# Lista 6.1

① Seja X uma única observação de uma Cauchy($\theta$)

(a) Mostre que sua família não é MLR

(b) Mostre que o teste

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 3 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

~~é MP de tamanho~~ mais poderoso que seu tamanho $H_0: \theta = 0$ vs. $H_1: \theta = 1$. Calcule o erro do tipo I e II

(c) Prove ou desprove: O teste na parte (b) é UMP para testar $H_0: \theta \leq 0$ vs $H_1: \theta > 0$. O que podemos dizer em geral sobre UMP para a família Cauchy?

ⓐ

Seja $\theta_2 > \theta_1$

$$\frac{f(x|\theta_2)}{f(x|\theta_1)} = \frac{\frac{\theta_2}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta_2^2 + x^2}}{\frac{\theta_1}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta_1^2 + x^2}} = \frac{\theta_2}{(\theta_2^2 + x^2)} \frac{(\theta_1^2 + x^2)}{\theta_1} = \frac{\theta_2 x^2 + \theta_2 \theta_1^2}{\theta_1 x^2 + \theta_1 \theta_2^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f(x|\theta_2)}{f(x|\theta_1)} = \frac{\theta_2}{\theta_1} \cdot \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{(\theta_2^2 + x^2)^2} x$$

O sinal da derivada é o mesmo de x, como x muda de sinal a razão não pode ser monótona.

ⓑ Pelo Neyman-Pearson, um teste UMP rejeita $H_0$ se $f(x|1)/f(x|0) > k$

Examinando ~~os~~ a derivada temos que

/ /

- $x \leq (1-\sqrt{5})/2 = -0.618$ $\Rightarrow$ LRT decrescente
- $(1-\sqrt{5})/2 \leq x \leq (1+\sqrt{5})/2 = 1.618$ $\Rightarrow$ LRT crescente
- $(1+\sqrt{5})/2 \leq x$ $\Rightarrow$ LRT decrescente.

Além disso, $f(1|1)/f(1|0) = f(3|1)/f(3|0) = 2$. Então rejeitar se $f(x|1)/f(x|0) > 2$ é equivalente a rejeitar se $1 < x < 3$.
E o tamanho é (erro do tipo I)

$$P(1 < X < 3 | \theta H_0) = \int_1^3 \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_1^3 \cong 0.1476$$

E o erro do tipo II é

$$1 - P(1 < X < 3 | H_1) = 1 - \int_1^3 \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-1)^2} dx = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan(x-1) \Big|_1^3$$

$$\cong 0.6476$$

(c) Para outros valores de $\theta$ (não discutidos) não necessariamente temos $f(1|\theta)/f(1|0) = f(3|\theta)/f(3|0)$ então não é UMP pois existe um teste melhor.

(2) Seja $X_1, \ldots, X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$

(a) Encontre um teste UMP de $H_0: \lambda < \lambda_0$ vs $H_1: \lambda > \lambda_0$

(b) Considere o caso específico $H_0: \lambda \leq 1$ vs $H_1: \lambda > 1$. Use o TCL para determinar o tamanho de amostra $n$ para que o teste UMP satisfaça $P(\text{Rejeitar } H_0 | \lambda = 1) = 0.05$ e $P(\text{Rejeitar } H_0 | \lambda = 2) = 0.9$

(a) Como Poisson é MLR, e $\sum X_i$ é uma estatística suficiente para $\lambda$, pelo Teorema de Karlin-Rubin, o teste UMP é o que rejeita $H_0$ se $\sum X_i > K$, note que $\sum X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda)$. Escolhemos $K$ de forma que

$$P\left(\sum X_i > K \,|\, \lambda = \lambda_0\right) = \alpha$$

(b) Como $\sum X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda)$

$$Z = \frac{\sum X_i - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Daí

$$P\left(\sum X_i > k \,|\, \lambda = 1\right) \cong P\left(Z > (k-n)/\sqrt{n}\right) := 0.05$$

$$P\left(\sum X_i > k \,|\, \lambda = 2\right) \cong P\left(Z > (k-2n)/\sqrt{2n}\right) := 0.9$$

Resolvendo, para $k$ e $n$ em

$$\frac{k-n}{\sqrt{n}} = 1.645 \text{ e } \frac{k-2n}{\sqrt{2n}} = -1.28$$

temos, $n = 12$ e $k = 17,7$.

