

HW 5

1) Seja $\tilde{\pi}_{x,y}(x,y)$ a densidade da distribuição de interesse. Mostre que o amostrador de Gibbs de Vandedura sintética da seguinte forma para amostrar $\tilde{\pi}_{x,y}$.

Gibbs Vandedura sintética: Seja $X_{(t)}, Y_{(t)}$ os estados iniciais para $t=2,3,\dots$

- Amostramos $Y_{(t)} \sim \tilde{\pi}_{y|x}(\cdot | X_{(t-1)})$
- Amostramos $X_{(t)} \sim \tilde{\pi}_{x|y}(\cdot | Y_{(t)})$

O amostrador Gibbs de Vandedura aleatória é uma alternativa que segue da seguinte forma para amostrar $\tilde{\pi}_{x,y}$.

Gibbs Vandedura aleatória: Seja $X_{(t)}, Y_{(t)}$ os estados iniciais para $t=2,3,\dots$

- Amostramos $J \in \{1,2\}$ onde $P(J=1) = P(J=2) = \frac{1}{2}$.
- Se $J=1$, amostramos $Y_{(t)} \sim \tilde{\pi}_{y|x}(\cdot | X_{(t)})$ e tome $X_{(t)} = X_{(t-1)}$
- Se $J=2$, amostramos $X_{(t)} \sim \tilde{\pi}_{x|y}(\cdot | Y_{(t)})$ e tome $Y_{(t)} = Y_{(t-1)}$

Dado a expressão do kernel de transição $K_{x,y}^S((x,y), (x',y'))$ da Cadeia de Markov $(X_{(t)}, Y_{(t)})$ generalizada pelo amostrador de Gibbs sintético como função de $\tilde{\pi}_{x|y}$ e $\tilde{\pi}_{y|x}$. Mostre que $K_{x,y}^S$ não é reversível com respeito a $\tilde{\pi}_{x,y}$.

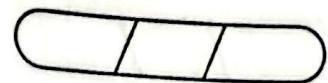
Pelas notas temos que

$$K_{x,y}^S((x,y), (x',y')) = \tilde{\pi}_{y|x}(y'|x) \tilde{\pi}_{x|y}(x'|y)$$

e

$$\frac{\tilde{\pi}_{x,y}^{(x,y)} K_{x,y}^S((x,y), (x',y'))}{\tilde{\pi}_{x,y}^{(x',y')} K_{x,y}^S((x',y'), (x,y))} = \frac{\tilde{\pi}_{x,y}(x|y) \tilde{\pi}_{y|x}(y'|x) \tilde{\pi}_{x|y}(x'|y)}{\tilde{\pi}_{x,y}(x'|y) \tilde{\pi}_{y|x}(y|x) \tilde{\pi}_{x|y}(x|y)}$$





$$\text{pois. } \tilde{\Pi}_X(x) = \frac{\tilde{\Pi}_{X|x}(x|x)}{\tilde{\Pi}_{X|x}(x|x)} \rightarrow = \frac{\tilde{\Pi}_Y(y) \tilde{\Pi}_{Y|X}(y|x)}{\tilde{\Pi}_Y(y') \tilde{\Pi}_{Y|X}(y'|x')} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = x' \text{ e } y = y'$$

O que não ocorre num problema alvo.

$$(V(x))_{\tilde{\Pi}} (V(x))_{\tilde{\Pi}} = ((x|x), (x|x))_{\tilde{\Pi}}$$

$$((x|x))_{\tilde{\Pi}} (V(x))_{\tilde{\Pi}} - ((x|x)(x|x))_{\tilde{\Pi}}$$



(2) Mostre que a sequência $(X_{(t)})_{t \geq 1}$, associada ao amostrador Gibbs de varredura sistêmica é uma cadeia de Markov $\tilde{\Pi}_x$ -reversível e de a expressão associada ao Kernel de transição $K_x^S(x, x')$ como uma função das duas densidades condicionais $\tilde{\Pi}_{y|x}$ e $\tilde{\Pi}_{x|y}$.

