HW5

① ~~One o~~ Uma observação de uma variável aleatória discreta X com pmf $f(x|\theta)$, onde $\theta \in \{1,2,3\}$. Encontre o MLE de θ

x	$f(x\|1)$	$f(x\|2)$	$f(x\|3)$
0	1/3	1/4	0
1	1/3	1/4	0
2	0	1/4	1/4
3	1/6	1/4	1/2
4	1/6	0	1/4

Para cada valor de x, o MLE de $\hat{\theta}$ é o valor de θ que maximiza $f(x|\theta)$. Os valores são

X	0	1	2	3	4
$\hat{\theta}$	1	1	2/3	3	3

Em $x=2$, $f(x|2)=f(x|3)=1/4$ (nesse caso $\hat{\theta}=2$ e $\hat{\theta}=3$ são MLEs).

/ /

(2) Dado uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ para uma população com pdf $f(x|\theta)$, mostre que maximizando a função de verossimilhança, $L(\theta|x)$, é equivalente a maximizar $\log L(\theta|x)$.

A função log é estritamente crescente, logo

$$L(\theta|x) < L(\hat{\theta}|x) \iff \log L(\theta|x) < L(\hat{\theta}|x)$$

Então o $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta|x)$ também maximiza $\log L(\theta|x)$.

/ /

③ Considere estimar o parametro da binomial K. De forma que, seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra para uma binomial(k, p), onde p é conhecido e K não. A verossimilhança é

$$L(k|x,p) = \prod_{i=1}^{n} \binom{k}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k-x_i}.$$

Se $k < \max x_i$, então $L(k|x,p) = 0$. ~~Ent~~ Por isso vamos assumir $\hat{K} \geq \max X_i$ que satisfaz que $L(k|x,p) / L(k-1|x,p) \geq 1$ e $L(k+1|x,p) / L(k|x,p) < 1$. A razão da verossimilhança é

$$\frac{L(k|x,p)}{L(k-1|x,p)} = \frac{(k(1-p))^n}{\prod_i (k-x_i)}$$

Portanto a condição para o maximo é

$$(k(1-p))^n \geq \prod_{i=1} (k-x_i) \text{ e } ((k+1)(1-p))^n < \prod_{i=1} (k+1-x_i)$$

Dividindo por k^n e escrevendo $z = 1/k$, queremos resolver

$$(1-p)^n = \prod_i (1-x_i z), \text{ para } 0 \leq z \leq 1/\max x_i.$$

O lado direito é estritamente decrescente em z para z neste intervalo com valor 1 para $z=0$ e 0 para $z = 1/\max x_i$. Então há um unico z que resolve está equação. O valor de $1/\hat{z}$ pode não ser inteiro. Mas o inteiro $\hat{k}$ que satisfaz a inequação e é o MLE, é o maior inteiro menor ou igual a $1/\hat{z}$.

(a) Prove que $\hat{k}$ que satisfaz as inequações e é o MLE é o maior inteiro menor ou igual a $1/\hat{z}$.

(b) Seja $p=\frac{1}{2}$, $n=4$, e $X_1=0$, $X_2=20$, $X_3=1$, e $X_4=19$. Qual o valor de $\hat{k}$?

(a) O valor $\hat{z}$ resolve a equação

$$(1-p)^n = \prod_i (1-x_i z)$$

onde $0 < z < (\max x_i)^{-1}$. Seja $\hat{k}$:= o maior inteiro menor ou igual a $1/\hat{z}$, $\hat{k}$ deve satisfazer

$$(k(1-p))^n \geq \prod_i (k-x_i) \text{ e } ((k+1)(1-p))^n < \prod_i (k+1-x_i).$$

Pois o lado direito da primeira equação é decrescente em $\hat{z}$, e porque $\hat{k} < 1/\hat{z}$ (então $\hat{z} \leq 1/\hat{k}$) e $\hat{k}+1 > 1/\hat{z}$, $\hat{k}$ deve ~~ser~~ satisfazer as 2 inequações. Daí $\hat{k}$ é o MLE.

