/ /

HW 8

(1) Seja $X_1, \dots, X_n \sim$ Poisson (λ)

(a) Encontre um teste UMP de $H_0: \lambda \leq \lambda_0$ vs $H_1: \lambda > \lambda_0$.

(b) Considere o caso $\lambda_0 = 1$. Usando o TCL determine o tamanho da amostra n para que um teste UMP satisfaça $P(\text{Rejeitar } H_0 | \lambda = 1) = 0.05$ e $P(\text{Rejeitar } H_0 | \lambda = 2) = 0.9$.

(a) Pelo Teorema de Karlin-Rubin, o teste UMP rejeita H_0 se $\sum X_i > k$, pois $\sum X_i$ é uma estatística suficiente e $\sum X_i \sim$ Poisson $(n\lambda)$ é MLR. ~~Ex~~ Podemos escolher k que satisfaz $P(\sum X_i > k | \lambda = \lambda_0) = \alpha$.

(b)
$$P(\sum X_i > k | \lambda = 1) \cong P(Z > (k-n)/\sqrt{n}) = 0.05$$

$$P(\sum X_i > k | \lambda = 2) \cong P(Z > (k-2n)/\sqrt{2n}) = 0.9$$

onde $Z \sim N(0,1)$. Daí resolvendo para k e n temos

$$\frac{k-n}{\sqrt{n}} \simeq 1.645 \text{ e } \frac{k-2n}{\sqrt{2n}} \simeq -1.28$$

daí $n = 12$ e $k \simeq 17.7$.

Digitalizado com CamScanner

② Seja $X_1,\ldots,X_n \sim Unif(\theta,\theta+1)$. Para testar $H_0:\theta=0$ vs. $H_1:\theta\geq 0$, usamos o teste

$$Y_n \geq 1 \text{ ou } Y_1 > k \Rightarrow \text{Rejeitamos } H_0$$

onde k é constante, $Y_1=\min X_i$, $Y_n=\max X_i$.

ⓐ Determine k para que o teste tenha tamanho α.

ⓑ Encontre uma expressão para a função poder no item ⓐ.

ⓒ Prove que o teste é UMP de tamanho α.

ⓓ Encontre valores de n e k de forma que o teste UMP quando tenha nível 0.1 então o poder seja pelo menos 0.8 se $\theta>1$.

ⓐ Pelos teoremas 5.4.4 e 5.4.6 de [CB], as distribuições marginais de Y_1 e conjunta de (Y_1,Y_n) são

$$f(y_1|\theta)=n(1-(y_1-\theta))^{n-1},\quad 0<y_1<\theta+1,$$
$$f(y_1,y_n|\theta)=n(n-1)(y_n-y_1)^{n-2},\quad 0<y_1\leq y_n<\theta+1.$$

Sobre H_0, $P(Y_n\geq 1)=0$. Então

$$\alpha=P(Y_1\geq k|0)=\int_k^1 n(1-y_1)^{n-1}\,dy_1=(1-k)^n.$$

Daí ~~na~~ usando $k=1-\alpha^{1/n}$ para ter tamanho de teste α.

/ /

(b) Para $\theta \leq k-1$, $\beta(\theta) = 0$. Para $k-1 < \theta \leq 0$,

$$\beta(\theta) = \int_k^{\theta+1} n(1-(Y_1-\theta))^{n+1} dY_1 = (1-k+\theta)^n.$$

Para $0 < \theta < k$,

$$\beta(\theta) = \int_k^{\theta+1} n(1-(Y_1-\theta))^{n-1} dY_1 + \int_\theta^{k} \int_1^{\theta+1} n(n-1)(Y_n-Y_1)^{n-2} dY_n\, dY_1$$

$$= \alpha + 1 - (1-\theta)^n.$$

E para $k < \theta$, $\beta(\theta) = 1$.

(c) (Y_1, Y_n) são estatísticas suficientes. Então pelo Corolário do Lema de Neyman-Pearson [CB] e a pdf conjunta do item (a). Para $0 < \theta < 1$, a razão da pdf é

$$\frac{f(Y_1, Y_n|\theta)}{f(Y_1, Y_n|0)} = \begin{cases} 0 & 0 < Y_1 \leq \theta,\ Y_1 < Y_n < 1 \\ 1 & \theta < Y_1 < Y_n < 1 \\ \infty & 1 < Y_n < \theta+1,\ \theta < Y_1 < Y_n \end{cases}$$

Para $1 < \theta$, a razão é

$$\frac{f(Y_1, Y_n|\theta)}{f(Y_1, Y_n|0)} = \begin{cases} 0 & Y_1 < Y_n < 1 \\ \infty & \theta < Y_1 < Y_n < \theta+1 \end{cases}$$

Para $0 < \theta < k$, $k' = 1$. O teste é rejeitado se $f(Y_1, Y_n|\theta)/f(Y_1, Y_n|0) > 1$ e aceito se $f(Y_1, Y_n|\theta)/f(Y_1, Y_n|0) < 1$. Para $\theta \geq k$, usando $k' = 0$. O teste é rejeitado se $f(Y_1, Y_n|\theta)/f(Y_1, Y_n|0) > 0$ e aceito caso contrário.

