HW 9

① Se $L(x)$ e $U(x)$ satisfazem $P_\theta(L(x) \leq \theta) = 1-\alpha_1$ e $P_\theta(U(x) \geq \theta) = 1-\alpha_2$, e $L(x) \leq U(x)$ $\forall x$, mostre que $P_\theta(L(x) \leq \theta \leq U(x)) = 1-\alpha_1-\alpha_2$.

Sendo $A = \{x : L(x) \leq \theta\}$ e $B = \{x : U(x) \geq \theta\}$. Então $A \cap B = \{x : L(x) \leq \theta \leq U(x)\}$ e $1 \geq P(A \cup B) = P\{L(x) \leq \theta$ ou $\theta \leq U(x)\} \geq P\{L(x) \leq \theta$ ou $\theta < L(x)\} = 1$, pois $L(x) \leq U(x)$. Além disso, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1-\alpha_1+1-\alpha_2-1 = 1-\alpha_1-\alpha_2$.

/ /

(2) Seja $X_1, \dots, X_n$ independentes com distribuição

$$P(X_i \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ (x/\beta)^\alpha & 0 < x < \beta \\ 1 & x \geq \beta \end{cases}$$

(a) Se α é conhecido, α_0, encontre um limite superior de confiança para β com ~~o~~ coeficiente de confiança 0.95.

(b) Usando os dados

22.0, 23.9, 20.9, 23.8, 25.0, 24.0
21.7, 23.8, 22.8, 23.1, 23.1, 23.5
23.0, 23.0

para construir um intervalo de confiança para β. Suponha que α é conhecido e igual ao MLE.

(a) O MLE de β é $X_{(n)} = \max X_i$. Desde que β é um parâmetro $X_{(n)}/\beta$ é um pivô, e

$$0.05 = P_\beta(X_{(n)}/\beta \leq c) = P(X_i \ \forall i \leq c\beta)$$
$$= \left(\frac{c\beta}{\beta}\right)^{\alpha_0 n} = c^{\alpha_0 n}$$

então $c = 0.05^{1/\alpha_0 n}$. Daí, $0.95 = P_\beta(X_{(n)}/\beta > c) = P(X_{(n)}/c > \beta)$, e $\{\beta : \beta < X_{(n)}/(0.05^{1/\alpha_0 n})\}$ é um limite superior de confiança 95% para β.

(b) $\hat{\alpha} = 12.59$ e $X_{(n)} = 25$. Então o intervalo de confiança é $(0,\ 25/[0.05^{1/12.59 \cdot 14}]) = (0,\ 25.43)$

Digitalizado com CamScanner

③ Observando $X_1, \dots, X_n$ onde $X_i \sim$ Bernoulli(p), queremos um intervalo da forma $[0, U(X_1, \dots, X_n)]$, onde $P_p(p \in [0, U(X_1, \dots, X_n)]) \geq 1-\alpha$.

ⓐ Mostre que a inversão da região de aceitação do teste

$$H_0: p = p_0 \quad vs \quad H_1: p < p_0$$

da um intervalo de confiança e nível de confiança dessa forma

ⓑ Encontre as equações para construção do intervalo de confiança

ⓐ Podemos basear o teste em $T = \sum X_i = $ binomial(n, p), desde que T seja suficiente para p. Como a distribuição binomial tem razão de verossimilhança monótona pelo Teorema de Karlin-Rubin o teste que rejeita H_0 se $T > k(p_0)$ é o teste UMP deste tamanho. Para cada p_0, podemos escolher $k(p_0)$ para ter um teste de nível α. $k(p_0)$ é definido para ser um inteiro entre 0 e n que satisfaça as inequações

$$\sum_{y=0}^{k(p_0)} \binom{n}{y} p_0^y (1-p_0)^{n-y} \geq 1-\alpha$$

e
$$\sum_{y=0}^{k(p_0)} \binom{n}{y} p_0^y (1-p_0)^{n-y} < 1-\alpha$$

ⓑ $k(p)$ é o inteiro que satisfaz simultaneamente

$$\sum_{y=k(p)}^{n} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \geq 1-\alpha$$

e
$$\sum_{y=k(p)+1}^{n} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} < 1-\alpha$$

/ /

(4) (a) Encontre o ~~tot~~ conjunto de confiança $1-\alpha$ para a deste do invertendo o LRT de $H_0: a = a_0$ vs. $H_1: a \neq a_0$ baseado na amostra $X_1, \ldots, X_n \sim N(\theta, a\theta)$, onde θ é desconhecido.

(b) Uma questão similar pode ser questionada sobre a família $N(\theta, a\theta^2)$. Se $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, a\theta^2)$, onde θ é desconhecido, encontre o conjunto de confiança $1-\alpha$ baseado no LRT de $H_0: a = a_0$ vs. $H_1: a \neq a_0$.

