/ /

HW 5

(1) ~~One o~~ Uma observação de uma variável aleatória discreta X com pmf $f(x|\theta)$, onde $\theta \in \{1,2,3\}$. Encontre o MLE de θ

x	$f(x\|1)$	$f(x\|2)$	$f(x\|3)$
0	1/3	1/4	0
1	1/3	1/4	0
2	0	1/4	1/4
3	1/6	1/4	1/2
4	1/6	0	1/4

Para cada valor de x, o MLE de $\hat{\theta}$ é o valor de θ que maximiza $f(x|\theta)$. Os valores são

X	0	1	2	3	4
$\hat{\theta}$	1	1	2/3	3	3

Em $x=2$, $f(x|2)=f(x|3)=1/4$ (nesse caso $\hat{\theta}=2$ e $\hat{\theta}=3$ são MLEs).

/ /

(2) Dado uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ para uma população com pdf $f(x|\theta)$, mostre que maximizando a função de verossimilhança, $L(\theta|x)$, é equivalente a maximizar $\log L(\theta|x)$.

A função log é estritamente crescente, logo

$$L(\theta|x) < L(\hat{\theta}|x) \iff \log L(\theta|x) < L(\hat{\theta}|x)$$

Então o $\hat{\theta}$ que maximiza $L(\theta|x)$ também maximiza $\log L(\theta|x)$.

/ /

③ Considere estimar o parametro da binomial k. De forma que, seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra para uma binomial(k, p), onde p é conhecido e k não. A verossimilhança é

$$L(k|x,p) = \prod_{i=1}^{n} \binom{k}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k-x_i}.$$

Se $k < \max x_i$, então $L(k|x,p) = 0$. ~~Ent~~ Por isso vamos assumir $k \geq \max x_i$ que satisfaz que $L(k|x,p) / L(k-1|x,p) \geq 1$ e $L(k+1|x,p) / L(k|x,p) < 1$. A razão da verossimilhança é

$$\frac{L(k|x,p)}{L(k-1|x,p)} = \frac{(k(1-p))^n}{\prod_i (k-x_i)}$$

Portanto a condição para o maximo é

$$(k(1-p))^n \geq \prod_{i=1} (k-x_i) \text{ e } ((k+1)(1-p))^n < \prod_{i=1} (k+1-x_i)$$

Dividindo por k^n e escrevendo $z = 1/k$, queremos resolver

$$(1-p)^n = \prod_i (1 - x_i z), \text{ para } 0 \leq z \leq 1/\max x_i.$$

O lado direito é estritamente decrescente em z para z neste intervalo com valor 1 para $z=0$ e 0 para $z = 1/\max x_i$. Então há um unico z que resolve está equação. O valor de $1/\hat{z}$ pode não ser inteiro. Mas o inteiro $\hat{k}$ que satisfaz a inequação e é o MLE, é o maior inteiro menor ou igual a $1/\hat{z}$.

/ /

(a) Prove que $\hat{k}$ que satisfaz as inequações e é o MLE é o maior inteiro menor ou igual a $1/\hat{z}$.

(b) Seja $p = \frac{1}{2}$, $n = 4$, e $X_1 = 0$, $X_2 = 20$, $X_3 = 1$, e $X_4 = 19$. Qual o valor de $\hat{k}$?

(a) O valor $\hat{z}$ resolve a equação

$$(1-p)^n = \prod_i (1 - x_i z)$$

onde $0 < z < (\max x_i)^{-1}$. Seja $\hat{k}_i$ = o maior inteiro menor ou igual a $1/\hat{z}$, $\hat{k}$ deve satisfazer

$$(k(1-p))^n \geq \prod_i (k - x_i) \text{ e } ((k+1)(1-p))^n < \prod (k+1-x_i).$$

Pois o lado direito da primeira equação é decrescente em $\hat{z}$, e porque $\hat{k} < 1/\hat{z}$ (então $\hat{z} \leq 1/\hat{k}$) e $\hat{k}+1 > 1/\hat{z}$, $\hat{k}$ deve ~~ser~~ satisfazer as 2 inequações. Daí $\hat{k}$ é o MLE.

