/ /

HW 10

① ⓐ Suponha X com densidade p_θ, $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}$, e que essas densidades são regulares o suficiente para que a derivada da função potência de qualquer teste a função ϕ pode ser avaliada diferenciando-se sob o sinal de integral.

$$\beta'_\varphi(\theta) = \int \underbrace{\varphi(x)}_{\text{teste}} \frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta} \, d\mu(x).$$

Um teste φ^* é chamado localmente mais poderoso $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ se maximiza $\beta'_\varphi(\theta_0)$ entre todos os testes ϕ com nível α. Determine a forma do teste localmente mais poderoso.

ⓑ ~~Suponha~~

Primeiro definimos uma função $V_\theta(x)$, de forma que

$$V_\theta(x) = \frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta}}{p_\theta(x)}.$$

Sobre H_0:

$$\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta} = V_{\theta_0}(x)\, p_{\theta_0}(x)$$

Daí, a derivada fica

$$\beta'_\varphi(\theta_0) = \int \varphi(x)\, V_{\theta_0}(x)\, p_{\theta_0}(x)\, d\mu(x)$$

$$= E_{\theta_0}[\varphi(X)\, V_{\theta_0}(X)]$$

Caímos num problema de otimização, onde devemos maximizar $E_\theta[\varphi(X)\, V_{\theta_0}(X)]$ sujeito a $E_{\theta_0}[\varphi(X)] = \int \varphi\, p_{\theta_0}\, d\mu = \alpha$.

Por Lagrange:

/ /

$$\mathcal{L}(\varphi,\lambda) = \int \varphi(x) V_{\theta_0}(x) P_{\theta_0}(x)\, d\mu(x) - \lambda\left(\int \varphi(x) P_{\theta_0}(x)\, d\mu(x) - \alpha\right)$$

Resolvendo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} = V_{\theta_0} P_{\theta_0}(x) - \lambda P_{\theta_0}(x) := 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \propto \max\{V_{\theta_0}(x) - c, 0\}$$

onde c é escolhido de forma que satisfaça

$$\int \varphi(x) P_{\theta_0}(x)\, d\mu(x) = \alpha$$

Assim, o teste LMP é da forma

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & V_{\theta_0}(x) > c, \\ 0 & V_{\theta_0}(x) \leq c. \end{cases}$$

/ /

② Suponha $X = (X_1, \dots, X_n)$ iid com densidade f_θ. O teste localmente mais poderoso de $H_0: \theta = \theta_0$ vs. $H_1: \theta > \theta_0$ do problema anterior rejeita H_0 se uma estatística apropriada T excede um valor crítico c. Use o TCL para descrever como o nível crítico c pode ser escolhido quando n é grande ~~para~~ de mais para atingir um nível aproximadamente de α. A resposta envolve informação de Fisher em $H_0: \theta = \theta_0$.

Pelo Teorema de Neyman-Pearson, a estatística de teste T é baseada na função $V_\theta(X)$ (definida no exercício anterior).

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log f_\theta(x_i)}{\partial \theta}\Bigg|_{\theta=\theta_0}$$

Sobre H_0, a função $\frac{\partial \log f_\theta(x_i)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0}$ tem media 0, porque o valor ~~esp~~ esperado no parametro verdadeiro é zero. E tem variancia $I(\theta)$, onde (I é a informação de Fisher)

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

Pelo TCL, T é aproximado por uma ~~no~~ normal sobre H_0, onde quando n é grande:

$$T \sim N(0, nI(\theta)).$$

O teste rejeita H_0 se $T > c$. Para um nível de significancia α, o valor crítico c satisfaz $P(T > c \mid H_0) = \alpha$. Usando a aproximação da normal:

$$P(T > c \mid H_0) = 1 \ \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{n I(\theta_0)}}\right),$$

/ /

onde Φ é a cdf da normal padrão. Resolvendo para c:

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{nI(\theta_0)}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{nI(\theta_0)}} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow c = \sqrt{nI(\theta_0)} \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Daí, $c = z_\alpha \sqrt{nI(\theta_0)}$, onde $z_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)$.

/ /

(3) Em uma dada cidade o número de acidentes de ~~carro~~ carro num dado ano segue uma distribuição de Poisson. Nos ~~ano passado~~ últimos anos a media do numero de acidentes por ano foi de 15, e ~~no~~ neste ano foi 10. ~~Is it~~ Isto justifica que a taxa de acidentes tem diminuido?

