

Lista 3

① Seja X_1, \dots, X_m uma amostra aleatória para uma população com pdf $f(x-\theta)$. Mostre que a estatística de ordenamento $T(X_1, \dots, X_m) = (X_{(1)}, \dots, X_{(m)})$, é uma estatística suficiente para θ e não pode ser reduzida.

Primeiro, temos que,

$$L(\theta | X_1, \dots, X_m) = f(X_1-\theta) \dots f(X_m-\theta)$$

$$(*) = f(X_{(1)}-\theta) \dots f(X_{(m)}-\theta)$$

(*) pois o produto é inutável por ordenação. Daí temos que T é suficiente.

Como cada entrada de f possui θ com operador de " $-$ " não é possível agrupar X_i 's em uma estatística de dimensão menor que n .

2) Para cada uma das distribuições sefa X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória. Encontre uma estatística suficiente mínima para θ .

(a) $f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}, -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty$

(b) $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}, \theta < x < \infty, -\infty < \theta < \infty$

(c) $f(x|\theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{(1+e^{-(x-\theta)})^2}, -\infty < x < \infty, -\infty < \theta < \infty$

(d) $f(x|\theta) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}, -\infty < x, \theta < \infty$

(e) $f(x|\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, -\infty < x, \theta < \infty$

$$\frac{f(x|\theta)}{f(x|\bar{\theta})} = \frac{L(\theta|X_1, \dots, X_n)}{L(\bar{\theta}|X_1, \dots, X_n)} = \frac{e^{-\sum(X_i - \theta)^2/2}}{e^{-\sum(Y_j - \bar{\theta})^2/2}}$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{2} \left[(\sum X_i^2 - \sum Y_j^2) + 2\theta n(\bar{Y} - \bar{X}) \right] \right\}$$

é constante em θ se e somente se $\bar{X} = \bar{Y}$, então \bar{X} é uma estatística suficiente mínima para θ .

$$\frac{L(\theta|X_1, \dots, X_n)}{L(\bar{\theta}|Y_1, \dots, Y_m)} = \frac{\prod(e^{-\frac{(X_i-\theta)}{2}} \prod(\theta < X_i))}{\prod(e^{-\frac{(Y_j-\bar{\theta})}{2}} \prod(\bar{\theta} < Y_j))}$$

$$= \frac{e^{n\theta} e^{-\sum X_i}}{e^{m\bar{\theta}} e^{-\sum Y_j}} \prod(\min X_i > \theta)$$

Para fazer θ constante, temos $\min X_i = \min Y_n$, ou seja $\min X_i$

é uma estatística suficiente mínima para θ .

$$\textcircled{c} \quad \frac{L(\theta | X_1, \dots, X_n)}{L(\theta | Y_1, \dots, Y_n)} = \frac{e^{-\sum X_i + \theta}}{\prod (1 + e^{(X_i - \theta)})^2} \cdot \frac{\prod (1 + e^{(Y_i - \theta)})^2}{e^{-\sum Y_i + \theta}}$$

$$= e^{-\sum (Y_i - X_i)} \left(\frac{\prod (1 + e^{-(Y_i - \theta)})^2}{\prod (1 + e^{-(X_i - \theta)})^2} \right)$$

Pelo exercício anterior, é uma estatística suficiente mínima é uma ~~ou~~ permutação dos dados $T(X_1, \dots, X_n) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$

\textcircled{d} A estatística de ordem é uma estatística suficiente mínima, pelo exercício anterior também

\textcircled{e} Fixe as amostras $\{X_i\}$ e $\{Y_i\}$. Definimos $A(\theta) = \{i : X_i \leq \theta\}$, $B(\theta) = \{j : Y_j \leq \theta\}$, $a(\theta) = \text{nº de elementos em } A(\theta)$ e $b(\theta) = \text{nº de elementos em } B(\theta)$. Então a função $PL(\theta | X_1, \dots, X_n) / L(\theta | Y_1, \dots, Y_n)$ depende em θ apenas por

$$\begin{aligned} \sum |X_i - \theta| - \sum |Y_i - \theta| &= \sum_{i \in A(\theta)} (\theta - X_i) + \sum_{i \in A(\theta)^C} (X_i - \theta) - \sum_{j \in B(\theta)} (\theta - Y_j) - \sum_{j \in B(\theta)^C} (Y_j - \theta) \\ &= -(a(\theta) - [n - a(\theta)])\theta - b(\theta) + [n - b(\theta)]\theta \\ &= + \left(-\sum_{i \in A(\theta)} X_i + \sum_{i \in A(\theta)^C} X_i + \sum_{j \in B(\theta)} Y_j - \sum_{j \in B(\theta)^C} Y_j \right) \\ &= 2(a(\theta) - b(\theta))\theta + \left(\sum_{i \in A(\theta)} X_i + \sum_{i \in A(\theta)^C} X_i + \sum_{j \in B(\theta)} Y_j - \sum_{j \in B(\theta)^C} Y_j \right) \end{aligned}$$

