

HW 10

- ① Suponha X com densidade P_θ , $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$, e que essas densidades são regulares o suficiente para que a derivada da função potência de qualquer teste a função ϕ pode ser avaliada diferenciando-se ϕ sob o sinal de integral.

$$\beta'_\phi(\theta) = \int_{\Omega} \phi(x) \frac{\partial P_\theta(x)}{\partial \theta} d\mu(x).$$

Um teste ϕ^* é chamado localmente mais poderoso $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ se maximiza $\beta'_\phi(\theta)$ entre todos os testes ϕ com nível α . Determine a forma do teste localmente mais poderoso.

- ② Suponha

Primeiro definimos uma função $V_\theta(x)$, de forma que

$$V_\theta(x) = \frac{\partial \log P_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial P_\theta(x)}{\partial \theta}}{P_\theta(x)}.$$

Solve H_0 :

$$\frac{\partial P_\theta(x)}{\partial \theta} = V_{\theta_0}(x) P_{\theta_0}(x).$$

Dai, a derivada fica

$$\begin{aligned} \beta'_\phi(\theta_0) &= \int \phi(x) V_{\theta_0}(x) P_{\theta_0}(x) d\mu(x) \\ &= E_{\theta_0}[\phi(x) V_{\theta_0}(x)] \end{aligned}$$

Caímos num problema de otimização, onde devemos maximizar $E_{\theta_0}[\phi(x) V_{\theta_0}(x)]$ sujeito a $E_{\theta_0}[\phi(x)] = \int \phi(x) P_{\theta_0}(x) d\mu = \alpha$. Por Lagrange:

$$L(\psi, \lambda) = \int p(x) V_{\theta_0}(x) P_{\theta_0}(x) d\mu(x) - \lambda \left(\int \psi(x) P_{\theta_0}(x) d\mu(x) - \alpha \right)$$

Resolvendo,

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = V_{\theta_0} P_{\theta_0}(x) - \lambda P_{\theta_0}(x) := 0$$

$$\Rightarrow \psi(x) \propto \max\{V_{\theta_0}(x) - c, 0\}$$

Onde c é escolhido de forma que satisfaça

$$\int \psi(x) P_{\theta_0}(x) d\mu(x) = \alpha$$

Assim, o teste LMP é da forma

$$\psi^*(x) = \begin{cases} 1 & V_{\theta_0}(x) > c, \\ 0 & V_{\theta_0}(x) \leq c. \end{cases}$$

② Suponha $X = (X_1, \dots, X_n)$ iid com densidade f_θ . O teste localmente mais poderoso de $H_0: \theta = \theta_0$ vs. $H_1: \theta > \theta_0$ do problema anterior rejeita H_0 se uma estatística apropriada T excede um valor critico c . Use o TCL para descrever como o nível critico c pode ser excedido quando n é grande para não passar de nível approximadamente α . A resposta envolve informações de Fisher em $H_0: \theta = \theta_0$.

Pelo Teorema de Neyman-Pearson, a estatística de teste T é baseada na função $V_\theta(x)$ (definida no exercício anterior).

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f_\theta(x_i)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}$$

Sobre H_0 , a função $\frac{\partial \log f_\theta(x_i)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0}$ tem média 0, porque o valor esperado no parâmetro verdadeiro é zero. E tem variância $I(\theta)$, onde (I é a informação de Fisher)

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

Pelo TCL, T é aproximado por uma normal sobre H_0 , onde quando n é grande:

$$T \sim N(0, nI(\theta)).$$

O teste rejeita H_0 se $T > c$. Para um nível de significância α , o valor critico c satifaz $P(T > c | H_0) = \alpha$. Usando a aproximação da normal:

$$P(T > c | H_0) = 1 - \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{n} I(\theta_0)}\right),$$

onde Φ é a cdf da normal padrão. Resolvendo para c :

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{nT(\theta_0)}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{nT(\theta_0)}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow c = \sqrt{nT(\theta_0)} \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha).$$

Daí, $c = z_{\alpha} \sqrt{nT(\theta_0)}$, onde $z_{\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$.