Sendo $X \sim Poisson(\lambda)$, e observamos $X=10$. Verificamos que

$$P(X \leq 10 \mid \lambda = 15) = \sum_{i=0}^{10} \frac{e^{-15} 15^{i}}{i!} = e^{-15}\left[1 + 15 + \frac{15^2}{2!} + \dots + \frac{15^{10}}{10!}\right] \approx 0{,}12$$

Que é uma probabilidade possivel, assim sendo não se pode dizer que a taxa diminuiu.

4) Prove que, se $f(x|\theta)$ é a fmp de uma v.a. discreta, então o numerador de $\lambda(x)$, a estatística LRT, é a probabilidade máxima da amostra quando o máximo é computado sobre os parâmetros na hipótese nula. Além disso, o denominador de $\lambda(x)$ é a probabilidade máxima da amostra sobre todas as possibilidades de parâmetros.

Para variáveis aleatórias discretas, ~~$L(\theta)$~~

$$L(\theta|x) = f(x|\theta) = P(X=x|\theta).$$

Então o numerador e denominador de $\lambda(x)$ são o supremo desta probabilidade sobre o conjunto.

/ /

(5) Seja duas amostras independentes $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\theta)$ e $Y_1, \dots, Y_m \sim Exp(\mu)$.

(a) Encontre o LRT de $H_0: \theta = \mu$ vs $H_1: \theta \neq \mu$.

(b) Mostre que o teste da parte (a) pode ser baseado na estatística

$$T = \frac{\sum X_i}{\sum X_i + \sum Y_i}.$$

(c) Encontre a distribuição de T quando H_0 é verdade.

(a)

$$\lambda(x,y) = \frac{\sup_{H_0} L(\theta|x,y)}{\sup_\theta L(\theta|x,y)} \quad \text{MLE}$$

O MLE sobre H_0 é

$$\log L(\theta|x,y) = (n+m)\log\theta - \theta\left(\sum_i^n X_i + \sum_j^m Y_j\right)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_0 = \frac{n+m}{\sum X_i + \sum Y_j}$$

O MLE irrestrito fica:

$$\frac{\partial \log L(\theta,\mu|x,y)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum X_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum X_i}$$

$$\frac{\partial \log L(\theta,\mu|x,y)}{\partial\mu} = \frac{m}{\mu} - \sum Y_j = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \frac{m}{\sum Y_i}$$

Daí,

$$\lambda(x,y) = \frac{\prod \hat{\theta}_0 e^{-\hat{\theta}_0 x_i} \prod \hat{\theta}_0 e^{-\hat{\theta}_0 y_j}}{\prod \hat{\theta} e^{-\hat{\theta} x_i} \prod \hat{\mu} e^{-\hat{\mu} y_j}}$$

$$= \frac{\hat{\theta}_0^{n+m} \exp\{-\hat{\theta}_0(\sum X_i + \sum Y_i)\}}{\hat{\theta}^n \hat{\mu}^m \exp\{-\hat{\theta}\sum X_i - \hat{\mu}\sum Y_i\}}$$

$$= \frac{\left(\frac{n+m}{\sum X_i + \sum Y_j}\right)^{n+m} \exp\{\cancel{-(n+m)}\}}{\left(\frac{n}{\sum X_i}\right)^n \left(\frac{m}{\sum Y_j}\right)^m \exp\{\cancel{-(n+m)}\}}$$

$$= \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} \cdot \frac{(\sum X_i)^n (\sum Y_j)^m}{(\sum X_i + \sum Y_j)^{n+m}}$$

e o LRT rejeita H_0 se $\lambda(X,Y) \leq c$.

(b) Podemos escrever

$$\lambda(X,Y) = \frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} \cdot T^n (1-T)^m$$

onde $T = \dfrac{\sum X_i}{\sum X_i + \sum Y_i}$.

(c) Quando H_0 é verdadeiro

$$\sum X_i \sim Gamma(n, \theta)$$
$$\sum Y_i \sim Gamma(m, \theta)$$

E como vimos no curso $T = \dfrac{\sum X_i}{\sum X_i + \sum Y_i} \sim beta(n,m)$.

/ /

(6) Um caso especial da normal é o em que a media e a variancia são relacionadas, considere a familia $N(\theta, a\theta)$. Se estamos interessados nesta relação:

(a) Encontre o LRT de $H_0: a=1$ vs $H_1: a \neq 1$ baseado na amostra $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, a\theta)$, onde θ é desconhecido.

(b) Repita o item (a) porem considerando $N(\theta, a\theta^2)$.

