



HW 4

① Considere a cadeia de Markov $(X_t)_{t \geq 1}$. Que evoluirá o tempo da seguinte forma. No tempo t , com probabilidade $\alpha(X_{t-1})$ amortia

$$X_t \sim q(\cdot)$$

onde $q(x)$ é uma fdp e caso contrário $X_t = X_{t-1}$. Daí o Kernel de transição é dado por

$$k(x,y) = \alpha(x) q(y) + (1-\alpha(x)) \delta_x(y)$$

com $\delta_x(y) = 1$ se $x=y$ e 0 caso contrário.

Mostre que se

$$\int \frac{q(x)}{\alpha(x)} dx < \infty$$

então K admite uma distribuição estacionária de densidade

$$\pi(x) \propto \frac{q(x)}{\alpha(x)}$$

$$\begin{aligned} \int_X \pi(x) K(x,y) dx &= \frac{1}{2} \int_X \frac{q(x)}{\alpha(x)} (\alpha(x) q(y) + (1-\alpha(x)) \delta_x(y)) dx \\ &= \frac{q(y)}{2} \int_X q(x) dx + \frac{1}{2} \int_X \frac{q(x)}{\alpha(x)} (1-\alpha(x)) \delta_x(y) dx \\ &= \frac{q(y)}{2} + \frac{1}{2} \frac{q(y)}{\alpha(y)} (1-\alpha(y)) = \frac{q(y)}{2\alpha(y)} = \pi(y) \end{aligned}$$

Podemos também provar que $K(x,y)$ é π -reversível para $x \neq y$.

② Do problema anterior. Assuma que $0 < d(x) = d \in \mathbb{R}$, então podemos facilmente mostrar que ^{uma} TCI ~~garante~~ é válida para $\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t X_i$ desde que $\sigma^2 := \text{Var}[X_i] < \infty$. Compute a variancia assintótica $\sigma_x^2 = \text{Var}[X_i] + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \text{Cov}[X_i, X_k]$ no caso estacionário como função de α e σ^2 .

(Dica: Pensemos que a distribuição marginal de X_k é f_k , então encontrar uma fórmula de recursão para $\text{Cov}(X_i, X_k)$)

Como $\alpha(x) = \alpha$ (constante), $\pi(x) \propto g(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[X_i, X_k] &= E[X_i X_k] - E[X_i] E[X_k] \\
 &= E[X_i X_k] - E^2[X_i] \\
 &= E[E[X_i X_k | X_1, X_{k-1}]] - E^2[X_i] \\
 &= (1-\alpha) E[X_i X_{k-1}] + \alpha E^2[X_i] - E^2[X_i] \\
 &= (1-\alpha)(E[X_i X_{k-1}] - E[X_i] E[X_{k-1}]) \\
 &= (1-\alpha) \text{Cov}(X_i, X_{k-1}) = (1-\alpha)^{k-1} \sigma^2.
 \end{aligned}$$

Daí, temos

$$\sigma_x^2 = \sigma^2 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha)^k \right) = \sigma^2 \frac{2-\alpha}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \infty.$$



③ Suponha que desejamos usar amortecedor de Gibbs em

$$\pi(x,y) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\}$$

Escrava as duas distribuições associadas a $\pi(x,y)$.

$$\pi(y|x) \propto \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\} c}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\} dx}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\}$$

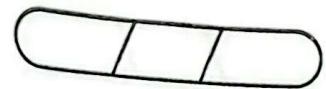
$$= N(y; 2, (x-1)^2)$$

Analogamente

$$\pi(x|y) \propto \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\}}{\int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\} dx}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^2(y-2)^2\right\}$$

$$= N(x; 1, (y-2)^2)$$

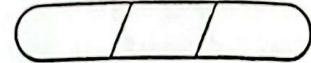


4) Do problema anterior. O amortecedor de Gibbs resultante faz sentido no quanto ao seu objetivo?

