/ /

HW4

① Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatoria para uma distribuição aleatoria discreta em $\{1,2,3\}$. Encontre uma estatistica bidimensional suficiente.

Como $X_1, \ldots, X_n$ assumem valores em $\{1,2,3\}$, sejam as probabilidades de cada ocorrencia:

$$P(X_i=1)=p_1 \quad P(X_i=2)=p_2 \quad P(X_i=3)=p_3$$

e sejam n_1 o número de ocorrencias de 1 na amostra de X_i, n_2 o número de ocorrencias de 2 na amostra e n_3 o número de ocorrencias de 3 na amostra. Assim

$$L(p_1, p_2, p_3 \mid X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i)$$
$$= p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$$

onde $n_1+n_2+n_3=n$. Note que, a informação de n_1 e n_2 implica em n_3, pois $n_3=n-n_1-n_2$. Dessa forma pelo teorema da fatorização uma estatistica suficiente ~~para~~ bidimensional pode ser dada por

$$T(X_1, \ldots, X_n) = (n_1, n_2)$$

Digitalizado com CamScanner

/ /

② Seja f uma função de integral positiva em $(0,\infty)$. Defina

$$c(\theta) = 1 / \int_{\theta}^{\infty} f(x)\, dx,$$

e seja $p_\theta(x) = c(\theta) f(x)$ para $x > \theta$, e $p_\theta(x) = 0$ para $x \leq \theta$. Seja $X_1, \dots, X_n$ iid com densidade comum p_θ.

ⓐ Mostre que $M = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ é suficiente.

Pelo teorema da fatoração

$$L(\theta | X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} c(\theta) f(x_i) \cdot \mathbb{1}(X_i > \theta)$$

$$= (c(\theta))^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \cdot \mathbb{1}(\min X_i > \theta)$$

~~Por~~ Logo, pelo teorema $M = \min X_i$ é uma estatística suficiente.

/ /

(3) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma ~~a~~ amostra aleatoria para uma distribuição absoluta contínua com densidade

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 2x/\theta^2, & x \in (0, \theta) \\ 0, & c\,c. \end{cases}$$

Encontre uma estatística suficiente T.

Pelo teorema da fatoração

$$L(\theta|X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{2X_i}{\theta^2} \cdot \mathbb{I}(0 < X_i < \theta)$$
$$= \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} X_i \cdot \mathbb{I}(\min X_i > 0)\, \mathbb{I}(\max X_i < \theta)$$

temos 3 estatísticas suficientes, para o problema seja $T(X_1, \ldots, X_n) = \max X_i$.

/ /

9) Do problema anterior. Determine a densidade de T.

A ~~f~~fmp de $T(X_1, \dots, X_n) = \max\{X_i\}$, é dada por $F_T(t) = P(T \leq t)$, daí

$$F_T(t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t)$$

$$= P(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{2x}{\theta^2} dx = \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}}.$$

Para a fdp,

$$f_T(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^{2n}}{\theta^{2n}}\right) = \frac{2n t^{2n-1}}{\theta^{2n}}, \quad 0 < t < \theta.$$

/ /

(5) Seja X uma única observação de uma distribuição $N(0, \sigma^2)$. $|X|$ é uma estatística suficiente?

Pelo teorema da fatoração

$$L(\theta|X_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{X_1^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{|X|^2}{2\sigma^2}}$$

Logo, $|X|$ é uma estatística suficiente.

Digitalizado com CamScanner

6) Seja $f(x,y|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ uma fdp bivariada para a distribuição uniforme no retângulo com vértice inferior esquerdo (θ_1,θ_2) e superior direito $(\theta_3,\theta_4) \in \mathbb{R}^2$. Os parâmetros satisfazem $\theta_1 < \theta_3$ e $\theta_2 < \theta_4$. Seja $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ uma amostra aleatória para esta fdp. Encontre uma estatística de 4-dimensões suficiente para $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$.

