/ /

HW 7

① 1000 jogadas de uma moeda são feitas: 560 caras e 440 coroas. É razoável assumir que a moeda é justa? Justifique.

Seja X = # número de caras. Se a moeda for honesta, então $X \sim$ binomial$(1000, \frac{1}{2})$. Então

$$P(X \geq 560) = \sum_{x=560}^{1000} \binom{1000}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{1000-x} \approx 0.0000825$$

Para esta binomial, $EX = 1000p = 500$ e $\text{Var}X = 1000p(1-p) = 250$. Se a moeda é honesta a probabilidade de ocorrer 560 caras de 1000 lançamentos é muito baixo, logo é esperado que não seja honesta.

/ /

(2) Suponha que observamos m variáveis aleatórias iid bernoulli(θ), denote por $Y_1, \ldots, Y_m$. Mostre que o LRT de $H_0: \theta \leq \theta_0$ contra $H_1: \theta > \theta_0$ rejeita H_0 se $\sum Y_i > b$.

A LRT estatística é

$$\lambda(y) = \frac{\sup_{\theta \leq \theta_0} L(\theta | Y_1, \ldots, Y_m)}{\sup_{\theta \in \Omega} L(\theta | Y_1, \ldots, Y_m)}$$

Seja $Y = \sum_{i=1}^{m} Y_i$ e note que o MLE do numerador é $\min\{Y/m, \theta_0\}$ enquanto o denominador é Y/m. Daí

$$\lambda(Y) = \begin{cases} 1 & Y/m \leq \theta_0 \\ \dfrac{\theta_0^Y (1-\theta_0)^{m-Y}}{(Y/m)^Y (1-Y/m)^{m-Y}} & Y/m > \theta_0. \end{cases}$$

e rejeitamos H_0 se

$$\frac{(\theta_0)^Y (1-\theta_0)^{m-Y}}{(Y/m)^Y (1-Y/m)^{m-Y}} < c.$$

Para mostrar que é equivalente se $Y > b$, nos podemos mostrar que $\lambda(Y)$ é decrescente em Y então $\lambda(Y) < c$ ocorre para $Y > b > m\theta_0$. Temos que

$$\log \lambda(Y) = Y \log \theta_0 + (m-Y) \log(1-\theta_0) - Y \log\left(\frac{Y}{m}\right) - (m-Y) \log\left(\frac{m-Y}{m}\right),$$

e

$$\frac{\partial}{\partial Y} \log \lambda(Y) = \log \theta_0 - \log(1-\theta_0) - \log\left(\frac{Y}{m}\right) - Y\frac{1}{Y} + \log\left(\frac{m-Y}{m}\right) + \frac{(m-Y)}{m-Y}$$

/ /

$$= \log\left(\frac{\theta_0}{Y/m} \cdot \frac{\left(\frac{m-Y}{m}\right)}{1-\theta_0}\right).$$

Para $Y/m > \theta_0$, $1-Y/m = (m-Y)/m < 1-\theta_0$, então cada fração acima é menor que 1, e o log é menor que 0. Por isso, $\frac{\partial}{\partial Y}\log < 0$ mostra que λ é decrescente em Y e $\lambda(Y) < c$ se e somente se $Y > b$.

/ /

③ Uma amostra aleatória $X_1, \dots, X_n$ é de uma distribuição de Pareto com pdf

$$f(x|\theta,\nu) = \frac{\theta \nu^{\theta}}{x^{\theta+1}} \mathbb{1}(\nu \le x), \quad \theta > 0, \ \nu > 0.$$

ⓐ Encontre o MLE de θ e ν.

ⓑ Mostre que o LRT de

$H_0: \theta = 1$, ν desconhecido

$\times$

$H_1: \theta \neq 1$, ν desconhecido.

tem região ~~re~~ crítica da forma $\{x : T(x) \le c_1 \text{ ou } T(x) \ge c_2\}$, onde $0 < c_1 < c_2$ e

$$T = \log\left[\frac{\prod X_i}{(\min X_i)^n}\right].$$

ⓒ Mostre que sob H_0, $2T$ tem distribuição chi-quadrado, e encontre o número de graus de liberdade.

