Lista 6.1

① Seja X uma única observação de uma Cauchy(θ)

(a) Mostre que sua família não é MLR

(b) Mostre que o teste

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 3 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

é ~~MP de tamanho~~ mais poderoso que seu tamanho $H_0: \theta = 0$ vs. $H_1: \theta = 1$. Calcule o erro do tipo I e II

(c) Prove ou desprove: O teste na parte (b) é UMP para testar $H_0: \theta \leq 0$ vs. $H_1: \theta > 0$. O que podemos dizer em geral sobre UMP para a família Cauchy?

(a)

Seja $\theta_2 > \theta_1$

$$\frac{f(x|\theta_2)}{f(x|\theta_1)} = \frac{\frac{\theta_2}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta_2^2 + x^2}}{\frac{\theta_1}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta_1^2 + x^2}} = \frac{\theta_2}{(\theta_2^2 + x^2)} \frac{(\theta_1^2 + x^2)}{\theta_1} = \frac{\theta_2 x^2 + \theta_2 \theta_1^2}{\theta_1 x^2 + \theta_1 \theta_2^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f(x|\theta_2)}{f(x|\theta_1)} = \frac{\theta_2}{\theta_1} \cdot \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{(\theta_2^2 + x^2)^2} x$$

O sinal da derivada é o mesmo de x, como x muda de sinal a razão não pode ser monótona.

(b) Pa Neyman-Pearson, um teste UMP rejeita H_0 se $f(x|1)/f(x|0) > k$

Examinando ~~os~~ a derivada temos que

/ /

- $x \leq (1-\sqrt{5})/2 = -0.618$ $\Rightarrow$ LRT decrescente
- $(1-\sqrt{5})/2 \leq x \leq (1+\sqrt{5})/2 = 1.618$ $\Rightarrow$ LRT crescente
- $(1+\sqrt{5})/2 \leq x$ $\Rightarrow$ LRT decrescente.

Além disso, $f(1|1)/f(1|0) = f(3|1)/f(3|0) = 2$. Então rejeitar se $f(x|1)/f(x|0) > 2$ é equivalente a rejeitar se $1 < x < 3$. E o tamanho é (o erro do tipo I)

$$P(1 < X < 3 | \theta H_0) = \int_1^3 \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\arctan x \Big|_1^3 \cong 0.1476$$

(c) E o erro do tipo II é

$$1 - P(1 < X < 3 | H_1) = 1 - \int_1^3 \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-1)^2}\,dx = 1 - \frac{1}{\pi}\arctan(x-1)\Big|_1^3$$

$$\cong 0.6476$$

(c) Para outros valores de θ (não discutidos) não necessariamente temos $f(1|\theta)/f(1|0) = f(3|\theta)/f(3|0)$ então não é UMP pois existe um teste melhor.

/ /

(2) Seja $X_1, \dots, X_n \sim Poisson(\lambda)$

(a) Encontre um teste UMP de $H_0: \lambda \leq \lambda_0$ vs $H_1: \lambda > \lambda_0$

(b) Considere o caso específico $H_0: \lambda \leq 1$ vs $H_1: \lambda > 1$. Use o TCL para determinar o tamanho de amostra n para que o teste UMP satisfaça $P(\text{Rejeitar } H_0 | \lambda = 1) = 0.05$ e $P(\text{Rejeitar } H_0 | \lambda = 2) = 0.9$

(a) Como Poisson é MLR, e $\sum X_i$ é uma estatística suficiente para λ, pelo Teorema de Karlin-Rubin, o teste UMP é o que rejeita H_0 se $\sum X_i > k$, note que $\sum X_i \sim Poisson(n\lambda)$. Escolhemos k de forma que

$$P\left(\sum X_i > k \mid \lambda = \lambda_0\right) = \alpha$$

(b) Como $\sum X_i \sim Poisson(n\lambda)$

$$Z = \frac{\sum X_i - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Daí

$$P\left(\sum X_i > k \mid \lambda = 1\right) \cong P\left(Z > (k-n)/\sqrt{n}\right) := 0.05$$

$$P\left(\sum X_i > k \mid \lambda = 2\right) \cong P\left(Z > (k-2n)/\sqrt{2n}\right) := 0.9$$

Resolvendo, para k e n em

$$\frac{k-n}{\sqrt{n}} = 1.645 \quad e \quad \frac{k-2n}{\sqrt{2n}} = -1.28$$

temos, $n = 12$ e $k = 17,7$.

Digitalizado com CamScanner

③ Seja $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, 1)$, e seja θ_0 um valor específico para θ.

ⓐ Encontre o UMP, tamanho α, do teste $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$.