Pelo teorema da fatoração

$$L(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4|X_1,Y_1,\ldots,X_n,Y_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_3-\theta_1} \cdot \frac{1}{\theta_4-\theta_2} \cdot \mathbb{1}(\theta_1 \leq X_i \leq \theta_3) \cdot \mathbb{1}(\theta_2 \leq Y_i \leq \theta_4)$$

$$= \frac{1}{(\theta_3-\theta_1)^n} \cdot \frac{1}{(\theta_4-\theta_2)^2} \cdot \mathbb{1}(\theta_1 \leq \min X_i) \cdot \mathbb{1}(\max X_i \leq \theta_3) \cdot \mathbb{1}(\theta_2 \leq \min Y_i) \, \mathbb{1}(\max Y_i \leq \theta_4)$$

Logo, $T((X_i,Y_i)) = (\min X_i, \min Y_i, \max X_i, \max Y_i)$

/ /

(7) Suponha que P_θ diga que $X_1, X_2, \ldots$ são iid $U[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$. Seja $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Encontre uma estatística suficiente minimal e encontre uma função não constante da estatística suficiente que seja auxiliar.

Temos que $\dfrac{f_\theta(x)}{f_\theta(y)} = \dfrac{\mathbb{1}(\theta - \frac{1}{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2})}{\mathbb{1}(\theta - \frac{1}{2} \leq y \leq \theta + \frac{1}{2})}$. Daí

$$\frac{L(\theta | X_1, \ldots, X_n)}{L(\theta | Y_1, \ldots, Y_n)} = \frac{\mathbb{1}(\min X_i \geq \theta - \frac{1}{2})\, \mathbb{1}(\max X_i \leq \theta + \frac{1}{2})}{\mathbb{1}(\min Y_i \geq \theta - \frac{1}{2})\, \mathbb{1}(\max Y_i \leq \theta + \frac{1}{2})}$$

é constante em relação a θ se e somente se $\min X_i = \min Y_i$ e $\max X_i = \max Y_i$. Logo a estatística mínima suficiente para θ é $(\min X_i, \max X_i)$.

Uma estatística é auxiliar quando não depende de θ, pela fdp.

$$R(X_1, \ldots, X_n) = \max X_i - \max X_i$$

é uma estatística auxiliar para θ pois não depende de θ e é constante ~~em relação~~ dados X_i.

(8) Suponha que $P(X>0)=1$ e que a distribuição condicional ~~de~~ $Y|X \sim U(0,x)$. Seja $Z=X-Y$ e suponha que Y e Z são independentes. Seja $f_X(x)$, $f_Y(y)$ e $f_Z(z)$ sejam diferenciáveis

(a) Prove que $P(X>c)>0$, $\forall c>0$.
(b) Prove $f_X(x)=a^2x\exp\{-ax\}$, para $x>0$.

(a) Suponha por absurdo que $\exists c_0>0$ t.q. $P(X=c_0)=0$, porém

$$P(Y<c_0|X=c_0)=\frac{c_0}{c_0}=1$$

daí, $P(X=c_0)=P(Y<c_0, X=c_0)=1$, absurdo pois supomos que $P(X=c_0)=0$.

(b) Temos que, $M_X(t)=E[e^{tX}]=E[e^{t(Y+Z)}]$

$$=E[e^{tY}].E[e^{tZ}]$$

$$=E[E[e^{tY}|X]]\,E[E[e^{tZ}|X]]$$

$$=\left(E\left[\frac{e^{tX}-1}{tX}\right]\right)^2$$

$$=\frac{1}{t^2}\left(\int_0^t E[e^{sX}]ds\right)^2=\frac{1}{2}\left(\int_0^t M_X(s)ds\right)^2$$

Sendo $f'=M_X$, então f satisfaz que $f'(t)=\frac{f(t)^2}{t^2}$, solucionando

$$f(t)=\frac{t}{1+at}\Rightarrow f'(t)=\frac{1}{(1+at)^2}$$

Note que, $M_X(t)=\frac{1}{(1+at)^2}$, corresponde a $X\sim \text{Gama}(2,a)$. O que termina a solução.

/ /

⑨ Mostre que se $X_1, \ldots, X_n \sim P_\theta$ são amostras aleatórias de uma família paramétrica qualquer, então:

$$T(X_1, \ldots, X_n) = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}),$$

é suficiente para θ.

Uma permutação da amostra preserva as informações da amostra ~~e como não~~ então é uma estatística suficiente para θ. Também pode-ser resolvido pelo teorema da fatoração.