ⓐ O log da verossimilhança é

$$\log L(\theta, \nu | \underline{X}) = n \log \theta + n\theta \log \nu - (\theta+1) \log\left(\prod X_i\right), \ \nu \le x_{(1)}$$

onde $x_{(1)} = \min X_i$. Para algum valor de θ, é uma função crescente de ν para $\nu \le x_{(1)}$ ~~min~~. Então ~~ambos os restrições~~ ambos os ~~os~~ MLEs restrito e irrestritos de ν são $\hat{\nu} = x_{(1)}$. Para encontrar o MLE de θ, seja

/ /

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L(\theta, x_{(1)}|x) = \frac{n}{\theta} + n\log x_{(1)} - \log\left(\prod x_i\right) = 0$$

então resolvendo para θ

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\log\left(\prod x_i / x_{(1)}^n\right)} = \frac{n}{T}.$$

Como a segunda derivada é negativa

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(\theta, x_{(1)}|x) = -\frac{n}{\theta^2} < 0,\ \text{para todo } \theta.$$

Então $\hat{\theta}$ é o maximo.

(b) Sobre H_0, o MLE de θ é $\hat{\theta}_0 = 1$, e o MLE de v continua sendo $\hat{v} = x_{(1)}$. Então a razão da verossimilhança é

$$\lambda(x) = \frac{x_{(1)}^n / \left(\prod x_i\right)^2}{(n/T)^n x_{(1)}^{n^2/T} / \left(\prod x_i\right)^{n/T+1}} = \left(\frac{T}{n}\right)^n \frac{e^{-T}}{(e^{-T})^{n/T}} = \left(\frac{T}{n}\right)^n e^{-T+n}.$$

$\frac{\partial}{\partial T}\log\lambda(x) = \frac{n}{T} - 1$. Daí, $\lambda(x)$ é crescente se $T < n$ e decrescente se $T \geq n$. Portanto, $T \leq c$ é equivalente para $T \leq c_1$ ou $T \geq c_2$, para constantes c_1 e c_2 apropriadas.

(c) Primeiro seja $Y_i = \log X_i$, $i = 1, \dots, n$. E seja $Z_1 = \min Y_i$ e $Z_2, \dots, Z_n$ os demais Y_i's mantendo a ordem. Finalmente seja $W_1 = Z_1$ e $W_i = Z_i - Z_1$, $i = 2, \dots, n$. Então W_i's são independentes do $W_1 \sim f_{W_1}(w) = n v^n e^{-nw}$, $w \geq \log v$, e $W_i \sim \exp(1)$, $i = 2, \dots, n$. Daí $T = \sum_{i=2}^n W_i \sim \text{Gamma}(n-1, 1)$, portanto $2T \sim \text{Gamma}(n-1, 2) = \chi^2_{2(n-1)}$.

/ /

(4) Nós já vimos a utilidade do LRT em problemas com parâmetros ruidosos. Agora vamos olhar para outros problemas com parâmetros ruidosos.

(a) Encontre o LRT de

$$H_0: \theta \leq 0 \quad vs. \quad H_1: \theta > 0$$

baseado na amostra $X_1, \dots, X_n$ de uma população com densidade de probabilidade $f(x|\theta, \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-(x-\theta)/\lambda} \mathbb{I}(\theta < x < \infty)$, onde tanto θ quanto λ são desconhecidos.

(b) Vimos anteriormente que a pdf da exponencial é um caso especial da pdf da Gamma. Generalizando em outro caminho, a pdf da exponencial pode ser considerada um caso especial da Weibull(γ, β). A pdf de Weibull, que se reduz a exponencial quando $\gamma = 1$. Suponha $X_1, \dots, X_n$ é uma amostra aleatória de Weibull com γ e β desconhecidos. Encontre LRT de $H_0: \gamma = 1$ vs. $H_1: \gamma \neq 1$.

