/ /

Lista 2

① Suponha que $P(X=1) = P(X=-1) = 1/2$. Defina

$$X_n = \begin{cases} X & \text{com prob. } 1-\frac{1}{n} \\ e^n & \text{com prob. } \frac{1}{n} \end{cases}$$

Decida se são verdadeiras ou não as seguintes afirmações, justificando:

ⓐ X_n converge para X em probabilidade.

ⓑ X_n converge para X em L^2, isto é, $E[(X-X_n)^2] \to 0$.

ⓐ Por definição, queremos verificar se $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0, \forall \varepsilon$.
Avaliando $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ $\forall \varepsilon$.

- Se $X_n = X$, então $|X_n - X| = 0$, daí $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.
- Se $X_n = e^n$, então $|X_n - X| = |e^n - X| \geq e^n - 1$.

Daí, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P(X_n = e^n) = \frac{1}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$, então de fato converge em probabilidade.

ⓑ $E[(X-X_n)^2] = (1+\frac{1}{n}) E[(X-X)^2] + \frac{1}{n} E[(X-e^n)^2]$

$$= \frac{1}{n} E[(X-e^n)^2]$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} E(1-e^n)^2 + \frac{1}{2}(-1-e^n)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left((e^n-1)^2 + (e^n+1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left((e^n)^2 - 2e^n + 1 + (e^n)^2 + 2e^n + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2n}\left(2(e^n)^2 + 2\right) = \frac{e^n+1}{n} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

/ /

(2) Sejam $Z_1, Z_2, \dots$ variáveis iid com função de densidade de probabilidade $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suponha $P(Z_i > 0)$ e que $\lambda = \lim_{x \to 0^+} f(x) > 0$. Seja

$$X_n = n \min\{Z_1, \dots, Z_n\}$$

Mostre que X_n converge em distribuição para uma v.a. com distribuição exponencial de média $1/\lambda$.

Seja $Y_n = \min\{Z_1, \dots, Z_n\}$.

$$P(Y_n > y) = P(Z_1 > y, \dots, Z_n > y) = (P(Z_1 > y))^n$$

$$P(Y_n \leq y) = 1 - (1 - F_Z(y))^n$$

Supondo $y \to 0^+$ temos que $F(y) = \lambda y$, daí

$$P(Y_n \leq y) = 1 - (1 - \lambda y)^n, \text{ quando } y \to 0^+.$$

Como $Y_n = X_n / n$, então

$$P(X_n \leq x) = P(Y_n \leq \frac{x}{y}) = 1 - (1 - \frac{\lambda x}{n})^n, \text{ quando } y \to 0^+.$$

Usando $(1 - \frac{u}{n})^n \to e^{-u}$, temos que

$$P(X_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ quando } y \to 0^+.$$

Ou seja, $X_n \sim Exp(\lambda)$.

Digitalizado com CamScanner

/ /

(3) Sejam $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Unif[0,1]$. Seja $Y_n = (\overline{X}_n)^2$. Encontre a distribuição de Y_n.

Temos que $EX_i = \frac{1}{2}$ e $Var X_i = \frac{1}{12}$. Pelo teorema central do limite, para n grande, temos que

$$\overline{X_n} \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12n}\right)$$

Seja $\cancel{\#}Z = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, daí $Y_n = (\mu + \sigma Z)^2$. No nosso caso, temos

$$Y_n = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12n}}\, Z\right)^2$$

No limite, $n \to \infty$

$$Y_n \xrightarrow{P} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Digitalizado com CamScanner

/ /

(4) Construa duas sequências de v.a. (X_n) e (Y_n) tais que X_n converge em distribuição para X, Y_n converge em distribuição para Y, mas $X_n + Y_n$ não converge em distribuição para $X+Y$.

Seja $Z \sim N(0,1)$, $W_n \sim N(0, 1/n)$ e $V_n \sim N(0, 1/n)$, daí

$$X_n = Z + W_n \xrightarrow{d} Z = X$$
$$Y_n = -Z + V_n \xrightarrow{d} -Z = Y$$

Portanto $X_n + Y_n = (Z + W_n) + (-Z + V_n) = W_n + V_n \sim N(0, 2/n)$
porém $X+Y = 0$.

/ /

⑤ Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a independentes com densidade

$$f_{X_i}(x|\theta) = \begin{cases} e^{i\theta - x} & x \geq i\theta, \\ 0 & x < i\theta \end{cases}$$

Encontre uma estatística suficiente unidimensional para θ.

~~R~~ Vamos usar o teorema da fatoração,

$$f_{X}(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{i\theta - x} \cdot \mathbb{1}(x_i \geq i\theta)$$

$$= e^{\theta \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}(x_i \geq i\theta)$$

$$= \left(e^{\theta \sum i} \prod \mathbb{1}(x_i \geq i\theta) \right) \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Sugere que uma estatística suficiente para θ é

$$T(X) = \min\left(\frac{X_i}{i}\right).$$

/ /

⑥ Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de P_θ e $x_1, \dots, x_n$ uma amostra observada (realizada). Para cada um dos modelos abaixo, apresente a função de verossimilhança uma estatística suficiente para θ:

ⓐ

$$f_\theta(x) = \theta_1 \theta_2 x^{\theta_2 - 1} \exp\{-\theta_1 x^{\theta_2}\} \mathbb{1}(x \in \mathbb{R}^+), \quad (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

ⓑ $$f_\theta(x) = \frac{\theta_1 \theta_2^{\theta_1}}{x^{\theta+1}} \mathbb{1}(x \in (\theta_2, \infty)), \quad (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

ⓒ $$P_\theta(X=x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}(x \in \{1, 2, \dots, \theta\}), \quad \theta \in \mathbb{N}$$