/ /

(10) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de P_θ e $x_1, \ldots, x_n$ uma observação dessa amostra. Para cada um dos modelos abaixo, apresente a função de verossimilhança uma estatística suficiente para θ.

(a) $$f_\theta(x) = \theta_1 \theta_2 x^{\theta_2 - 1} \exp\{-\theta_1 x^{\theta_2}\} \mathbb{1}(x \in \mathbb{R}^+), \quad (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

(b) $$f_\theta(x) = \frac{\theta_1 \theta_2^{\theta_1}}{x^{\theta_1 + 1}} \mathbb{1}(x \in [\theta_2, \infty)), \quad (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+;$$

(c) $$P_\theta(X = x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}(x \in \{1, 2, \ldots, \theta\}), \ \theta \in \mathbb{N};$$

(d) $$P_\theta(X = x) = \binom{x + \theta_1 - 1}{\theta_1 - 1} (1 - \theta_2)^x \theta_2^{\theta_1}, \quad (\theta_1, \theta_2) \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times [0, 1]$$

(a) Temos que,

$$L(\theta_1, \theta_2 | X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^n \theta_1 \theta_2 X_i^{\theta_2 - 1} e^{-\theta_1 X_i^{\theta_2}}$$

$$= \theta_1^n \theta_2^n \prod_{i=1}^n X_i^{\theta_2 - 1} e^{-\theta_1 X_i^{\theta_2}}$$

$$\log L(\theta_1, \theta_2 | X_1, \ldots, X_n) = n(\log \theta_1 + \log \theta_2) + (\theta_2 - 1) \sum \log X_i - \theta_1 \sum X_i^{\theta_2}$$

Logo, uma estatística suficiente para θ_1 e θ_2 é $\sum X_i^{\theta_2}$ e $\sum \log X_i$

(b) Temos que,

$$L(\theta_1, \theta_2 | \{X_i\}) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta_1 \theta_2^{\theta_1}}{X_i^{\theta_1 + 1}} \mathbb{1}(X_i > \theta_2$$

$$= \theta_1^n \theta_2^{n\theta_1} \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i^{\theta_1 + 1}} \cdot \mathbb{1}(\min X_i > \theta_2).$$

$$\Rightarrow \ln(L(\theta_1, \theta_2 | \{X_i\})) = (n \ln \theta_1 + n\theta_1 \ln \theta_2 + \sum (\theta_1 + 1) \ln X_i) \mathbb{1}(\min X_i > \theta_2).$$

/ /

Logo, uma estatística suficiente para θ_1 e θ_2 é dado por $\sum \ln X_i$ e $\min X_i$ respectivamente.

(c)

$$L(\theta|X_1,\ldots,X_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}(x_i < \theta)$$

$$= \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}(\max X_i < \theta)$$

Logo, $\max X_i$ é uma estatística suficiente para θ.

(d) $$\ln(L(\theta_1,\theta_2|X_1,\ldots,X_n)) = +\ln \prod_{i=1}^{n} \binom{X_i + \theta_1 - 1}{\theta_1 - 1} + \ln(1-\theta_2)\sum X_i$$

$$+ \sum \theta_1 \ln \theta_2$$

Uma estatística suficiente para θ_2 é $\sum X_i$, para θ_2 note que não podemos expressar as observações como ~~uma~~ um único valor, logo para θ_1, $(X_1,\ldots,X_n)$ é uma estatística suficiente

/ /

(11) Dizemos que uma amostra aleatória tem distribuição gaussiana inversa se a densidade comum vale

$$f_\theta(x) = \sqrt{\frac{\theta_1}{2\pi x^3}}\, exp\left\{\frac{\theta_1 (x-\theta_2)^2}{2\theta_2^2 x}\right\} \mathbb{1}(x \in \mathbb{R}^+)$$

para $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Encontre uma estatística suficiente para $g(\theta) = (\theta_1, \theta_2)$, com ambos desconhecidos.