(a)

$$L(\theta, \lambda | x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-(x_i - \theta)/\lambda} \mathbb{I}(\theta < x_i < \infty)$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-(\sum x_i - n\theta)/\lambda} \mathbb{I}(\theta < \min x_i)$$

que é crescente em θ se $x_{(1)} \geq \theta$. Então o MLE de θ é $\hat{\theta} = \min x_i$. Então

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L = -\frac{n}{\lambda} + \frac{\sum x_i - n\hat{\theta}}{\lambda^2} := 0 \Rightarrow n\hat{\lambda} = \sum x_i - n\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x} - x_{(1)}.$$

/ /

Porque

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log L = \frac{n}{\lambda^2} - 2\,\frac{\sum x_i - n\hat\theta}{\lambda^3}\Bigg|_{\lambda=\bar{x}-x_{(1)}}$$

$$= \frac{n}{(\bar{x}-x_{(1)})^2} - \frac{2n(\bar{x}-x_{(1)})}{(\bar{x}-x_{(1)})^3} = \frac{-n}{(\bar{x}-x_{(1)})^2} < 0,$$

Temos que $\hat\theta = \min x_{(1)}$ e $\hat\lambda = \bar{x} - \min x_i$ são os MLEs não restritos p de θ e λ. Sob as restrições $\theta \leq 0$, o MLE de θ é

$$\hat\theta_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } x_{(1)} > 0 \\ x_{(1)} & \text{se } x_{(1)} \leq 0 \end{cases}$$

Para $x_{(1)} > 0$, substituindo $\hat\theta_0 = 0$ e maximizando com respeito a λ, como acima, $\hat\lambda_0 = \bar{x}$. Daí

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\Theta_0} L(\theta,\lambda|x)}{\sup_{\Theta} L(\theta,\lambda|x)} = \frac{\sup_{\{(\lambda,\theta):\theta\leq 0\}} L(\lambda,\theta|x)}{L(\hat\theta,\hat\lambda|x)}$$

$$= \begin{cases} 1 & \min x_i \leq 0 \\ \dfrac{L(\bar{x},0|x)}{L(\hat\lambda,\hat\theta|x)} & \min x_i > 0. \end{cases}$$

onde

$$\frac{L(\bar{x},0|x)}{L(\hat\lambda,\hat\theta|x)} = \frac{(1/\bar{x})^n e^{-nx/\bar{x}}}{(1/\hat\lambda)^n e^{-\frac{n(\bar{x}-x_{(1)})}{(\bar{x}-x_{(1)})}}}$$

$$= \left(\frac{\hat\lambda}{\bar{x}}\right)^n = \left(\frac{\bar{x}-x_{(1)}}{\bar{x}}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{x_{(1)}}{\bar{x}}\right)^n.$$

Então rejeitando se $\lambda(x) \leq c$ é equivalente para rejeitar se $x_{(1)}/\bar{x} \geq c^*$, onde c^* é alguma constante.

Digitalizado com CamScanner

/ /

(b) A estatística LRT é

$$\lambda(x) = \frac{\sup_\beta (1/\beta^n) e^{-\sum x_i/\beta}}{\sup_{\beta,\gamma} (\gamma^n/\beta^n)(\prod x_i)^{\gamma-1} e^{-\sum x_i^\gamma/\beta}}.$$

O numerador é maximizado com $\hat{\beta}_0 = \bar{x}$. Para γ fixo, o denominador é maximizado $\hat{\beta}_\gamma = \sum x_i^\gamma/n$. Daí

$$\lambda(x) = \frac{\bar{x}^{-n} e^{-n}}{\sup_\gamma (\gamma^n/\hat{\beta}_\gamma^n)(\prod x_i)^{\gamma-1} e^{-\sum x_i^\gamma/\hat{\beta}_\gamma}}$$

$$= \frac{\bar{x}^{-n}}{\sup_\gamma (\gamma^n/\hat{\beta}_\gamma^n)(\prod x_i)^{\gamma-1}}$$

O denominador não pode ser maximizado em forma fechada.

/ /

(5) ~~Stefanski (1996) estabeleça~~ Suponha que $Y_1, \dots, Y_n$ são independentes com pdf $\lambda_i e^{-\lambda_i y_i}$, e queremos testar $H_0: \lambda_1 = \dots = \lambda_n$ vs. H_1: λ_i não são iguais.