③ Em uma dada cidade o número de acidentes de trânsito num dado ano segue uma distribuição de Poisson. No ^{últimos anos} passado a média do número de acidentes por ano foi de 15, e no neste ano foi 10. Isto justifica que a taxa de acidentes tem diminuído?

Sendo $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, e observamos $X=10$. Verifiquemos que

$$P(X \leq 10 | \lambda = 15) = \sum_{i=0}^{10} \frac{e^{-15}}{i!} = e^{-15} \left[1 + 15 + \frac{15^2}{2!} + \dots + \frac{15^{10}}{10!} \right] \approx 0.12$$

Que é uma probabilidade possível, assim sendo não se pode dizer que a taxa diminui.

(4) Prove que, se $f(x|\theta)$ é a fmp de uma v.a. discrete, então o numerador de $\lambda(x)$, q estatística LRT, é a probabilidade máxima da amostra quando o máximo é computado sobre os parâmetros na hipótese nula. Além disso, o denominador de $\lambda(x)$ é a probabilidade máxima da amostra sobre todas as possibilidades de parâmetros.

Para variáveis aleatórias discrete,

$$L(\theta|x) = f(x|\theta) = P(X=x|\theta).$$

Então o numerador e denominador de $\lambda(x)$ são o suprimento de probabilidade sobre o conjunto.

⑤ Seja duas amostras independentes $X_1, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\theta)$ e $Y_1, \dots, Y_m \sim \text{Exp}(\mu)$.

ⓐ Encontre o LRT de $H_0: \theta = \mu$ vs $H_1: \theta \neq \mu$.

ⓑ Mostre que o teste da parte Ⓛ pode ser baseado na estatística

$$T = \frac{\sum X_i}{\sum X_i + \sum Y_i}$$

ⓒ Encontre a distribuição de T quando H_0 é verdade.

$$\text{ⓐ } \lambda(x, y) = \frac{\sup_{\theta} L(\theta | x, y)}{\sup_{\theta} L(\theta | x, y)} \xrightarrow{H_0} \text{MLE}$$

O MLE sobre H_0 é

$$\log L(\theta | x, y) = (n+m) \log \theta + \theta (\sum_i^n X_i + \sum_j^m Y_j) \stackrel{H_0}{=} \theta$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n+m}{\sum X_i + \sum Y_j}$$

O MLE inestrito para:

$$\frac{\partial \log L(\theta, \mu | x, y)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum X_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum X_i}$$

$$\frac{\partial \log L(\theta, \mu | x, y)}{\partial \mu} = \frac{m}{\mu} - \sum Y_j = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{m}{\sum Y_j}$$

Dá-se $\lambda(x, y) = \frac{\prod \hat{\theta}_0 e^{-\hat{\theta}_0 x_i}}{\prod \hat{\theta}_0 e^{-\hat{\theta}_0 x_i} \prod \hat{\mu} e^{-\hat{\mu} y_j}}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\hat{\theta}_0^{n+m} \exp\{-\hat{\theta}_0(\sum X_i + \sum Y_i)\}}{\hat{\theta}_0^n \hat{\mu}^m \exp\{-\hat{\theta} \sum X_i - \hat{\mu} \sum Y_i\}} \\
 &= \left(\frac{n+m}{\sum X_i + \sum Y_i} \right)^{n+m} \exp\{-(n+m)\} \\
 &\quad \left(\frac{n}{\sum X_i} \right)^n \left(\frac{m}{\sum Y_i} \right)^m \exp\{-(n+m)\} \\
 &= \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} \cdot \frac{(\sum X_i)^n (\sum Y_i)^m}{(\sum X_i + \sum Y_i)^{n+m}}
 \end{aligned}$$

e o LRT rejeita H_0 se $\lambda(x, y) \leq c$.

(b) Podemos escrever

$$\lambda(x, y) = \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} \rightarrow T^n (1-T)^m$$

Onde $T = \frac{\sum X_i}{\sum X_i + \sum Y_i}$.