③ Seja $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\theta, 1)$, e seja $\theta_0$ um valor específico para $\theta$.

ⓐ Encontre o UMP, tamanho $\alpha$, do teste $H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$.

ⓑ Mostre que não existe um UMP, de tamanho $\alpha$, para testar $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$

ⓐ É equivalente a testar $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ onde $\theta_0 > \theta_1$. Por Neyman-Pearson, rejeitamos $H_0$ se

$$\frac{f(\bar{x}|\theta_1)}{f(\bar{x}|\theta_0)} > k \iff \bar{x} < \frac{(2\log k)/n - \theta_0^2 + \theta_1^2}{2(\theta_1 - \theta_0)}.$$

O lado direito cresce de $-\infty$ para $\infty$ quando $k$ vai de $0$ a $\infty$, então o teste ~~é~~ é equivalente a rejeitar $H_0$ se $\bar{x} < c$ no nível $\alpha$, onde

$$\alpha = P_{\theta_0}(\bar{x} < c).$$

ⓑ Exemplo 8.3.19 [CB]

Digitalizado com CamScanner

/ /

(5) Seja $X_1, \dots, X_n \sim N(\theta, \sigma^2)$. Considere o teste

$$H_0: \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta > \theta_0$$

(a) Se $\sigma^2$ é conhecido, mostre que o teste que rejeita $H_0$, quando

$$\bar{X} > \theta_0 + z_\alpha \sqrt{\sigma^2/n}$$

tem tamanho $\alpha$. Mostre que o teste pode ser derivado de LRT.

(b) Mostre que o teste do item (a) é UMP

(c) Se $\sigma^2$ é desconhecido, mostre que o teste que rejeita $H_0$ quando

$$\bar{X} > \theta_0 + t_{n-1,\alpha} \sqrt{S^2/n}$$

é de nível $\alpha$. Mostre que o teste pode ser derivado de LRT.

(a) $P_{\theta}(\bar{X} > \theta_0 + z_\alpha \sqrt{\sigma^2/n}) = P\left(\frac{\bar{X}-\theta_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} > z_\alpha \mid \theta_0\right) = P(Z > z_\alpha \mid \theta_0) = \alpha$, onde $Z \sim N(0,1)$. Como o MLE irrestrito é $\bar{X}$ e o restrito $\theta_0$ se $\bar{X} > \theta_0$, o LRT para $\bar{X} > \theta_0$ é

$$\lambda(x) = \frac{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\sum(x_i-\theta_0)^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\sum(x_i-\bar{x})^2/2\sigma^2}}$$

$$= \frac{\exp\{-[n(\bar{x}-\theta_0)^2+(n-1)S^2]/2\sigma^2\}}{\exp\{-(n-1)S^2/2\sigma^2\}} = \exp\{-n(\bar{x}-\theta_0)^2/2\sigma^2\}.$$

/ /

e o LRT é 1, para $\bar{x} < \theta_0$. Pai, rejeitar se $\lambda(x) \le c$ é equivalente a rejeitar se $(\bar{X}-\theta_0)/(\sigma/\sqrt{n}) > c'$

(b) Pelo Teo. de Karlin-Rubin o teste é UMP.

(c) $P_{\theta_0}(\bar{X} > \theta_0 + t_{n-1,\alpha}\sqrt{S^2/n}) = P(T_{n-1} > t_{n-1,\alpha}) = \alpha$, onde $T_{n-1}$ é uma t-student com n-1 graus de liberdade.