Temos que

$$\int K_{x,y}((x,y), (x',y')) dy' = \int \tilde{\Pi}_{y|x}(y'|x) \tilde{\Pi}_{x,y}(x'|y') dy'$$

ou seja,

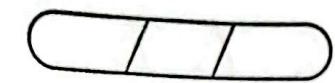
$$K_x(x, x') = \int \tilde{\Pi}_{y|x}(y'|x) \tilde{\Pi}_{x,y}(x'|y') dy'.$$

$$\tilde{\Pi}_x(x) K_x(x, x') = \tilde{\Pi}_x(x) \int \tilde{\Pi}_{y|x}(y'|x) \tilde{\Pi}_{x,y}(x'|y') dy'$$

$$= \tilde{\Pi}_x(x) \int \frac{\tilde{\Pi}(y',x)}{\tilde{\Pi}_x(x)} \cdot \frac{\tilde{\Pi}(x',y')}{\tilde{\Pi}_x(y')} dy'$$

$$= \int \tilde{\Pi}(x',y') \frac{\tilde{\Pi}(x,y')}{\tilde{\Pi}(y')} dy'$$

$$= \tilde{\Pi}_x(x) \int \frac{\tilde{\Pi}(x',y')}{\tilde{\Pi}_x(x')} \frac{\tilde{\Pi}(x,y')}{\tilde{\Pi}(y')} dy' = \tilde{\Pi}_x(x) K_x(x',x)$$



③ Dada a expressão da densidade do kernel de transição $K_{xy}^R((x,y), (x',y'))$ da cadeia de Markov gerada por amostrador de Gibbs de variáveis interativas como função de $\tilde{\pi}_{xy}$ e $\tilde{\pi}_{y|x}$. Mostre que K_{xy}^R é $\tilde{\pi}_{xy}$ -reversível.

Temos que

$$K_{xy}^R((x,y), (x',y')) = \frac{1}{2} \tilde{\pi}_{y|x}(y'|x) S_x(x') + \frac{1}{2} \tilde{\pi}_{x|y}(x'|y) S_y(y').$$

$$\tilde{\pi}(x) K_{xy}^R((x,y), (x',y')) = \tilde{\pi}(x,y) \frac{1}{2} \tilde{\pi}_{y|x}(y'|x) S_x(x') + \tilde{\pi}(x,y) \frac{1}{2} \tilde{\pi}_{x|y}(x'|y) S_y(y')$$

Para o primeiro termo temos

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(x,y) \tilde{\pi}_{y|x}(y'|x) S_x(x') &= \cancel{\tilde{\pi}(x,y)} \tilde{\pi}(x',y) \tilde{\pi}_{y|x}(y'|x) S_x(x') \\ &= \tilde{\pi}_x(x) \tilde{\pi}_{y|x}(y|x) \cancel{\tilde{\pi}_{y|x}(y'|x)} S_x(x') \\ &= \tilde{\pi}(x',y) \tilde{\pi}_{y|x}(y|x) S_x(x') \end{aligned}$$

Analogamente, para o segundo termo

$$\tilde{\pi}(x,y) \tilde{\pi}_{x|y}(x'|y) S_y(y') = \tilde{\pi}(x,y) \tilde{\pi}_{x|y}(x|y') S_y(y').$$

Daí

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{xy}(x,y) K_{xy}^R((x,y), (x',y')) &= \frac{1}{2} \tilde{\pi}(x,y) \tilde{\pi}_{y|x}(y|x) S_x(x') + \frac{1}{2} \tilde{\pi}(x,y) \tilde{\pi}_{x|y}(x|y') S_y(y') \\ &= \tilde{\pi}(x',y') K_{xy}^R((x',y'), (x,y)). \end{aligned}$$



(4) Considere o espaço produto $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$, considere a distribuição alvo $\pi(x_1, x_2)$. Para gerar π , o amostrador de Gibbs faz amostras iterativamente de $\pi_{x_1|x_2}(x_1|x_2)$ e $\pi_{x_2|x_1}(x_2|x_1)$. Consideremos aqui o cenário onde é possível gerar de $\pi_{x_2|x_1}(x_2|x_1)$ mas impossível gerar de $\pi_{x_1|x_2}(x_1|x_2)$. Então o seguinte algoritmo pode ser útil. Note que, não é nada de mais a não ser um algoritmo Metropolis - Hastings padrão com um ciclo de kernel, cada ~~atualizando~~ atualizando apenas um componente do estado, mas é normalmente chamado de Metropolis - within - Gibbs (MWG).

Introduzimos uma propriedade $g(x_i'|x_1, x_2)$ em \mathbb{X}_i ; ou seja, $g(x_i'|x_1, x_2) \geq 0$ e $\int_{\mathbb{X}_i} g(x_i'|x_1, x_2) dx_i' = 1$ para $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{X}$.