(b) Para $p = \frac{1}{2}$, temos que resolver

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = (1-20z)(1-z)(1-19z)$$

que pode ser reduzida a resolver a equação cúbica $-380z^3 + 419z^2 - 40z + 15/16 = 0$. ~~Os~~ As raízes são 0.9998, 0.0646 e 0.0381, com respectivos $\hat{k}$'s. 1, 15 e 26 os 2 primeiros são menores que max X. logo $\hat{k} = 26$.

/ /

④ Seja $X_1, \dots, X_n$ iid com uma de duas pdfs. Se $\theta = 0$, então

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Caso $\theta = 1$, então

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/(2\sqrt{x}) & 0 < x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Encontre o MLE de θ.

$L(0|x) = 1$, $0 < x_i < 1$, e $L(1|x) = \prod (2\sqrt{x_i})^{-1}$, $0 < x_i < 1$.
Daí, MLE é 0 se $1 \geq \prod_i (2\sqrt{x_i})^{-1}$ e 1 se $1 < \prod_i (2\sqrt{x_i})^{-1}$.

Digitalizado com CamScanner

/ /

5 Seja $X_1, \ldots, X_n$ iid com pdf

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, \quad 0 < x \le \theta, \quad \theta > 0$$

Estime θ usando ambos MM e MLE. Calcule a media e variancia dos estimadores. Qual voce prefere

Trata-se de um modelo Unif$(0, \theta)$. O metodo dos momentos é $\frac{\tilde{\theta}}{2} = \bar{X}$, ou seja, $\tilde{\theta} = \bar{X}/2$. Temos que

$$E\tilde{\theta} = 2E\bar{X} = 2EX_i = \frac{2\theta}{2} = \theta$$

$$Var\,\tilde{\theta} = 4Var\,\bar{X} = 4\frac{\theta^2/12}{n} = \frac{\theta^2}{2n}.$$

A verossimilhança é

$$L(\theta|x) = \prod \frac{1}{\theta} I(0 < x_i < \theta) = \frac{1}{\theta^n} I(0 < X_{(n)} \le \theta) I(0 \le X_{(1)} < \infty)$$

Onde $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ são respectivamente ~~os~~ menores e maior valor. Para $\theta > X_{(n)}$, $L = \frac{1}{\theta^n}$, como é decrescente, L é maximizada por $\hat{\theta} = \max X_{(n)}$. $L = 0$ para $\theta < X_{(n)}$. Então o MLE é $\hat{\theta} = \max X_i$. A pdf de $\hat{\theta} = \max X_i$ é $n x^{n-1}/\theta^n$, $0 \le x < \theta$. Daí

$$E\hat{\theta} = \frac{n}{n+1}\theta, \quad E\hat{\theta}^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2 \text{ e } Var\,\hat{\theta} = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

Com n grande ambos ~~são~~ são não viesados e como $Var\,\hat{\theta} < Var\,\tilde{\theta}$, $\hat{\theta}$ é preferível que $\tilde{\theta}$.

/ /

⑥ Seja $X_1, \ldots, X_n$ iid com pdf

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 \leq x < 1, \quad 0 < \theta < \infty$$

ⓐ Encontre o MLE de θ, e mostre que variância $\to 0$ quando $n \to \infty$.

ⓑ Encontre o MM de θ.

ⓐ $$f(x|\theta) = \prod \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \left(\prod x_i\right)^{\theta-1} = L(\theta|x)$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log L = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[n\log\theta + (\theta-1)\sum \log x_i\right] = \frac{n}{\theta} + \sum \log x_i$$

igualando a zero temos $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum \log x_i}$. A segunda derivada é $-n/\theta^2 < 0$, então temos o MLE. Para calcular a variância de $\hat{\theta}$, note que $Y_i = -\log X_i \sim Exp(1/\theta)$, então $-\sum \log X_i \sim$ gamma $(n, 1/\theta)$. Daí, $\hat{\theta} = n/T$, onde $T \sim$ gamma $(n, 1/\theta)$. Podemos calcular o primeiro e segundo momentos diretamente. Temos

$$ET^{-1} = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{t} t^{n-1} e^{-\theta t} dt = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-1)}{\theta^{n-1}} = \frac{\theta}{n-1}$$

$$ET^{-2} = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{1}{t^2} t^{n-1} e^{-\theta t} dt = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n-2)}{\theta^{n-2}} = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)}$$

e portanto

$$E\hat{\theta} = \frac{n}{n-1}\theta \text{ e } Var\,\hat{\theta} = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\theta^2 \to 0$$