(c) Quando H_0 é verdadeiro

$$\sum X_i \sim \text{Gamma}(n, \theta)$$

$$\sum Y_i \sim \text{Gamma}(m, \theta)$$

E como vimos no curso $T = \frac{\sum X_i}{\sum X_i + \sum Y_i} \sim \text{Beta}(n, m)$.

⑥ Um carro especial da repagol é o carro a medo e a variância não relacionadas, considere a família $N(\theta, a\theta)$. Se entramos interromper nela rodando:

⑦ Encontre o LRT da $H_0: \theta = 1$ vs $H_1: \theta < 1$ baseado na amostra $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, a\theta)$, onde θ é desconhecido.

⑧ Repita o item ⑦ para o caso considerando $N(\theta, a\theta^2)$.

⑨ Primeiro analisaremos o MLE de a e θ

$$L(a, \theta | x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-(x_i - \theta)^2/(2a\theta)}$$

$$\log L(a, \theta | x) = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \log(2\pi a\theta) - \frac{1}{2a\theta} (x_i - \theta)^2.$$

Daí

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a^2} (x_i - \theta)^2 \right) = -\frac{n}{2a} + \frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2\theta} + \frac{1}{2a\theta} (x_i - \theta)^2 + \frac{1}{a\theta} (x_i - \theta) \right]$$

$$= -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2a\theta^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 + \frac{n\bar{x} - n\theta}{a\theta} = 0$$

Temos que resolver as duas equações para conseguir o MLE de a e θ , pela primeira equação

$$a = \frac{1}{n\theta} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$$

Substituindo na segunda equação

$$-\frac{n}{2\theta} + \frac{n}{2\theta} + \frac{n(\bar{x} - \theta)}{a\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n\bar{x}} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\bar{x}},$$

onde $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Para $\alpha = 1$, basta rescrever a seguinte equação

$$\hat{\theta}_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\hat{\sigma}^2 + \bar{x}^2)}}{2}.$$

Note que $\hat{\sigma}^2 = \hat{\theta}^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{L(\hat{\theta}_0 | x)}{L(\hat{\theta}, \hat{\theta}^2 | x)} = \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\theta}_0}} \exp\left\{-(x_i - \hat{\theta}_0)^2 / 2\hat{\theta}_0\right\}}{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\theta}^2}} \exp\left\{-(x_i - \hat{\theta})^2 / 2\hat{\theta}\right\}} \\ &= \frac{(2\pi\hat{\theta}_0)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi\hat{\theta}^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{(2\pi\hat{\theta})^{\frac{n}{2}}}{(2\pi\hat{\theta}_0)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\exp\left\{-\sum (x_i - \hat{\theta}_0)^2 / 2\hat{\theta}_0\right\}}{\exp\left\{-\sum (x_i - \hat{\theta})^2 / 2\hat{\theta}\right\}} \\ &= \left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}_0}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{n}{2} \cdot \frac{\sum (x_i - \hat{\theta}_0)^2}{2\hat{\theta}_0}\right\} \end{aligned}$$

(b) Análogo ao caso anterior trocando $\alpha\theta$ por $\alpha\theta^2$.

⑦ Seja X_1, \dots, X_n iid Poisson(λ) e seja λ de Gamma(α, β).
Salemos que a posteriori de λ é

$$\pi(\lambda|y) = \frac{f(y|\lambda)\pi(\lambda)}{\pi(y)} \text{ é Gamma } (\gamma + \alpha, \frac{\beta}{n\beta + 1}).$$

Considere um teste Bayesiano H₀: $\lambda \leq \lambda_0$ vs H₁: $\lambda > \lambda_0$.

⑧ Calcule as expressões para as probabilidades a posteriori de H₀ e H₁.

⑨ Se $\alpha = \frac{5}{2}$ e $\beta = 2$, a distribuição a priori é uma χ^2 com 5 graus de liberdade. Explique por que uma tabela de χ^2 pode ser usada para um teste Bayesiano.