(d) $\beta(\theta) = 1$ $\forall \theta \geq k = 1 - \alpha^{\frac{1}{n}}$. Para qualquer n.

/ /

(3) Seja $X_1,\dots,X_n \sim N(\theta,\sigma^2)$. Considere testagem

$$H_0: \theta \le \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta > \theta_0$$

(a) Se σ^2 é conhecido, mostre que ~~este~~ o teste que rejeita H_0 quando

$$\bar{X} > \theta_0 + z_\alpha \sqrt{\sigma^2/n}$$

é um teste de tamanho α. Mostre que o teste pode ser derivado de um LRT.

(b) Mostre que o teste do item (a) é um teste UMP.

(c) Se σ^2 é desconhecido, mostre que o teste rejeita H_0 quando

$$\bar{X} > \theta_0 + t_{n-1,\alpha} \sqrt{S^2/n}$$

é um teste de tamanho α. Mostre que o teste pode ser derivado de um LRT

(a) $P(\bar{X} > \theta_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n} \mid \theta_0) = P((\bar{X}-\theta_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > z_\alpha \mid \theta_0) = P(Z \ge z_\alpha) = \alpha$, onde $Z \sim N(0,1)$. Como o MLE irrestrito é $\bar{X}$ e o MLE restrito é θ_0 se $\bar{X} > \theta_0$, a estatística LRT é, para $\bar{x} \ge \theta_0$

$$\lambda(x) = \frac{\cancel{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}}\, e^{-\sum(x_i-\theta_0)^2/2\sigma^2}}{\cancel{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}}\, e^{-\sum(x_i-\bar{x})^2/2\sigma^2}} = \frac{e^{-[n(\bar{x}-\theta_0)^2+(n-1)s^2]/2\sigma^2}}{e^{-(n-1)s^2/2\sigma^2}} = e^{-n(\bar{x}-\theta_0)^2/2\sigma^2}$$

~~onde~~ e o LRT é 1 caso $\bar{x} < \theta_0$. Daí, rejeitar se $\lambda < c$ é equivalente a rejeitar se $(\bar{x}-\theta_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > c'$.

(b) Como ~~...~~ $\bar{X}$ é uma estatística suficiente e tem distribuição MLR, então pelo Teorema de Karlin-Rubin é um teste UMP de nível α.

/ /

(c) $P(\bar{X} > \theta_0 + t_{n-1,\alpha} S/\sqrt{n} \mid \theta_0) = P(T_{n-1} > t_{n-1,\alpha}) = \alpha$, onde T_{n-1} é uma T-student com $n-1$ graus de liberdade. Se definimos $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2$ e $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum(X_i - \theta_0)^2$, então para $\bar{X} \geq \theta_0$ a estatística LRT é $\lambda = (\hat{\sigma}^2/\hat{\sigma}_0^2)^{n/2}$, e para $\bar{X} < \theta_0$ o LRT é 1. Escrevendo $\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}S^2$ e $\hat{\sigma}_0^2 = (\bar{X}-\theta_0)^2 + \frac{n-1}{n}S^2$, é claro que o LRT é equivalente para o test-t pois $\lambda < c$, onde

$$\frac{\frac{n-1}{n}S^2}{(\bar{X}-\theta_0)^2 + \frac{n-1}{n}S^2} = \frac{(n-1)/n}{(\bar{X}-\theta_0)^2/S^2 + (n-1)/n} < c' \text{ e } \bar{X} \geq \theta_0,$$

o que é equivalente a rejeitar se $(\bar{X}-\theta_0)/(S/\sqrt{n})$ é grande.