Considerando um intervalo de θ s que não contém nenhum X_i 's e Y_j 's. O primeiro termo é constante re. e só se $a(\theta) = b(\theta)$, ou seja quando X e Y tem a mesma ordem. Então é uma estatística suficiente.

③ @ Seja X_1, \dots, X_n iid $N(\mu, \sigma^2)$, onde σ^2 é conhecido.

(i) Mostre que \bar{X} é completa suficiente para μ , e S^2 é auxiliar. Portanto pelo Teorema de Basu, \bar{X} e S^2 são independentes.

(ii) Mostre que essa independência se estende até quando σ^2 é desconhecido, pois o conhecimento de σ^2 não tem relação com as distribuições.

B) Uma Monte Carlo simulação é uma técnica para melhorar a variancia de estimadores. Suponha que $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ iid e que queremos computar a variancia da media, M .

(i) Aplique o teorema de Baye para mostrar que $\text{Var}(M) = \text{Var}(M - \bar{X}) + \text{Var}(\bar{X})$; assim só temos que simular o segundo pedaço $\text{Var}(M - \bar{X})$ de $\text{Var} M$ (desde que $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$)

(ii) Mostre que o estimador é mais preciso mostrando que a variancia de M é aproximadamente $2[\text{Var} M]^2/(N-1)$ e que $M - \bar{X}$ é aproximadamente $2[\text{Var}(M - \bar{X})]^2/(N-1)$. onde N é o número de amostras de Monte Carlo.

C) (i) Se X e Y não independentes, mostre que

$$E\left(\frac{X}{Y}\right)^k = E(X^k) / E(Y^k)$$

(ii) Use este resultado e o Teorema de Basu para mostrar que se X_1, \dots, X_n iid Gamma(α, β), com α conhecido, então para $T = \sum X_i$

$$E(X_{(1)}|T) = E\left(\frac{X_{(1)}}{T} + T\right) - \frac{T E X_{(1)}}{E T}$$

② (i) Pelo teorema 6.2.25 [CB], $\sum X_i$ é uma estatística completa e suficiente. Sei uma função de $\sum X_i$, então \bar{X} é também uma estatística suficiente completa. Pelo teorema 5.3.1 [CB] sabemos que $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$ tem a mesma distribuição que $\Gamma((n-1)/2, 2)$. $S^2 = [\sigma^2/(n-1)][(n-1)S^2/\sigma^2]$, uma transformação simples, então, $S^2 \sim \Gamma((n-1)/2, 2\sigma^2/(n-1))$, que não depende de μ , logo S^2 é auxiliar e pelo teorema de Barnet, \bar{X}, S^2 são independentes.

(ii). A independência de \bar{X} e S^2 é determinada pela constante de (\bar{X}, S^2) para cada valor de (μ, σ^2) . Pela parte (i), para cada valor de (μ, σ^2) , \bar{X} e S^2 são independentes.

③ (i) μ é um parâmetro de localização. Vamos provar que se X_1, \dots, X_n é uma amostra aleatória de uma família de localizações, então $M - \bar{X}$ é uma estatística auxiliar.

Como X_1, \dots, X_n é uma família de alto localização, podemos escrever $X_i = Z_i + \mu$, onde Z_1, \dots, Z_n é uma amostra aleatória para a pdf, $f(z)$. Seja $M(\bar{Z})$ a densidade da média calculada para Z_1, \dots, Z_n . Então $M(\bar{X}) = M(\bar{Z}) + \mu$ e $\bar{X} = \bar{Z} + \mu$. Portanto, $M(\bar{X}) - \bar{X} = (M(\bar{Z}) + \mu) - (\bar{Z} + \mu) = M(\bar{Z}) - \bar{Z}$. Pois que $M(\bar{Z}) - \bar{Z}$ é uma função de Z_1, \dots, Z_n , a distribuição de $M(\bar{X}) - \bar{X}$ não depende de μ , ou seja, $M(\bar{X}) - \bar{X}$ é uma estatística auxiliar.