(a) Mostre que a estatística LRT é dada por $(\bar{Y})^{-n}/(\prod Y_i)^{-1}$ e deduza a inequação media aritmetica-geometrica.

(b) Fazendo a transformação $X_i = 1/Y_i$ e mostre que o LRT baseado em $X_1, \dots, X_n$ é dado por $[n/\Sigma(1/X_i)]^n / \prod X_i$ e deduza a inequação media aritmetica-geometrica.

(a) O MLE de λ sobre H_0 é $\hat{\lambda}_0 = (\bar{Y})^{-1}$, e o MLE de λ_i sobre H_1 é $\hat{\lambda}_i = Y_i^{-1}$. A estatística de LRT é limitada por 1 e dada por

$$1 \geq \frac{(\bar{Y})^{-n} e^{-n}}{(\prod Y_i)^{-1} e^{-n}}$$

rearranjando temos a desigualdade temos $\bar{Y} \geq (\prod Y_i)^{1/n}$, a ~~m~~ inequação media aritmetica-geometrica.

(b) A pdf de X_i é

$$f(x_i|\lambda_i) = \frac{\lambda_i}{x_i^2} e^{-\lambda_i/x_i}, \quad x_i > 0.$$

O MLE de λ sobre H_0 é $\hat{\lambda}_0 = n/[\Sigma(1/X_i)]$, e o MLE de λ_i sobre H_1 é $\hat{\lambda}_i = X_i$. O resto segue como a parte (a).

⑥ Seja X_1, X_2 de uma $Unif(\theta, \theta+1)$. Para testar $H_0: \theta = 0$ vs. $H_1: \theta > 0$, temos dois testes concorrentes

$$\phi_1(X_1): \text{Rejeita } H_0 \text{ se } X_1 > 0.95$$
$$\phi_2(X_1, X_2): \text{Rejeita } H_0 \text{ se } X_1 + X_2 > C$$

ⓐ Encontre o valor de C para que o tamanho de ϕ_2 seja igual ao de ϕ_1.

ⓑ Calcule a função poder de cada teste. Desenhe o gráfico de cada função poder.

ⓒ Prove ou desprove: ϕ_2 é um teste mais poderoso que ϕ_1.

ⓓ Mostre como conseguir um teste que tenha o mesmo tamanho mas seja mais poderoso que ϕ_2.

ⓐ O tamanho de ϕ_1 é $\alpha_1 = P(X_1 > 0.95 | \theta = 0) = 0.05$. O tamanho de ϕ_2 é $\alpha_2 = P(X_1 + X_2 > C | \theta = 0)$. Se $1 \leq C \leq 2$, então

$$\alpha_2 = \int_{1-C}^{1} \int_{C-x_1}^{1} 1 \, dx_2 \, dx_1 = \frac{(2-C)^2}{2}$$

Configurando para α e resolvendo em C temos $C = 2 - \sqrt{2\alpha}$, e para $\alpha = 0.05$, temos $C = 2 - \sqrt{0.1} \cong 1.68$

ⓑ A função poder do primeiro teste é

$$\beta_1(\theta) = P_\theta(X_1 > 0.95) = \begin{cases} 0 & \theta \leq -0.05 \\ \theta + 0.05 & -0.05 < \theta \leq 0.95 \\ 1 & 0.95 < \theta \end{cases}$$

Usando a distribuição de $Y = X_1 + X_2$, dada por

$$f_Y(y|\theta) = \begin{cases} y - 2\theta & 2\theta \leq y < 2\theta + 1 \\ 2\theta + 2 - y & 2\theta + 1 \leq y < 2\theta + 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

obtemos a função poder para o segundo teste com

$$\beta_2(\theta) = P_\theta(Y > C) = \begin{cases} 0 & \theta \leq (C/2) - 1 \\ (2\theta + 2 - C)^2/2 & C/2 - 1 < \theta \leq (C-1)/2 \\ 1 - (C - 2\theta)^2/2 & (C-1)/2 < \theta \leq C/2 \\ 1 & C/2 < \theta. \end{cases}$$

(c) A partir do gráfico é claro que ϕ_1 é mais poderoso para θ próximo de 0, mas ϕ_2 é mais poderoso para θs. ϕ_2 não é uniformemente mais poderoso que ϕ_1.

