/ /

HW3

① Qui-quadrado. Nesta questão, nós vamos provar o limite para a cauda da χ^2.

ⓐ Seja $Z \sim N(0,1)$ e $X = Z^2$. Mostre que quando $t < 1/2$,

$$M_{X-1}(t) = \frac{\exp(-t)}{\sqrt{1-2t}}$$

O que acontece com a função geradora de momentos para $t > 1/2$? X é sub-Gaussiana?

ⓑ Chernoff. Use o método de Chernoff para mostrar que,

$$P(X-1 \geq u) \leq \exp(-u^2/8), \quad u \leq 1.$$

Usando o fato de que $\frac{\exp(-t)}{\sqrt{1-2t}} \leq \exp(2t^2)$ para $|t| \leq 1/4$. E Mostre que

$$P(|X-1| \geq u) \leq 2\exp(-u^2/8), \quad u \leq 1.$$

ⓒ Soma de χ^2: Defina as variáveis aleatórias

$$X_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i^2,$$

onde Z_i é iid $N(0,1)$. Mostre que

$$P(|X_k - 1| \geq u) \leq 2\exp\{-ku^2/8\} \quad u \leq 1$$

ⓐ

$$M_{X-1}(t) = e^{-t} M_X(t) = e^{-t} M_{Z^2}(t)$$

$$= e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tz^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= e^{-t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/2-t)z^2}\, dz$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) \rightarrow \quad = e^{-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{1/2 - t}} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-2t}}.$$

/ /

quando $t > 1/2$, $\sqrt{1-2t}$ vira imaginario. Uma v.a é sub-gaussiana se seu fgm cresce no maximo quadraticamente para todo t. Como fgm de X explode quando t se aproxima de 1/2, X não é sub-gaussiana

(b) Por Chernoff Bound temos que

$$P(X-1 \geq u) \leq e^{-tu} M_{X-1}(t)$$

$$= e^{-tu} \frac{\exp\{-t\}}{\sqrt{1+2t}}$$

(pela dica) $\rightarrow$ $\leq \exp\{-tu\} \cdot \exp\{2t^2\} \; (|t| \leq 1/4)$

$$= \exp\{2t^2 - tu\}$$

Escolhendo $t = u/4$ (mantem a suposição de que $|t| \leq 1/4$) temos,

$$P(X-1 \geq u) \leq \exp\{2\frac{u^2}{16} - \frac{u}{4} \cdot u\}$$

$$= \exp\{-u^2/8\}$$

Como X é espelhada em torno da origem

$$P(|X-1| \geq u) = 2P(X-1 \geq u)$$

$$\leq 2\exp\{-\frac{u^2}{8}\}$$

(c) Como X_k é uma media de v.a. iid Z_i^2, a fgm de $X_k - 1$ é

$$M_{X_k-1}(t) = \left(\frac{\exp\{-t/k\}}{\sqrt{1-2t/k}}\right)^k = \frac{\exp\{-t\}}{(1-2t/k)^{k/2}}, \; t < k/2$$

/ /

Daí, $P(X_k - 1 \geq u) \leq \exp\{-tu\} \cdot M_{X_{k1}}(t)$

(analogamente ao (a) e (b)) $\rightarrow \quad \leq \exp\left\{-\frac{ku^2}{8}\right\}$

e

$$P(|X_k - 1| \geq u) \leq 2\exp\left\{-\frac{ku^2}{8}\right\}$$

Digitalizado com CamScanner

/ /

② Mostre que a sequencia $X_1, \dots, X_n$ converge em media quadratica para uma constante c se e somente se $E[X_n] \to c$ e $Var(X_n) \to 0$, para $n \to \infty$.

($\Rightarrow$) Suponha valido que $E[(X_n - c)^2] \to 0$ ($n \to \infty$), daí

$$E[X_n^2 - 2cX_n + c^2] = EX_n^2 - 2cEX_n + Ec^2$$
$$= Var X_n + [EX_n]^2 - 2cEX_n + c^2$$
$$= Var X_n + (EX_n - c)^2 \to 0$$

Para ser valido devemos ter $EX_n \to c$ e $Var X_n \to 0$.