⑩ Seja $Y = \sum X_i$.

$$H_0: P(\lambda \leq \lambda_0 | y) = \frac{\Gamma(\gamma + \alpha)}{\Gamma(\gamma + \alpha + n\beta + 1)} \int_0^{\lambda_0} t^{\gamma + \alpha - 1} e^{-\frac{\beta t}{n\beta + 1}} dt$$

$$H_1: P(\lambda > \lambda_0 | y) = 1 - P(\lambda \leq \lambda_0 | y)$$

⑪ Como $\frac{\beta}{n\beta + 1}$ é um parâmetro da posteriori, $(2(\beta n + 1)\lambda / \beta) | Y$ tem distribuição gamma($\gamma + \alpha, 2$). Se 2α é um íntio, esta é uma $\chi^2_{2\gamma+2\alpha}$. Então, para $\alpha = 5/2$ e $\beta = 2$,

$$P(\lambda \leq \lambda_0 | y) = P\left(\frac{2\gamma 2(\beta n + 1)\lambda}{\beta} \leq \frac{2(\beta n + 1)\lambda_0}{\beta}\right)$$

$$= P\left(\chi^2_{2\gamma+2\alpha} \leq 3\lambda_0\right).$$

8) Para amostras de tamanho $n = 1, 4, 16, 64, 100$ vindas de $N(\mu, \sigma^2)$, com σ^2 conhecida, mostre a função poder das seguintes LRT's. Tome $\alpha = 0.05$

a) $H_0: \mu \leq 0$ vs $H_1: \mu > 0$

b) $H_0: \mu = 0$ vs $H_1: \mu \neq 0$

c) Sendo $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. A estatística LRT é proporcional a \bar{X} . Por simplicidade

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, 1\right).$$

Onde μ_0 é o valor de μ que rejeita H_0 . O LRT rejeita H_0 se $\bar{X} > c_1$, onde c_1 é o valor critico

$$c_1 = \Phi^{-1}(1-\alpha) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Onde Φ^{-1} é o inverso da função da função da função da normal padrão, então a função poder é

$$\beta(\mu) = P(\bar{X} > c_1 | \mu) = 1 - \Phi\left(\frac{c_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

para $\alpha = 0.05$ $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ é aproximadamente 1.645, dai

$$\beta(\mu) = P(Z > 1.645 - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma})$$

d) Temos que H_0 é rejeitado se $\bar{X} < c_2$ ou $\bar{X} > c_3$, onde

$$c_2 = \Phi^{-1}(\alpha/2) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad e \quad c_3 = \Phi^{-1}(1-\alpha/2) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\beta(u) = P(\bar{x} \leq c_2 | u) + P(\bar{x} > c_3 | u)$$

$$= \Phi\left(\frac{c_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{c_3 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

(9) Para uma amostra X_1, \dots, X_n Bernoulli(p), é descrito o teste

$$H_0: p = 0.49 \text{ vs. } H_1: p = 0.51.$$

Use o TCL para determinar, aproximadamente, o tamanho de amostra necessário para que as duas probabilidades de erro sejam ambas 0.01. Use a função teste que rejeita H_0 se $\sum X_i$ é grande.

Primeiro vamos encontrar a distribuição de $S_n = \sum X_i$ sobe H_0 e H_1 .

$$\cdot H_0: S_n \sim N(n \cdot 0.49, n \cdot 0.49 \cdot 0.51)$$

$$\cdot H_1: S_n \sim N(n \cdot 0.51, n \cdot 0.51 \cdot 0.49)$$

O teste rejeita H_0 se $S_n \geq k$, k é escolhido de forma que

• Erro do tipo I

$$P(\text{rejeitar } H_0 | H_0) = P(S_n \geq k | H_0) \approx 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{k - \mu_0}{\sigma_0} = z_{0.99} \quad (\text{onde } z_{0.99} \approx 2.33)$$

