HW 4

① Considere a cadeia de Markov $(X_t)_{t\geq 1}$. Que evolui sobre o tempo da seguinte forma. No tempo t, com probabilidade $\alpha(X_{(t-1)})$ amostra

$$X_t \sim g(.)$$

onde $g(x)$ é uma fdp e caso contrário $X_t := X_{t-1}$. Daí o Kernel de transição é dado por

$$K(x,y) = \alpha(x)g(y) + (1-\alpha(x))\delta_x(y)$$

com $\delta_x(y) = 1$ se $x = y$ e 0 caso contrário.

Mostre que se

$$\int \frac{g(x)}{\alpha(x)}dx < \infty$$

então K admite uma distribuição estacionária de densidade

$$\pi(x) \propto \frac{g(x)}{\alpha(x)}$$

$$\int_X \pi(x)K(x,y)\,dx = \frac{1}{Z}\int_X \frac{g(x)}{\alpha(x)}\left(\alpha(x)g(y) + (1-\alpha(x))\delta_x(y)\right)dy$$

$$= \frac{g(y)}{Z}\int_X g(x)dx + \frac{1}{Z}\int_X \frac{g(x)}{\alpha(x)}(1-\alpha(x))\,\delta_x(y)\,dy$$

$$= \frac{g(y)}{Z} + \frac{1}{Z}\frac{g(y)}{\alpha(y)}(1-\alpha(y)) = \frac{g(y)}{Z\alpha(y)} = \pi(y)$$

Podemos também provar que $K(x,y)$ é π-reversível para $x \neq y$.

② Do problema anterior. Assuma que $0 \le \alpha(x) = \alpha \le 1$, então podemos facilmente mostrar que um TCL ~~garante~~ é válido para $\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} X_i$ desde que $\sigma^2 := Var_g[X_1] < \infty$. Compute a variância assintótica $\sigma_X^2 = Var[X_1] + 2\sum_{k=2}^{\infty} Cov[X_1, X_k]$ no caso estacionário como função de α e σ^2.

(Dica: Prove primeiro que a distribuição marginal de X_k é g $\forall k$, então encontrar uma formula de recursão para $Cov(X_1, X_k)$)

Como $\alpha(x) = \alpha$ (constante), $\pi(x) \propto g(x)$.

$$
\begin{aligned}
Cov[X_1, X_k] &= \mathbb{E}[X_1 X_k] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_k] \\
&= \mathbb{E}[X_1 X_k] - \mathbb{E}^2[X_1] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_1 X_k \mid X_1, X_{k-1}]\right] - \mathbb{E}^2[X_1] \\
&= (1-\alpha)\mathbb{E}[X_1 X_{k-1}] + \alpha\mathbb{E}^2[X_1] - \mathbb{E}^2[X_1] \\
&= (1-\alpha)\left(\mathbb{E}[X_1 X_{k-1}] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_{k-1}]\right) \\
&= (1-\alpha)\,Cov(X_1, X_{k-1}) = (1-\alpha)^{k-1}\sigma^2.
\end{aligned}
$$

Daí, temos

$$\sigma_X^2 = \sigma^2\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha)^k\right) = \sigma^2\,\frac{2-\alpha}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \to 0} \infty.$$

③ Suponha que desejamos um amostrador de Gibbs em

$$\pi(x,y) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\}$$

Escreva as duas distribuições associadas a $\pi(x,y)$.

$$\pi(y|x) \propto \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\}}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\} dx}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^{-2}(y-2)^2\right\}$$

$$= N(y\,;\,2,\,(x-1)^{-2})$$

Analogamente

$$\pi(x|y) \propto \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\}}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\} dy}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^{-2}\right\}$$

$$= N\left(x\,;\,1,\,(y-2)^{-2}\right\}$$

4) Do problema anterior. O amostrador de Gibbs resultante faz sentido ~~no~~ quanto ao seu objetivo?