Iniciamos $X^{(0)} = (X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$, e iteramos sobre $i=2,3,\dots$

- Amostramos $X_i \sim g(\cdot | X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)})$

- Computamos $\alpha(X, | X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(X_1, X_2^{(t-1)}) g(X_1^{(t-1)} | X_1, X_2^{(t-1)})}{\pi(X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)}) g(X_1 | X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)})} \right\}$

- Com probabilidade $\alpha(X, | X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)})$, tome $X_i^{(t)} = X_i$, caso contrário $X_i^{(t)} = X_i^{(t-1)}$.

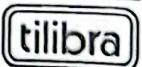
- Morte $X_2^{(t)} \sim \pi_{x_2|x_1}(\cdot | X_1^{(t)})$.

Morte que quando $g(x_i'|x_1, x_2) = \pi_{x_i|x_{-i}}(x_i'|x_{-i})$ então o MWG corresponde ao amostrador de Gibbs de Jardimaria sintética.

Basta mostrar que neste caso $\alpha(X, | X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)}) = 1$. Ou seja,

$$\alpha(X, | X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(X_1, X_2^{(t-1)}) g(X_1^{(t-1)} | X_1, X_2^{(t-1)})}{\pi(X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)}) g(X_1 | X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)})} \right\}$$

é equivalente a provar que





$$\overline{\Pi}(X_1, X_2^{(t-1)}) \overline{\Pi}_{X_1|X_2}(X_1^{(t-1)} | X_2^{(t-1)}) = \overline{\Pi}(X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)}) \overline{\Pi}_{X_1|X_2}(X_1 | X_2^{(t-1)})$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\overline{\Pi}(X_1, X_2^{(t-1)})} \cancel{\overline{\Pi}_{X_1|X_2}(X_1^{(t-1)} | X_2^{(t-1)})} = \cancel{\overline{\Pi}(X_1^{(t-1)}, X_2^{(t-1)})} \cancel{\overline{\Pi}_{X_1|X_2}(X_1 | X_2^{(t-1)})}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\Pi}_{X_2}(X_2^{(t-1)}) = \overline{\Pi}_{X_2}(X_2^{(t-1)})$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1.$$



⑤ Do problema anterior. Indique o Kernel de transição correspondente a este algoritmo e mostre que ele possui distribuições invariantes $\tilde{\pi}$.

O Kernel de Transição é dado por

$$K((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = \left(\alpha(x'_1 | x_1, x_2) g(x'_1 | x_1, x_2) + (1 - \alpha(x_1, x_2)) S_{x_1}(x'_1) \right) \tilde{\pi}_{x_2 | x_1}(x'_2 | x'_1).$$

onde,

$$\alpha(x_1, x_2) = \int \alpha(u | x_1, x_2) g(u | x_1, x_2) du.$$

$$\iint \tilde{\pi}(x_1, x_2) K((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int \tilde{\pi}_{x_2}(x_2) \int \tilde{\pi}_{x_1 | x_2}(x_1 | x_2) \{ \alpha(x'_1 | x_1, x_2) g(x'_1 | x_1, x_2) + (1 - \alpha(x_1, x_2)) S_{x_1}(x'_1) \} dx_1 \tilde{\pi}_{x'_2 | x_1}(x'_2 | x_1) dx_2$$

$$= \int \tilde{\pi}_{x_2}(x_2) \int \tilde{\pi}_{x_1 | x_2}(x'_1 | x_2) \cancel{\tilde{\pi}(x_1, x_2)} g(x_1 | x'_1, x_2) \cancel{g(x_1 | x_1, x_2)} dx_1 \tilde{\pi}_{x'_2 | x_1}(x'_2 | x_1) dx_2$$

$$= \int \tilde{\pi}_{x_2}(x_2) \int \tilde{\pi}_{x_1 | x_2}(x'_1 | x_2) g(x_1 | x'_1, x_2) dx_1 \tilde{\pi}_{x'_2 | x_1}(x'_2 | x_1) dx_2$$

$$= \int \tilde{\pi}_2(x_2) \tilde{\pi}_{x_1 | x_2}(x'_1 | x_2) \int g(x_1 | x'_1, x_2) dx_1 \tilde{\pi}_{x'_2 | x_1}(x'_2 | x_1) dx_2$$

$$= \int \tilde{\pi}(x'_1, x_2) \tilde{\pi}_{x_2 | x_1}(x'_2 | x_1) dx_2$$

$$= \tilde{\pi}_{x_1}(x'_1) \tilde{\pi}_{x_2 | x_1}(x'_2 | x_1) = \tilde{\pi}(x'_1, \cancel{x'_2})$$