(a) Primeiro avaliamos o MLE de a e θ

$$L(a,\theta|x) = \prod \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-(x_i-\theta)^2/(2a\theta)}$$

$$\log L(a,\theta|x) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}\log(2\pi a\theta) - \frac{1}{2a\theta}(x_i-\theta)^2.$$

Daí

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{2\theta a^2}(x_i-\theta)^2\right) = -\frac{n}{2a} + \frac{1}{2\theta a^2}\sum_i (x_i-\theta)^2 = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{2\theta} + \frac{1}{2a\theta}(x_i-\theta)^2 + \frac{1}{a\theta}(x_i-\theta)\right]$$

$$= -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2a\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2 + \frac{n\bar{x}-n\theta}{a\theta} := 0$$

Temos que resolver as duas equações para conseguir o MLE de a e θ, pela primeira equação

$$a = \frac{1}{n\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2$$

Substituindo na segunda equação

$$-\frac{n}{2\theta} + \frac{n}{2\theta} + \frac{n(\bar{x}-\theta)}{a\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}$$

/ /

e $$\hat{a} = \frac{1}{n\bar{x}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\bar{x}},$$

onde $\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$. Para $a = 1$, basta resolver a segunda equação

$$\hat{\theta}_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\hat{\sigma}^2 + \bar{x}^2)}}{2}.$$

Note que $\hat{a}\hat{\theta} = \hat{\sigma}^2$, obtemos

$$\lambda(x) = \frac{L(\hat{\theta}_0 | x)}{L(\hat{a}, \hat{\theta} | x)} = \frac{\prod \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\theta}_0}} \exp\{-(x_i - \hat{\theta}_0)/2\hat{\theta}_0\}}{\prod \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{a}\hat{\theta}}} \exp\{-(x_i - \hat{\theta})/2\hat{\theta}\hat{a}\}}$$

$$= \cancel{\frac{(2\pi\hat{\theta}_0)^{\frac{n}{2}}}{(2\pi\hat{\sigma}^2)^{n/2}}} \quad \frac{(2\pi\hat{\sigma})^{n/2}}{(2\pi\hat{\theta}_0)^{n/2}} \cdot \frac{\exp\{-\sum(x_i - \hat{\theta}_0)^2/2\hat{\theta}_0\}}{\exp\{-\sum \underbrace{(x_i - \hat{\theta})}_{x_i - \bar{x}}{}^2/2\hat{a}\hat{\theta}\}}$$

$$= \left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}_0}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{n}{2} - \frac{\sum(x_i - \hat{\theta}_0)^2}{2\hat{\theta}_0}\right\}$$

(b) Análogo ao caso anterior trocando $a\theta$ por $a\theta^2$.

⑦ Seja $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim}$ Poisson(λ) e seja $\lambda \sim$ Gamma(α, β). Sabemos que a posteriori de λ é

$$\pi(\lambda|y) = \frac{f(y|\lambda)\pi(\lambda)}{m(y)} \sim \text{Gamma}\left(y+\alpha, \frac{\beta}{n\beta+1}\right).$$

Considere um teste Bayesiano $H_0: \lambda \leq \lambda_0$ vs $H_1: \lambda > \lambda_0$.

ⓐ Calcule as expressões para as probabilidades a posteriori de H_0 e H_1.

ⓑ Se $\alpha = \frac{5}{2}$ e $\beta = 2$, a distribuição a priori é uma χ^2 com 5 graus de liberdade. Explique como uma tabela de χ^2 pode ser usada para um teste Bayesiano.

ⓐ Seja $Y = \sum X_i$.

H_0: $$P(\lambda \leq \lambda_0 | y) = \frac{\left(\frac{\beta}{n\beta+1}\right)^{y+\alpha}}{\Gamma(y+\alpha)} \int_0^{\lambda_0} t^{y+\alpha-1} e^{\frac{\beta t}{n\beta+1}} dt$$

H_1: $$P(\lambda > \lambda_0 | y) = 1 - P(\lambda \geq \lambda_0 | y)$$

ⓑ Como $\beta/(\beta n+1)$ é um parâmetro da posteriori, $(2(\beta n+1)\lambda/\beta)|Y$ tem distribuição gamma$(y+\alpha, 2)$. Se 2α é um inteiro, esta é uma $\chi^2_{2y+2\alpha}$. Então, para $\alpha = 5/2$ e $\beta = 2$,

$$P(\lambda \leq \lambda_0 | y) = P\left(\frac{2(\beta n+1)\lambda}{\beta} \leq \frac{2(\beta n+1)\lambda_0}{\beta}\right)$$

$$= P(\chi^2_{2y+5} < 3\lambda_0).$$

/ /

(8) Para amostras de tamanho $n = 1, 4, 16, 64, 100$ vindas de $N(\mu, \sigma^2)$, com σ^2 conhecida, mostre a função poder dos seguintes LRTs. Tome $\alpha = 0.05$