(b) ~~Portan~~ Como $X \sim beta(\theta, 1)$, $EX = \theta/(\theta+1)$ e o método dos momentos é a solução de

$$\frac{1}{n}\sum X_i = \frac{\theta}{\theta+1} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\sum X_i}{n - \sum X_i}$$

/ /

7) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra para uma população com pdf exponencial

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2} e^{|x-\theta|}, \quad -\infty < x < \infty, \; -\infty < \theta < \infty$$

Encontre o MLE de θ.

$$L(\theta|x) = \prod \frac{1}{2} e^{-|x_i-\theta|} = \frac{1}{2^n} e^{-\sum |x_i-\theta|}$$

Sendo $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ estatística de ordem. Para $x_{(j)} \leq \theta < x_{(j+1)}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{(i)}-\theta| = \sum_{i=1}^{j} (\theta - x_{(i)}) + \sum_{i=j+1}^{n} (x_{(i)}-\theta) = (2j-n)\theta - \sum_{i=1}^{j} x_{(i)} + \sum_{i=j+1}^{n} x_{(i)}$$

É uma função linear de θ que decresce para $j < n/2$ e cresce para $j > n/2$. Se n é par, $2j-n=0$ se $j=n/2$. Então a verossimilhança é constante entre $x_{(n/2)}$ e $x_{(n/2+1)}$, e algum valor no intervalo é o MLE. Normalmente o ponto médio deste intervalo é dado como MLE. Se n é ímpar, a verossimilhança é minimizada com $\hat{\theta} = x_{((n+1)/2)}$.

/ /

(8) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de uma Gaussiana inversa

$$f(x|\mu,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{1/2} \exp\{-\lambda(x-\mu)^2/(2\mu^2 x)\}, \quad x>0.$$

(a) Mostre que o MLE de μ e λ é

$$\hat{\mu}_n = \bar{X} \quad \text{e} \quad \hat{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_i \frac{1}{X_i} - \frac{1}{\bar{X}}}$$

(b) [Tweedie (1957)] mostrou que $\hat{\mu}_n$ e $\hat{\lambda}_n$ são independentes, $\hat{\mu}_n$ tem distribuição inversa Gaussiana com parametros μ e $n\lambda$, e $n\lambda/\hat{\lambda}_n$ tem uma distribuição χ^2_{n-1}.

(i) Mostre que $\hat{\mu}_2$ tem uma distribuição inversa Gaussiana com parametros μ e 2λ, $2\lambda/\hat{\lambda}_2$ tem uma distribuição χ^2_1, e eles são independentes.

(ii) Assuma o resultado é verdadeiro para $n=k$ e que temos um novo, observações independentes X. Estabeleça o ~~paco~~ passo de indução passando $f(x, \hat{\mu}_k, \hat{\lambda}_k)$ para $f(x, \hat{\mu}_{k+1}, \hat{\lambda}_{k+1})$. Mostre que a densidade final é uma forma apropriada e que o resultado da Tweedie segue.