/ /

4) Seja $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ uma amostra aleatoria de uma normal bivariada com parametros $\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho$. Estamos interessados em testar

$$H_0: \mu_x = \mu_y \quad vs. \quad H_1: \mu_x \neq \mu_y.$$

a) Mostre que a v.a. $W_i = X_i - Y_i$ é iid $N(\mu_x, \mu_y)$

b) Mostre que a hipotese acima pode ser testada com a estatistica

$$T_W = \frac{\bar{W}}{\sqrt{\frac{1}{n} S_W^2}}$$

onde $\bar{W} = \frac{1}{n} \sum W_i$ e $S_W^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum (W_i - \bar{W})^2$. Alem disso, mostre que, sobre H_0, $T_W \sim$ t-student$(n-1)$.

a) $$\mu_W = E W_i = E[X_i - Y_i] = EX_i - EY_i = \mu_x - \mu_y.$$

para a variancia

$$Var\, W_i = Var(X_i - Y_i) = Var\, X_i + Var\, Y_i - 2\, Cov(X_i, Y_i)$$

onde $Cov(X_i, Y_i) = \rho \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$. Daí

$$~~Var~~\; Var\, W_i = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \rho \sigma_x \sigma_y.$$

Como (X_i, Y_i) são iid e uma combinação linear $W_i = X_i - Y_i$ então W_i's são iid. E como visto anteriormente uma combinação linear ~~e~~ de v.a normais é normal, então $W_i \sim N(\mu_W, \sigma_W)$.

/ /

(b) Queremos testar $H_0: \mu_w = 0$ vs $H_1: \mu_w \neq 0$. Sobre H_0

$$\bar{W} \sim N\left(0, \frac{\sigma_w^2}{n}\right)$$

O denominador é um estimador não viesado do desvio padrão de $\bar{W}$, então

$$T_w = \frac{\bar{W}}{\sqrt{\frac{1}{n} S_w^2}} \sim t_{n-1}.$$

E ~~pelo exercício~~ vamos usar o que foi mostrado no exercício 8.38 [CB]:

$$P_{\theta_0}\left(|\bar{W}| > t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{S_w^2/n}\right) =$$

$$= 1 - P_{\theta_0}\left(-t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{S_w^2/n} \leq \bar{W} \leq t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{S_w^2/n}\right).$$

$$= 1 - P_{\theta_0}\left\{-t_{n-1,\alpha/2} < \frac{\bar{W}}{\sqrt{S_w^2/n}} < t_{n-1,\alpha/2}\right\}$$

$$= 1 - (1-\alpha) = \alpha$$

O MLE irrestrito é $\hat{\mu}_{\bar{W}} = \bar{W}$ e $\hat{\sigma}_w^2 = \sum (W_i - \bar{W})^2/n$. O MLE restrito é $\hat{\mu}_{w_0} = 0$ e $\hat{\sigma}_{w_0}^2 = \sum (W_i - \bar{w})^2/n$. Então o LRT é

$$\lambda(x) = \frac{(2\pi\hat{\sigma}_{w_0})^{-\frac{n}{2}} \exp\{-n\hat{\sigma}_{w_0}^2/(2\hat{\sigma}_{w_0}^2)\}}{(2\pi\hat{\sigma}_w)^{-\frac{n}{2}} \exp\{-n\hat{\sigma}_w^2/(2\hat{\sigma}_w^2)\}}$$

$$= \left[\frac{\sum (W_i - \bar{W})^2}{\sum (W_i - 0)^2}\right]^{\frac{n}{2}}$$

/ /

$$= \left[\frac{\sum (W_i - \bar{W})^2}{\sum (W_i - \bar{W})^2 + n\,\bar{W}^2} \right]^{\frac{n}{2}}.$$

Para uma constante c, o LRT é

H_0 é rejeitado se $\dfrac{1}{1 + \dfrac{n \cdot \bar{W}^2}{\sum (W_i - \bar{W})^2}} < c^{2/n}$.

Que pode ser reescrito como

H_0 é rejeitado se $|\bar{W}| > \left[(c^{-\frac{2}{n}} - 1)(n-1) \frac{S_W^2}{n} \right]^{1/2}$.

Escolhendo c de forma a ter tamanho α, temos que

H_0 é rejeitado se $|\bar{W}| > t_{n-1, \alpha/2} \sqrt{S_W^2 / n}$.

/ /

⑤ Em cada uma das seguintes situações, calcule o p-valor do dado observado.

ⓐ Para teste: $H_0: \theta \leq \frac{1}{2}$ vs $H_1: \theta > \frac{1}{2}$, 7 sucessos foram observados em 10 tentativas.

ⓑ Para teste: $H_0: \lambda \leq 1$ vs $H_1: \lambda > 1$, $X = 3$ é observado, com $X \sim Poisson(\lambda)$.

ⓒ Para teste: $H_0: \lambda \leq 1$ vs $H_1: \lambda > 1$, $X_1 = 3, X_2 = 5$ e $X_3 = 1$ são observados com $X_i \sim Poisson(\lambda)$, iid.

