Lista 1

① ⓐ Seja X uma v.a. tal que $E[X]=10$, $P(X\leq 7)=1/5$ e $P(X\geq 13)=3/10$. Mostre que $Var(X)\geq 9/2$.

ⓑ Seja X uma v.a. tal que $P(X\geq 0)=1$ e $P(X\geq 10)\geq 1/5$. Mostre que $EX\geq 2$.

ⓒ Se X é uma v.a. não-degenerada (isto é, de fato aleatória), quadrado integrável e tal que $X\geq 0$ q.c., prove que

$$P(X=0)\leq \frac{Var(X)}{E[X^2]} < \frac{Var(X)}{(EX)^2}$$

ⓓ Seja $X\sim Exp(\beta)$. Calcule $P(|X-EX|\geq k\sigma(X))$ para $k>1$. Compare com a cota obtida usando Chebyshev.

ⓔ Seja $X\sim Poisson(\lambda)$. Use a desigualdade de Chebyshev para mostrar $P(X\geq 2\lambda)\leq 1/\lambda$

ⓕ Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} Bernoulli(p)$ e $\bar{X}_n = n^{-1}\sum X_i$. Cote $P(|\bar{X}_n-\mu|>\varepsilon)$ usando as desigualdades de Chebyshev e de Hoeffding. Mostre que, quando n cresce, a cota advinda Hoeffding é menor que a cota obtida com Chebyshev.

ⓐ Pela desigualdade de Chebyshev

$$P(|X-EX|\geq k)\leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Usando $k=3$ temos que

$$P(|X-10|\geq 3) = P(X\leq 7)+P(X\geq 10) = \frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$$

Daí, $\quad \frac{1}{2}\leq \frac{\sigma^2}{k^2}=\frac{\sigma^2}{9} \Rightarrow \sigma^2\geq 9/2$

ⓑ Temos que $EX\geq 10.\,P(X\geq 10) = 10\cdot\frac{1}{5}=2$

/ /

ⓒ Como $\mathrm{Var}\, X = E[X^2] - (EX)^2$, e $\mathrm{Var}\, X \geq 0$ temos que

$$(EX)^2 \leq E[X^2],$$

daí a segunda desigualdade segue-se

$$\frac{\mathrm{Var}\, X}{E[X^2]} \leq \frac{\mathrm{Var}\, X}{(EX)^2}.$$

Para a primeira desigualdade temos que

$$E[X]^2 \geq E[X^2]\,E[X>0] = E[X^2]\,(1 - P(X=0)).$$

Daí,

$$P(X=0) \leq 1 - \frac{E[X]^2}{E[X^2]} = \frac{\mathrm{Var}\, X}{E[X^2]}$$

ⓓ Temos que $EX = \frac{1}{\beta}$ e $\sigma(x) = \sqrt{\mathrm{Var}\, X} = \sqrt{\frac{1}{\beta^2}} = \frac{1}{\beta}$. Daí

$$\begin{aligned}
P(|X - EX| \geq k\sigma(x)) &= P\left(\left|X - \tfrac{1}{\beta}\right| \geq k\tfrac{1}{\beta}\right)\\
&= P\left(X - \tfrac{1}{\beta} \geq \tfrac{k}{\beta}\right) + P\left(\tfrac{1}{\beta} - X \geq \tfrac{k}{\beta}\right)\\
&= P\left(X \geq \tfrac{k+1}{\beta}\right) + P\left(X \leq \tfrac{1-k}{\beta}\right)\\
&= 1 - P\left(X \leq \tfrac{k+1}{\beta}\right) + P\left(X \leq \tfrac{1-k}{\beta}\right)\\
&= 1 - 1 + e^{-\frac{\beta k + \beta}{\beta}} + 1 - e^{-\frac{\beta - \beta k}{\beta}}\\
&= 1 + e^{-k-1} - e^{-1+k}\\
&= 1 + \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e^k} + e^k\right)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Chebyshev

$$P(|X - EX| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2} \iff P\left(\left|X - \tfrac{1}{\beta}\right| \geq \tfrac{t}{\beta}\right) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Ou seja, $1 + \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e^k} + e^k\right) \leq \frac{1}{k^2}$, $k > 1$.