(a) A verossimilhança é

$$L(\mu,\lambda|x) = \frac{\lambda^{n/2}}{(2\pi)^n \prod x_i} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} \sum \frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i}\right\}$$

/ /

Para λ fixo, maximizar com respeito a μ é equivalente a minimizar a soma na exponencial

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{\mu^2 x_i} = \frac{\partial}{\partial\mu}\sum\frac{((x_i/\mu)-1)^2}{x_i} = -\sum\frac{2((x_i/\mu)-1)}{x_i}\cdot\frac{x_i}{\mu^2}.$$

Igualando a zero $\sum_i\left(\frac{x_i}{\mu}-1\right)=0$, e resolvendo para μ temos $\hat{\mu}_n=\bar{X}$. Colocando $\hat{\mu}_n$ e maximizando em respeito a λ equivale a maximizar uma expressão da forma $\lambda^{n/2}e^{-\lambda b}$. O cálculo produz

$$\hat{\lambda}_n=\frac{n}{2b} \quad \text{Onde } b=\sum\frac{(x_i-\bar{x})^2}{2\bar{x}^2 x_i}$$

Finalmente,

$$2b=\sum\frac{x_i}{\bar{x}^2}-2\sum\frac{1}{\bar{x}}+\sum\frac{1}{x_i}=-\frac{n}{\bar{x}}+\sum\frac{1}{x_i}=\sum\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{\bar{x}}\right)$$

4 (b) i. ii. Fora do assunto do curso.

/ /

9) Suponha que X_1 e X_2 são iid $Exp(\theta)$.

a) Se observamos apenas X_2, mostre que o MLE é X_2.

b) Suponha que observamos apenas $Z = (X_2-1)/X_1$. Encontre a distribuição conjunta de (X_1, Z), e integre X_1 para conseguir a função de verossimilhança.

c) Suponha $X_2 = 1$. Compare o MLE para θ nas partes (a) e (b).

d) Se $\pi(\theta)$ é uma densidade a priori para θ, mostre que a distribuição a posteriori, com $X_2 = 1$, são diferentes nas partes de a) e b).

a)
$$L(\theta, X_2) = \frac{1}{\theta} e^{-X_2/\theta}$$

$$\log L(\theta, X_2) = -\log\theta - X_2/\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(\theta, X_2) = -1/\theta + X_2/\theta^2 = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MLE} = X_2.$$

b) Seja a transformação:

$$\begin{aligned} Z &= (X_2-1)/X_1 \\ W &= X_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= W \\ X_2 &= WZ+1 \end{aligned}$$

O Jacobiano é $|W|$, e

$$f_Z(z) = \int f_{X_1}(w) f_{X_2}(wz+1) \cdot w \, dw = \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{1}{\theta}} \int w e^{-w(1+z)/\theta} \, dw$$

/ /

como o intervalo de integração é $0 < w < -1/z$ se $z<0$, $0 < w < \infty$ se $z>0$. Então

$$f_Z(z) = \frac{1}{\theta^2} e^{-1/\theta} \begin{cases} \int_0^{-1/z} w e^{-w(1+z)/\theta} dw & z<0 \\ \int_0^{\infty} w e^{-w(1+z)/\theta} dw & z \geq 0 \end{cases}$$

Usando o fato de que $\int w e^{-w/a} dw = -e^{-w/a}(aw+a^2)$, temos

$$f_Z(z) = e^{-1/\theta} \begin{cases} \frac{z\theta + e^{(1+z)/z\theta}(1+z-z\theta)}{\theta z(1+z)^2} & z<0 \\ \frac{1}{(1+z)^2} & z \geq 0 \end{cases}$$

(c) Da parte (a) temos $\hat{\theta} = 1$. Para parte (b) $X_2 = 1 \to Z = 0$, daí, $\hat{\theta} = \infty$.

(d) A posteriori é a verossimilhança normalizada vezes a priori, então pelas suas formas em (a) e (b) de fato elas são diferentes.

/ /

(10) Suponha que as v.a $Y_1, \ldots, Y_n$ satisfazem

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são constantes fixas, e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \sim$ iid $N(0, \sigma^2)$, σ^2 é não conhecida.

(a) Encontre uma estatística suficiente com 2 dimensões para (β, σ^2).

(b) Encontre o MLE de β, e mostre que é um estimador não viesado de β.

(c) Encontre a distribuição de MLE de β

(a)
$$L(\theta|Y) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_i - \beta x_i)^2\right\}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(Y_i^2 - 2\beta x_i Y_i + \beta^2 x_i^2)\right\}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\beta^2 \sum x_i^2}{2\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum Y_i^2 + \frac{\beta}{\sigma^2}\sum x_i Y_i\right\}$$

Então $(\sum Y_i^2, \sum x_i Y_i)$ é estatística suficiente para (β, σ^2).