• Erro do tipo II

$$P(\text{faller em rejeitar } H_0 | H_1) = P(S_n \leq k | H_1) \approx 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{k - \mu_1}{\sigma_1} = z_{0.01} \quad (\text{onde } z_{0.01} \approx -2.33)$$

Dai temos que resolver em k em:

$$k = \mu_0 + z_{0.99} \cdot \sigma_0 = n \cdot 0.49 + 2.33 \sqrt{n \cdot 0.49 \cdot 0.51}$$

$$k = \mu_1 + z_{0.01} \cdot \sigma_1 = n \cdot 0.51 - 2.33 \sqrt{n \cdot 0.51 \cdot 0.49}$$

Igualando e isolando o n

$$4.66 \sqrt{n \cdot 0.49 \cdot 0.51} = n \cdot 0.02$$

$$\Rightarrow n = \frac{(4.66)^2 \cdot 0.49 \cdot 0.51}{0.02^2} = 13.567$$

(10) Um abuso muito marcante dos níveis α é escolher os depois de ver os dados e escolher de forma a fazer a rejeição (ou aceitação) de uma hipótese nula. Para ver qual não as verdadeiras probabilidades de erro Tipo I e Tipo II de tal procedimento, calcule o tamanho e o poder dos dois testes triviais a seguir:

a) Sempre rejeite H_0 , independentemente dos dados obtidos (equivalente à prática de escolher o nível α para fazer a rejeição de H_0).

b) Sempre aceita H_0 , independentemente dos dados obtidos (equivalente à prática de escolher o nível α para fazer a rejeição de H_0).

$$\text{a) Tamanho} = P(\text{rejeita } H_0 \mid H_0) = 1 \Rightarrow \\ \text{Ero Tipo I} = P(\text{rejeita } H_0 \mid H_0) = 1$$

$$\text{Poder} = P(\text{rejeita } H_0 \mid H_1) = 1 \Rightarrow \\ \text{Ero Tipo II} = P(\text{não rejeita } H_0 \mid H_1) = 0$$

$$\text{b) Tamanho} = P(\text{não rejeita } H_0 \mid H_0) = 0 \Rightarrow \\ \text{Ero Tipo I} = P(\text{não rejeita } H_0 \mid H_0) = 0$$

$$\text{Poder} = P(\text{rejeita } H_0 \mid H_1) = 0 \Rightarrow \\ \text{Ero Tipo II} = P(\text{não rejeita } H_0 \mid H_1) = 1.$$

① Seja $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$, com σ^2 conhecido. Um LRT de $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ é um teste que rejeita H_0 se $|\bar{X} - \theta_0| / (\sigma/\sqrt{n}) > c$.

② Encontre uma expressão, em termos da normal padronizada, para a função poder deste teste.

③ O experimentador deseja um Erro do Tipo I 0.05 e um Erro amostral do Tipo II de 0.25 em $\theta = \theta_0 + \delta$. Encontre valores de n e c que atingem isso.

$$\textcircled{a} \quad \beta(\theta) = P\left(\frac{|\bar{X} - \theta_0|}{\sigma/\sqrt{n}} > c\right) = 1 - P(T \leq c)$$

$$= 1 - P\left(-\frac{\sigma c}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \theta_0 \leq \frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{-c\sigma/\sqrt{n} + \theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c\sigma/\sqrt{n} + \theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1 - P\left(-c + \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq c + \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= 1 + \Phi\left(-c + \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(c + \frac{\theta_0 - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

onde $Z \sim N(0, 1)$ e Φ é a cdf da normal.

