/ /

Lista 4

① Sejam $X_1, ..., X_n$ uma amostra iid Poisson(λ). Considere que a priori de λ é Gamma (α, β). Calcule a distribuição a posteriori de λ e o estimador de Bayes para a função de Bayes para a função de perda quadrática.

Dado a distribuição da amostra a verossimilhança conjunta é

$$P(X_1, ..., X_n \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

Temos que, a posteriori é dado por

$$p(\lambda \mid X_1, ..., X_n) \propto P(X_1, ..., X_n \mid \lambda) \cdot p(\lambda)$$

$$\propto \lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\alpha - 1} e^{\beta\lambda}$$

$$\propto \lambda^{\alpha + \sum x_i - 1} e^{-(\beta+n)\lambda}$$

Tem a forma de uma Gamma, a posteri distribuição a posteriori é

$$\lambda \mid X_1, ..., X_n \sim \text{Gamma}(\alpha + \sum X_i, \beta + n)$$

Para encontrar o estimador de Bayes basta encontrar a media da distribuição a posteriori, ou seja

$$\hat{\lambda}_{Bayes} = \frac{\alpha + \sum X_i}{\beta + n}$$

/ /

② Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra iid normal $N(\theta, \sigma^2)$, onde σ^2 é conhecida. Dado a distribuição a priori de θ tem densidade $\pi(\theta) = e^{-|\theta|/a}/(2a)$, encontre a média da distribuição a posteriori de θ.

$$P(X_1, \dots X_n|\theta, \sigma^2) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}$$

Daí, $P(\theta|X_1,\dots,X_n) \propto P(X_1,\dots,X_n|\theta,\sigma^2) \cdot P(\theta)$

$$\propto e^{-\frac{\sum(X_i-\theta)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{|\theta|}{2}}$$

$$\propto \exp\left\{\frac{\theta \sum X_i}{\sigma^2} - \frac{n\theta^2}{2\sigma^2} - \frac{|\theta|}{2}\right\}.$$

Como ~~a forma~~ o núcleo não bate com nenhuma distribuição conhecida, a média não pode ser encontrada analiticamente.

/ /

③ Sejam $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim}$ Poisson (λ). Sejam

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i \quad e \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

ⓐ Mostre que $\bar{X}$ é um melhor estimador não viesado de λ

(i) usando Crámer-Rao

(ii) usando Lehmann-Scheffé.

ⓑ Mostre a identidade $E[S^2 | \bar{X}] = \bar{X}$. Use ela para demonstrar que $Var[S^2] > Var[\bar{X}]$

ⓐ (i) Temos que

$$E\bar{X} = \lambda \quad e \quad ES^2 = \lambda$$

então ambos são estimadores não viesados de λ. Primeiro seja a informação de Fisher

$$I(\lambda) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln P(X_i | \lambda)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{\partial}{\partial \lambda}(x_i \ln \lambda - \lambda \ln e - \ln x!)^2\right]$$

$$= E\left[\frac{X^2}{\lambda} - \frac{2X}{\lambda} + 1\right] = \frac{EX^2}{\lambda^2} - \frac{2\lambda}{\lambda} + 1$$

$$= \frac{\lambda + \lambda^2}{\lambda^2} - 1 = \frac{1}{\lambda}$$

Como $Var \bar{X} = \frac{n}{\lambda}$ e ~~pela~~ por Crámer-Rão para qualquer estimador T, $Var(T) \leq \frac{n}{\lambda}$

/ /

(ii) Como a família Poisson pertence a família exponencial, $\sum X_i$ é uma estatística suficiente completa. Qualquer função de $\sum X_i$ ~~é um~~ que é um estimador não-viesado ~~et~~ de λ é o melhor estimador não viesado de λ pelo Teorema de Lehmann-Scheffé.

(b) S^2 é um estimador não viesado, $\bar{X}$ é uma função ~~o~~ um para um de $\sum X_i$. Então $\bar{X}$ é também uma estatística suficiente completa. Daí, $E(S^2|\bar{X})$ é um estimador não-viesado de λ e por Lehmann-Scheffé é também o único melhor estimador não-viesado de λ. Daí $E(S^2|\bar{X}) = \bar{X}$. Então temos

$$\text{Var}\, S^2 = \text{Var}(E(S^2|\bar{X})) + E\,\text{Var}(S^2|\bar{X})$$

$$= \text{Var}\,\bar{X} + E\,\text{Var}(S^2|\bar{X}).$$

então $\text{Var}\, S^2 > \text{Var}\,\bar{X}$.

Digitalizado com CamScanner

/ /

(4) Seja X uma observação de f.d.p.

$$f(x|\theta) = \left(\frac{\theta}{2}\right)^{|x|} (1-\theta)^{1-|x|} \mathbb{1}(x \in \{-1, 0, 1\}).$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$

(a) Encontre o MLE de θ.

(b) Seja

$$T(X) = \begin{cases} 2 & X = 1, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Mostre que $T(X)$ é um estimador não-viesado para θ

(c) Encontre o melhor estimador que $T(X)$ e prove que de fato é o melhor.

(a) Temos que

$$f(-1|\theta) = f(1|\theta) = \theta/2 \qquad (1)$$

$$f(0|\theta) = 1-\theta \qquad (2)$$

O caso (1) é maximizado com $\theta = 1$ e o caso (2) com $\theta = 0$, logo o $\hat{\theta}_{MLE} = |X|$.

(b) $$ET = 2 \cdot P(X=1) = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

(c) Seja o estimador $M = \hat{\theta}_{MLE}$, primeiro temos que é não viesado, pois

/ /

$$EM = |-1| \cdot \frac{\theta}{2} + |1| \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

e possui variância

$$Var\,M = EM^2 - \theta^2 = \left(|-1|^2 \frac{\theta}{2} + |1|^2 \frac{\theta}{2}\right) - \theta^2$$

$$= \theta - \theta^2$$

~~entan~~ enquanto a variância de T é

$$Var\,T = ET^2 - \theta^2 = 4\theta - \theta^2$$

Como $\theta \in [0,1]$, temos que $Var\,M < Var\,T$.