HW 1

① Prove o seguinte teorema considerando A_n monotona crescente:

<u>Teo</u>: (~~Conside~~ Continuidade de probabilidade) Se $A_n \to A$, então

$$P(A_n) \to P(A)$$

quando $n \to \infty$.

E prove o caso de monotonicidade decrescente.

Supondo primeiro que A_n é monotona crescente, então $A_1 \subset A_2 \subset \dots$
Seja $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Defina $B_1 = A_1$, $B_2 = \{w \in \Omega : w \in A_2, w \notin A_1\}$, $B_3 = \{w \in \Omega$ $w \in A_3, w \notin A_2, w \notin A_1\}, \dots$ Por construção, B_i são disjuntos, $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ para cada n e $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Daí, pelo Axioma 3 do livro texto:

$$P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

e portanto pelo Axioma 3 de novo

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = P(A).$$

Suponha agora A_n monotona decrescente, ou seja, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ Seja $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Podemos definir uma nova sequencia $B_n = \{w \in \Omega$ $w \in A_1$ $w \notin A_n\}$ para todo n. Assim, $\lim_{n\to\infty} B_n = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus A$.

Agora, B_n é uma sequencia monotona crescente, então pela primeira parte temos que $P(B_n) \to P(A_1 \setminus A) = P(A_1) - P(A)$, quando $n \to \infty$. Usando agora que $P(A_n) = P(A_1) - \cancel{P(A)}\, P(B_n)$ e usando o limite.

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty}[P(A_1) - P(B_n)] = P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(A_1) - (P(A_1) - P(A)) = P(A)$$

② Seja Ω um espaço amostral e seja $A_1, A_2, \ldots,$ um evento.
Defina $B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ e $C_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$.

ⓐ Mostre que $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ e que $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$

ⓑ Mostre que $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ se e somente se w pertence a um infinito número de eventos A_i.

ⓒ Mostre que $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ se e somente se w pertence a todo evento A_i com exceção a um número finito desses eventos.

ⓐ Temos que, $B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = A_n \cup B_{n+1}$, daí $B_{n+1} \subset B_n$ para qualquer n. Analogamente, temos que

$$C_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = A_n \cap C_{n+1}$$

Daí, $C_n \subset C_{n+1}$ para qualquer n.

ⓑ $(\Rightarrow)$ Ida. Seja $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, então $w \in B_i \; \forall i$, ou seja,

$w \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $w \in \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i$, $w \in \bigcup_{i=3}^{\infty} A_i, \ldots$ (1)

Vamos supor por absurdo que w não pertence a uma infinidade de eventos A_i, suponha $w \in A_{a_k}$, onde a_k é uma sequencia finita, ~~cuja~~ ou seja, $\exists K_{max} = \max\{a_k\}$, e temos que, $w \notin \bigcup_{i=K_{max}+1}^{\infty} A_k$, o que é um absurdo por (1). Logo, w pertence a uma infinidade de $A'is$.

$(\Leftarrow)$ Suponha que existe uma infinidade de indices a_k tais que $w \in A_{a_k}$. Daí, $w \in \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ para qualquer n. Daí, $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$.

/ /

ⓒ (⇒) Supondo $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, então existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $w \in C_K$. Daí, $w \in \bigcap_{i=K}^{\infty} A_i$ portanto $w \in A_K, A_{K+1}, A_{K+2}, \ldots$ No máximo $w \notin A_1, A_2, \ldots, A_{K-1}$ que é uma quantidade finita de eventos.

(⇐) Supondo que w pertence a todo A_i com exceção de uma coleção finita, seja ela, $A_{a_1}, A_{a_2}, \ldots, A_{a_K}$. E seja $a_{max} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_K\}$. Daí temos que, $w \in \bigcap_{i=a_{max}+1}^{\infty} A_i = C_{a_{max}+1}$ e portanto $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$

/ /

(3) Suponha que jogamos uma moeda honesta até obtermos exatamente 2 caras. Descreva o espaço amostral S. Qual é a probabilidade de que exatamente K lançamentos sejam necessários?

Temos que a K-ésima ocorrência da moeda é cara e que a primeira cara ocorreu na posição i com $1 \leq i \leq K-1$. Supondo primeiro i fixo temos como probabilidade 2^{-K}, como i tem K-1 opções de aparecer, então

$$P(K \text{ lançamentos}) = \frac{K-1}{2^K}.$$

/ /

④ Seja $A_1, A_2, \dots$ eventos. Mostre que

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Seja $B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, primeiro temos que provar que B_n são disjuntos seja $i<j$ quaisquer

$$B_i \cap B_j = \left(A_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k\right) \cap \underbrace{\left(A_j - \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k\right)}_{B_i \not\subset}$$

$$= \emptyset \quad \left(\text{pois como } i<j \;\; B_i \subset A_i \text{ e } A_i \cap A_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} A_k = \emptyset\right)$$