Pelo item (a) \bar{X} é uma estatística suficiente completa.
 Pelo Teorema de Barnet \bar{X} e $M - \bar{X}$ são independentes. Como são independentes, pelo teorema 4.5.6 [BCB], $\text{Var } M = \text{Var}(M - \bar{X} + \bar{X}) = \text{Var}(M - \bar{X}) + \text{Var } \bar{X}$.

(ii) Se S^2 é uma amostra de variância calculada para uma amostra de tamanho N , $(N-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{N-1}$. Portanto, $(N-1)^2 \text{Var} S^2 / (\sigma^2)^2 = 2(N-1)$ e $\text{Var} S^2 = 2(\sigma^2)^2 / (N-1)$. Ambas, M_1 e $M - \bar{X}$ não são estatisticamente normais, então, M_1, \dots, M_N e $M_1 - \bar{X}_1, \dots, M_N - \bar{X}_N$ não são aproximadamente normais nem mais se N é grande o bastante. Logo, usando as expressões acima temos 2 expressões onde no caso simples σ^2 se refere a $\text{Var} M$, e no caso de multidim σ^2 se refere a $\text{Var}(M - \bar{X})$.

(C)(i) Por

$$E X^k = E \left(\frac{X}{Y} \right)^k = E \left[\left(\frac{X}{Y} \right)^k (Y)^k \right] = E \left(\frac{X}{Y} \right)^k \cdot E(Y^k)$$

agora basta dividir os 2 lados por $E(Y^k)$.

(ii) Fixando β , $T = \sum X_i$ é uma estatística suficiente completa pelo teorema 6.2.25 [CB]. Como β é um parâmetro, se $Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}$ é uma amostra aleatória para uma gamma $(\lambda, 1)$, então $X_{(1)}/T$ tem a mesma distribuição que $(\beta Z_{(1)}) / (\beta \sum Z_i) = Z_{(1)} / (\sum Z_i)$, e esta distribuição não depende de β . Portanto, $X_{(1)}/T$ é auxiliar, e pelo teorema de Basu, é independente de T . Temos

$$\begin{aligned} E(X_{(1)} | T) &= E \left(\frac{X_{(1)}}{T} T | T \right) = T E \left(\frac{X_{(1)}}{T} | T \right) \\ &= T \cdot E \left(\frac{X_{(1)}}{T} \right) = \frac{T E[X_{(1)}]}{T} = \underline{\underline{E[X_{(1)}]}}. \end{aligned}$$

④ A distribuição beta com parâmetros $\alpha, \beta > 0$ tem densidade

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & x \in (0,1) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Suponha X_1, \dots, X_n iid beta.

⑤ Determine uma estatística suficiente mínima se $\alpha = \beta$ variam linearmente

⑥ Determine uma estatística mínima suficiente se $\alpha = 2\beta$

⑦ Determine " " " " " se $\alpha = \beta^2$.

$$\textcircled{a} \quad \frac{L(\alpha, \beta | \{X_i\})}{L(\alpha, \beta | \{Y_i\})} = \frac{\prod X_i^{\alpha-1} (1-X_i)^{\beta-1}}{\prod Y_i^{\alpha-1} (1-Y_i)^{\beta-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln L(\alpha, \beta | \{X_i\})}{\ln L(\alpha, \beta | \{Y_i\})} = (\alpha-1)(\sum \ln X_i - \sum \ln Y_i) + (\beta-1)(\sum \ln(1-X_i) - \sum \ln(1-Y_i))$$

α é constante se e só se $\sum \ln X_i = \sum \ln Y_i$

β é constante se e só se $\sum (\ln(1-X_i)) = \sum \ln(1-Y_i)$.

⑧ e ⑨ ambos os casos seguem análogo ao ⑤ com a mesma estatística:

$$T(X_1, \dots, X_n) = (\sum \ln X_i, \sum \ln(1-X_i))$$

(5) (Regressão logística). Seja X_1, \dots, X_m variáveis independentes de Bernoulli, com $P_i = P(X_i=1)$, $i=1, \dots, n$. Seja t_1, \dots, t_n uma sequência de constantes conhecidas relacionadas com P_i via

$$\log \frac{P_i}{1-P_i} = \alpha + \beta t_i,$$

onde α e β são parâmetros desconhecidos. Determine uma estatística suficiente mínima para a família de distribuições conjuntas.

$$P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m) = \prod_{i=1}^m P_i^{x_i} (1-P_i)^{1-x_i}$$