(e) Usando $K=\sqrt{\lambda}$, temos que

$$P(|X-EX| \geq K \cdot \sigma) \leq \frac{1}{K^2} \Leftrightarrow P(|X-\lambda| \geq \sqrt{\lambda}\,\sqrt{\lambda}) \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow P(|X-\lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow P(X-\lambda \geq \lambda) + P(\lambda - X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 2\lambda) + \underbrace{P(X \leq 0)}_{=0} \leq \frac{1}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 2\lambda) \leq 1/\lambda.$$

(f) Usando a forma de Chebyshev

$$P(|Y-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

e como $E\bar{X}_n = p$ e $Var X_n = \frac{Var X_i}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$. Então

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}.$$

Aplicando agora Hoeffding

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq t) \leq 2e^{-2nt^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$P(|X_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\{-2n\varepsilon^2\}$$

Note que, exponencial decresce mais rapido que divisão.

/ /

② (Chebyshev bi-dimensional) Sejam X e Y v.a com média zero e variancia. Defina $\rho = Cov(X,Y)$.

ⓐ Mostre que $E[\max\{X^2,Y^2\}] \leq 1+\sqrt{1-\rho^2}$.

ⓑ Conclua que, $\forall \varepsilon > 0$

$$P[|X| \geq \varepsilon \text{ ou } |Y| \geq \varepsilon] \leq \frac{1+\sqrt{1+\rho^2}}{\varepsilon^2}.$$

ⓐ Sabemos que $EX^2 = EY^2 = 1$ e que $\rho = Cov[X,Y] = E[XY]$, daí

$$E[\max\{X^2,Y^2\}] = \frac{1}{2}E[X^2+Y^2+|X^2-Y^2|]$$

$$= \frac{1}{2}[EX^2+EY^2+E[|X^2-Y^2|]]$$

$$= 1+\frac{1}{2}E[|X^2-Y^2|]$$

$$= 1+\frac{1}{2}E[|(X-Y)(X+Y)|]$$

$$\leq 1+\frac{1}{2}\sqrt{E[|X-Y|]^2 E[|X+Y|]^2}$$

$$= 1+\frac{1}{2}\sqrt{(2-2\rho)(2+2\rho)}$$

$$= 1+\sqrt{1-\rho^2}$$

ⓑ Podemos escrever de forma que vamos provar que

$$P(|X| \geq \varepsilon \text{ ou } |Y| \geq \varepsilon) \leq \frac{E\{\max\{X^2,Y^2\}\}}{\varepsilon^2}$$

$$\parallel$$

$$P(\max\{|X|,|Y|\} \geq \varepsilon) \leq \frac{E\{\max\{X^2,Y^2\}\}}{\varepsilon^2}$$

Por Markov é válido.

③ Leia, entenda e reproduza com suas próprias palavras a demonstração do Lema de Johnson Lindenstrauss.

<u>Lema</u>: Dado qualquer $\varepsilon \in (0,1)$ e um conjunto $X \in \mathbb{R}^d$ com $|X| = n$, existe um mapeamento linear $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ com $m = \Theta\left(\frac{\log n}{\varepsilon^2}\right)$ que incorpora (X, d_2) em $(\mathbb{R}^m, d_2)$ com distorção de no máximo $(1 \pm \varepsilon)$

<u>Prova</u>: Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ uma matriz aleatoria com entradas independentes de $N(0, \frac{1}{m})$. Defina $f(x) = A \cdot x$.

Fixando $x, y \in \mathbb{R}^d$, vamos mostrar que

$$\|A(x-y)\|_2 = \cancel{(1\pm)}(1 \pm \varepsilon)\|x-y\|_2$$

Sem perda de generalidade, $x - y = \|x-y\| \cdot e_1$. Então podemos considerar uma rotação do espaço que ~~faça~~ faça com que $x - y \parallel e_1$ (isto não altera as distancias). Então podemos reduzir o problema a ~~primeira colu-na de A que gerar~~ provar que o vetor da primeira coluna de A chamado por Y é tal que $\|Y\|_2 = 1 \pm \varepsilon$.