(b) Para $p=\frac{1}{2}$, temos que resolver

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = (1-20z)(1-z)(1-19z)$$

que pode ser reduzida a resolver a equação cúbica $-380z^2+419z^2-40z+15/16=0$. ~~Os~~ As raízes são 0.9998, 0.0646 e 0.0381, com respectivos $\hat{k}$'s. 1, 15 e 26 ~~para~~ os 2 primeiros são menores que max X. Logo $\hat{k}=26$.

Digitalizado com CamScanner

④ Seja $X_1, \dots, X_n$ iid com uma de duas pdfs. Se $\theta = 0$, então

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

caso $\theta = 1$, então

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/(2\sqrt{x}) & 0 < x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Encontre o MLE de θ.

$L(0|x) = 1, \; 0 < x_i < 1$, e $L(1|x) = \prod (2\sqrt{x_i})^{-1}, \; 0 < x_i < 1$.
Daí, MLE é 0 se $1 \geq \prod_i (2\sqrt{x_i})^{-1}$ e 1 se $1 < \prod_i (2\sqrt{x_i})^{-1}$.

⑤ Seja $X_1, \dots, X_n$ iid com pdf

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x \le \theta, \quad \theta > 0$$

Estime θ usando ambos MM e MLE. Calcule a media e variancia dos estimadores. Qual voce prefere

Trata-se de um modelo Unif$(0,\theta)$. O metodo dos momentos é $\frac{\tilde{\theta}}{2} = \bar{X}$, ou seja, $\tilde{\theta} = \bar{X}/2$. Temos que

$$E\tilde{\theta} = 2E\bar{X} = 2EX_i = \frac{2\theta}{2} = \theta$$

$$Var\,\tilde{\theta} = 4Var\,\bar{X} = 4\frac{\theta^2/12}{n} = \frac{\theta^2}{2n}.$$

A verossimilhança é

$$L(\theta|x) = \prod \frac{1}{\theta}\mathbb{1}(0<x_i<\theta) = \frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}(0<x_{(n)}\le\theta)\,\mathbb{1}(0\le x_{(1)}<\infty)$$

Onde $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são respectivamente ~~os~~ menor e maior valor. Para $\theta > X_{(n)}$, $L = \frac{1}{\theta^n}$, como é decrescente, L é maximizada por $\hat{\theta} = \max X_{(n)}$. $L = 0$ para $\theta < X_{(n)}$. Então o MLE é $\hat{\theta} = \max X_i$. A pdf de $\hat{\theta} = \max X_i$ é $n x^{n-1}/\theta^n$, $0 \le x < \theta$. Daí

$$E\hat{\theta} = \frac{n}{n+1}\theta, \quad E\hat{\theta}^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2 \text{ e } Var\,\hat{\theta} = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

Com n grande ambos ~~são~~ são não viesados e como $Var\,\hat{\theta} < Var\,\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}$ é preferível que $\tilde{\theta}$.

/ /

⑥ Seja $X_1, \ldots, X_n$ iid com pdf

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 \leq x < 1, \quad 0 < \theta < \infty$$

ⓐ Encontre o MLE de θ, e mostre que variância $\to 0$ quando $n \to \infty$.

ⓑ Encontre o MM de θ.

ⓐ $$f(x|\theta) = \prod \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \left(\prod x_i\right)^{\theta-1} = L(\theta|x)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[n\log\theta + (\theta-1)\sum \log x_i\right] = \frac{n}{\theta} + \sum \log x_i$$

igualando a zero temos $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum \log x_i}$. A segunda derivada é $-n/\theta^2 < 0$, então temos o MLE. Para calcular a variância de $\hat{\theta}$, note que $Y_i = -\log X_i \sim Exp(1/\theta)$, então $-\sum \log X_i \sim gamma(n, 1/\theta)$. Daí, $\hat{\theta} = n/T$, onde $T \sim gamma(n, 1/\theta)$. Podemos calcular o primeiro e segundo momentos diretamente. Temos

$$ET^{-1} = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{t} t^{n-1} e^{-\theta t} dt = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} = \frac{\theta}{n-1}$$

$$ET^{-2} = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{t^2} t^{n-1} e^{-\theta t} dt = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-2)}{\theta^{n-2}} = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)}$$

e portanto

$$E\hat{\theta} = \frac{n}{n-1}\theta \quad \text{e} \quad Var\,\hat{\theta} = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\theta^2 \to 0$$

