(x)}{M}} Mq(x)\,du$$

$$= \cancel{M}q(x) \cdot \left(\frac{w(x)}{\cancel{M}}\right) = \pi(x).$$

(9) Do problema anterior, usando a identidade

$$I = \int_0^1 \int_{\mathcal{X}} \phi(x)\, \bar{\pi}_{X,U}(x,u)\, dx\, du,$$

dê a expressão do estimador de importance sampling $\hat{I}_n$ de I quando usamos n amostras independentes (X_i, U_i) tais que $(X_i, U_i) \sim \bar{q}_{X,U}$ onde $\bar{q}_{X,U}(x,u) = q(x) \times \mathbb{I}_{[0,1]}(u)$ (ou seja, sob $\bar{q}_{X,U}$ temos $X \sim q$, $U \sim \text{Unif}[0,1]$ e X e U são independentes). Expresse este estimador como uma função de peso de importance

$$\bar{w}(x,u) = \frac{\bar{\pi}_{X,U}(x,u)}{\bar{q}_{X,U}(x,u)}.$$

Mostre que este estimador é equivalente ao o estimador obtido amostrando π usando rejection sampling n propostas de q.

A função peso de importance é

$$\bar{w}(x,u) = \begin{cases} M & \text{para } x \in \mathcal{X},\ u \in \left[0, \frac{w(x)}{M}\right] \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Para n amostras $(X_i, U_i) \sim \bar{q}_{X,U}$ temos

$$\hat{I}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi(X_i)\, \bar{w}(X_i, U_i)}{\sum_{i=1}^{n} \bar{w}(X_i, U_i)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \phi(X_{j_i})$$

onde $X_{j_1}, \dots, X_{j_K}$ são as amostras com pesos diferentes de zero, ou seja, as amostras distribuídas a partir de π. Portanto, esta estimativa é equivalente àquela obtida executando um algoritmo de rejeição até amostrarmos n candidatos de q.

(10) Mostre que

$$\mathrm{Var}_q(w(X)) \leq \mathrm{Var}_{\bar{q}_{X,U}}(\bar{w}(X,U)).$$

Temos que

$$\mathrm{Var}_{\bar{q}_{X,U}}(\bar{w}(X,U)) = \mathrm{Var}_{\bar{q}_X}\left[\mathbb{E}_{\bar{q}_{U|X}}(\bar{w}(X,U))\right] + \mathbb{E}_{\bar{q}_X}\left[\mathrm{Var}_{\bar{q}_{U|X}}(\bar{w}(X,U))\right]$$

mas

$$\mathbb{E}_{\bar{q}_{U|X}}(\bar{w}(X,U)) = \mathbb{E}_{\bar{q}_U}(\bar{w}(X,U))$$

$$= \int \bar{w}(X,u)\,\bar{q}_U(u)\,du$$

$$= w(X)$$

então

$$\mathrm{Var}_{\bar{q}_{X,U}}(\bar{w}(X,U)) = \mathrm{Var}_q[w(X)] + \mathbb{E}_{\bar{q}_X}\underbrace{\left[\mathrm{Var}_{\bar{q}_{U|X}}(\bar{w}(X,U))\right]}_{\geq 0}$$

~~A variância de~~ Daí,

$$\mathrm{Var}_q(w(X)) \leq \mathrm{Var}_{\bar{q}_{X,U}}(\bar{w}(X,U))$$