Podemos escrever $P_i = \frac{e^{\alpha+\beta t_i}}{1+e^{\alpha+\beta t_i}}$, daí

$$\begin{aligned} P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m) &= \prod_{i=1}^m \left(\frac{e^{\alpha+\beta t_i}}{1+e^{\alpha+\beta t_i}} \right) \left(\frac{1}{1+e^{\alpha+\beta t_i}} \right)^{1-x_i} \\ &= \prod_{i=1}^m \frac{e^{x_i(\alpha+\beta t_i)}}{1+e^{\alpha+\beta t_i}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ln P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m)$$

~~$\ln P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m)$~~

$$\Rightarrow \ln L(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [x_i(\alpha+\beta t_i) - \log(1+e^{\alpha+\beta t_i})]$$

$$\ln \left(\frac{P(X_1=x_1, \dots, X_m=x_m)}{P(Y_1=y_1, \dots, Y_m=y_m)} \right) = \ln \prod_i \frac{e^{x_i(\alpha+\beta t_i)}}{e^{y_i(\alpha+\beta t_i)}}$$

$$= \ln \prod_i \exp\{\alpha(x_i-y_i) + \beta(t_i x_i - t_i y_i)\}$$

$$= \alpha(\sum X_i - \sum Y_i) + \beta(\sum t_i X_i - \sum t_i Y_i)$$

Logo, uma estatística suficiente mínima para de β é
 $T(X_1, X_n) = (\sum X_i, \sum X_i t_i)$

6) Seja f uma função positiva integrável em $[0, \infty)$. Definida por

$$c(\theta) = 1 / \int_0^\infty f(x) dx,$$

e tome $p_\theta(x) = c(\theta)f(x)$, $x \geq 0$, e $p_\theta(x) = 0$, $x < 0$. Seja X_1, X_n iid com densidade p_θ . Sendo $M = \min X_i$ uma estatística suficiente. Mostre que M é suficiente mínima.

$$\begin{aligned} \frac{L(\theta | X_1, X_n)}{L(\theta | Y_1, Y_n)} &= \frac{\prod c(\theta) f(x_i) \mathbb{I}(X_i > \theta)}{\prod c(\theta) f(y_i) \mathbb{I}(Y_i > \theta)} \\ &= \frac{\prod f(x_i) \mathbb{I}(\min X_i > \theta)}{\prod f(y_i) \mathbb{I}(\min Y_i > \theta)} \end{aligned}$$

~~Se~~ é constante em relação a θ , reescrevendo $\min X_i = \min Y_i$, logo $\min X_i$ é uma estatística suficiente mínima.

7) Seja Z_1 e Z_2 normais independentes $\mu=0$ e $\sigma^2=1$ com densidade comum $f(x)=\exp\{-x^2/2\}/\sqrt{2\pi}$, e suponha X e Y são variáveis relacionadas com essas da seguinte forma

$$X = Z_1 \quad \text{e} \quad Y = (X + Z_2)\theta$$

onde $\theta > 0$ é desconhecido.

a) Encontre a distribuição conjunta de X e Y .

b) Supõa um conjunto de dados $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ iid com distribuição comum com X e Y da parte (a).

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

encontre a estatística mínima suficiente.

c) Sabemos que $X = Z_1, Z_1 \sim N(0, 1)$, então $X \sim N(0, 1)$. Então a densidade de X é

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Para Y , dado $X=x$, $Y = (x + Z_2)\theta$. Então $Y|X=x$ tem distribuição

$$Y|X=x \sim N(x\theta, \theta^2)$$

Dai a distribuição conjunta de X e Y

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} \exp\left\{-\frac{(y-x\theta)^2}{2\theta^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi\theta} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} - \frac{(y_i - x_i\theta)^2}{2\theta^2}\right\}$$

$$(b) \ln \frac{L(\theta | \{x_i, y_i\})}{L(\theta | \{w_i, z_i\})} = \ln \frac{\prod \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2} - \frac{(y_i - x_i\theta)^2}{2\theta^2}\right\}}{\prod \exp\left\{-\frac{w_i^2}{2} - \frac{(z_i - w_i\theta)^2}{2\theta^2}\right\}}$$

$$= \ln \prod \exp\left\{-\frac{w_i^2}{2} - \frac{(z_i - w_i\theta)^2}{2\theta^2} - \frac{x_i^2}{2} - \frac{(y_i - x_i\theta)^2}{2\theta^2}\right\}$$