(d) Se ou $X_1 \geq 1$ ou $X_2 \geq 1$, rejeitamos H_0, ~~pod~~ porque se $\theta = 0$, $P(X_i < 1) = 1$. Portanto, considere a ~~rejo~~ região de rejeição dada por

$$\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 > C\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 > 1\} \cup \{(x_1, x_2) : x_2 > 1\}.$$

O primeiro conjunto é a região de rejeição de ϕ_2. O teste com está mesma região tem o mesmo tamanho de ϕ_2 pois os outros dois conjuntos tem probabilidade 0 se $\theta = 0$. Mas para $\alpha\theta < C - 1$, a função poder deste teste é maior que $\beta_2(\theta)$. Se $C - 1 \leq 0$, tem mesmo poder.

/ /

(7) Mostre que para uma amostra $X_1, \dots, X_n \sim N(0, \sigma^2)$, o teste mais poderoso de $H_0: \sigma = \sigma_0$ vs. $H_1: \sigma = \sigma_1$, onde $\sigma_0 < \sigma_1$, é dada por

$$\phi(\sum X_i^2) = \begin{cases} 1 & \sum X_i^2 > c \\ 0 & \sum X_i^2 \leq c \end{cases}$$

Para um ~~ss~~ valor dado de α, o tamanho do Erro tipo I, mostre como o valor de c é explicitamente determinado.

Para o lema de Neyman-Pearson o teste UMP ~~test~~ rejeita H_0 se

$$\frac{f(X|\sigma_1)}{f(X|\sigma_2)} = \frac{(2\pi\sigma_1^2)^{-n/2} e^{-\sum x_i^2/(2\sigma_1^2)}}{(2\pi\sigma_0^2)^{-n/2} e^{-\sum x_i^2/(2\sigma_0^2)}}$$

$$= \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^n \exp\left\{\frac{1}{2}\sum x_i^2\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\right\} > k$$

para algum $k \geq 0$. É equivalente a rejeitar se

$$\sum x_i^2 > \frac{2\log(k(\sigma_1/\sigma_0)^n)}{\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)} = c.$$

Este teste UMP tem tamanho α, onde $\alpha = P_{\sigma_0}(\sum X_i^2 > c)$. Para determinar c e obter um α especifico, usando o fato de que $\sum X_i^2/\sigma_0^2 \sim \chi_n^2$. Portanto

$$\alpha = P_{\sigma_0}(\sum X_i^2/\sigma_0^2 > c/\sigma_0^2) = P(\chi_n^2 > c/\sigma_0^2),$$

então temos $c/\sigma_0^2 = \chi_{n,\alpha}^2$, que significa $c = \sigma_0^2 \chi_{n,\alpha}^2$.

Digitalizado com CamScanner

(8) Suponha que $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} beta(\mu, 1)$ e $Y_1, \ldots Y_m \overset{iid}{\sim} beta(\theta, 1)$. Assumindo também que X_s são independentes de Y_s.

(a) Encontre um LRT de $H_0: \theta = \mu$ vs $H_1: \theta \neq \mu$.

(b) Mostre que o teste na parte (a) pode ser baseado na estatística

$$T = \frac{\sum \log X_i}{\sum \log X_i + \sum \log Y_i}$$

(c) Encontre a distribuição de T quando H_0 é verdadeiro, e então mostre como conseguir um teste de tamanho $\alpha = 0.1$.