⑥ Seja X um espaço forte. Consideremos o seguinte Kernel de transição de Markov.

$$T(x,y) = \alpha(x,y)g(x,y) + \left(1 - \sum_{z \in X} \alpha(x,z)g(x,z)\right) \frac{g(y)}{\alpha_x}$$

onde $g(x,y) \geq 0$, $\sum_{y \in X} g(x,y) = 1$ e $0 < \alpha(x,y) \leq 1$ para qualquer $x, y \in X$.

Seja π uma função de massa de probabilidade em X . Mostre que se

$$\alpha(x,y) = \gamma(x,y)$$

$$\pi(x)g(x,y)$$

onde $\gamma(x,y) = \gamma(y,x)$ e $\gamma(x,y)$ é escolhido de forma $0 < \gamma(x,y) \leq 1$ $\forall x, y \in X$ então T é π -reversível.

Suponha $x \neq y$ (caso " $=$ é trivial")

$$\pi(x)T(x,y) = \alpha(x,y)g(x,y)\pi(x)$$

$$= \gamma(x,y)$$

$$= \gamma(y,x) \cdot \frac{g(y,x)}{g(x,y)} \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$$

$$= \pi(y)T(y,x).$$

⑦ Considerando o problema anterior. Verifique que o algoritmo de Metropolis - Hastings corresponde a $\pi(x,y) = \min\{\pi(y)g(x,y), \pi(x)g(y,x)\}$. O algoritmo de Baker é uma alternativa correspondente a

$$\gamma(x,y) = \frac{\pi(x)g(x,y)\pi(y)g(y,x)}{\pi(x)g(x,y) + \pi(y)g(y,x)}$$

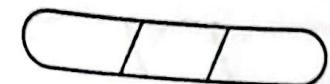
De a probabilidade de aceitação $\alpha(x,y)$ do algoritmo de Baker.

Temos que

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= \min\left\{1, \frac{\pi(y)g(y,x)}{\pi(x)g(x,y)}\right\} \\ &= \min\left\{\frac{\pi(x)g(x,y)}{\pi(y)g(y,x)}, \frac{\pi(y)g(y,x)}{\pi(x)g(x,y)}\right\} \\ &= \frac{\min\{\pi(x)g(x,y), \pi(y)g(y,x)\}}{\pi(x)g(x,y)} = \frac{\gamma(x,y)}{\pi(x)g(x,y)} \end{aligned}$$

Para o algoritmo de Baker,

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= \frac{\pi(x)g(x,y)\pi(y)g(y,x)}{\pi(x)g(x,y) + \pi(y)g(y,x)} / \pi(x)g(x,y) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\pi(y)g(y,x)}{\pi(x)g(x,y)}} \end{aligned}$$



8) Prove! O Teorema de Peskun é um resultado muito importante em MCMC.

Teorema: Seja T_1 e T_2 duas cadeias de Markov, reversíveis e aperiódicas nas suas kernels. Se

$$T_1(x, y) \geq T_2(x, y), \quad \forall x \neq y \in \mathbb{X}$$

então, $\forall \phi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, a variação assintótica do estimador MCMC $\hat{T}_n(\phi) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \phi(X^{(t)})$ de $T(\phi) = \mathbb{E}_{\pi}[\phi(X)]$ é menor para T_1 do que T_2 .

Assumindo num cenário em que ambos os algoritmos de Metropolis-Hastings e Barker são periódicos e ineditivos. Qual algoritmo entrega um estimador de $T(\phi)$ com menor variação assintótica?