$$= \sum \frac{w_i^2}{2} + \sum \frac{(z_i - w_i\theta)^2}{2\theta^2} - \sum \frac{x_i^2}{2} - \sum \frac{(y_i - x_i\theta)^2}{2\theta^2}$$

$$\propto \sum (z_i^2 - 2z_i w_i \theta + w_i^2 \theta^2) - \sum (y_i^2 - 2x_i y_i \theta + x_i^2 \theta^2)$$

$$\propto \theta^2 (\sum w_i^2 - x_i^2) + \theta (\sum x_i y_i - z_i w_i)$$

Logo, uma estatística suficiente é:

$$T(X_1, X_m) = (\sum x_i y_i, \sum x_i^2)$$

(8) Use completude para a família $N(0,1)$, $\theta \in \mathbb{R}$ para encontrar uma solução essencialmente única f da seguinte equação

$$\int f(x) e^{\theta x} dx = \sqrt{2\pi} e^{\theta^2/2}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Supondo que f é da forma

$$f(x) = A e^{-x^2/2}$$

com A constante. Substituindo na integral

$$\begin{aligned} \int A e^{-x^2/2} e^{\theta x} dx &= A \int e^{-x^2/2 + \theta x} dx \\ &= A \int e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 2\theta x)} dx \\ &= A \int e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} dx \\ &= A e^{\theta^2/2} \int e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2} dx \\ &= A e^{\theta^2/2} \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi} e^{\theta^2/2} \end{aligned}$$

Queremos $A=1$. Daí, $f(x) = e^{-x^2/2}$.

9) Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória para uma distribuição contínua com densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & x \in (0, \theta); \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

a) Encontre uma estatística suficiente T .

b) Determine a densidade de T .

c) Mostre diretamente que T é completa.

a)

$$\begin{aligned} L(\theta | X_1, \dots, X_n) &= \prod_{i=1}^n \frac{2X_i}{\theta^2} \mathbb{I}(X_i < \theta) \\ &= \left(\frac{2}{\theta^2}\right)^n \prod_{i=1}^n X_i \mathbb{I}(\max X_i < \theta). \end{aligned}$$

$T(X_1, \dots, X_n) = \max X_i$ é uma estatística suficiente

b)

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(X_{\max} < t) = P(X_1 < t, \dots, X_n < t) \\ &= (P(X_1 < t))^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^{2n} \end{aligned}$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t^{2n}}{\theta^{2n}} \right) = \frac{2nt^{2n-1}}{\theta^{2n}}$$

c) Supondo $E[g(t)] = 0$,

$$E[g(t)] = \int_0^\theta g(t) f_T(t) dt$$

$$= \int_0^\theta g(t) \frac{2nt^{2n-1}}{\theta^{2n}} dt$$

$$(u = t/\theta) = \int_0^1 g(u\theta) \frac{2\pi t u^{2n-1}}{\theta^{2n}} e^{i\theta u} du$$

$$= \int_0^1 g(u\theta) \underbrace{\frac{2\pi t u^{2n-1}}{\theta^{2n-1}}}_{\neq 0} du$$

Dai, $g(x) = 0$.

(10) Defina P_σ como a família de todas as distribuições normais com desvio-padrão $\sigma > 0$. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de P_σ .

(a) Mostre que a média amostral $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum X_i$ é estatística suficiente completa.

(b) Mostre que a variância amostral.

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

é ancílora para \bar{X}_n .

(c) Conclua que \bar{X}_n e S_n^2 são independentes. O que acontece se considerarmos a família de todas as distribuições normais com média $\mu \in \mathbb{R}$ e desvio-padrão $\sigma > 0$ desacelidados?

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_n | \mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum (X_i - \mu)^2 \right\} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 \right] \right\} \\ &= g(\bar{X}_n, \mu) h(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

Sendo assim $\bar{X}_n = T(\{X_i\})$ é suficiente para

Verificar se é completa vemos se $E_0[g(T)] = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 - E_0[g(T)] &= \int_0^\theta g(x) f(x|\theta) dx \\ &= \int_0^\theta g(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^\theta g(x) \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &\quad + 0 \\ &= 0 \Rightarrow g(x) = 0 \end{aligned}$$

Logo, é completa.