(a) A função de verossimilhança é

$$L(\mu, \theta | x, y) = \mu^n \left(\prod X_i\right)^{\mu - 1} \theta^n \left(\prod Y_i\right)^{\theta - 1}$$

Maximizando, derivando o log da verossimilhança, os MLEs

$$\hat{\mu} = -\frac{n}{\sum_i \log X_i} \quad e \quad \hat{\theta} = -\frac{m}{\sum_i \log Y_i}$$

Sobre H_0, a verossimilhança é

$$L(\theta | x, y) = \theta^{n+m} \left(\prod_i X_i \prod_i Y_i\right)^{\theta - 1} \leftarrow \text{(é uma beta)}$$

O MLE com H_0 é

$$\hat{\theta}_0 = -\frac{n+m}{\sum_i \log X_i + \sum_i \log Y_i}$$

A estatística de LRT é

$$\lambda(x,y) = \frac{\hat{\theta}_0^{m+n}}{\hat{\mu}^n \hat{\theta}^m} \left(\prod x_i\right)^{\hat{\theta}_0 - \hat{\mu}} \left(\prod y_i\right)^{\hat{\theta}_0 - \hat{\theta}} .$$

(b) Substituindo nas formulas $\hat{\theta}, \hat{\mu}$ e $\hat{\theta}_0$ obtemos que $(\prod x_i)^{\hat{\theta}_0 - \hat{\mu}} (\prod y_i)^{\hat{\theta}_0 - \hat{\theta}} = 1$ e

$$\lambda(x,y) = \frac{\hat{\theta}_0^{m+n}}{\hat{\mu}^n \hat{\theta}^m} = \frac{\hat{\theta}_0^n}{\hat{\mu}^n} \frac{\hat{\theta}_0^m}{\hat{\theta}^m} = \left(\frac{m+n}{m}\right)^m \left(\frac{m+n}{n}\right)^n (1-T)^m T^n$$

É uma função de T. Então rejeitamos se $\lambda(x,y) \leq c$ se é equivalente rejeitar se $T \leq c_1$ ou $T \geq c_2$, onde c_1 e c_2 são constantes apropriamente escolhidas.

(c) Com transformações simples $-\log X_i \sim Exp(1/\mu)$ e $-\log Y_i \sim Exp(1/\theta)$. Portanto, $T = W/(W+V)$ onde W e V são independentes $W \sim Gamma(n, 1/\mu)$ e $V \sim Gamma(m, 1/\theta)$. Sobre H_0, o parametro escala de W e V são iguais. Então, $T \sim beta(n,m)$. As constantes c_1 e c_2 são determinados por 2 equações

$$P(T \leq c_1) + P(T \geq c_2) = \alpha$$

e

$$(1-c_1)^m c_1^n = (1-c_2)^m c_2^n .$$

/ /

(9) A v.a. X tem pdf $f(x) = e^{-x}, x>0$. Uma observação é obtida de uma v.a. $Y = X^{\theta}$, e um teste de $H_0: \theta = 1$ vs $H_1: \theta = 2$ precisa ser construída. Encontre o teste UMP de nível $\alpha = 0.10$ e compute a probabilidade do erro do Tipo II

A pdf de Y é

$$f(y|\theta) = \frac{1}{\theta} y^{(1/\theta)-1} e^{-y^{1/\theta}}, \quad y>0.$$

Pelo Lemma de Neyman-Pearson, o teste UMP é rejeitado se

$$\frac{1}{2} y^{-1/2} e^{y - y^{1/2}} = \frac{f(y|2)}{f(y|1)} > k.$$

Para ~~ser encontrar~~ a região de rejeição, calculamos

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2} y^{-1/2} e^{y-y^{1/2}}\right) = \frac{1}{2} y^{-3/2} e^{y-y^{1/2}}\left(y - \frac{y^{1/2}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

que é negativo para $y<1$ e positiva para $y>1$. Daí $f(y|2)/f(y|1)$ é decrescente para $y \le 1$ e crescente para $y \ge 1$. Portanto ~~rejeitamos~~ rejeitar para $f(y|2)/f(y|1) > k$ é equivalente a rejeitar para $y \le c_0$ ou $y \ge c_1$. Para obter o tamanho do teste, as constantes c_0 e c_1 satisfazem

$$\alpha = P(Y \le c_0 | \theta = 1) + P(Y \ge c_1 | \theta = 1) = 1 - e^{-c_0} + e^{-c_1}$$

$$\text{e} \quad \frac{f(c_0|2)}{f(c_0|1)} = \frac{f(c_1|2)}{f(c_1|2)}$$

/ /

Resolvendo estas 2 equações, para $\alpha = 0.10$, resolvendo $c_0 \cong 0.076546$ e $c_1 \cong 3.637798$. ~~O Erro~~ A probabilidade do erro do tipo II é

$$P(c_0 < Y < c_1 \mid \theta = 2) = \int_{c_0}^{c_1} \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y^{\frac{1}{2}}} dy = -e^{-y^{\frac{1}{2}}} \Big|_{c_0}^{c_1} \cong 0.609824$$

/ /

(10) Suponha X uma observação de uma população com pdf beta $(\theta,1)$.