ⓓ $$P_\theta(X=x) = \binom{x+\theta_1-1}{\theta_1-1} (1-\theta_2)^x \theta_2^x, \quad (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{N} \times (0,1).$$

ⓐ $$F_\theta(x) = \theta_1^n \theta_2^n \prod_i x_i^{\theta_2 - 1} \cdot \prod_i \exp\{-\theta_1 x_i^{\theta_2}\}$$

$$\log F_\theta(x) = \underbrace{n \ln \theta_1 + n \ln \theta_2}_{= \theta_1^n \theta_2^n} + \sum \log x_i^{\theta_2 - 1} + \sum \log(\exp\{-\theta_1 x_i^{\theta_2}\})$$

$$= n \ln \theta_1 + n \ln \theta_2 + (\theta_2 - 1) \sum \log x_i + \theta_1 \sum x_i^{\theta_2}$$

~~Est~~ Logo, pelo teorema da fatoração, uma estatística suficiente para θ_2 é $\sum \log x_i$ e para θ_1 é $\sum x_i^{\theta_2}$.

ⓑ $$F_\theta(x) = \theta_1^n \theta_2^{n\theta} \cdot \prod_i x_i^{-(\theta_1+1)} \cdot \mathbb{1}(x_i \in (\theta_2, \infty))$$

$$\log F_\theta(x) = (n \ln \theta_1 + n\theta_1 \ln \theta_2 + (\theta_1 + 1) \sum_i \log x_i) \mathbb{1}(\min x_i > \theta_2)$$

Então uma estatística suficiente para θ_1 é $\sum \log x_i$ e para θ_2 é $\min x_i$.

Digitalizado com CamScanner

/ /

(c) $$F_\theta(x) = \prod_i^n \frac{1}{\theta} \cdot \mathbb{1}(x_i \in \{1, 2, \dots, \theta\})$$

$$= \frac{n}{\theta} \cdot \mathbb{1}(\max x_i \leq \theta)$$

logo, $\max x_i$ é uma estatística suficiente para θ.

(d) $$F_\theta(x) = \prod_i \binom{x_i + \theta_1 - 1}{\theta_1 - 1} \cdot \prod_i (1-\theta_2)^{x_i} \cdot \prod \theta_2^{x_i}$$

$$\log F_\theta(x) = \log \prod \binom{x_i + \theta_1 - 1}{\theta_1 - 1} + \log(1-\theta_2) \sum x_i + \log \theta_2 \sum x_i$$

$\sum x_i$ é uma estatística suficiente para θ_2. Para θ_1, não temos uma forma de representar todos os termos porque cada um tem um papel, podemos considerar para θ_1 o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ como um todo.

/ /

(7) Dizemos que uma amostra aleatória tem distribuição gaussiana inversa se a densidade comum vale

$$f_\theta(x) = \sqrt{\frac{\theta_1}{2\pi x^3}} \exp\left(\frac{\theta_1 (x-\theta_2)^2}{2\theta_2^2 x}\right) \mathbb{1}(x \in \mathbb{R}^+$$

para $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Encontre uma estatística suficiente nos seguintes casos:

(a) $g(\theta) = \theta_2$ e θ_1 é conhecido;

(b) $g(\theta) = \theta_1$ e θ_2 é conhecido;

(c) $g(\theta) = (\theta_1, \theta_2)$, isto é, ambos são desconhecidos.

Vamos resolver o item (c) os demais são consequencia.

$$\frac{f(X_n)}{f(Y_n)} = \frac{\prod_i \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} (X_i^{-\frac{3}{2}}) \exp\left\{\frac{-\lambda (X_i-\mu)^2}{2\mu^2 X_i}\right\}}{\prod_i \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} (Y_i)^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{-\lambda (Y_i-\mu)^2}{2\mu^2 Y_i}\right\}}$$

$$= \left(\prod_i \left(\frac{Y_i}{X_i}\right)^{3/2}\right) \exp\left\{\frac{\lambda}{2\mu^2} \sum_i \left(Y_i - 2\mu + \frac{\mu^2}{Y_i} - X_i + 2\mu - \frac{\mu^2}{X_i}\right)\right\}$$

$$= \left(\prod_i \left(\frac{Y_i}{X_i}\right)^{3/2}\right) \exp\left\{\frac{\lambda}{2\mu^2} \sum (Y_i - X_i) + \frac{\lambda}{2} \sum_i \left(\frac{1}{Y_i} - \frac{1}{X_i}\right)\right\}$$

Logo, para μ devemos ter $\sum X_i = \sum Y_i \Rightarrow T(\mu) = \sum X_i$, para λ devemos ter $\sum X_i = \sum Y_i$ e $\sum X_i^{-1} = \sum Y_i^{-1} \Rightarrow T(\lambda) = (\sum X_i, \sum X_i^{-1})$

/ /

8) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $Unif(0, \theta)$. Mostre que $T(X_1, \dots, X_n) = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ é suficiente sem usar o Teorema da Fatoração-Fisher.

Temos que,

$$f_{X_i}(x_i|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x_i < \theta \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Como X_i são iid

$$F(X|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}, \text{ para } 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq \theta$$

$$F(X|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq \max\{X_i\} \leq \theta \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Considerando $T(X_1, \dots, X_n) = \max\{X_i\}$, dado, ou seja

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \max\{X_i\} = M, \theta\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{M^{n-1}}, & 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq M \text{ e } \max\{X_i\} = M \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Note que, $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \max\{X_i\} = M, \theta\}$ não depende de θ, logo, $T(X_1, \dots, X_n) = \max\{X_i\}$ é suficiente.