/ /

HW 2

① Encontre a função geradora de momentos para

ⓐ A distribuição Normal;
ⓑ A distribuição Gama;
ⓒ A distribuição de Poisson.

ⓐ Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \int e^{xt} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2} dx$$

Seja $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, ou seja $x = z\sigma + \mu$. Daí

$$M_X(t) = e^{\mu t} \int e^{z\sigma t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \left|\frac{dx}{dz}\right| dz$$

$$= e^{\mu t} \int e^{z\sigma t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

ⓑ Sendo $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} f_X(x)\, dx$$

Quebrando em casos:

- $t < \beta$

$$M_X(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta-t)x} dx$$

$(u = x(\beta - t)) \rightarrow$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\beta-t}\right)^{\alpha-1} e^{-u} \frac{du}{\beta-t}$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)(\beta-t)^\alpha} \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

/ /

$$= \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\beta-t)^\alpha}$$

$$= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha = \left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

• $t = \beta$, nossa integral fica

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} dx = \frac{\beta^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} [x]_0^\infty$$

$$= 0 + \frac{\beta^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \cdot \lim_{x\to\infty} x^a \to \infty$$

• $t > \beta$, nesse caso $-(\beta-t)$ é positiva, como consequência $x^{\alpha-1} < e^{(\beta+t)x}$ para x suficientemente grande. Assim a integral também converge para infinito.

$$M_X(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha} & t<\beta \\ \text{"não finito"} & t \geq \beta \end{cases}$$

(c) Sendo $X \sim$ Poisson(λ)

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} f_X(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

/ /

(2) Suponha que temos uma ~~v.a.~~ v.a. positiva $X \geq 0$, e suponha também que a mgf $M_X(t)$ $\forall t \geq 0$. Mostre que

$$\inf_{k=0,1,2,\dots} \frac{E[X^k]}{u^k} \leq \inf_{t\geq 0} \frac{E[e^{tX}]}{e^{tu}}$$

Isso implica que o melhor limite de cauda de momento nunca é pior que o limite de Chernoff. Geralmente usamos o método de Chernoff porque é tipicamente muito mais fácil encontrar o melhor t do que encontrar o melhor K.

Seja $t>0$, então usando expansão em series de potencia e pelo teorema da convergencia monotona, temos $E[e^{tX}] = E[\sum \frac{t^k X^k}{k!}] = \sum_k \frac{t^k E[X^k]}{k!}$. Daí

$$\frac{E[e^{tX}]}{e^{tu}} = \frac{\sum_k \frac{t^k E[X^k]}{k!}}{\sum_k \frac{t^k u X^k}{k!}} = \lim_k \frac{1 + tEX + \dots + \frac{t^k EX^k}{k!}}{1 + tu + \dots + \frac{t^k u X^k}{k!}}$$

$$\overset{(1)}{\geq} \min_{j\leq k} \frac{t^j EX^j j!}{j!\, t^j u^j} = \min_{j\leq k} \frac{E[X^j]}{u^j}$$

(1) segue pela ~~d~~ inequação de Cauchy Shwarz que se $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ são não negativos temos que

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n} \geq \min_{k\leq n} \frac{a_k}{b_k}$$

Daí, temos que $\forall t>0$

$$\frac{E[e^{tX}]}{e^{tu}} \geq \inf_k \frac{E[X^k]}{u^k}$$

/ /

(3) Construa uma v.a. X para a qual a desigualdade de Chebyshev seja rigorosa, ou seja, $P(|X-\mu|\geq t) = \sigma^2/t^2$.

Seja uma v.a. X tal que

$$f_X(x) = \begin{cases} \mu+t, & \text{com prob } \frac{\sigma^2}{2t^2} \\ \mu-t, & \text{com prob } \frac{\sigma^2}{2t^2} \\ \mu, & \text{" "} \quad 1-\frac{\sigma^2}{t^2} \end{cases}$$

- $EX = (\mu+t)\frac{\sigma^2}{2t^2} + (\mu-t)\frac{\sigma^2}{2t^2} + \mu\left(1-\frac{\sigma^2}{t^2}\right) = \mu$
- $EX^2 = (\mu+t)^2\frac{\sigma^2}{2t^2} + (\mu-t)^2\frac{\sigma^2}{2t^2} + \mu^2\left(1-\frac{\sigma^2}{t^2}\right)$

$Var(X) = EX^2 - \mu = \sigma^2.$

Daí, por construção temos que

$$P(|X-\mu|\geq t) = \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

/ /

(4) Prove que
$$\text{Var}\,Y = E[\text{Var}[Y|X]] + \text{Var}[E[Y|X]]$$

$$\text{Var}\,Y = E[Y^2] - (EY)^2$$
$$= E[E[Y^2|X]] - (E[E[Y|X]])^2$$
$$= E[\text{Var}(Y|X)] + E[(E[Y|X])^2] - (E[E[Y|X]])^2$$

Usando que $\text{Var}(E[Y|X]) = E[E[Y|X]]^2 - (E[E[Y|X]])^2$. Daí, temos que

$$\text{Var}\,Y = E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}(E[Y|X]).$$

/ /

⑤ Suponha que $X \geq 0$ é uma v.a. contínua e que X tem média μ. Mostre que

$$\mu = \int_0^{\infty} P(X > x)\, dx.$$

Sabemos que

$$\mu = E[X] = \int_0^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

Usando integração por partes $u = x$ e $dv = f_X(x)dx$, daí $du = dx$ e $v = F_X$ ~~dx~~

$$\mu = [x \cdot F_X(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F_X(x)\, dx$$

$$= 1 - \int_0^{\infty} F_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} 1 - F_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} P(X > x)\, dx.$$