(a) Para testagem $H_0: \theta \leq 1$ vs $H_1: \theta > 1$, encontre o tamanho e esboce a função poder do teste que rejeita H_0 se $X > 1/2$.

(b) Encontre o ~~nível mais poderoso~~ teste de nível α mais poderoso de $H_0: \theta = 1$ vs $H_1: \theta = 2$.

(c) Este é um teste UMP de $H_0: \theta \leq 1$ vs $H_1: \theta > 1$? Se sim, encontre. Se não, prove.

(a) O teste é rejeitado se $X > 1/2$. Então a função poder é

$$\beta(\theta) = P_\theta(X > 1/2) = \int_{1/2}^{1} \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(\theta)\Gamma(1)} x^{\theta-1}(1-x)^{1-1}\,dx = \theta \cdot \frac{1}{\theta} x^{\theta}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^\theta}.$$

O tamanho é $\sup_{\theta \in H_0} \beta(\theta) = \sup_{\theta \leq 1} 1 - 1/2^\theta = 1 - 1/2 = 1/2$.

(b) Pelo Lemma de Neyman-Pearson, o teste mais poderoso de $H_0: \theta = 1$ vs $H_1: \theta = 2$ é dado rejeitando H_0 se $f(x|2)/f(x|1) > k$ para algum $k > 0$. Substituindo pela pdf temos

$$\frac{f(x|2)}{f(x|1)} = \frac{\frac{1}{B(2,1)} x^{2-1}(1-x)^{1-1}}{\frac{1}{B(1,1)} x^{1-1}(1-x)^{1-1}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} x = 2X.$$

Portanto, o teste MP é rejeitado se $X > K/2$. Usando o nível α para determinar K, temos

/ /

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta) = \beta(1) = \int_{k/2}^{1} f_X(x|1)\,dx$$

$$= \int_{k/2}^{1} \frac{1}{B(1,1)} x^{1-1}(1-x)^{1-1}\,dx = 1 - \frac{k}{2}$$

Tomando $\alpha = 1 - \frac{k}{2}$, então o teste mais poderoso de nível α é rejeitar H_0 se $X > 1-\alpha$.

(c) Para $\theta_2 > \theta_1$, $f(x|\theta_2) / f(x|\theta_1) = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right) x^{\theta_2 - \theta_1}$, é uma função crescente de x porque $\theta_2 > \theta_1$. Então pertence a família MLR (razão de verossimilhança monotônica). Pelo Teorema de Karlin-Rubin, o teste rejeitar H_0 se $X > t$ é o teste UMP com este tamanho. Pelo item (b), usamos $t = 1-\alpha$ para ter tamanho α.

/ /

(1) Mostre que cada uma das seguintes famílias tem um MLR.

(a) $N(\theta, \sigma^2)$ com σ^2 conhecido.

(b) Poisson (θ).

(c) Binomial(n, θ) com n conhecido.

(a) Para $\theta_2 > \theta_1$

$$\frac{g(x|\theta_2)}{g(x|\theta_1)} = \frac{e^{-(x-\theta_2)^2/2\sigma^2}}{e^{-(x-\theta_1)^2/2\sigma^2}} = e^{x(\theta_2-\theta_1)/\sigma^2} e^{(\theta_1^2-\theta_2^2)/2\sigma^2}$$

Como $\theta_2 - \theta_1 > 0$, a razão é crescente em x.

(b) Para $\theta_2 > \theta_1$,

$$\frac{g(x|\theta_2)}{g(x|\theta_1)} = \frac{e^{-\theta_2}\theta_2^x/x!}{e^{-\theta_1}\theta_1^x/x!} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^x e^{\theta_1-\theta_2}$$

que é crescente em x porque $\theta_2/\theta_1 > 1$.