(a) $H_0: \mu \leq 0$ vs $H_1: \mu > 0$

(b) $H_0: \mu = 0$ vs $H_1: \mu \neq 0$

(a) Sendo $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$. A estatística LRT é proporcional a $\bar{X}$. Por simplicidade

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N\left(\frac{\mu - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}, 1\right)$$

onde μ_0 é o valor de μ sobre H_0. O LRT rejeita H_0 se $\bar{X} > c_1$ onde c_1 é o valor crítico

$$c_1 = \Phi^{-1}(1-\alpha) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

onde Φ^{-1} é o inverso da ~~d~~ cdf da normal padrão, então a função poder é

$$\beta(\mu) = P(\bar{X} > c_1 | \mu) = 1 - \Phi\left(\frac{c_1 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$$

para $\alpha = 0.05$ $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ é aproximadamente 1.645, daí

$$\beta(\mu) = P\left(Z > 1645 - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right)$$

(b) Teremos ~~c_2~~ que H_0 é rejeitado se $\bar{X} < c_2$ ou $\bar{X} > c_3$, onde

$$c_2 = \Phi^{-1}(\alpha/2) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad e \quad c_3 = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\beta(\mu) = P(\bar{X} < c_2 \mid \mu) + P(\bar{X} > c_3 \mid \mu)$$

$$= \Phi\left(\frac{c_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{c_3 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

/ /

(9) Para uma amostra $X_1, \dots, X_n \sim$ Bernoulli(p), é descrito o teste

$$H_0: p = 0.49 \quad vs. \quad H_1: p = 0.51.$$

Use o TCL para determinar, aproximadamente, o tamanho de amostra necessário para que as duas probabilidades de erro sejam ambas 0.01. Use a função teste que rejeita H_0 se $\sum X_i$ é grande.

Primeiro vamos encontrar a distribuição de $S_n = \sum X_i$ sobre H_0 e H_1.

- H_0: $\quad S_n \sim N(n \cdot 0{,}49 \,,\; n \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51)$

- H_1: $\quad S_n \sim N(n \cdot 0{,}51 \,,\; n \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49)$

O teste rejeita H_0 se $S_n > k$, k é escolhido de forma que

- Erro do tipo I

$$P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0) = P(S_n > k \mid H_0) \approx 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{k - \mu_0}{\sigma_0} = z_{0.99} \qquad (\text{onde } z_{0.99} \approx 2.33)$$

- Erro do Tipo II

$$P(\text{falhar em rejeitar } H_0 \mid H_1) = P(S_n \leq k \mid H_1) \approx 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{k - \mu_1}{\sigma_1} = z_{0.01} \qquad (\text{onde } z_{0.01} \approx -2.33)$$

/ /

Daí temos que resolver em k e n:

$$k = \mu_0 + z_{0.99} \cdot \sigma_0 = n \cdot 0.49 + 2.33\sqrt{n \cdot 0.49 \cdot 0.51}$$

$$k = \mu_1 + z_{0.01}\, \sigma_1 = n \cdot 0.51 - 2.33\sqrt{n\, 0.51 \cdot 0.49}$$

Igualando e isolando o n

$$4.66\sqrt{n\, 0.49 \cdot 0.51} = n\ 0.02$$

$$\Rightarrow n = \frac{(4.66)^2 \cdot 0.49 \cdot 0.51}{0.02^2} \approx 13{,}567$$

/ /

(10) Um abuso muito marcante dos níveis α é escolhê-los depois de ver os dados e escolhê-los de forma a forçar a rejeição (ou aceitação) de uma hipótese nula. Para ver quais são as verdadeiras probabilidades de erro Tipo I e Tipo II de tal procedimento, calcule o tamanho e o poder dos dois testes triviais a seguir:

(a) Sempre rejeite H_0, independentemente dos dados obtidos (equivalente à prática de escolher o nível α para forçar a rejeição de H_0).

(b) Sempre aceita H_0, independente dos dados obtidos (equivalente à prática de escolher o nível α para forçar a rejeição de H_0)

(a) Tamanho $= P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0) = 1 \Rightarrow$
Erro Tipo I $= P(\text{rejeita } H_0 \mid H_0) = 1$

Poder $= P(\text{rejeita } H_0 \mid H_1) = 1 \Rightarrow$
Erro Tipo II $= P(\text{não rejeita } H_0 \mid H_1) = 0$

(b) Tamanho $= P(\text{rejeita } H_0 \mid H_0) = 0 \Rightarrow$
Erro Tipo I $= P(\text{rejeita } H_0 \mid H_0) = 0$

Poder $= P(\text{rejeita } H_0 \mid H_1) = 0 \Rightarrow$
Erro Tipo II $= P(\text{não rejeita } H_0 \mid H_1) = 1.$