(b) ~~$\log L(\theta|Y) =$~~ $\log L(\beta, \sigma^2 | Y) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum Y_i^2 +$

$$+ \frac{\beta}{\sigma^2}\sum x_i Y_i - \frac{\beta^2}{2\sigma^2}\sum x_i^2$$

Para um valor fixo de σ^2,

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\log L = \frac{1}{\sigma^2}\sum x_i Y_i - \frac{\beta}{\sigma^2}\sum x_i^2 = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}.$$

Também,

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log L = \frac{1}{\sigma^2} \sum x_i^2 < 0,$$

então é o máximo. Porque $\hat{\beta}$ não depende de σ^2, é o MLE. E $\hat{\beta}$ é não viesado

$$E\hat{\beta} = \frac{\sum x_i E Y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i \beta x_i}{\sum x_i^2} = \beta.$$

(c) $\hat{\beta} = \sum a_i y_i$, onde $a_i = x_i / \sum_j x_j^2$ são constantes. $\hat{\beta}$ é normalmente distribuído com média β, e

$$\operatorname{Var} \hat{\beta} = \sum a_i^2 \operatorname{Var} Y_i = \sum \left(\frac{x_i}{\sum_j x_j^2}\right)^2 \sigma^2 = \frac{\sum x_j^2}{(\sum x_j^2)^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}.$$

/ /

(11) Seja $Y_1, \ldots, Y_n$ definidas no exercício anterior

(a) Mostre que $[\sum(Y_i/X_i)]/n$ é também não viesado de β.

(b) Calcule a exata variância de $[\sum(Y_i/X_i)]/n$. ~~e compare~~

(a) $E \frac{1}{n} \sum \frac{Y_i}{X_i} = \frac{1}{n} \sum \frac{EY_i}{X_i} = \frac{1}{n} \sum \frac{\beta X_i}{X_i} = \beta.$

(b) $Var \frac{1}{n} \sum \frac{Y_i}{X_i} = \frac{1}{n^2} \sum \frac{Var Y_i}{X_i^2} = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum \frac{1}{X_i^2}.$

/ /

(12) Se S^2 é uma amostra de variancia baseada na amostra de tamanho n para uma distribuição normal, sabemos que $(n-1)S^2/\sigma^2$ tem distribuição χ^2_{n-1}. A priori conjugada para σ^2 é uma gamma-inversa (α, β), dada por

$$\pi(\sigma^2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \frac{1}{(\sigma^2)^{\alpha+1}} e^{-1/(\beta\sigma^2)}, \quad 0<\sigma^2<\infty,$$

onde α e β são constantes positivas. Mostre que a distribuição posterior de σ^2 é gamma-inversa $\left(\alpha + \frac{n+1}{2}, \left[\frac{(n-1)S^2}{2} + \frac{1}{\beta}\right]^{-1}\right)$. Encontre a media da desta distribuição e o estimador de Bayes de σ^2.

Seja $t = s^2$ e $\theta = \sigma^2$. Como $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$, temos

$$f(t|\theta) = \frac{1}{\Gamma((n-1)/2)\, 2^{(n-1)/2}} \left(\frac{n-1}{\theta} t\right)^{\left[\frac{n-1}{2} - 1\right]} e^{-\frac{(n-1)t}{2\theta}} \cdot \frac{n-1}{\theta}.$$

Com $\pi(\theta)$ dado, temos (ignorando termos que não dependem de θ).

$$\pi(\theta|t) \propto \left[\left(\frac{1}{\theta}\right)^{(\frac{n-1}{2})-1} e^{-\frac{(n-1)t}{2\theta}} \frac{1}{\theta}\right]\left[\frac{1}{\theta^{\alpha+1}} e^{-\frac{1}{\beta\theta}}\right]$$

$$\propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{(n-1)}{2}+\alpha+1} \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left[\frac{(n-1)t}{2} + \frac{1}{\beta}\right]\right\}.$$

reconhecemos como um kernel de uma gamma inversa, com

$$a = \frac{n-1}{2} + \alpha \quad e \quad b = \left[\frac{(n-1)t}{2} + \frac{1}{\beta}\right]^{-1}$$