ⓑ Mostre que não existe um UMP, de tamanho α, para testar $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$.

ⓐ É equivalente a testar $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ onde $\theta_0 > \theta_1$. Por Neyman-Pearson, rejeitamos H_0 se

$$\frac{f(\bar{x} \mid \theta_1)}{f(\bar{x} \mid \theta_0)} > k \iff \bar{x} < \frac{(2 \log k)/n - \theta_0^2 + \theta_1^2}{2(\theta_1 - \theta_0)}.$$

O lado direito cresce de $-\infty$ para ∞ quando k vai de 0 a ∞, então o teste ~~é~~ é equivalente a rejeitar H_0 se $\bar{x} < c$ no nível α, onde

$$\alpha = P_{\theta_0}(\bar{x} < c).$$

ⓑ Exemplo 8.3.19 [CB]

/ /

④ Seja $X_1, \ldots, X_n \sim Unif(\theta, \theta+1)$. Para testar $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: \theta > 0$, use o teste

Rejeita H_0 se $Y_{(n)} \geq 1$ ou $Y_{(1)} \geq K$

onde K é constante, $Y_{(1)} = \min(X_i)$ e $Y_{(n)} = \max(X_i)$

ⓐ Determine K para que o teste tenha tamanho α

ⓑ Encontre uma expressão para a função poder do teste da parte ⓐ.

ⓒ Prove que o teste é UMP com tamanho α.

ⓓ Encontre valores n e K para os quais o nível seja 0.1 e o poder pelo menos 0.8 se $\theta > 1$

ⓐ O tamanho sobre H_0 é dado por

$$\alpha = P_{\theta_0}(Y_{(n)} \geq 1 \text{ ou } Y_{(1)} \geq K)$$

$$= P_{\theta_0}(Y_{(n)} \geq 1) + P_{\theta_0}(Y_{(1)} \geq K) - P_{\theta_0}(Y_{(n)} \geq 1 \text{ e } Y_{(1)} \geq K)$$

$$= P_{\theta_0}(Y_{(1)} \geq K) \quad (\text{pois } P_{\theta_0}(X_{(n)} \geq 1) = 0)$$

$$P_{\theta_0}(Y_{(1)} \geq K) = P_{\theta_0}(\min X_i \geq K) = \left(P_{\theta_0}(X_1 \geq K)\right)^n$$

$$= \left(1 - P(X_1 < K)\right)^n = (1-K)^n := \alpha$$

$\Rightarrow K = 1 - \sqrt[n]{\alpha}$.

/ /

(b) ~~Pa~~ Temos 4 casos

- $\theta \leq k-1$, $\beta(\theta) = 0$
- $k-1 < \theta \leq 0$,

$$\beta(\theta) = P_\theta(Y_{(1)} \geq k) = \prod_i P(Y_{(1)} \leq \overset{k-\theta}{\vee} k) = (1-k+\theta)^n$$

- $0 < \theta \leq k$,

$$\beta(\theta) = \cancel{P_\theta} \int_k^{\theta+1} n(1-(y_1-\theta))^{n-1} \, dy_1 + \int\int_{\theta 1}^{k,\theta+1} n(n-1)(y_n-y_1)^{n-1} \, dy_n \, dy_1$$

$$= k+1-(1-\theta)^n.$$

- $k < \theta$, $\beta(\theta) = 1$

(c) (Y_1, Y_n) são uma estatística suficiente. Então podemos encontrar um teste UMP usando o Corolário 8.3.13 [CB] e a conjunta de $f(Y_1, Y_n|\theta)$,

$$f(Y_1, Y_2|\theta) = n(n-1)(Y_n - Y_1)^{n-2}, \quad 0 < Y_1 < Y_n < \theta + 1$$

Para $0 < \theta < 1$, a razão é

$$\frac{f(Y_1, Y_n|\theta)}{f(Y_1, Y_n|\theta)} = \begin{cases} 0 & 0 < Y_1 \leq \theta, \ \cancel{\theta} Y_1 < Y_n < 1 \\ 1 & \theta < Y_1 < Y_n < 1 \\ \infty & 1 \leq Y_n < \theta + 1, \ \theta < Y_1 < Y_n \end{cases}$$

/ /

Para $1 \leq \theta$

$$\frac{f(y_1, y_n|\theta)}{f(y_1, y_n|0)} = \begin{cases} 0 & y_1 < y_n < 1 \\ \infty & \theta < y_1 < y_n < \theta+1 \end{cases}$$

Para $0 < \theta < k$, use $k' = 1$. O teste sempre rejeita H_0 se $f(y_1, y_n|\theta)/f(y_1, y_n|0) > 1$ e sempre aceita se $f(y_1, y_n|\theta)/f(y_1, y_n|0) < 0$. Para $\theta \geq k$, use $k' = 0$. E o teste é rejeitado para $f(y_1, y_n|\theta)/f(y_1, y_n|0) > 0$ e ~~rejeito~~ aceito para < 0.