(a) Sendo $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, a\theta)$

$$f(x|\theta, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a\theta}} \exp\left\{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2a\theta}\right\}$$

Sobre H_0 a razão da verossimilhança

$$\lambda(x|a_0) = \frac{\sup_\theta L(\theta, a_0)}{\sup_{\theta, a} L(\theta, a)}.$$

O MLE restrito é

$$\hat{\theta}_0 = \frac{-a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4\sum x_i^2}}{2} \quad (\text{onde } a = a_0)$$

e irrestrito

$$\hat{\theta} = \bar{X} \quad e \quad \hat{a} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n\bar{X}}$$

Então,

$$\lambda(x|a_0) = \frac{\left(\frac{\hat{a}\hat{\theta}}{a_0\hat{\theta}_0}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2a_0\hat{\theta}_0}\sum(X_i - \hat{\theta}_0)^2\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2\hat{a}\hat{\theta}}\sum(X_i - \hat{\theta})^2\right\}}.$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi a_0 \hat{\theta}_0}\right)^{n/2} e^{n/2} e^{-\frac{1}{2a_0\theta_0}\sum(x_i-\hat{\theta}_0)^2}.$$

A região de rejeição com tamanho α é $\{x : \lambda(x) \leq c_\alpha\}$, e ~~t~~ um conjunto de confiança $1-\alpha$ é $\{\alpha_0 : \lambda(x) \geq c_\alpha\}$.

(b) ~~O MLE restrito é~~

$$\cancel{\hat{\theta}_0 = \bar{x} + \sqrt{\bar{x} + 4a_0 t_0}}$$

$$f(x|\theta, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a\theta^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2a\theta^2}\right\}$$

Daí, o MLE restrito $(a = a_0)$ é (verifique o exercício 8.8 de [CB])

$$\hat{\theta}_0 = \bar{x} + \sqrt{\bar{x} + 4a_0(\hat{\sigma}^2 + \bar{x}^2)} / 2a_0.$$

E o MLE irrestrito com

$$\hat{\theta} = \bar{x} \text{ e } \hat{a} = \frac{1}{n\bar{x}^2}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\bar{x}^2}.$$

onde $\hat{\sigma} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$. Portanto

$$\lambda(x) = \left(\frac{\hat{\sigma}}{\theta_0}\right)^n \exp\left\{\frac{n}{2} - \frac{\sum(x_i - \hat{\theta}_0)^2}{2\hat{\theta}_0^2}\right\}.$$

A região de rejeição com tamanho α é $\{x : \lambda(x) \leq c_\alpha\}$, e um conjunto de confiança $1-\alpha$ é $\{\alpha_0 : \lambda(x) \geq c_\alpha\}$.

/ /

6 5 Se T é uma v.a. contínua com cdf $F_T(t|\theta)$ e $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, mostre que uma região de aceitação α da hipótese $H_0: \theta=\theta_0$ é $\{t: \alpha_1 \leq F_T(t|\theta_0) \leq 1-\alpha_2\}$, com confiança associada $1-\alpha$ ao conjunto $\{\theta: \alpha_1 \leq F_T(t|\theta) \leq 1-\alpha_2\}$

Supondo $F_T(t|\theta) \sim Uniform(0,1)$ (me parece que não é possível resolver sem essa hipótese). Daí

$$P_{\theta_0}(\{T: \alpha_1 \leq F_T(T|\theta_0) \leq 1-\alpha_2\}) = P_{\theta_0}(\alpha_1 \leq U \leq 1-\alpha_2) = 1-\alpha_2-\alpha_1$$

onde $U \sim Uniform(0,1)$. Desde que

$$t \in \{t: \alpha_1 \leq F_T(t|\theta) \leq 1-\alpha_2\} \Leftrightarrow \theta \in \{\theta: \alpha_1 \leq F_T(t|\theta) \leq 1-\alpha_2\}$$

o mesmo cálculo chega que o intervalo tem confiança $1-\alpha_2-\alpha_1$.

/ /

⑥ Encontre um intervalo de confiança $1-\alpha$ para θ, dado $X_1, \dots, X_n$ iid de um pdf

ⓐ $f(x|\theta) = 1, \quad \theta - \frac{1}{2} < x < \theta + \frac{1}{2}$

ⓑ $f(x|\theta) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta, \ \theta > 0$

ⓐ A distribuição é uma $Uniform(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ e $X - \theta \sim Uniform(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$P(a \leq X \leq b) = b - a$$

Escolhemos a e b de forma que $b - a = 1 - \alpha$. Uma escolha é $a = -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}$ e $b = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}$.

ⓑ Tomando $T = X/\theta$, então T tem pdf $f(t) = 2t, \ 0 < t < 1$,

$$P(a \leq X/\theta \leq b) = \int_a^b 2t\,dt = b^2 - a^2$$

Escolhemos a e b de forma que $b^2 - a^2 = 1 - \alpha$. Uma escolha é $a = \sqrt{\alpha/2}$ e $b = \sqrt{1 - \alpha/2}$.