/ /

Calculando diretamente a media de uma gamma inversa como $1/((\alpha-1)\beta)$, então

$$E[\theta|t] = \frac{\frac{n-1}{2}t + \frac{1}{\beta}}{\frac{n-1}{2} + \alpha - 1} = \frac{\frac{n-1}{2}s^2 + \frac{1}{\beta}}{\frac{n-1}{2} + \alpha - 1}$$

Que é o estimador de Bayes.

/ /

13 Suponha que observamos $X_1, \dots, X_n$ onde

$$X_i|\theta_i \sim N(\theta_i, \sigma^2), \quad i=1,\dots,n \text{ independentes}$$

$$\theta_i \sim N(\mu, \tau^2), \quad i=1,\dots,n \text{ independente}$$

ⓐ Mostre que a distribuição marginal de X_i é $N(\mu, \sigma^2+\tau^2)$ e que marginalmente $X_1, \dots, X_n$ são iid.

ⓑ Mostre, em geral, que se

$$X_i|\theta_i \sim f(x|\theta_i), \quad i=1,\dots,n \text{ independentes}$$

$$\theta_i \sim \pi(\theta|\tau), \quad i=1,\dots,n \quad \text{independentes}$$

então a marginalização, $X_1, \dots, X_n$ é iid.

ⓐ Vamos usar o item ⓑ, então X_i's são independentes e cada uma tem marginal

$$m(x|\mu, \sigma^2, \tau^2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|\theta, \sigma^2)\pi(\theta|\mu, \tau^2)\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma\tau} e^{-(x-\theta)^2/2\sigma^2} e^{-(\theta-\mu)^2/2\tau^2}\, d\theta.$$

Completando quadrado em θ e escrevendo a soma dos dois expoentes como

$$\frac{\left(\theta - \left[\frac{x\tau^2}{\sigma^2+\tau^2} + \frac{\mu\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2}\right]\right)^2}{2\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}} - \cancel{(x-\tau)}\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}$$

/ /

Apenas o primeiro termo tem θ, chamando $-A(\theta)$. Também $e^{-A(\theta)}$ é o núcleo de uma normal. Daí,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A(\theta)} d\theta = \sqrt{2\pi} \frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}},$$

e a pdf marginal é

$$m(x|\mu,\sigma^2,\tau^2) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \sqrt{2\pi} \frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}\right\}$$

uma $N(\mu, \sigma^2+\tau^2)$.

(b) Para uma observação X e θ a pdf conjunta é

$$h(x,\theta|\tau) = \cancel{\prod h(x_i,\theta_i|\tau)} f(x|\theta)\pi(\theta|\tau).$$

e a pdf marginal de X é

$$m(x|\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,\theta|\tau) d\theta.$$

Daí, a pdf conjunta de $X=(X_1,\dots,X_n)$ e $\Theta=(\theta_1,\dots,\theta_n)$ é

$$h(x,\theta|\tau) = \prod h(x_i,\theta_i|\tau),$$

e a marginal de X é

/ /

$$m(X|\Upsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod h(x_i, \theta_i|\Upsilon)\, d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \theta_1|\Upsilon) d\theta_1 \right\} \prod_{i=2}^{n} h(x_i, \theta_i|\Upsilon)\, d\theta_2$$

A integral de $d\theta_1$ é apenas $m(x_1|\Upsilon)$ e não é uma função de $\theta_2, \ldots, \theta_n$. Então, $m(x_1|\Upsilon)$ pode ser colocada fora das integrais. Fazendo isso com cada integral

$$m(X|\Upsilon) = \prod m(x_i|\Upsilon)$$

Como esta marginal é um fator de pdf's $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e elas tem cada uma a ~~mal~~ mesma distribuição marginal, $m(x|\Upsilon)$.