(d) Pelo item (b), $\beta(\theta) = 1 \quad \forall \theta \geq k = 1 - \alpha^{-\frac{1}{n}}$.

/ /

(5) Seja $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$. Considere o teste

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta > \theta_0$$

(a) Se σ^2 é conhecido, mostre que o teste que rejeita H_0, quando

$$\bar{X} > \theta_0 + z_\alpha \sqrt{\sigma^2/n}$$

tem tamanho α. Mostre que o teste pode ser derivado de LRT.

(b) Mostre que o teste do item (a) é UMP

(c) Se σ^2 é desconhecido, mostre que o teste que rejeita H_0 quando

$$\bar{X} > \theta_0 + t_{n-1,\alpha} \sqrt{S^2/n}$$

é de nível α. Mostre que o teste pode ser derivado de LRT.

(a) $P_{\theta}(\bar{X} > \theta_0 + z_\alpha \sqrt{\sigma^2/n}) = P\left(\frac{\bar{X}-\theta_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > z_\alpha \middle| \theta_0\right) = P(Z > z_\alpha | \theta_0) = \alpha$, onde $Z \sim N(0,1)$. Como o MLE irrestrito é $\bar{X}$ e o restrito θ_0 se $\bar{X} > \theta_0$, o LRT para $\bar{X} > \theta_0$ é

$$\lambda(x) = \frac{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\sum(X_i-\theta_0)^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\sum(X_i-\bar{X})^2/2\sigma^2}}$$

$$= \frac{\exp\{-[n(\bar{X}-\theta_0)^2+(n-1)S^2]/2\sigma^2\}}{\exp\{-(n-1)S^2/2\sigma^2\}} = \exp\{-n(\bar{X}-\theta_0)^2/2\sigma^2\}.$$

/ /

e o LRT é 1 para $\bar{x} < \theta_0$. Pois, rejeitar se $\lambda(x) < c$ é equivalente a rejeitar se $(\bar{X}-\theta_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > c'$

(b) Pelo Teo. de Karlin-Rubin o teste é UMP.

(c) $P_{\theta_0}\left(\bar{X} > \theta_0 + t_{n-1,\alpha}\sqrt{S^2/n}\right) = P(T_{n-1} > t_{n-1,\alpha}) = \alpha$, onde T_{n-1} é uma t-student com n-1 graus de liberdade.

/ /

⑥ Seja $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$. Considere testar

$$H_0: \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \text{ vs } H_1: \theta < \theta_1 \text{ ou } \theta > \theta_2$$

ⓐ Mostre que o teste

Rejeitar H_0 se $\bar{X} > \theta_2 + t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{S^2/n}$ ou
$\bar{X} < \theta_1 + t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{S^2/n}$

não tem tamanho α.

ⓑ Mostre que, para uma escolha apropriada de k, um teste de tamanho α é dado por

Rejeitar H_0 se $|\bar{H} - \bar{\theta}| > k\sqrt{S^2/n}$

onde $\bar{\theta} = (\theta_1 + \theta_2)/2$.

ⓒ Mostre que os testes dos itens ⓐ e ⓑ são não viesados dos seus tamanhos.

ⓐ $P_{\theta_0}\left(\bar{X} > \theta_2 + t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{S^2/n} \text{ ou } \bar{X} < \theta_1 + t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{S^2/n}\right) = \alpha$

$\Leftrightarrow P_{\theta_0}\left(\frac{\bar{X} - \theta_2}{\sqrt{S^2/n}} > t_{n-1} \text{ ou } \frac{\bar{X} - \theta_1}{\sqrt{S^2/n}} < t_{n-1,\alpha/2}\right) = \alpha$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \theta_2}{\sqrt{S^2/n}} \sim T_{n-1}$ e $\frac{\bar{X} - \theta_1}{\sqrt{S^2/n}} \sim T_{n-1}$

$\Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$

ⓑ $P_{\theta_0}(|\cancel{\bar{X}} - \bar{\theta}| > k\sqrt{S^2/n}) = P_{\theta_0}\left(\frac{|\bar{X} - \bar{\theta}|}{\sqrt{S^2/n}} > k\right) = \underbrace{P_{\theta}(T_{n-1} > k)}_{= \alpha}$