Como $\pi(x|y)$ é uma $N(1, (y-2)^2)$, então

$$\iint \pi(x|y) dx dy = \int \sqrt{2\pi} \sqrt{(y-2)^2} dy = 0$$

Logo, a conjectura não é válida.



(5) Para $i = 1, \dots, T$ considere $Z_i = X_i + Y_i$ com X_i, Y_i independentes tais que

$$X_i \sim \text{Binomial}(m_i; \theta_1)$$

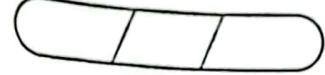
$$Y_i \sim \text{Binomial}(n_i; \theta_2)$$

Assumimos $0 \leq z_i \leq m_i + n_i$ para $i = 1, \dots, T$. Observamos Z_i para $i = 1, \dots, T$ e n_i, m_i , $i = 1, \dots, T$ foram dados. Deve-se expressão da função de verossimilhança $p(z_1, \dots, z_T | \theta_1, \theta_2)$.

$$p(z_1, \dots, z_T | \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^T p(Z_i = z_i | \theta_1, \theta_2)$$

$$= \prod_{i=1}^T \sum_{x=0}^{z_i} \binom{m_i}{x} \theta_1^x (1-\theta_1)^{m_i-x} \binom{n_i}{z_i-x} \theta_2^{z_i-x} (1-\theta_2)^{n_i-(z_i-x)}$$

$$= \prod_{i=1}^T \left[\sum_{j=\max\{0, z_i - n_i\}}^{\min\{m_i, z_i\}} \binom{m_i}{j} \binom{n_i}{z_i-j} \theta_1^j (1-\theta_1)^{m_i-j} \theta_2^{z_i-j} (1-\theta_2)^{n_i-z_i+j} \right]$$



⑥ Assumindo que temos α priori uniforme independentes $\theta_1 \sim \text{U}_1 \sim \text{U}[0, 1]$ e $\theta_2 \sim \text{U}_2 \sim \text{U}[0, 1]$. Proponha um amortecedor de Gibbs para $p(\theta_1, \theta_2 | z_1, \dots, z_T)$. Lembrar-se que a distribuição Beta de parâmetros $\alpha, \beta > 0$ admite uma densidade $f(x) \propto x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$.

Para cada i , introduzimos x_i como uma variável auxiliar para X_i , $x_i \in \{0, \dots, m_i\}$.

$$p(x_i | z_i, \theta_1, \theta_2) \propto \binom{m_i}{x_i} \theta_1^{x_i} (1-\theta_1)^{m_i-x_i} \binom{n_i}{z_i-x_i} \theta_2^{z_i-x_i} (1-\theta_2)^{n_i-(z_i-x_i)}$$

E como:

$$p(\theta_1 | x_1, \dots, x_T) = \prod_{i=1}^T \theta_1^{x_i} (1-\theta_1)^{m_i-x_i}$$

$$\sim \text{Beta}\left(1 + \sum x_i, 1 + \sum (m_i - x_i)\right)$$

$$p(\theta_2 | x_1, \dots, x_T) = \prod_{i=1}^T \theta_2^{x_i} (1-\theta_2)^{n_i-x_i}$$

$$\sim \text{Beta}\left(1 + \sum y_i, 1 + \sum (n_i - y_i)\right).$$

Dai o amortecedor de Gibbs:

1. Amortear x_i :
 $p(x_i | z_i, \theta_1, \theta_2) \propto \binom{m_i}{x_i} \theta_1^{x_i} (1-\theta_1)^{m_i-x_i} \binom{n_i}{z_i-x_i} \theta_2^{z_i-x_i} (1-\theta_2)^{n_i-(z_i-x_i)}$

2. Amortear θ_1 :

$$\theta_1 | x_1, \dots, x_T \sim \text{Beta}\left(1 + \sum x_i, 1 + \sum (m_i - x_i)\right)$$

3. Amortear θ_2 :

$$\theta_2 | x_1, \dots, x_T \sim \text{Beta}\left(1 + \sum y_i, 1 + \sum (n_i - y_i)\right).$$