Temos que, $Y \sim N(0, \frac{1}{m})$,

$$P(\|Y\|_2 > 1+\varepsilon) = P(\|Y\|_2^2 > (1+\varepsilon)^2)$$
$$\leq P(\|Y\|_2^2 > 1+\varepsilon)$$
$$= P\left(\sum_i Z_i^2 > m(1+\varepsilon)\right) \leq e^{-\frac{m\varepsilon^2}{8}}$$

Chernoff-Style

Agora voltando ao caso mais geral,

$$P[\|A(x-y)\|_2 \geq (1+\varepsilon)\|x-y\|_2] \leq e^{-m\varepsilon^2/8}$$
$$\Rightarrow P(\exists x, y \in X \text{ t.q. } \|A(x,y)\|_2 \geq (1+\varepsilon)\|x-y\|_2) \leq n^2 e^{-m\varepsilon^2/8}$$
$$\leq 1/O(n)$$

pois $m = O\left(\frac{\log n}{\varepsilon^2}\right)$

/ /

(4) As desigualdades de Markov e Chebyshev não podem ser melhoradas no geral.

(a) Mostre que uma v.a. X para a qual a desigualdade de Markov ocorra com igualdade, isto é, para a qual

$$P(X \geq t) = t^{-1} EX, \quad \forall t \geq 0.$$

(b) Mostre uma v.a. Y para a qual a desigualdade de Chebyshev valha com igualdade.

(a) Podemos escolher $X = \begin{cases} 0, & \text{com prob. } 1-\frac{1}{t}, \\ t, & \text{com prob. } \frac{1}{t} \end{cases}$

Daí,

$$EX = 0\left(1-\tfrac{1}{t}\right) + t\,\frac{1}{t} = 1.$$

Pela desigualdade

$$P(X \geq t) = P(X = t) = \frac{1}{t} = \frac{EX}{t}.$$

(b) Podemos escolher $Y = \begin{cases} \mu - \sigma\sqrt{k^2}, & \text{com prob. } \frac{1}{2} \\ \mu + \sigma\sqrt{k^2}, & \text{com prob. } \frac{1}{2} \end{cases}$

Daí,

$$EX = \frac{1}{2}(\mu - \sigma\sqrt{k^2}) + \frac{1}{2}(\mu + \sigma\sqrt{k^2}) = \mu$$

e

$$\operatorname{Var} Y = \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{k^2})^2 + \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{k^2})^2 = \sigma^2.$$

$$P(|Y-\mu| \geq k\sigma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{1}{k^2}.$$

⑤ Seja X uma v.a. tal que

$$E[\exp\{\lambda X\}] \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2} + \lambda\mu\right\} \quad (1)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

ⓐ Mostre que $EX = \mu$

ⓑ Mostre que $\text{Var } X \leq \sigma^2$

ⓒ Seja r o menor valor de σ^2 para o qual (1) vale. É verdade $\text{Var } X = r$?

ⓐ Pela desigualdade de Jensen, temos que

$$\exp(\lambda EX) \leq E[\exp(\lambda X)].$$

Aplicando ao problema

$$\exp(\lambda EX) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2\sigma^2}{2} + \lambda\mu\right)$$

$$\Rightarrow \lambda EX \leq \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} + \lambda\mu$$

$$\Rightarrow \lambda(EX - \mu) \leq \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}$$

• Para $\lambda > 0$, a inequação é $EX - \mu \leq \frac{\lambda\sigma^2}{2}$

tomando $\lambda \to 0^+$, temos $EX - \mu \leq 0 \Rightarrow EX \leq \mu$.

• Para $\lambda < 0$, a inequação é $EX - \mu \geq \frac{\lambda\sigma^2}{2}$

tomando $\lambda \to 0^-$, temos $EX - \mu \geq 0 \Rightarrow EX \geq \mu$.

Juntando os 2 passos temos que $EX = \mu$.

/ /

(b) Podemos reescrever a desigualdade do início como

$$\mathbb{E}[e^{\lambda(X-\mu)}] \leq e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}, \ \forall\lambda,$$

por expansão de série de Taylor

$$1 + \lambda E[X-\mu] + \frac{\lambda^2}{2} E[(X-\mu)^2] + O(\lambda^2)$$

$$\leq 1 + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} + O(\lambda^2), \quad \forall\lambda$$

Como $E[X-\mu]=0$,

$$Var[X] \leq \sigma^2.$$

(c) o ~~that~~ que ~~minimiza~~ minimiza $E[e^{\lambda X}] \leq \exp\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2} + \lambda\mu\}$ é tal que teríamos uma igualdade, do contrário, se a desigualdade fosse estrita ~~no~~ não seria válida para todo λ, por exemplo, $\lambda=0$ temos $E[1]=1$.

Daí, se a igualdade vale temos que o lado direito é a função geradora de momento da normal $N(\mu,\sigma)$. Ou seja, $Var\,X=\sigma^2$.