Temos que

$$\hat{T}_H(x, y) = \min_{\pi(x)} \{\pi(y)g(x, y), \pi(x)g(y, x)\}$$

$$\hat{T}_B(x, y) = \frac{\pi(y)g(y, x)g(x, y)}{\pi(x)g(x, y) + \pi(y)g(y, x)}$$

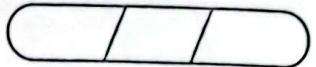
Temos 2 casos para $\hat{T}_H(x, y)$, vamos analisar cada um

- $\hat{T}_H(x, y) = g(x, y)$

$$\hat{T}_B(x, y) \leq \hat{T}_H(x, y) \Leftrightarrow \pi(y)g(y, x)g(x, y) \leq g(x, y) \\ \pi(x)g(x, y) + \pi(y)g(y, x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \frac{\pi(x)g(x, y)}{\pi(y)g(y, x)}} \leq 1 \quad \text{OK}$$

$\underbrace{\frac{\pi(x)g(x, y)}{\pi(y)g(y, x)}}_{> 0}$



$$\bullet T_H(x,y) = \frac{\pi(y) q(y,x)}{\pi(x)}$$

$$T_B(x,y) \leq T_H(x,y) \Leftrightarrow \frac{\pi(x) q(x,y) q(y,x)}{\pi(y) q(y,x) + \pi(x) q(x,y)} \leq \frac{\pi(y) q(y,x)}{\pi(x)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi(x) q(x,y)}{\pi(x) q(x,y) + \pi(y) q(y,x)} \leq 1 \quad \text{OK}$$

Logo como $T_B(x,y) \leq T_H(x,y)$ pelo Teorema de Postun, o algoritmo de Metropolis - Hastings tem estimador com variancia assintótica menor.

Q) Suponha que $X = (X_1, \dots, X_d)$ onde X_i toma $m \geq 2$ possíveis valores e $\Pi(X) = \Pi(X_1, \dots, X_d)$ é a distribuição de interesse. O amostrador de Gibbs de Veneza aleatória segue da seguinte forma.

Seja $(X^{(1)}, \dots, X^{(t)})$ um estado inicial, então para $t=2, 3, \dots$

- Amostramos um índice K uniformemente em $\{1, \dots, d\}$.

- Tome $X_i^{(t)} = X_i^{(t-1)}$ $\forall i \neq K$ e amostra

$$X_k^{(t)} \sim \Pi_{X_k | X_{-k}}(\cdot | X_1^{(t)}, \dots, X_{K-1}^{(t)}, X_{K+1}^{(t)}, \dots, X_d^{(t)})$$

Agora considere a seguinte modificação no amostrador de Gibbs de Veneza aleatória onde inveja de amostra $X_k^{(t)}$ de uma distribuição, usamos a seguinte distribuição proposta.

$$g(X_k = x_k^* | X_{-k}, X_k) = \begin{cases} \frac{\Pi_{X_k | X_{-k}}(x_k^* | X_{-k})}{1 - \Pi_{X_k | X_{-k}}(x_k | X_{-k})}, & \forall x_k^* \neq x_k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $X_{-k} = (X_1, \dots, X_{K-1}, X_{K+1}, \dots, X_d)$ que é aceito com probabilidade

$$\alpha(X_{-k}, X_k, x_k^*) = \min \left\{ 1, \frac{1 - \Pi_{X_k | X_{-k}}(x_k | X_{-k})}{1 - \Pi_{X_k | X_{-k}}(x_k^* | X_{-k})} \right\}.$$

Amostrador de Gibbs de Veneza aleatória modificado. Seja $(X^{(1)}, \dots, X^{(t)})$ um estado inicial então segue com $t=2, 3, \dots$

- Amostramos um índice K uniformemente em $\{1, \dots, d\}$.

- Tomamos $X_i^{(t)} = X_i^{(t-1)}$ para $i \neq K$.

- Amostramos X_k t.g. $P(X_k = x_k^*) = g(X_k = x_k^* | X_{-k}^{(t)}, X_k^{(t-1)})$.

- Com probabilidade $\alpha(X_{-k}^{(t)}, X_k^{(t-1)}, X_k)$, tomamos $X_k^{(t)} = X_k^*$ e

$$X_k^{(t)} = X_k^{(t-1)} \quad \text{caso contrário.}$$

Assumindo que ambos os algoritmos são cadeias de Markov irreductíveis e aperiódicas. Verifique que ambos os Kernels de transição são π -inversíveis e use o Teorema de Peskun para mostrar que a versão malhada provém um estimador com menor variância assintótica.