④ O tamanho é $0.05 = \beta(\theta_0) = 1 + \Phi(-c) - \Phi(c)$ que impõe que $c \approx 1.96$. O poder ($1 -$ erro tipo II) é

$$0.95 \leq \beta(\theta_0 + \delta) = 1 + \Phi(-c - \delta/\sqrt{n}) - \Phi(c - \delta/\sqrt{n})$$

$$= 1 + \underbrace{\Phi(-1.96 - \delta/\sqrt{n})}_{> 0} - \Phi(1.96 - \delta/\sqrt{n})$$

$$\Phi(-0.675) \approx 0.25 \Rightarrow 1.96 - \delta/\sqrt{n} = -0.675 \Rightarrow n = 6.94 \approx 7$$

(12) Seja X uma variável aleatória com pdf sobre H_0 e H_1 dada por

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x H_0)$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.94
$f(x H_1)$	0.05	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.79

Use o Lema de Neyman-Pearson para encontrar o teste MP para H_0 vs H_1 com tamanho $\alpha = 0.04$. Compute a probabilidade de erro de Tipo II para este teste.

Pelo Lema de Neyman-Pearson, o MP tem rejeição de rejeição R definida para valores grandes de $f(x|H_1)/f(x|H_0)$. Comptando a razão

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x H_1)$	6	5	4	3	2	1	0.94
$f(x H_0)$							

A razão é decrescente em x . Então rejeitamos para valores grandes de $f(x|H_1)/f(x|H_0)$ correspondendo a rejeição para valores pequenos de x . Para ter um tamanho de teste α , queremos escolher c tal que $P(X \leq c | H_0) = \alpha$. O valor $c=4$ atinge $\alpha = 0.04$. E a probabilidade de erro de tipo II é $P(X = 5, 6, 7 | H_1) = 0.82$.

13 Seja $X_1, \dots, X_{10} \sim \text{Bernoulli}(p)$

- (a) Encontre o teste MP de tamanho $\alpha = 0.0547$ da hipótese $H_0: p = \frac{1}{2}$ vs $H_1: p = \frac{1}{4}$. Encontre a função poder desse teste.
- (b) Para o teste $H_0: p \leq \frac{1}{2}$ vs $H_1: p > \frac{1}{2}$, encontre o tamanho e a função poder do teste que rejeita H_0 se $\sum X_i \geq 6$.
- (c) Para qual nível α existe um teste MP da hipótese do item (a)?
- (d) Suponha que $\sum X_i$ é uma estatística suficiente para a bernoulli. Seja

$$Y = \sum X_i \sim \text{binomial}(10, p)$$

Um teste que rejeita H_0 se $\frac{f(Y|1/4)}{f(Y|1/2)} \geq k$ é VMP desse tamanho. Temos que $\frac{f(Y|1/4)}{f(Y|1/2)}$ é decrescente em Y , e rejeitar para valores grandes da razão é equivalente a rejeitar para valores pequenos de Y . Passar por $\alpha = 0.0547$

$$P(Y \leq 0 | 1/2) = 0.0009$$

$$P(Y \leq 1 | 1/2) = 0.0107$$

$$P(Y \leq 2 | 1/2) = 0.05467$$

Então Rejeitamos H_0 se $Y \leq 2$ é o teste VMP de tamanho $\alpha = 0.0547$, a função poder é

$$P(p) = P(X \in R) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 = 45 p^2 (1-p)^8$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{B} \quad P(\theta) &= P(X \in R) = P(\sum X_i \geq 6 | \theta) \\
 &= P(Y \geq 6 | \theta) \\
 &= 1 - P(Y \leq 6 | \theta) \quad (Y \sim \text{Binomial}(10, \theta)) \\
 &= 1 - \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \theta^k (1-\theta)^{10-k}
 \end{aligned}$$

E o resultado é

$$P(Y \geq 6 | \frac{1}{2}) = P_{\frac{1}{2}}(\theta) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} \approx 0.377$$

C) A um teste UMP não normalizável para todos os níveis α correspondentes a $P(Y \leq i | p = \frac{1}{2})$ para $i \in I_{10}$. O resultado pode ter os valores $0, \frac{1}{1024}, \frac{11}{1024}, \frac{56}{1024}, \frac{174}{1024}, \frac{386}{1024}, \frac{638}{1024}, \frac{848}{1024}, \frac{968}{1024}, \frac{1013}{1024}, \frac{1023}{1024} + 1$.