(c) Para $\theta_2 > \theta_1$,

$$\frac{g(x|\theta_2)}{g(x|\theta_1)} = \frac{\binom{n}{x}\theta_2^x(1-\theta_2)^{n-x}}{\binom{n}{x}\theta_1^x(1-\theta_1)^{n-x}} = \left(\frac{\theta_2(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_2)}\right)^x \left(\frac{1-\theta_2}{1-\theta_1}\right)^n$$

Como $\theta_2/\theta_1 > 1$ e $(1-\theta_1)/(1-\theta_2) > 1$. logo a razão é crescente.

/ /

(12) Suponha $g(t|\theta) = h(t)\,c(\theta)\,e^{w(\theta)t}$ da família exponencial com 1 parâmetro para uma v.a T. Mostre que esta família é MLR se $w(\theta)$ é uma função crescente de θ. Dê 3 exemplos dessa família.

Para $\theta_2 > \theta_1$

$$\frac{g(t|\theta_2)}{g(t|\theta_1)} = \frac{c(\theta_2)}{c(\theta_1)}\,e^{(w(\theta_2)-w(\theta_1))t}$$

que é crescente desde que $w(\theta_2) > w(\theta_2)$. Para os 3 exemplos temos $N(\theta,1)$, beta$(\theta,1)$ e Bernoulli(θ)

/ /

(13) Seja $X \sim Cauchy(\theta)$

(a) Mostre que esta distribuição não é MLR

(b) Mostre que o teste

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 3 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

é mais poderoso deste tamanho para testar $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: \theta = 1$. Calcule as probabilidades dos erros dos tipos II e I.

(c) Prove ou desprove: O teste do item (b) é UMP para testar $H_0: \theta \leq 0$ vs $H_1: \theta > 0$. O que podemos dizer sobre testes UMP para a família Cauchy no geral?

(a) Seja $\theta_2 > \theta_1$. Então

$$\frac{f(x|\theta_2)}{f(x|\theta_1)} = \frac{1+(x+\theta_1)^2}{1+(x+\theta_2)^2} = \frac{1+(1+\theta_1)^2/x^2 - 2\theta_1/x}{1+(1+\theta_2)^2/x^2 - 2\theta_2/x}$$

O limite da razão com $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$ é 1. Então a razão não pode ser monótona entre $-\infty$ e ∞. Daí a família não é MLR.

(b) Pelo lema de Neymann-Pearson, um test é UMP se rejeita quando $f(x|1)/f(x|0) > k$, para alguma constante k. O exame da derivada mostra que $f(x|1)/f(x|0)$ ~~se a~~ é decrescente para $x < (1-\sqrt{5})/2 = -0.618$, é crescente para $(1-\sqrt{5})/2 \leq x \leq (1+\sqrt{5})/2 = 1.618$ e é decrescente para $(1+\sqrt{5})/2 \leq 2$.

Além disso, $f(1|1)/f(1|0) = f(3|1)/f(3|0) = 2$. Então rejeitando se $f(x|1)/f(x|0) > 2$ é equivalente para rejeitar se $1 < x < 3$. Portanto, o teste ~~UMP~~ dado é UMP deste tamanho. O tamanho do teste é

$$P(1 < X < 3 | \theta = 0) = \int_1^3 \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_1^3 \approx 0.1476.$$

A probabilidade de ~~o~~ erro do Tipo II é

$$1 - P(1 < X < 3 | \theta = 1) = 1 - \int_1^3 \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-1)^2} \, dx = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan(x-1) \Big|_1^3 \approx 0.6476.$$

(c) Não teremos $f(1|\theta)/f(1|0) = f(3|\theta)/f(3|0)$ para nenhum $\theta \neq 1$. Tentando $\theta = 2$, por exemplo. Então a região de ~~não~~ rejeição $1 < x < 3$ não será mais poderosa para nenhum outro valor de θ. O teste não é UMP para testar $H_0: \theta \leq 0$ vs. $H_1: \theta > 0$.