ⓐ $$\text{p-valor} = P(X \geq 7 \mid \theta = \tfrac{1}{2})$$
$$= \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-k} \cong 0.172$$

ⓑ $$\text{p-valor} = P(X \geq 3 \mid \lambda = 1)$$
$$= 1 - P(X < 3 \mid \lambda = 1)$$
$$= 1 - \left[\frac{e^{-1}1^2}{2!} + \frac{e^{-1}1^1}{1!} + \frac{e^{-1}1^0}{0!}\right] \cong 0.803$$

ⓒ $$\text{p-valor} = P(\Sigma X_i \geq 9 \mid 3\lambda = 3)$$
$$= 1 - P(Y < 9 \mid 3\lambda = 3)$$
$$= 1 - e^{-3}\left[\frac{3^8}{8!} + \frac{3^7}{7!} + \cdots + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^0}{0!}\right] \cong 0.004$$

onde $Y \sim Poisson(3\lambda)$.

/ /

⑥ Considere o problema de testar H_0 vs. H_1. Seja $W(X)$ a estatística de teste. Suponha que para cada α, $0 \leq \alpha \leq 1$, o valor crítico c_α pode ser ~~exato~~ escolhido de forma que a região $\{x : W(x) \geq c_\alpha\}$ ~~tem~~ rejeita H_0 e tem tamanho α. Usando a família de testes, mostre que o p-valor usual,

$$p(x) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(W(X) \geq W(x))$$

é o menor tamanho de teste α que rejeitamos H_0, com o dado observado x.

Se $\alpha < p(x)$

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P(W(X) \geq c_\alpha) = \alpha < p(x) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P(W(X) \geq W(x)).$$

Daí $W(x) < c_\alpha$ e H_0 não deve ser rejeitado no nível α.
Por outro lado se $\alpha \geq p(x)$,

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} (W(X) \geq c_\alpha) = \alpha \geq p(x) = \sup_{\theta \in \Theta_0} P(W(X) \geq W(x)).$$

Ou $W(x) \geq c_\alpha$, caso em que rejeitamos H_0 no nível α tendo observado x ou $W(x) < c_\alpha$. Mas, no último caso, poderíamos usar $c'_\alpha = W(x)$ e ter $\{x' : W(x') \geq c'_\alpha\}$ define uma região de tamanho α. Então podemos rejeitar H_0 no nível α tendo observado x.

/ /

(7) Queremos testar

$$H_0: \theta = 0 \quad vs. \quad H_1: \theta \neq 0,$$

observamos $X_1, \ldots, X_n$ v.a de distribuição $N(\theta, \sigma^2)$, com σ^2 conhecido. Uma priori típica para esta situação é uma priori misturada com massa em $\theta = 0$ e espalhado fora de H_1. Uma escolha típica é $P(\theta = 0) = \frac{1}{2}$ e se $\theta \neq 0$, a priori tem distribuição $\frac{1}{2} N(0, \tau^2)$, onde τ^2 é conhecida.

(a) Mostre a priori definida acima é própria, ou seja $P(-\infty < \theta < \infty) = 1$.

(b) Calcule a distribuição a posteriori ~~de H_0 se~~ se H_0 é verdadeiro, $P(\theta = 0 \mid X_1, \ldots, X_n)$.

(c) Encontre uma expressão para o p-valor correspondente a $\bar{X}$.

(a)

$$P(-\infty < \theta < \infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2/(2\tau^2)} d\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

(b) Primeiro ~~avalio~~ calculamos a densidade da posteriori.

$$f(\bar{x} \mid \theta) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

e a densidade marginal por

$$m_\pi(\bar{x}) = \frac{1}{2} f(\bar{x} \mid 0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x} \mid \theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} e^{-\frac{\theta^2}{(2\tau^2)}} d\theta$$

Digitalizado com CamScanner

/ /

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-n\bar{x}^2/(2\sigma^2)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(\sigma^2/n)+\tau^2}} e^{-\bar{x}^2/[2((\sigma^2/n)+\tau^2)]}$$

Então, $P(\cancel{X}\theta = 0 \mid \bar{x}) = \frac{1}{2} f(\bar{x}|0) / m_\pi(\bar{x})$

ⓒ $P(|\bar{X}| \geq \bar{x} \mid \theta = 0) = 1 - P(|\bar{X}| \leq \bar{x} \mid \theta = 0)$

$$= 1 - P(-\bar{x} \leq \bar{X} \leq \bar{x} \mid \theta = 0)$$

$$= 2[1 - \Phi(\bar{x}/(\sigma/\sqrt{n}))],$$

onde Φ é a cdf da normal padrão.