Como $\pi(X|Y)$ é uma $N(1, (Y-2)^{-2})$, então

$$\iint \pi(X,Y)\, dx\, dy = \int [\sqrt{2\pi} \sqrt{(Y-2)^{-2}}\, dy = \infty$$

Logo, a conjunta não é válida.

(5) Para $i=1,\dots,T$ considere $Z_i = X_i + Y_i$ com X_i, Y_i independentes tais que

$$X_i \sim Binomial(m_i, \theta_1)$$
$$Y_i \sim Binomial(n_i, \theta_2)$$

Assumimos $0 \leq z_i \leq m_i + n_i$ para $i=1,\dots,T$. Observamos Z_i para $i=1,\dots,T$ e n_i, m_i $i=1,\dots,T$ foram dados. De a expressão da função de verossimilhança $p(z_1,\dots,z_T|\theta_1,\theta_2)$.

$$p(z_1,\dots,z_T|\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{T} p(Z_i = z_i|\theta_1,\theta_2)$$

$$= \prod_{i=1}^{T} \sum_{x=0}^{z_i} \binom{m_i}{x} \theta_1^{x}(1-\theta_1)^{m_i-x} \binom{n_i}{z_i-x} \theta_2^{z_i-x}(1-\theta_2)^{n_i-(z_i-x)}$$

$$= \prod_{i=1}^{T} \left[\sum_{l_i=\max\{0,z_i-n_i\}}^{\min\{m_i,z_i\}} \binom{m_i}{l_i}\binom{n_i}{z_i-l_i} \theta_1^{l_i}(1-\theta_1)^{m_i-l_i} \theta_2^{z_i-l_i}(1-\theta_2)^{n_i-z_i+l_i} \right]$$

⑥ Assumindo que temos a prioris uniformes independentes $U_1 \sim Unif[0,1]$ e $U_2 \sim Unif[0,1]$. Proponha um amostrador de Gibbs para $p(\theta_1, \theta_2 | z_1, \dots, z_T)$. Lembre-se que a distribuição Beta do parâmetro $\alpha, \beta > 0$ admite uma densidade $f(x) \propto x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$.

Para cada i, introduzimos x_i como uma variável auxiliar para X_i, $x_i \in \{0, \dots, \min\{z_i, m_i\}\}$.

$$p(x_i | z_i, \theta_1, \theta_2) \propto \binom{m_i}{x_i} \theta_1^{x_i} (1-\theta_1)^{m_i - x_i} \binom{n_i}{z_i - x_i} \theta_2^{z_i - x_i} (1-\theta_2)^{n_i - (z_i - x_i)}$$

E como:

$$p(\theta_1 | X_1, \dots, X_T) = \prod_{i=1}^{T} \theta_1^{x_i} (1-\theta_1)^{m_i - x_i}$$

$$\sim Beta\left(1 + \sum x_i, 1 + \sum (m_i - x_i)\right)$$

e

$$p(\theta_2 | X_1, \dots, X_T) = \prod_{i=1}^{T} \theta_2^{x_i} (1-\theta_2)^{n_i - y}$$

$$\sim Beta\left(1 + \sum y_i, 1 + \sum (n_i - y_i)\right).$$

Daí o amostrador de Gibbs:

1. Amostramos x_i:
$$p(x_i | z_i, \theta_1, \theta_2) \propto \binom{m_i}{x_i} \theta_1^{x_i} (1-\theta_1)^{m_i - x_i} \binom{n_i}{z_i - x_i} \theta_2^{z_i - x_i} (1-\theta_2)^{n_i - (z_i - x_i)}$$
2. Amostrar θ_1:
$$\theta_1 | X_1, \dots, X_T \sim Beta\left(1 + \sum x_i, 1 + \sum (m_i - x_i)\right)$$
3. Amostrar θ_2:
$$\theta_2 | X_1, \dots, X_T \sim Beta\left(1 + \sum y_i, 1 + \sum (n_i - y_i)\right).$$