(b) $S_m^2 \sim \frac{1}{m-1} \chi_{m-1}^2$. Que não depende de μ ou de σ^2 , logo S_m^2 é auxiliar.

$$\begin{aligned} \textcircled{c} \quad f(X_1, \dots, X_n | \mu, \sigma^2) &= \frac{f(Y_1, \dots, Y_n | \mu, \sigma^2)}{f(X_1, \dots, X_n | \mu, \sigma^2)} = \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum (Y_i - \bar{Y})^2 + n(\bar{Y} - \mu)^2 - \sum (X_i - \bar{X})^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \right]\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum (Y_i - \bar{Y})^2 - S(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{Y}^2 - \bar{X}^2 + 2\mu(\bar{X} - \bar{Y})) \right]\right\} \end{aligned}$$

é constante quando $\bar{X} = \bar{Y}$, logo \bar{X} é suficiente mínima. Daí, pelo teorema de Basu, \bar{X}_n e S_n^2 são independentes.

11) Seja X_1, \dots, X_n uma amostra de uma distribuição de Cauchy com locação e escala $\gamma=1$, com densidade comum

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)} \quad \text{II}(x \in \mathbb{R})$$

Mostre que $T(X_n) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ é suficiente e não há como atingir nenhuma outra redução.

Temos que, $P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n | X_{(1)}=y_1, \dots, X_{(n)}=y_n) = \frac{1}{n!}$

onde $y_1 \leq \dots \leq y_n$. Dá $f(y_1, \dots, y_n | \theta) = 1 \prod f(y_i) = \frac{1}{n!} \prod f(y_i)$.
Sendo X_i independentes a cada um dos produtos não afeta o resultado, logo, qualquer ordenação de $\{X_i\}$ é suficiente.

Para provar que existe redução possível verifique o resultado provado no exercício ①.

(12) Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma família exponencial, cuja densidade comum (com respeito a Lebesgue) é

$$f_\theta(x) = \frac{\exp\{-|x-\theta|\}}{2} \mathbb{I}_L(x \in \mathbb{R})$$

Mostre que $T(X) = (X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ é suficiente mínima para este modelo.

Pelo exemplo 3.13 de [KNU], A densidade é dada por

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n} \exp\left\{-\sum_{i=1}^n |x_i - \theta|\right\}$$

Suponha que a razão $\frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(y_1, \dots, y_n)}$ é constante em termos de θ , então a diferença entre $\sum |x_i - \theta|$ e $\sum |y_i - \theta|$ é constante em θ . O que indica que cada termo nas somas deve ter um correspondente na outra soma. Logo, existirão casos que envolvem permutações da amostra.

(13) Suponha que X_1, \dots, X_n são iid com densidade comum com respeito a θ dada por

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)}{\theta^2}\right\} I\{x > \theta\}, \quad \theta > 0.$$

a) Encontre estatística suficiente mínima, T , para o modelo.

b) Mostre que T não é completa.

a)

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^{2n}} \exp\left\{-\frac{1}{\theta^2} \sum (X_i - \theta)\right\} I\{\min X_i > \theta\}$$

$$\Rightarrow f_\theta(x) = \exp\left\{-\frac{1}{\theta^2} \left(\sum X_i - \min X_i\right)\right\} \frac{I\{\min X_i > \theta\}}{I\{\min X_i > 0\}}$$

Logo $t(x) = (\sum X_i, \min X_i)$ é suficiente mínima do modelo.

b) Vamos considerar $Z_{(1)}, Z_{(m)}$ iid $\text{Exp}(1)$. Vamos mostrar que T não é independente de uma estatística anciliar. Então dados X_1, \dots, X_n iid de F_θ , $\exists Z_{(1)}, Z_{(m)}$ iid $\text{Exp}(1)$ tais que $X_i = \theta + \theta^2 Z_i$:

$$\begin{aligned} X_{(m)} - X_{(1)} &= \theta + \theta^2 Z_{(m)} - (\theta + \theta^2 Z_{(1)}) \\ X_{(m-1)} - X_{(2)} &= \theta + \theta^2 Z_{(m-1)} - (\theta + \theta^2 Z_{(2)}) \end{aligned}$$

$$= \frac{\theta^2 (Z_{(m)} - Z_{(1)})}{\theta^2 (Z_{(m-1)} - Z_{(2)})} = \frac{Z_{(m)} - Z_{(1)}}{Z_{(m-1)} - Z_{(2)}}$$

A s.a. distribuição ~~não é~~ não depende de θ , pois
 $Z_i \sim \text{Exp}(1)$, de fato ~~$E(X)$~~ $T(X) = (\sum X_i, \min X_i) =$
 $= (\theta n + \theta^2 \sum Z_i, \theta + \theta^2 Z_{(n)})$.