($\Leftarrow$) $$E[X_n^2 - 2cX_n + c^2] = EX_n^2 - 2cEX_n + Ec^2$$
$$= Var X_n + (EX_n)^2 - 2cEX_n + c^2$$

(quando $Var X_n \to 0$ e $EX_n \to c$) $\Rightarrow 0 + c^2 - 2c\,c + c^2 = 0$

/ /

③ Seja $X_1, \dots, X_n$ e X v.a. limitados, i.e. para alguma constante $M>0$, temos que $|X| \leq M$ e $|X_i| \leq M$ $\forall i$. Mostre que neste caso especial, convergencia em probabilidade implica convergencia em média quadrática.

Como as v.a. são limitadas por M temos que

$$|X_n - X| \leq 2M$$

Vamos quebrar $E[(X_n-X)^2]$ em 2 partes

$$E[(X_n-X)^2] = E[(X_n-X)^2 \mathbb{1}(|X_n-X| < \varepsilon)]$$
$$+ E[(X_n-X)^2 \mathbb{1}(|X_n-X| \geq \varepsilon)]$$

- Para $|X_n - X| < \varepsilon$, temos que

$$(X_n - X)^2 \leq \varepsilon^2$$

Daí,

$$E[(X_n-X)^2 \mathbb{1}(|X_n-X| < \varepsilon) \leq \varepsilon^2 P(|X_n - X| < \varepsilon)$$

- Para $|X_n - X| \geq \varepsilon$, temos que

$$(X_n - X)^2 \leq (2M)^2 = 4M^2$$

Daí,

$$E[(X_n - X)^2 \mathbb{1}(X_n - X) \geq \varepsilon) \leq 4M^2 P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$

Como $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$, temos que

$$E[(X_n - X)^2] \leq \varepsilon^2 P(|X_n - X| < \varepsilon) + 4M^2 P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$$
$$\longrightarrow 0 \quad (\text{quando } n \to \infty).$$

/ /

(4) Mostre que as seguintes v.a. convergem em probabilidade para 1.

(a) $Y_n = 1 + nX_n$, onde $X_n \sim Ber(1/n)$;

(b) $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$, onde $X_i \sim N(0,1)$.

(a) $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) \overset{(Y_n \geq 1)}{=} P(Y_n - 1 \geq \varepsilon)$$
$$= P(1 + X_n \cdot n - 1 \geq \varepsilon)$$
$$= P(n X_n \geq \varepsilon)$$
$$= P(X_n \geq \varepsilon/n)$$
$$(\text{supondo } \varepsilon \leq 1) \leq P(X_n \geq 1/n) = 1/n$$

Logo $P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) \to 0$, quando $n \to \infty$.

(b) $$EY_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i^2] = 1$$

pois $E[X_i^2] = Var X_i + (EX_i)^2 = 1 + 0^2 = 1$.

$$Var Y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i^2) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot 2 = \frac{2}{n}$$

Daí, pela desigualdade de Chebyshev

$$P(|Y_n - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2}{n\varepsilon^2} \to 0$$

/ /

⑤ Seja $X_n = Ber(1/2 + 1/n)$, e seja $X = Ber(1/2)$. X_n converge em distribuição para X? E em probabilidade?

Sim, $P(X_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ e $P(X_n = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

Já, $P(X = 1) = 1/2$ e $P(X=0) = 1/2$

como $P(X_n = 1) \to P(X = 1)$ e

$P(X_n = 0) \to P(X = 0)$ quando $n \to \infty$

e possuem a mesma distribuição então converge em distribuição.

Não, como X_n e X são Bernoulli o caso relevante é quando $|X_n - X| \geq \varepsilon$, ou seja, $X_n \neq X$.

$$
\begin{aligned}
P(X_n \neq X) &= P(X_n = 0 \text{ e } X = 1) + P(X_n = 1 \text{ e } X = 0) \\
&= P(X_n = 0)P(X = 1) + P(X_n = 1)P(X = 0) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0.
\end{aligned}
$$

Logo, não converge em probabilidade.