Vamos provar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, por indução no número de eventos K:

$K=1$ $\qquad A_1 = B_1 \Leftrightarrow A_1 = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{1-1} A_i = A_1$

$K=2$ $\qquad A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$

Assumindo que $\bigcup_{i=1}^{K} A_i = \bigcup_{i=1}^{K} B_K$, vamos provar para $K+1$

$$\bigcup_{i=1}^{K+1} B_i = \left(\bigcup_{i=1}^{K} B_i\right) \cup B_{K+1}$$

$$= \left(\bigcup_{i=1}^{K} A_i\right) \cup \left(A_{K+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{K} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{K+1} A_i$$

Logo, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, usando que $P(B_n) \leq P(A_n)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

/ /

⑤ Suponha que $P(A_i) = 1$ para cada i. Prove que

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1.$$

$P(A_i) = P(\Omega) = 1 \Rightarrow A_i = \Omega$

$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(\Omega) = 1.$

/ /

⑥ Seja X com função de densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & 0 < x < 1 \\ 3/8 & 3 < x < 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ⓐ Encontre a função de distribuição acumulada de X.

ⓑ $Y = 1/X$. Encontre a função de densidade de probabilidade $f_Y(y)$ para Y.

ⓐ
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} x/4 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1/4 & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{3}{8}x - \frac{7}{8} & 3 \leq x \leq 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

ⓑ Temos que, $f_Y(y) = F_Y'(y)$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X > 1/y) = 1 - F_X(1/y)$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1}{4y} & 0 < \frac{1}{y} \leq 1 \Leftrightarrow y \geq 1 \\ 1 - \frac{1}{4} & 1 \leq \frac{1}{y} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \\ 1 + \frac{7}{8} - \frac{3}{8y} & 3 \leq \frac{1}{y} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{y} > 5 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y = F_Y' = \begin{cases} 1/4y^2 & y > 1 \\ 3/8y^2 & \frac{1}{5} < y < \frac{1}{3} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

/ /

(7) Seja X e Y independentes e com distribuição Uniforme(0,1). Seja $Z = \min(X, Y)$. Encontre a densidade de $f_Z(z)$ para Z.

$$P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = P(X > z)P(Y > z) = (1-z)^2$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = 1 - (1-z)^2 \Rightarrow f_Z(z) = 2(1-z) \quad \forall z \in [0,1].$$

/ /

8) Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Unif(0,1)$ e seja $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Encontre $E(Y_n)$.

$$P(Y_n < y) = P(X_1 < y, X_2 < y, \ldots, X_n < y)$$
$$= y^n$$

Daí, $F_{Y_n}(y) = y^n$ e $f_{Y_n}(y) = ny^{n-1}$

$$E[Y_n] = \int_0^1 n\,y^n\,dy = n\left[\frac{1}{n+1}y^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

/ /

⑨ Uma partícula começa na origem da reta real e se move ao longo da reta em saltos de uma unidade. Para cada ~~to~~ salto, a probabilidade é 1-p de que a partícula salte uma unidade para a direita e p de saltar uma unidade para a esquerda. Seja X_n a posição da partícula após n unidades. Encontre $E[X_n]$ e $Var(X_n)$.

Seja $Y_n = \begin{cases} +1 & \text{se o n-ésimo passo for para a direita} \\ -1 & \text{" " " " " " esquerda} \end{cases}$

Então, $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, daí usando que Y_n é independente

$$E[X_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i\right] = EY_1 + EY_2 + \cdots + EY_n$$

$$= (1.p + (-1)(1-p)) + \cdots + (1.p + (-1)(1-p))$$

$$= n(p + (-1)(1-p)) = 2np - n$$

Analogamente, $Var(X_n) = \cancel{E[X_n^2] - (E[X_n])^2} \sum_{i=1}^{n} Var(Y_i)$
$= n\, Var(X_i)$

$$Var(Y_i) = E[Y_i^2] - (EY_i)^2$$

$$= 1 - (1-2p)^2 = 4p(1-p)$$

$$\Rightarrow Var(X_n) = 4np(1-p)$$

/ /

10 Seja $r(x)$ uma função de x e seja $s(y)$ uma função de y. Mostre que

$$E(r(X)s(Y)|X) = r(X).E(s(Y)|X).$$

Também, mostre que $E(r(X)|X) = r(X)$.

$$E(r(X)s(Y)|X) = \int r(X)s(Y)f(Y|X)\,dY$$

$$= r(X)\int s(Y)f(Y|X)\,dY$$

$$= r(X)\,E(s(Y)|X)$$

$$E[r(X)|X) = r(X)\underbrace{P(X=x|x)}_{1} = r(X)$$