Temos que,

$$L(\theta_1, \theta_2 | X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta_1^{1/2} (2\pi)^{-1/2} X_i^{-3/2} exp\left\{\frac{\theta_1 (X_i - \theta_2)^2}{2\theta_2^2 X_i}\right\}$$

$$\Rightarrow ln(L(\theta_1, \theta_2 | X_1, \dots, X_n)) = \sum_{i=1}^{n} ln\left(\theta_1^{1/2} (2\pi)^{-1/2} X_i^{-3/2}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta_1 (X_i - \theta_2)^2}{2\theta_2^2 X_i}$$

$$= \frac{n}{2} ln\theta_1 - \frac{n}{2} ln 2\pi - \frac{3}{2} \sum ln X_i + \frac{\theta_1}{2\theta_2^2} \left(\sum X_i - 2\theta_2 n + \theta_2^2 \sum X_i^{-1}\right.$$

Logo, uma estatística suficiente para $g(\theta)$ é $T(X_1, \dots X_n) = (\sum X_i^{-1}, \sum X_i)$.

/ /

(12) Prove o teorema da Fatorização.

Teo: Seja $P=\{P_\theta : \theta \in \Omega\}$ uma família de distribuições dominadas por μ. Uma condição necessaria e suficiente para uma estatística T ser suficiente é que exista funções $g_\theta \geq 0$ e $h \geq 0$ tais que a densidade P_θ para a família satisfaz

$$P_\theta(x) = g_\theta(T(x)) \cdot h(x).$$

Precisamos trabalhar diretamente com a definição de distribuição condicional, para a maioria dos casos T e X não possuiem densidade conjunta com respeito a medida. Para começar, suponha P_θ, $\theta \in \Omega$, com densidade

$$P_\theta(x) = g_\theta(T(x)) \cdot h(x)$$

Com respeito a μ, podemos assumir sem perda de generalização que μ é uma medida de probabilidade equivalente para a família $P=\{P_\theta : \theta \in \Omega\}$. Seja E^* e P^* denotando esperança e probabilidade onde $X \sim \mu$; seja G^* e G_θ denotando distribuição marginal para $T(X)$ onde $X \sim \mu$ e $X \sim P_\theta$; e seja Q a distribuição condicional para X dado T onde $X \sim \mu$. Para encontrar a densidade de T,

$$E_\theta[f(T)] = \int f(T(x))\, g_\theta(T(x))\, h(x)\, d\mu(x)$$

$$= E^* f(T)\, g_\theta(T)\, h(X)$$

$$= \iint f(t)\, g_\theta(t)\, h(x)\, dQ_t(x)\, dG^*(t)$$

$$= \int f(t)\, g_\theta(t)\, w(t)\, dG^*(t),$$

/ /

onde
$$w(t) = \int h(x)\, dQ_t(x).$$

Se f é uma função indicadora, mostra que G_θ tem densidade $g_\theta(t)w(t)$ com respeito a G^*. Logo, defina $\tilde{Q}_t$ para a densidade $h/w(t)$ com respeito a Q_t, então
$$\tilde{Q}_t(B) = \int_B \frac{h(x)}{w(t)}\, dQ_t(x).$$

Então.
$$E_\theta f(X,T) = E^* f(X,T)\, g_\theta(T)\, h(X)$$
$$= \iint f(x,t)\, g_\theta(t) h(x)\, dQ_t(x)\, dG^*(t)$$
$$= \iint f(x,t) \frac{h(x)}{w(t)}\, dQ_t(x)\, g_\theta(t) w(t)\, dG^*(t)$$
$$= \iint f(x,t)\, d\tilde{Q}_t(x)\, dG_\theta(t)$$

Mostra que $\tilde{Q}$ é uma distribuição condicional para X dado T em P_θ. Como $\tilde{Q}$ não depende de θ, T é suficiente.

(Os demais passos usam resultados não citados
vide: Theoretical Statistics - Robert W. Keener)

/ /

(13) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição $U(0,\theta)$. Mostre que $T(X_1, \ldots, X_n) = \max X_i$ é suficiente para θ sem usar o Teorema da Fatorização

Temos que,

$$f_{X_i}(x_i|\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & 0 \leq x_i \leq \theta, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Como X_i são iid

$$F(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta^n}, \quad 0 \leq \max X_i \leq \theta$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & 0 \leq \max X_i \leq \theta \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Considerando $T(\{X_i\}) = \max X_i$, dado,

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | \max X_i = M, \theta\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{M^{n-1}}, & 0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq M \text{ e } \max X_i = M. \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Note que, $P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n | \max X_i = M, \theta\}$ não depende de θ, logo $M = \max X_i$ é suficiente.