(b) Portanto Como $X \sim beta(\theta, 1)$, $EX = \theta/(\theta+1)$ e o método dos momentos é a solução de

$$\frac{1}{n}\sum X_i = \frac{\theta}{\theta+1} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\sum X_i}{n - \sum X_i}$$

/ /

(7) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra para uma população com pdf exponencial

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \quad -\infty < x < \infty, \; -\infty < \theta < \infty$$

Encontre o MLE de θ.

$$L(\theta|x) = \prod \frac{1}{2} e^{-|x_i-\theta|} = \frac{1}{2^n} e^{-\sum |x_i-\theta|}$$

Sendo $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ estatística de ordem. Para $x_{(j)} \le \theta < x_{(j+1)}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{(i)}-\theta| = \sum_{i=1}^{j} (\theta - x_{(i)}) + \sum_{i=j+1}^{n} (x_{(i)}-\theta) = (2j-n)\theta - \sum_{i=1}^{j} x_{(i)} + \sum_{i=j+1}^{n} x_{(i)}$$

É uma função linear de θ que decresce para $j < n/2$ e cresce para $j > n/2$. Se n é par, $2j-n=0$ se $j = n/2$. Então a verossimilhança é constante entre $x_{(n/2)}$ e $x_{(n/2+1)}$, e algum valor no intervalo é o MLE. Normalmente o ponto médio deste intervalo é dado como MLE. Se n é impar, a verossimilhança e minimizada com $\hat{\theta} = x_{((n+1)/2)}$.

/ /

(8) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de uma Gaussiana inversa

$$f(x|\mu,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\{-\lambda(x-\mu)^2/(2\mu^2 x)\}, \quad x>0.$$

(a) Mostre que o MLE de μ e λ é

$$\hat{\mu}_n = \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_i \frac{1}{X_i} - \frac{1}{\bar{X}}}$$

(b) [Tweedie (1957)] mostrou que $\hat{\mu}_n$ e $\hat{\lambda}_n$ são independentes, $\hat{\mu}_n$ tem distribuição inversa Gaussiana com parâmetros μ e $n\lambda$, e $n\lambda/\hat{\lambda}_n$ tem uma distribuição χ^2_{n-1}.

(i) Mostre que $\hat{\mu}_2$ tem uma distribuição inversa Gaussiana com parâmetros μ e 2λ, $2\lambda/\hat{\lambda}_2$ tem uma distribuição χ^2_1, e eles são independentes.

(ii) Assuma o resultado é verdadeiro para $n=k$ e que temos um novo, observações independentes X. Estabeleça o ~~paço~~ passo de indução passando $f(x, \hat{\mu}_k, \hat{\lambda}_k)$ para $f(x, \hat{\mu}_{k+1}, \hat{\lambda}$. Mostre que a densidade final é uma forma apropriada e que o resultado da Tweedie segue.

(a) A verossimilhança é

$$L(\mu,\lambda|x) = \frac{\lambda^{n/2}}{(2\pi)^n \prod x_i} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i}\right\}$$

/ /

Para λ fixo, maximizar com respeito a μ é equivalente a minimizar a soma na exponencial

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i}=\frac{\partial}{\partial\mu}\sum\frac{((x_i/\mu)-1)^2}{x_i}=-\sum\frac{2((x_i/\mu)-1)}{x_i}\cdot\frac{x_i}{\mu^2}.$$

Igualando a zero $\sum_i\left(\frac{x_i}{\mu}-1\right)=0$, e resolvendo para μ temos $\hat{\mu}_n=\bar{x}$. Colocando $\hat{\mu}_n$ e maximizando em respeito a λ equivale a maximizar uma expressão da forma $\lambda^{n/2}e^{-\lambda b}$. O calculo produz

$$\hat{\lambda}_n=\frac{n}{2b}\quad \text{Onde } b=\sum\frac{(x_i-\bar{x})^2}{2\bar{x}^2 x_i}$$

Finalmente,

$$2b=\sum\frac{x_i}{\bar{x}^2}-2\sum\frac{1}{\bar{x}}+\sum\frac{1}{x_i}=-\frac{n}{\bar{x}}+\sum\frac{1}{x_i}=\sum\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{\bar{x}}\right)$$

4b) i. ii. Fora do assunto do curso.