Temos que, para o amortecedor de Gibbs de varredura aleatória com $X_k \neq Y_k$

$$T_1(x, y) = d^{-1} \pi_{X_k | X_{-k}}(Y_k | X_{-k}) S_{X_{-k}}(Y_{-k}).$$

Por outro lado, para o amortecedor malhado

$$T_2(x, y) = \frac{1}{d} g(Y_k | X_k) \min \left\{ 1, \frac{1 - \pi_{X_k | X_{-k}}(X_k | X_{-k})}{1 - \pi_{X_k | X_{-k}}(Y_k | X_{-k})} \right\} S_{X_{-k}}(Y_{-k}).$$

$$= \frac{1}{d} \frac{\pi_{X_k | X_{-k}}(Y_k | X_{-k})}{1 - \pi_{X_k | X_{-k}}(X_k | X_{-k})} \min \left\{ 1, \frac{1 - \pi_{X_k | X_{-k}}(X_k | X_{-k})}{1 - \pi_{X_k | X_{-k}}(Y_k | X_{-k})} \right\} S_{X_{-k}}(Y_{-k})$$

$$= d^{-1} \pi_{X_k | X_{-k}}(Y_k | X_{-k}) \min \left\{ \frac{1}{1 - \pi_{X_k | X_{-k}}(X_k | X_{-k})}, \frac{1}{1 - \pi_{X_k | X_{-k}}(Y_k | X_{-k})} \right\} S_{X_{-k}}(Y_{-k}).$$

Para verificar que não são π -reversíveis, queremos provar primeiramente que

$$\pi(x) T_1(x, y) = \pi(y) T_1(y, x)$$

$$\Leftrightarrow \pi(x) \pi_{X_k | X_{-k}}(Y_k | X_{-k}) S_{X_{-k}}(Y_{-k}) = \pi(y) \pi_{X_k | X_{-k}}(x_k | y_{-k}) S_{X_{-k}}(x_{-k})$$

$$\Leftrightarrow \pi(x) \frac{\pi(y)}{\sum_{z_k \in X} \pi(z_k, X_{-k})} = \pi(y) \frac{\pi(x)}{\sum_{z_k \in X} \pi(z_k, Y_{-k})} \Leftrightarrow \frac{\pi(x)\pi(y)}{d} = \frac{\pi(x)\pi(y)}{d}$$

Para a versão modificada, temos que provar que

$$\tilde{\pi}(x) \tilde{T}_2(x,y) = \tilde{\pi}(y) \tilde{T}_2(y,x).$$

De inicio, seja

$$a := \tilde{\pi}_{X_k|X_{-k}}(X_k | X_{-k})$$

$$e \quad b := \tilde{\pi}_{X_k|X_{-k}}(Y_k | X_{-k}).$$

$$\text{Assim, } \frac{\tilde{\pi}(x) \tilde{T}_2(x,y)}{\tilde{\pi}(y) \tilde{T}_2(y,x)} = \frac{\tilde{\pi}(x) b \min\left\{\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-b}\right\} S_{X_k}(Y_k)}{\tilde{\pi}(y) a \min\left\{\frac{1}{1-b}, \frac{1}{1-a}\right\} S_{Y_k}(X_k)}$$

$$= \frac{\tilde{\pi}(x) b}{\tilde{\pi}(y) a}$$

$$= \frac{\tilde{\pi}(x) \tilde{\pi}_{X_k|X_{-k}}(Y_k | X_{-k})}{\tilde{\pi}(y) \tilde{\pi}_{X_k|X_{-k}}(X_k | X_{-k})}$$

$$= \frac{\tilde{\pi}(x) \frac{\pi(Y_k, X_{-k})}{\sum_z \pi(Z_k, X_{-k})}}{\tilde{\pi}(y) \frac{\pi(X_k, X_{-k})}{\sum_z \pi(Z_k, X_{-k})}}$$

$$= \frac{\tilde{\pi}(x) \frac{\pi(Y_k, X_{-k})}{\sum_z \pi(Z_k, X_{-k})}}{\tilde{\pi}(y) \frac{\pi(X_k, X_{-k})}{\sum_z \pi(Z_k, X_{-k})}}$$

$$= \frac{\tilde{\pi}(x) \tilde{\pi}(y)}{\tilde{\pi}(y) \tilde{\pi}(x)} = 1.$$

Considerando a, b como definidos acima. Para $a, b > 0$ temos

$$b \min\left\{\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-b}\right\} \geq b$$

dai $\tilde{T}_2(x,y) \geq \tilde{T}_1(x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{X}$, então pelo teorema de Peskin a versão modificada tem variancia assintótica menor.